人文論叢(三重大学)第5号 1988

Gödelの第2不完全性定理

山　岡　悦　郎

要旨　論理式の集合Kに対して，wid (K) を“Kは無矛盾である”を表わす論理式であるとすると，これと不完全性定理の結果より、wid (K) はKから証明できないということを証明することができる．なお，本文に先立って，次のことを付言しておきたい．

論理学は，19世紀後半以来，数学化，厳密化され，現在では，モデル理論，帰納的関数論，証明論，集合論等を含むに至っている．そしてそこでは，重要な成果がえられている．哲学的観点からみると，たとえば，Gödelによる完全性定理(1930)，2つの不完全性定理(1931)，選択公理と連続体仮説の無矛盾性証明(1938)をはじめとして，Tarskiの定理(1933)，Gentzenの基本定理(1935)，自然数論の無矛盾性証明(1936)，比較的最近では，Cohenの選択公理と連続体仮説の独立性証明(1963)，ParisとHarringtonのPeano Arithmeticにおける決定不能命題の存在証明(1977)等をあげることができよう．

これらのうち，Gödelの第2不完全性定理は，いわば，“自分自身がおかしくないことは，自分自身では証明できない(竹内外史：数学的世界観，紀伊国屋書店，1982，13ページ.)”ということを述べているのであって，人間の理性的認識には限界のあることを示していると考えられるのである．人間の理性的認識の限界を云々する哲学者は数多い．だが，Gödelは，それを，独創的な(しかも，発展性のある)数学的手法を用いて，あいまいさを残さず，厳密かつ明確に示したのである．Gödelが，単なる数学者ではなく，人間の理性的認識への深い洞察をもった，思想性に富んだ“今世紀最大の数学者(柳瀬睦男：現代物理学と新しい世界像，岩波書店，1984，61ページ)”といわれる所以である．

なお，Gentzenは，最初のϵ-数ϵ_0までの超限帰納法を用いて，自然数論(Gentzenでは，reine Zahlentheorie)の無矛盾性を証明したが，これは，いわば，相対的な無矛盾性証明であって，これでもって，Gödelの結果が影響を受けるものではない．

§0.　序

Gödelの第2不完全性定理は“自然数論を含む公理体系が無矛盾であれば，その無矛盾性をその公理体系の中で証明することはできない”という内容をもっている[(1)]．これは，哲学的には，人間の合理的認識の限界を示すのみならず，数学的には，Hilbertのプログラムに対して甚大な打撃を与えたことが知られている．

だが，この定理については，彼自身，詳細な証明を行なっているわけではない．原論文では1ページたらずの証明の概要を与えているだけであって，詳細については機会を改めて取り上げるつもりである旨述べている．しかし，問題の極度の困難性が彼の健康に影響を及ぼしたことや，諸結果が彼の予期した以上に好意的に受け容れられたこともあってか，その続編は結局出されることはなかったのである．

それの証明は，あのHilbertと彼の高弟Bernaysとによって行われた[(2)]．最近では，比類のない詳細な証明が我国の前原昭二氏によって与えられている[(3)]．

本小論は，基本的には同氏の線に添いながら，一部筆者自身の証明を加えて，第2不完全

性定理についての，可能な限り平明かつ明確な証明を提示せんと試みたものである．

§1. 形式的体系 *P*

Gödel の取り上げる形式的体系 P は次の1.1～1.4 によって定義される．

1.1 基本記号

(1) 対象記号：$\bar{0}$

これは自然数0を表わす体系 P における記号である．一般に，自然数 n を表わす体系 P における数記号を $\bar{n}$ で記す．

(2) 変数記号：

1階の変数記号： $x_1, y_1, z_1,$ ・・・

2階の変数記号： $x_2, y_2, z_2,$ ・・・

・・・

n 階の変数記号： $x_n,\ y_n,\ z_n,$ ・・・

(変数の数は可算個)

(3) 関数記号：f.

数記号 $\bar{n}$ に対して，$f\bar{n}$ は $\bar{n}$ の後者を表わす．したがって，$\bar{n}=f$ ・・・$f\bar{0}$ である．(ただし，f の個数は n)

(4) 関係記号：∈.

$a \in b$ は，n 階の対象 a が $n+1$ 階の対象 b の元であることを表わす。

(5) 論理記号：～，∨，∀.

命題 S_1, S_2 に対して，$\sim S_1$, $S_1 \vee S_2$, $\forall x S_1$ はそれぞれ，“S_1 でない”，“S_1 かまたは S_2 である”，“全ての x について S_1 である” という命題を表わす．

(6) カッコ：（，），｛，｝，［，］.

1.2 項と論理式

(定義1)

1) 対象 $\bar{0}$ は1階の項である．

2) 1階の変数は1階の項である．

3) t が1階の項ならば，ft も1階の項である．

4) 以上の1)～3)で1階の項であることがわかるものだけが1階の項 (term) である．

5) $n>1$ の時，n 階の項とは n 階の変数のことである．

(定義2)

1) a が n 階の項で b が $n+1$ 階の項である時，

$a \in b$

という表現は論理式である．

2) A, B が共に論理式ならば，$\sim A$，$A \vee B$ は共に論理式である．

3) A が論理式で x が変数の時，$\forall x A$ は論理式である．

4) 以上の1)～3)で論理式とわかるものだけが論理式 (formula) である．

1.3 体系 *P* の公理

A．ペアノ (自然数) の公理

1．$\sim(f\mathrm{x}_1 = \bar{\mathrm{O}})$

2．$f\mathrm{x}_1 = f\mathrm{y}_1 \rightarrow \mathrm{x}_1 = \mathrm{y}_1$

3．$[\bar{\mathrm{O}} \in \mathrm{x}_2 \wedge \forall \mathrm{x}_1 (\mathrm{x}_1 \in \mathrm{x}_2 \rightarrow f\mathrm{x}_1 \in \mathrm{x}_2)] \rightarrow \forall \mathrm{x}_1 (\mathrm{x}_1 \in \mathrm{x}_2)$

B．命題論理の公理図式

1．$p \vee p \rightarrow p$

2．$p \rightarrow p \vee q$

3．$p \vee q \rightarrow q \vee p$

4．$(p \rightarrow q) \rightarrow (r \vee p \rightarrow r \vee q)$

C．述語論理の公理図式

1．$\forall x F(x) \rightarrow F(t)$

2．$\forall x[b \vee F(x)] \rightarrow b \vee \forall x F(x)$

ただし，$F(x)$ は任意の論理式，x は任意の変数であり，b には x は自由変数として含まれていない．また，t は x と同じ階数の対象であって，$F(x)$ の自由変数 x に代入されることによって束縛変数となるような変数を含んでいないとする．

D．還元性の公理図式

$$\exists y \forall x [x \in y \rightleftarrows F(x)]$$

ただし，x が n 階の変数の時は，y は $n+1$ 階の変数であり，y は $F(x)$の中に自由変数として含まれていないとする．

E．外延性の公理

$$\forall \mathrm{x}_n (\mathrm{x}_n \in \mathrm{x}_{n+1} \rightleftarrows \mathrm{x}_n \in \mathrm{y}_{n+1}) \rightarrow \mathrm{x}_{n+1} = \mathrm{y}_{n+1}$$

1．4　体系Pの推論規則

1．論理式 A と論理式 $A \rightarrow B$ から論理式 B を推論することができる．

2．論理式$F(x)$から論理式 $\forall x F(x)$ を推論することができる．

§2.　Gödel 数と帰納的関数(関係)

2．1　Gödel は下記の規則(1)〜(3)に基づいて，体系 P の諸表現に特定の自然数を対応させるが，そのようにして定められる自然数のことをGödel 数という．

(1)　基本記号には下段の奇数を対応させる．

$\bar{\mathrm{O}}$	f	$\sim$	$\vee$	$\forall$	(	)
1	3	5	7	9	11	13

また，n 階の変数に対しては P^n わりあてる．（Pは15以上の素数）

(2)　記号の有限列の Gödel 数は，その記号のGödel 数を $x_1, \cdot\cdot\cdot, x_n$ とした時，

$$2^{x_1} \cdot 3^{x_2} \cdot \cdot \cdot \mathrm{P}_n{}^{x_n}$$

で与えられる．（P_n は n 番目の素数）

(3)　記号の有限列の有限列の Gödel 数は，その記号の有限列の Gödel 数を $x_1, \cdot\cdot\cdot, x_n$ とした時，

$$2^{x_1} \cdot 3^{x_2} \cdot \cdot \cdot \mathrm{P}_n{}^{x_n}$$

で与えられる．（P_n は n 番目の素数）

2．2　任意の表現 A の Gödel数を「A」で表わす．また，任意の表現 A に対して，『A』とは，A の Gödel 数に対応する形式的体系における数記号を意味する．すなわち，

$$『A』=\overline{「A」}$$

である.

ところで，証明は論理式の有限列と解することができるので，数記号，変数，項，論理式，証明などの表現は全てGödel数で表わすことができる．逆に，ある自然数に対して，それがGödel数であるか否か，Gödel数であるとするとどのような表現のGödel数であるかを，上述の対応規則及び素因数分解の一意性により，一意的に確定することができる．したがってまた，体系Pの諸表現は自然数の上に定義される関数として，体系Pについての諸表現（たとえば“論理式xは証明可能な論理式である”など）は関数と関数の間に成立する関係として表わすことができる.

2.3 Gödelによれば,帰納的関数とは次の(1)〜(4)によって自然数の上に定義される数論的関数のことである.(4)

(1) 定数値関数$f(x_1,\cdot\cdot\cdot,x_n)=c$は帰納的である.

(2) 後者関数$f(x)=x+1$は帰納的である.

(3) m変数関数$f(x_1,\cdot\cdot\cdot,x_m)$と$m$個の$n$変数関数$g_1,\cdot\cdot\cdot,g_m$が共に帰納的であれば，次の代入によってえられる$n$変数関数$h(x_1,\cdot\cdot\cdot,x_n)$も帰納的である.

$$h(x_1,\cdot\cdot\cdot,x_n)=f(g_1(x_1,\cdot\cdot\cdot,x_n),\cdot\cdot\cdot,g_m(x_1,\cdot\cdot\cdot,x_n)$$

(4) $n-1$変数関数fと$n+1$変数関数gが共に帰納的であれば，次の帰納的定義によってえられるn変数関数hもまた帰納的である.

$$\begin{cases} h(0,x_2,\cdot\cdot\cdot,x_n)=f(x_2,\cdot\cdot\cdot,x_n)) \\ h(k+1,x_2,\cdot\cdot\cdot,x_n)=g(k,h(k,x_2,\cdot\cdot\cdot,x_n),x_2,\cdot\cdot\cdot,x_n)) \end{cases}$$

2.4 自然数の間に成立する関係$R(x_1,\cdot\cdot\cdot,x_n)$は，もし，任意の自然数$x_1,\cdot\cdot\cdot,x_n$に対して,

$$R(x_1,\cdot\cdot\cdot,x_n)\Leftrightarrow[f(x_1,\cdot\cdot\cdot,x_n)=0]$$ (5)

が成立するような帰納的関数$f(x_1,\cdot\cdot\cdot,x_n)$が存在するならば，帰納的関係であると呼ばれる.

2.5 以下の諸定理が成り立つ.(6)

定理1. 加法$x+y$,乗法$x\cdot y$,y^x, $x!$などは全て帰納的関数である.

定理2. 変数に帰納的関数を代入することによって帰納的関数(関係)からえられるところの全ての関数(関係)は帰納的である.

定理3. RとSが共に帰納的関係であれば，$\neg R$, R or S, $R\,\&\,S$, $R\Rightarrow S$, $R\Leftrightarrow S$は全て帰納的関係である.

定理4. 関数f, gが共に帰納的であれば，関係$f=g$, $f<g$, $f\leqq g$もまた全て帰納的である.

2.6 体系P内の諸表現及び体系Pについてのメタ数学的諸表現は，既述の如く，Gödel数を用いて関数や関係として表現されるが，ここでは次の定理が成り立つ.

定理5. 以下の関数1)〜8)，及び関係9)は全て帰納的である.

1) R(x): Gödel数がxの表現のみを1つの表現とする列のGödel数を表わす.

2) $x*y$: Gödel数がxの有限列の後にGödel数がyの有限列を続けてできる新しい有限列のGödel数を表わす.

3) Neg(x): Gödel数がxの論理式の否定のGödel数を表わす.

4）$x\mathrm{Impy}$：x と y をそれぞれ論理式 A，B の Gödel 数とする時，論理式 $A \rightarrow B$ の Gödel 数を表わす．

5）$x\mathrm{Gen}y$：y が論理式 A の Gödel 数で，x が変数 v の Gödel 数である時，論理式 $\forall vA$ の Gödel 数を表わす．

6）$x\,\mathrm{Ex}y$：y が論理式 A の Gödel 数で，x が変数 v の Gödel 数である時，論理式 $\exists vA$ の Gödel 数を表わす．

7）$Z(n)$：自然数 n を表わす数記号の Gödel 数を表わす．

8）$\mathrm{Sb}(x\,{}^{y}_{z})$：$x$ が論理式 A の Gödel 数，y が変数 v の Gödel 数，z が v と同じ階数の項 t の Gödel 数である時，A に含まれる自由変数 v の全てに t を代入してえられる論理式の Gödel 数を表わす．

9）$x\mathrm{B}y$：y が論理式 A の Gödel 数で，x は A の証明の Gödel 数であるということを表わす．

2．7　“x は証明できる論理式の Gödel 数である”を表わす関係 $\mathrm{Bew}(x)$ を次のように定義する：

$$\mathrm{Bew}(x) \Leftrightarrow \mathrm{E}y\,(y\mathrm{B}x)$$

§3．表現可能性

3．1　以下において，$\vdash A$ は“論理式 A は証明できる”を表わす．最初に次のような定義を行なう．

（定義1）　n 変数の関係 $R(x_1, \cdots, x_n)$ と，それに対応する形式的体系における n 変数の論理式 $r(x_1, \cdots, x_n)$ に対して次が成立する時，関係 R は論理式 r によって表現される，という：

任意の自然数 $n_1, \cdots, n_n$ に対して

$$R(n_1, \cdots, n_n) \Rightarrow\ \vdash r(\bar{n}_1, \cdots, \bar{n}_n)$$

が成立する．

（定義2）　n 変数の関係 $R(x_1, \cdots, x_n)$ と，それに対応する形式的体系における n 変数の論理式 $r(x_1, \cdots, x_n)$ に対して次が成立する時，関係 R は論理式 r によって強く表される，という：

任意の自然数 $n_1, \cdots, n_n$ に対して

$$\begin{cases} R(n_1, \cdots, n_n) \Rightarrow\ \vdash r(\bar{n}_1, \cdots, \bar{n}_n) \\ \neg R(n_1, \cdots, n_n) \Rightarrow\ \vdash \sim r(\bar{n}_1, \cdots, \bar{n}_n) \end{cases}$$

が成立する．

3．2　以下の諸定理が成立する．

定理6． 関係 R が論理式 r によって強く表現されるならば，関係 $\neg R$ は論理式 $\sim r$ によって強く表現される．

証明　条件より，$R \Rightarrow\ \vdash r$，$\neg R \Rightarrow\ \vdash \sim r$ が成立する．したがって，$\neg R \Rightarrow\ \vdash \sim r$，$\neg(\neg R) \Rightarrow R \Rightarrow\ \vdash r \Rightarrow\ \vdash \sim(\sim r)$ が成立するから，関係 $\neg R$ は論理式 $\sim r$ によって強く表現される．　（証明終）

定理7． 関係 R_1 と R_2 がそれぞれ，論理式 r_1 と r_2 によって強く表現されるならば，関係 $R_1 \mathrm{or}\ R_2$，$R_1\ \&\ R_2$，$R_1 \Rightarrow R_2$，$R_1 \Leftrightarrow R_2$ は全てそれぞれ，論理式 $r_1 \vee r_2$，$r_1 \wedge r_2$，$r_1 \rightarrow r_2$，

$r_1 \rightleftarrows r_2$ によって強く表現される.

証明　以下のように定義されるので，定理6より，関係 R_1 or R_2 の場合だけを証明すれば十分である：

$$\begin{cases} R_1 \,\&\, R_2 = \neg(\neg R_1 \text{ or} \neg R_2) \\ R_1 \Rightarrow R_2 = \neg R_1 \text{ or } R_2 \\ R_1 \Leftrightarrow R_2 = (R_1 \Rightarrow R_2) \,\&\, (R_2 \Rightarrow R_1) \end{cases}$$

さて，条件より，$R_1 \Rightarrow \vdash r_1$，$\neg R_1 \Rightarrow \vdash \sim r_1$ 及び，$R_2 \Rightarrow \vdash r_2$，$\neg R_2 \Rightarrow \vdash \sim r_2$ が成立する．したがって

$$\begin{aligned} R_1 \text{ or } R_2 &\Rightarrow \vdash r_1 \text{ or} \vdash r_2 \\ &\Rightarrow \vdash r_1 \vee r_2 \text{ or} \vdash r_1 \vee r_2 \\ &\Rightarrow \vdash r_1 \vee r_2, \\ \neg(R_1 \text{ or } R_2) &\Rightarrow \neg R_1 \,\&\, \neg R_2 \\ &\Rightarrow \vdash \sim r_1 \,\&\, \vdash \sim r_2 \\ &\Rightarrow \vdash \sim r_1 \wedge \sim r_2 \\ &\Rightarrow \vdash \sim (r_1 \vee r_2) \end{aligned}$$

が成立するので，関係 R_1 or R_2 は論理式 $r_1 \vee r_2$ によって強く表現される.　　　　(証明終)

定理8.　関係 R_1 が論理式 r_1 によって強く表現され，関係 R_2 が論理式 r_2 によって表現されるならば，関係 $R_1 \Rightarrow R_2$ は論理式 $r_1 \rightarrow r_2$ によって表現される.

証明　条件より，$R_1 \Rightarrow \vdash r_1$，$\neg R_1 \Rightarrow \vdash \sim r_1$ 及び，$R_2 \Rightarrow \vdash r_2$ のそれぞれが成立する．したがって

$$\begin{aligned} (R_1 \Rightarrow R_2) &\Rightarrow \neg R_1 \text{ or } R_2 \\ &\Rightarrow \vdash \sim r_1 \text{ or} \vdash r_2 \\ &\Rightarrow \vdash \sim r_1 \vee r_2 \\ &\Rightarrow \vdash (r_1 \rightarrow r_2) \end{aligned}$$

が成立するので，関係 $R_1 \Rightarrow R_2$ は論理式 $r_1 \rightarrow r_2$ によって表現される.　　　　(証明終)

定理9.　関係 R が帰納的であれば，R は論理式 r によって強く表現される.

証明　略.

§4.　不完全性定理

4.1　体系 P において，論理式の集合 K を公理として付け加えた場合を考える．そしてその時の証明を，K からの証明または K-証明という．すなわち，論理式の有限列

$$A_1, A_2, \cdots, A_n$$

に対して，$A_k\ (1 \leqq k \leqq n)$ が

(1)　体系 P の公理であるか,

(2)　K に属する論理式であるか,

(3)　すでに証明された論理式 ((1), (2)を含む) のうちの1つないし2つから推論規則のどちらかによって導出される論理式であるか,

のいずれかである時，上の論理式の有限列を K-証明というのである．K-証明の最後の論理式が B である時の K-証明を，B の K-証明といい，そのような B の K-証明が存在する時，B は K から証明できる，B は K-証明可能である，という.

4.2　集合 K と元 x との間の１項関係 $x \in K$ が帰納的であれば，K は帰納的集合である，という．したがって，論理式の有限集合 K に対して

$$\kappa = \{\ulcorner A \urcorner \mid A \in K\}$$

として定義される有限集合 κ は帰納的である．なぜなら，$\kappa = \{n_1, \cdot \cdot \cdot, n_n\}$ ($n_1, \cdot \cdot \cdot, n_n$ は全て自然数）とすると，１項関係 $x \in \kappa$ は

$$x = n_1 \text{ or } x = n_2 \text{ or} \cdot \cdot \cdot \text{ or } x = n_n$$

のことであり，$x = n_k\,(1 \leqq k \leqq n)$は帰納的，したがって $x \in \kappa$ は帰納的となるからである．κ が帰納的であることを，K は帰納的である，ともいう．

4.3　“y が論理式 A の Gödel 数で，x は A の K-証明の Gödel 数である”を表わす関係 $x\mathrm{B}\kappa y$ は次のように定義されるので，論理式の集合 K が帰納的であるという条件の下で帰納的である：

$$\mathrm{Bw}\,\kappa\,(x) \Longleftrightarrow (n)\,[n \leqq l(x) \Rightarrow \mathrm{Ax}\,(n\mathrm{Gl}x) \text{ or } (n\mathrm{Gl}x) \in \kappa$$
$$\text{or } (\mathrm{E}p,q)\,\{0 < p,q < n \;\&\; \mathrm{Fl}\,(n\mathrm{Gl}x, p\mathrm{Gl}x, q\mathrm{Gl}x)\}\,]\;\&\; l(x) > 0,$$

$$x\mathrm{B}\kappa y \Longleftrightarrow \mathrm{Bw}\,\kappa\,(x)\;\&\;[l(x)]\mathrm{Gl}x = y$$

4.4　任意の論理式 A に対して，$\mathrm{Bew}\,\kappa\,(\ulcorner A \urcorner)$ は $K \vdash A$，つまり“A は K から証明できる（K－証明可能である)”を表わす．K が空集合の時は，$\mathrm{Bew}\,(\ulcorner A \urcorner)$ は $\vdash A$ のことである．そして，$\mathrm{Bew}\,\kappa\,(x)$ は次のように定義される：

$$\mathrm{Bew}\,\kappa\,(x) \Longleftrightarrow \mathrm{E}y\,(y\mathrm{B}\kappa x)$$

4.5　関数や関係は形式的体系における項や論理式に対応するが，上段の関数や関係が対応させられる項や論理式は下段のように表わされるものとする：

$\mathrm{Bew}\,\kappa\,(x)$	$x\mathrm{B}\kappa y$	$x\mathrm{Imp}y$	$\mathrm{Sb}\,(x\,{}^{y}_{z})$	$x\mathrm{Ex}y$
$\mathrm{bew}\,\kappa\,(x)$	$x\mathrm{b}\kappa y$	$(x)\mathrm{imp}\,(y)$	$\mathrm{sb}\,(x\,{}^{y}_{z})$	$(x)\mathrm{ex}\,(y)$

なお，K が空集合の時は，

$\mathrm{Bew}\,(x)$	$x\mathrm{B}y$
$\mathrm{bew}\,(x)$	$x\mathrm{b}y$

となる．

4.6　論理式 $\mathrm{bew}\,(x)$，$\mathrm{bew}\kappa\,(x)$ は次のように定義される：

$$\mathrm{bew}\,(x) \rightleftarrows \exists y\,(y\mathrm{b}x)$$
$$\mathrm{bew}\kappa(x) \rightleftarrows \exists y\,(y\mathrm{b}\kappa x)$$

4.7　論理式の集合 K に対して，任意の自然数 n に対して $K \vdash R\,(n)$ であると同時に $K \vdash \sim \forall x R\,(x)$ であるような論理式 $R\,(x)$ が存在する時，K は ω-矛盾する，という．明らかに，K が ω-無矛盾であればそれは無矛盾である．

4.8　次の定理が成立する．

定理10（不完全性定理）．　論理式の集合 K が帰納的でかつ ω-無矛盾であれば，肯定も否定も共に K から証明できないような，自由変数を含まない閉論理式 A が存在する．

証明　まず，関係 Q を次のように定義する：

$$(10.1) \qquad Q\,(x, y) \Longleftrightarrow \neg\,\{x\mathrm{B}\kappa\,[\mathrm{Sb}\,(y\,{}^{19}_{z(y)})\,]\}$$

さらに

$$(10.2) \qquad \mathrm{Sb}\,(y\,{}^{19}_{z(y)}) = \ulcorner R\,(\bar{y})\urcorner$$

とする($\bar{y}$ は自然数 y に対応する数記号). また, K は帰納的であるから, $Q(x,y)$ は定理5, 定理2, 定理3より帰納的関係である. よって定理9により

$$\begin{cases} Q(x,y) \Longrightarrow \mathrm{Bew}\,\kappa[\mathrm{Sb}(q\,{}^{17}_{z(x)}\,{}^{19}_{z(y)})] \\ \neg Q(x,y) \Longrightarrow \mathrm{Bew}\,\kappa\,[\mathrm{Neg\,Sb}(q\,{}^{17}_{z(x)}\,{}^{19}_{z(y)})] \end{cases}$$

を満足する q が存在する. そして, 関係 Q に対応する形式的体系における2変数 x, y をもつ論理式 $\bar{Q}$ に対して

$$q = \ulcorner \bar{Q}(x,y) \urcorner$$

とする. さらに

$$p = 17\,\mathrm{Gen}q,$$
$$r = \mathrm{Sb}(q\,{}^{19}_{z(p)})$$

とすると

$$(10.3) \qquad \mathrm{Sb}(p\,{}^{19}_{z(p)}) = 17\,\mathrm{Gen}r$$

が成立する. 他方において, (10.2)において, y に p を代入すると

$$(10.4) \qquad \mathrm{Sb}(p\,{}^{19}_{z(p)}) = \ulcorner R(\bar{p}) \urcorner$$

が成立する. したがって, (10.3), (10.4)より

$$(10.5) \qquad 17\,\mathrm{Gen}r = \ulcorner R(\bar{p}) \urcorner$$

となる. また, $q = \ulcorner \bar{Q}(x,y) \urcorner$ であるから

$$p = 17\,\mathrm{Gen}r = \ulcorner \forall x \bar{Q}(x,y) \urcorner$$

であり

$$(10.6) \qquad 17\,\mathrm{Gen}r = \ulcorner \forall x\, \bar{Q}(x,\bar{p}) \urcorner$$

となる. したがって, (10.5), (10.6)より

$$(10.7) \qquad R(\bar{p}) = \forall x\, \bar{Q}(x,\bar{p})$$

が成立する. また, (10.1)において, y に p を代入すると, (10.4)より

$$\begin{aligned} Q(x,p) &\Longleftrightarrow \neg\{x\mathrm{B}\,\kappa\,[\mathrm{Sb}(p\,{}^{19}_{z(p)})]\} \\ &\Longleftrightarrow \neg\{x\mathrm{B}\,\kappa \ulcorner R(\bar{p}) \urcorner\} \end{aligned}$$

が成立する. $Q(x,p)$ は帰納的関係である. したがって, 定理3, 定理7, 定理9により

$$\bar{Q}(x,\bar{p}) \rightleftarrows \sim \{x\mathrm{b}\,\kappa \ulcorner \mathrm{R}(\bar{p}) \urcorner\}$$

が証明でき, したがってまた

$$\begin{aligned} (10.8) \qquad \forall x\, \bar{Q}(x,\bar{p}) &\rightleftarrows \bar{\forall} x \sim \{x\mathrm{b}\,\kappa \ulcorner R(\bar{p}) \urcorner\} \\ &\rightleftarrows \sim \mathrm{bew}\,\kappa(\ulcorner R(\bar{p}) \urcorner) \end{aligned}$$

が証明できる. よって, (10.7), (10.8)より

$$(10.9) \qquad R(\bar{p}) \rightleftarrows \sim \mathrm{bew}\,\kappa(\ulcorner R(\bar{p}) \urcorner)$$

が証明できる. しかも, $R(\bar{p})$は自由変数を含まない閉論理式である. すなわち, (10.9)が証明できるような閉論理式 $R(\bar{p})(= \forall x \bar{Q}(x,\bar{p}))$ が存在する.(7)

ここで, $R(\bar{p})(= \forall x \bar{Q}(x,\bar{p})) = A$ とおくと, この A については次が成り立つ:

I K が無矛盾であれば, A は K から証明できない.

[証明] A が K-証明可能と仮定する. すると, A の K-証明の Gödel 数を m とすると, $A = R(\bar{p})$であるから, (10.1), (10.4)より

$$m\mathrm{B}\,\kappa \ulcorner R(\bar{p}) \urcorner = m\mathrm{B}\,\kappa\,\mathrm{Sb}(p\,{}^{19}_{z(p)}) = \neg Q(m,p)$$

が成立する. ところで, $\neg Q(m,p)$ は帰納的関係であるから, 定理9より, $\sim\bar{Q}(\bar{m},\bar{p})$ は証

明可能となる．しかるに，条件より，A，すなわち，$\forall x\bar{Q}(x,\bar{p})$ は K-証明可能である．よって矛盾する．（証明終）

II　K が ω-無矛盾であれば，$\sim A$ は K から証明できない．

［証明］　K は ω-無矛盾であるから無矛盾でもある．したがって，Iの結果より，A は K-証明可能でない．すなわち，A の K-証明のGödel数は存在しない．つまり，任意の自然数 n について $Q(n,p)$ が成立する．したがって，定理9より，任意の自然数 n について，$K \vdash \bar{Q}(\bar{n},\bar{p})$ となる．したがって，もし，$\sim A$，すなわち，$\sim\forall x\bar{Q}(x,\bar{p})$ が K-証明可能であると仮定すると，つまり，$K \vdash \sim\forall x\bar{Q}(x,\bar{p})$ と仮定すると，K は ω-矛盾することになり，条件に反する．（証明終）

以上によって，定理10の証明は終わった．

§5. 第2不完全性定理

5.1　以下の諸定理が成立する．

定理11. 論理式の集合 K が帰納的であれば，任意の論理式 A に対して

$$\mathrm{Bew}_{\kappa}(\ulcorner A\urcorner) \Rightarrow \vdash \mathrm{bew}_{\kappa}(『A』)$$

が成立する．K が空集合の時は，

$$\mathrm{Bew}(\ulcorner A\urcorner) \Rightarrow \vdash \mathrm{bew}(『A』)$$

となる．

証明　K が空集合でない場合を証明すれば十分である．まず，$\mathrm{Bew}_{\kappa}(x)$ の定義より

$$\mathrm{Bew}_{\kappa}(\ulcorner A\urcorner) \Rightarrow \mathrm{E}n\{n\mathrm{B}_{\kappa}(\ulcorner A\urcorner)\}$$

であり，定理5，定理9より

$$\mathrm{E}n\{n\mathrm{B}_{\kappa}(\ulcorner A\urcorner)\} \Rightarrow \mathrm{E}n \vdash \bar{n}\mathrm{b}_{\kappa}(『A』)$$

である．また

$$\mathrm{E}n \vdash \bar{n}\mathrm{b}_{\kappa}(『A』) \Rightarrow \vdash \exists y\{y\mathrm{b}_{\kappa}(『A』)\}$$

であり，$\mathrm{bew}_{\kappa}(x)$ の定義より

$$\vdash \exists y\{y\mathrm{b}_{\kappa}(『A』)\} \Rightarrow \vdash \mathrm{bew}_{\kappa}(『A』)$$

であるから，以上より

$$\mathrm{Bew}_{\kappa}(\ulcorner A\urcorner) \Rightarrow \vdash \mathrm{bew}^{\kappa}(『A』)$$

がえられる．（証明終）

定理12. R が帰納的関係であれば，R に対応する形式的体系における論理式 r に対して，

$$r \rightarrow \mathrm{bew}(『r』)$$

は証明可能である．(8)

証明　R は帰納的関係であるから，定理9により，論理式 r によって強く表現される．すなわち，$R \Rightarrow \vdash r$ である．よって

(12.1)　$R \Rightarrow \mathrm{Bew}(\ulcorner r\urcorner)$

が示される．また，関係 R は論理式 r によって強く表現され，かつ，定理11より，関係 $\mathrm{Bew}(\ulcorner r\urcorner)$ は論理式 $\mathrm{bew}(『r』)$ によって表現される．したがって，定理8より，関係 $R \Rightarrow \mathrm{Bew}(\ulcorner r\urcorner)$ は論理式 $r \rightarrow \mathrm{bew}(『r』)$ によって表現される．すなわち

(12.2)　$(R \Rightarrow \mathrm{Bew}(\ulcorner r\urcorner)) \Rightarrow \vdash (r \rightarrow \mathrm{bew}(『r』))$

が成立する．したがって，(12.1)，(12.2)より

$$\vdash (r \rightarrow \mathrm{bew}(\ulcorner r \urcorner))$$

となる．（証明終)

定理13. bew[(x)imp(y)]→[bew(x)→bew(y)]は証明可能である．

証明 任意の論理式A,Bに対して，論理式$A \rightarrow B$のGödel数が$x\mathrm{Imp}y$で，それの証明のGödel数がmであり，かつ，論理式AのGödel数がxで，それの証明のGödel数がnであるとする．すると，その時は，論理式BのGödel数はyで，それの証明のGödel数は$m * n * \mathrm{R}(y)$となる．すなわち

$$\begin{cases} m = 2^{x_1} \cdot 3^{x_2} \cdots \mathrm{P}_\alpha^{x_\alpha} \\ n = 2^{y_1} \cdot 3^{y_2} \cdots \mathrm{P}_\beta^{y_\beta} \end{cases}$$

とすると(P_α, P_β は，それぞれ，α番目，β番目の素数)

$$\begin{cases} x_\alpha = x\mathrm{Imp}y \\ y_\beta = x \end{cases}$$

となる．また，推論規則により，論理式$A \rightarrow B$と論理式Aから論理式Bをうることができるから，Bの証明のGödel数をkとすると

$$k = 2^{x_1} \cdots \mathrm{P}_\alpha^{x_\alpha} \cdot \mathrm{P}_{\alpha+1}^{y_1} \cdots \mathrm{P}_{\alpha+\beta}^{y_\beta} \cdot \mathrm{P}_{\alpha+\beta+1}^{y}$$

となる．すなわち

$$k = m * n * \mathrm{R}(y)$$

が成立する．したがって

$$m\mathrm{B}(x\mathrm{Imp}y) \;\&\; n\mathrm{B}x \Longrightarrow k\mathrm{B}y$$

となる(ただし，$k = m * n * \mathrm{R}(y)$)．

また，定理2，定理5より，$m\mathrm{B}(x\mathrm{Imp}y)$，$n\mathrm{B}x$，$k\mathrm{B}y$は全て帰納的関係である．よって，定理7，定理9により

$$\bar{m}\mathrm{b}\,[(x)\mathrm{imp}(y)] \wedge \bar{n}\mathrm{b}x \rightarrow \bar{k}\mathrm{b}y$$

は証明可能である．だから

$$\mathrm{bew}[(x)\mathrm{imp}(y)] \wedge \mathrm{bew}(x) \rightarrow \mathrm{bew}(y)$$

したがって，また

$$\mathrm{bew}[(x)\mathrm{imp}(y)] \rightarrow [\mathrm{bew}(x) \rightarrow \mathrm{bew}(y)]$$

は証明可能となる．(証明終)

定理14. $\mathrm{bew}[\mathrm{sb}(x\,{}^{y}_{z})] \rightarrow \mathrm{bew}[(y)\mathrm{ex}(x)]$ は証明可能である．

証明 述語論理の公理図式より

$$\forall x \sim F(x) \rightarrow \sim F(t)$$

は証明可能である．したがって，この論理式の対偶をとると

$$F(t) \rightarrow \exists x F(x)$$

は証明可能となる．すなわち

$$\mathrm{Bew}\{[\mathrm{Sb}(x\,{}^{y}_{z})]\,\mathrm{Imp}[y\mathrm{E}_x x]\}$$

が成立する(ただし，$x = \ulcorner F(x) \urcorner$, $y = \ulcorner x \urcorner$, $z = \ulcorner t \urcorner$である)．したがって，定理11より

$$\mathrm{bew}\{[\mathrm{sb}(x\,{}^{y}_{z})]\,\mathrm{imp}\,[(y)\mathrm{ex}(x)]\}$$

が証明でき，これと定理13より

$$\mathrm{bew}[\mathrm{sb}(x\,{}^{y}_{z})] \rightarrow \mathrm{bew}[(y)\mathrm{ex}(x)]$$

は証明可能となる．　　(証明終)

定理15. 論理式の集合Kが帰納的であれば，任意の論理式Aに対して

$$\mathrm{bew}\,\kappa\,(\ulcorner A\urcorner) \to \mathrm{bew}[\ulcorner \mathrm{bew}\,\kappa\,(\ulcorner A\urcorner)\urcorner]$$

は証明可能である．

証明 Kは帰納的であるとする．任意の論理式Aに対して

$$a = \ulcorner y\mathrm{b}\,\kappa\,(\ulcorner A\urcorner)\urcorner$$

とおくと

$$\begin{aligned} {}_{19}\mathrm{Ex}\,a &= {}_{19}\mathrm{Ex}\,\{\ulcorner y\mathrm{b}\,\kappa\,(\ulcorner A\urcorner)\urcorner\} \\ &= \ulcorner \exists y\,\{y\mathrm{b}\,\kappa(\ulcorner A\urcorner)\}\urcorner \end{aligned}$$

となる(ただし，19は変数yのGödel数)．また，bew$\,\kappa\,(x)$の定義より

$$(15.1)\qquad \mathrm{bew}\,\kappa\,(\ulcorner A\urcorner) \rightleftarrows \exists y\,\{y\,\mathrm{b}\,\kappa\,(\ulcorner A\urcorner)\}$$

であるから

$$(15.2)\qquad {}_{19}\mathrm{Ex}\,a = \ulcorner \mathrm{bew}\,\kappa\,(\ulcorner A\urcorner)\urcorner$$

となる．そして，${}_{19}\mathrm{Ex}\,a$ $\ulcorner \mathrm{bew}\,\kappa\,(\ulcorner A\urcorner)\urcorner$ は共に帰納的関数であるから，定理4より，(15.2)は帰納的関係である．したがって，定理9より

$$(15.3)\qquad (\overline{19})\,\mathrm{ex}\,(\bar{a}) = \ulcorner \mathrm{bew}\,\kappa\,(\ulcorner A\urcorner)\urcorner$$

は証明可能となる．ところで，$y\mathrm{B}\,\kappa\,(\ulcorner A\urcorner)$ は帰納的関係であるから，定理12より

$$(15.4)\qquad y\mathrm{b}\,\kappa\,(\ulcorner A\urcorner) \to \mathrm{bew}\,(\ulcorner y\mathrm{b}\,\kappa\,(\ulcorner A\urcorner)\urcorner)$$

は証明可能である．また

$$(15.5)\qquad \ulcorner y\mathrm{b}\,\kappa\,(\ulcorner A\urcorner)\urcorner = \mathrm{Sb}[a\,\tfrac{19}{z(y)}]$$

であり，$\mathrm{Sb}[a\,\tfrac{19}{z(y)}]$は帰納的関数であるから，(15.5)は帰納的関係である．よって，定理9より

$$(15.6)\qquad \ulcorner y\mathrm{b}\,\kappa\,(\ulcorner A\urcorner)\urcorner = \mathrm{sb}(\bar{a}\,\tfrac{\overline{19}}{z(y)})$$

は証明可能となる．よって，(15.4)，(15.6)より

$$y\mathrm{b}\,\kappa\,(\ulcorner A\urcorner) \to \mathrm{bew}\,\{\mathrm{sb}(\bar{a}\,\tfrac{\overline{19}}{z(y)})\}\ ,$$

したがって

$$\exists y\{y\mathrm{b}\,\kappa\,(\ulcorner A\urcorner)\} \to \exists y[\mathrm{bew}\,\{\mathrm{sb}(\bar{a}\,\tfrac{\overline{19}}{z(y)})\}]$$

は証明可能である．よって，(15.1)を考慮に入れると

$$(15.7)\qquad \mathrm{bew}\,\kappa\,(\ulcorner A\urcorner) \to \mathrm{bew}\,\{\mathrm{sb}(\bar{a}\,\tfrac{\overline{19}}{z(y)})\}$$

が証明でき，さらに，定理14より

$$(15.8)\qquad \mathrm{bew}\,\{\mathrm{sb}(\bar{a}\,\tfrac{\overline{19}}{z(y)})\} \to \mathrm{bew}[(\overline{19})\,\mathrm{ex}(\bar{a})]$$

は証明可能であるから，(15.7)，(15.8)より

$$\mathrm{bew}\,\kappa\,(\ulcorner A\urcorner) \to \mathrm{bew}[(\overline{19})\,\mathrm{ex}(\bar{a})]$$

は証明できる．したがって，ここで，(15.3) を考慮に入れると

$$\mathrm{bew}\,\kappa\,(\ulcorner A\urcorner) \to \mathrm{bew}[\ulcorner \mathrm{bew}\,\kappa\,(\ulcorner A\urcorner)\urcorner]$$

は証明可能となる．　　(証明終)

定理16. 論理式の集合Kが帰納的であれば，

$$\mathrm{bew}(x) \to \mathrm{bew}\,\kappa\,(x)$$

は証明可能である．

証明 Kは帰納的であるとする．任意の論理式Aが証明可能ならば，論理式の集合Kを

公理として付加した場合も証明可能である．つまり，論理式AのGödel数をx，Aの証明のGödel数をyとすると

$$yBx \Rightarrow yB\kappa x$$

が成立する．yBx，$yB\kappa x$は共に帰納的関係であるから，定理9，定理7より

$$ybx \rightarrow yb\kappa x$$

は証明可能となる．したがって

$$\exists y\{ybx\} \rightarrow \exists y\{yb\kappa x\}$$

すなわち

$$\mathrm{bew}(x) \rightarrow \mathrm{bew}\,\kappa(x)$$

は証明可能である．(証明終)

5.2 ところで,論理式の集合Kが無矛盾であるとは，ある論理式とそれの否定が同時にK-証明となることはない，ということである．すなわち，wid(K)が“Kは無矛盾(Widerspruchsfreiheit)である”を意味する論理式であるとすると，wid(K)は次のように定義できる：

$$\mathrm{wid}(K) \rightleftarrows \sim(\exists y)[\mathrm{bew}\,\kappa(y) \wedge \mathrm{bew}\,\kappa[\mathrm{neg}(y)]]$$

5.3 そこで，次の2つの定理が成り立つ．

定理17. 定理10(不完全性定理)における閉論理式Aに対して

$$\mathrm{wid}(K) \rightarrow \sim \mathrm{bew}\,\kappa(\ulcorner A \urcorner)$$

は証明可能である．

証明 $R(\bar{p}) = A$としての閉論理式Aについては，定理10の(10.9)で述べたように

$$A \rightleftarrows \sim \mathrm{bew}\,\kappa(\ulcorner A \urcorner)$$

は証明可能である．よって，対偶をとると

$$\mathrm{bew}\,\kappa\ (\ulcorner A \urcorner) \rightarrow \sim A$$

は証明可能となる．したがって，定理11より

(17.1) $$\mathrm{bew}(\ulcorner \mathrm{bew}\,\kappa(\ulcorner A \urcorner) \rightarrow \sim A \urcorner)$$

は証明できる．

また，任意の論理式A,Bに対して，$\mathrm{Neg}\ (\ulcorner A \urcorner) = \ulcorner \sim A \urcorner$，$\ulcorner A \urcorner\,\mathrm{Imp}\ulcorner B \urcorner = \ulcorner A \rightarrow B \urcorner$であり，しかも，これらはいずれも，帰納的関数の定義，定理4，定理5より，帰納的関係であるから，定理9より

(17.2) $$\begin{cases} \mathrm{neg}(\ulcorner A \urcorner) = \ulcorner \sim A \urcorner \\ (\ulcorner A \urcorner)\,\mathrm{imp}(\ulcorner B \urcorner) = \ulcorner A \rightarrow B \urcorner \end{cases}$$

がいずれも証明できる．したがって，(17.1)，(17.2)より

(17.3) $$\mathrm{bew}[(\ulcorner \mathrm{bew}\,\kappa(\ulcorner A \urcorner)\urcorner)\,\mathrm{imp}(\mathrm{neg}(\ulcorner A \urcorner))]$$

が証明できる．よって，(17.3)と定理13より

(17.4) $$\mathrm{bew}[\ulcorner \mathrm{bew}\,\kappa(\ulcorner A \urcorner)\urcorner] \rightarrow \mathrm{bew}[\mathrm{neg}(\ulcorner A \urcorner)]$$

が証明できる．さらに，定理15より

(17.5) $$\mathrm{bew}\,\kappa(\ulcorner A \urcorner) \rightarrow \mathrm{bew}[\ulcorner \mathrm{bew}\,\kappa(\ulcorner A \urcorner)\urcorner]$$

は証明可能であるから，(17.4)と(17.5)より

(17.6) $$\mathrm{bew}\,\kappa(\ulcorner A \urcorner) \rightarrow \mathrm{bew}[\mathrm{neg}(\ulcorner A \urcorner)$$

は証明可能となる．一方，定理16より

(17.7)　　$\mathrm{bew}[\mathrm{neg}(\ulcorner A \urcorner)] \rightarrow \mathrm{bew}_{\boldsymbol{\kappa}}[\mathrm{neg}(\ulcorner A \urcorner)]$

は証明可能であるから，(17.6)，(17.7)より

(17.8)　　$\mathrm{bew}_{\boldsymbol{\kappa}}(\ulcorner A \urcorner) \rightarrow \mathrm{bew}_{\boldsymbol{\kappa}}[\mathrm{neg}(\ulcorner A \urcorner)]$

が証明できる．したがって

$$\mathrm{bew}_{\boldsymbol{\kappa}}(\ulcorner A \urcorner) \rightarrow \mathrm{bew}_{\boldsymbol{\kappa}}(\ulcorner A \urcorner) \wedge \mathrm{bew}_{\boldsymbol{\kappa}}[\mathrm{neg}(\ulcorner A \urcorner)]$$

したがって

$$\mathrm{bew}_{\boldsymbol{\kappa}}(\ulcorner A \urcorner) \rightarrow \exists y[\mathrm{bew}_{\boldsymbol{\kappa}}(y) \wedge \mathrm{bew}_{\boldsymbol{\kappa}}[\mathrm{neg}(y)]]$$

が証明できる．これの対偶をとると，wid(K)の定義より

$$\mathrm{wid}(K) \rightarrow \sim \mathrm{bew}_{\boldsymbol{\kappa}}(\ulcorner A \urcorner)$$

が証明できる．　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（証明終）

定理18（第２不完全性定理）． 論理式の集合Kが帰納的で，かつ，無矛盾であれば，論理式 wid(K) はKから証明できない．

証明　論理式の集合Kが帰納的かつ無矛盾であれば，定理10より

(18.1)　　$A \rightleftarrows \sim \mathrm{bew}_{\boldsymbol{\kappa}}(\ulcorner A \urcorner)$

が証明できるような閉論理式Aが存在する(定理10における閉論理式Aの存在については，Kのω-無矛盾性は前提されていない)．したがって，定理17より

(18.2)　　$\mathrm{wid}(K) \rightarrow \sim \mathrm{bew}_{\boldsymbol{\kappa}}(\ulcorner A \urcorner)$

は証明可能である．また，(18.1)より

(18.3)　　$\sim \mathrm{bew}_{\boldsymbol{\kappa}}(\ulcorner A \urcorner) \rightarrow A$

も証明可能である．よって，(18.2)，(18.3)より

$$\mathrm{wid}(K) \rightarrow A$$

は証明可能となる．したがって，wid(K) がK-証明可能ならば，A もK-証明可能となる．しかるに，Kが帰納的かつ無矛盾であれば，定理10のⅠからわかるように，AはK-証明可能でない．ゆえに，wid(K) はK-証明可能ではない．　　　　　　　　　（証明終）

註

(1)　第２不完全性定理は下記の論文の定理XIにあたる：
K. Gödel：Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter System I, *Monatshefte für Mathematik und Physik*, **38**(1931), 173－198.

(2)　D. Hilbert und P. Bernays : *Grundlagen der Mathematik* II, Springer-Verlag, 1939, §5.

(3)　前原昭二：数学基礎論入門，朝倉書店，1977.

(4)　この定義からわかるように，Gödel の帰納的関数とは，今日でいう原始帰納的関数のことである．この定義には，射影関数 $f(x_1, \cdots, x_n) = x_i$ $(1 \leqq i \leqq n)$ が付加されねばならない．

(5)　形式的体系内での論理記号（～，∧，∨，→，⇄，∀，∃，＝）に対して，内容的な考察をする場合の論理記号として(￢，&，or，⇒，⇔，( )，E，＝）を用いる．

(6)　定理１～５，９の証明，及び，本小論において特に説明のない表現については，筆者の次を参照：ゲーデルの不完全性定理，三重大学人文学部文化学科研究紀要，**3** (1986)，1～19.

(7)　一般に，次の対角化定理 (diagonal lemma) を証明することができる：
自由変数yだけを含む論理式$B(y)$に対して

$$G \rightleftarrows B(\ulcorner G \urcorner)$$

が証明できるような，自由変数を含まない閉論理式Gが存在する．

前原昭二：前掲書，130ページ以下.

G. S. Boolos & R. C. Jeffrey : *Computability and Logic*, Cambridge Univ. Pr., 1974, p.173.

(8) 以下，定理12～15，17の証明は，前原氏に負う.

参考文献（註で言及したものはのぞく）

[1] J. Barwise, ed.: *Handbook of mathematical Logic*, North-Holland, 1977.

[2] J. L. Bell and M. Machover : *A Course in Mathematical Logic*, North-Holland, 1977.

[3] P. J. Cohen : *Set Theory and the Continuum Hypothesis*, Benjamin 1966.

[4] M. Davis, ed.: *The Undecidable*, Raven Pr., 1965.

[5] G. Gentzen : Die gegenwärtige Lage in der mathematischen Grundlagenforschung, *Forschungen zur Logik und zur Grundlegung der exakten Wissenschaften*, new series, no. 4, Leipzig(Hirzel), 1938, 5-18.

[6] G. Gentzen : Neue Fassung des Widerspruchsfreiheitsbeweises für die reine Zahlentheorie, Ibid., 19-44.

[7] S. C. Kleene : *Introduction to Metamathematics*, Van Nostrand, 1952.

[8] 倉田令二朗：数学論序説，ダイヤモンド社，1972.

[9] 松本和夫：数理論理学，共立出版，1970.

[10] E. Mendelson : *Introduction to Mathematical Logic*, Van Nostrand, 1979.

[11] J. D. Monk : *Mathematical Logic*, Springer-Verlag, 1976.

[12] 日本数学会（編）：岩波数学辞典（第3版），岩波書店，1985.

[13] J. R. Shoenfield : *Mathematical Logic*, Addison-Wesley, 1967.

[14] 竹内外史：現代集合論入門，日本評論社，1971.

[15] 竹内外史・八杉満利子：数学基礎論，共立出版，1974.

[16] A. Yasuhara : *Recursive Function Theory and Logic*, Academic Pr., 1971.

[17] J. van Heijenoort, ed. : *From Frege to Gödel, A source book in mathematical logic*, 1879-1931, Harvard Univ. Pr., 1967.

なお，[3]には次の翻訳がある.

[3※] 近藤基吉・坂井秀寿・沢口昭聿訳：連続体仮説，東京図書，1972.