人文論叢(三重大学)第9号 1992

Gödel 集合論 I

山　岡　悦　郎

はじめに

本稿はGödelによる一般連続体仮説と選択公理の無矛盾性証明の概説を意図して書かれたものである．その本文に入るに先立って，集合論研究におけるGödel集合論の位置等について簡単に触れておきたい．

現代論理学の主要分野の1つである集合論は，1870年代ドイツの数学者G.Cantorによって創始された．彼は三角級数論の研究から集合論へと導かれたのであったが，1900年前後に相ついで発見されたパラドックス，例えば濃度に関するCantor自身のパラドックスや，自分自身を元として含まない集合の集合に関するB. Russellのパラドックス等によって集合論は危機に直面することになる．他方において，集合は数学における有用で基本的な概念であることが漸次明らかになってきたために，この危機は‘数学の危機’を意味することにもなった．そして，この危機は改めて数学的概念の構成方法や証明の本質等について根本的反省をせまることになり，そこに数学基礎論が発生し，B. Russell, L. E. J. Brouwer, D. Hilbertによって代表される論理主義，直観主義，形式主義の諸立場をうみ出したことはよく知られている．そこでは，‘数学とは何か，数学はどうあるべきか’をめぐって激しい哲学的論争が行われて，数学，ひいては論理学そのものの理解を深めさせることとなった．

このように，現在では数学の1部門となっている数学基礎論をうみ出す直接のきっかけとなった集合論のパラドックスではあるが，それの回避ないし解決のための方法として出現したのが公理的集合論である．すなわち，そもそもの集合概念についてのCantorの定義は‘素朴すぎる’ものとされ，パラドックスの出現を防ぐと同時に全数学の基礎としての役目を果たしうることを目ざして集合論の公理化が意図されるようになったのである．公理的集合論は1908年，ドイツの数学者E. Zermeloによって始められたが，その後多くの人によって改良が加えられ，現在のところ一応満足のいく状態にあるといわれている．

ところで，竹内外史氏によれば，[(1)] 公理的集合論の出現以来80年以上経過したが，その間現在進行中のものまで含めて革命的飛躍が4つあるとのことである．そして，その1番目に位置するのがGödelの業績にほかならない．

また，上述の経過をへて集合論の公理化ができると，Cantorの素朴集合論以来課題であった集合論の諸問題についての数学基礎論的研究，すなわちメタ数学的考察が行えるようになった．その際，特に研究者の関心を引いたのは連続体仮説と選択公理の位置であった．周知のように，連続性は数学における基本的概念の1つであり，連続体仮説は実数連続体の濃度に関してCantor自身の提出した仮説であった．そして，Hilbertが20世紀に解決すべき23個の問題としてあげたものの1番最初の問題でもあった．選択公理の方は，他の集合論の公理とは異なり，われわれの直観に訴えにくく，必ずしも自明とはいえない感じを当初から研

究者に与えていた．それにもかかわらず，選択公理を用いると集合論における多くの重要な結果がえられるのみならず，集合論以外でも選択公理およびそれと同値な Zorn の補題や整列可能定理を用いると多くの重要な定理が証明できるのである.[2] そうしたことから，集合論における連続体仮説や選択公理の無矛盾性および独立性の問題解決に多くの研究者は努力したが，まず無矛盾性が証明されるまでにも，1908年の公理的集合論の出現から約30年の月日が必要であったのである．

1938年，Gödel は‘集合論の他の公理が無矛盾であれば，選択公理と Cantor の一般連続体仮説（すなわち，任意の α に対して，$2^{\aleph_\alpha}=\aleph_{\alpha+1}$，という命題）はそれらの公理と無矛盾である’ということを証明した．これによって，数学者や論理学者は安心して選択公理や連続体仮説を証明中に使用することができるようになったわけである．そしてそれから25年後，1963年にアメリカの若き数学者 P. Cohen は天才的アイデアたる forcing 概念を用いて独立性を証明することに成功し，その後の爆発的な飛躍の出発点となった．この功績により Cohen はフィールズ賞を受賞したが，彼の研究は多くの若き俊秀を集合論あるいは論理学へ向わしめる大きなきっかけになったといわれる．

さらにその研究の内容についてみてみると，Gödel は‘構成可能集合（constructible set）’という，これまた天才的・独創的アイデアを用いて上記の相対的無矛盾性証明に鮮やかに成功した．そしてこの概念は Cohen に決定的影響を与えたのみならず,[3] R.B.Jensen による第3の革命的飛躍においてもその内的原動力となったのであり，まさしく‘この現代集合論のほとんどがゲーデルの上の研究の発展であるといってよいのである.[4]’ また現在では，自然数をはじめとする基本的な数学的概念の多くは集合論的に定義・表現されている．その意味では，数学は集合論（論理学）に基づいているということもできよう．したがって，集合論の実質的研究における構成可能集合等の Gödel の業績の重要さはもちろんのこと，集合論や数学のメタ理論的，哲学的研究における彼の影響，ひいては現代思想，特に認識論に及ぼす彼の影響の大きさは明白であるように思われる．

ところで，1931年に不完全性定理を証明して以来，Gödel は集合論の研究を精力的に行っており，1935年以降部分的な成果はえていた．そして今日みられるような形での結果を発表したのは1938年であり，翌年に証明の大略を発表した．証明の細部に到るまで明らかにされたのは1939年にプリンストン高級研究所で行った講義，およびそれに基づくところの，1940年刊行の講義録においてであった.[5]

一方，Gödel の集合論に目を向けてみると，1940年の講義録で彼の採用した集合論はZermelo-Fraenkel の集合論 ZF ではなく，von Neumann の線上にあるところの，Bernays-Gödel の集合論ＢＧとよばれることになるものであった．この場合，‘ＢＧ集合論’という表現は‘Bernays が作った体系を使って，Gödelは無矛盾性を証明した’というニュアンスで理解されるかもしれない．事実，Bernays 自身はそう考えていたということである.[6] 集合論の成立史をみるとき，数学的定式化が必ずしも明確でなかった Zermelo 達の集合論を今日みられるような整然とした形に作りあげたのは von Neumann や Bernays であったという事実を考えると， Bernays の業績は高く評価されるべきであるろう．だが，1940年の講義録にみられる Bernays の影響は実際に大きいものであったとしても，Gödel 自身の独創的見解も無視することはできない．確かに Gödel は，自分の採用する体系は本質的には Bernays に負うている旨述べている．しかし，Gödel が言及した1937年の Bernays の論文は，実質的には

集合とクラス構成のための公理と一般存在定理の証明までを含んでいるだけであって，Gödel の講義録にみられる具体的内容の展開，特に構成可能集合概念の形成への直接的示唆はみあたらないように思われる．もちろん，これだけでもって Bernays の影響を過小評価することはひかえるべきであろう．だがここでは，Bernays の体系の Gödel による発展形態，およびそれに基づいてえられた結果を重視したいと考えるので，筆者はあえて，Gödel が講義録において展開した集合論を Gödel 集合論とよぶことにしたい．

Gödel の思想は論理学や数学とわかちがたく結びついており，彼の論理学や数学に触れずにして彼の思想を論ずることはできないであろう．ここではGödel 集合論の理解が目ざされるが，しかし，今日のＢＧ集合論を取りあげることはしない．それは１つには，講義録における集合論とＢＧの間には少しばかり相違があるからであるが，何よりも‘Gödel’の集合論を理解するには彼の講義録に依拠するのが最善と思われるからである．したがって以下においては彼の記述にしたがい，概説するというやり方がとられるであろう．今回は一般集合論ともいうべき基礎的部分，すなわち公理系の記述から基数の展開までを含む．なお記述に際しては，講義録における記法とは異なる記法を用いる場合もあり，また証明については，Gödel が省略したところはなるべく補うようにし，彼の証明とは若干異なる証明を採用したところもある．いずれにせよ，可能な限り平明な証明を試みた．[7]

1　抽象的集合論の公理

I　公理的集合論はパラドックスの出現を避けると同時に確固たる基礎の上に数学を建設せんとの目的のもとに創始されたものであった．パラドックス回避の方法としてＢＧでは次のように考える．条件 P をみたすものの集まり $\{x \mid P(x)\}$ を全て集合の名でよび，しかもこれの意味が，‘任意の対象 y に対して，$P(y) \equiv y \in \{x \mid P(x)\}$’とすると，集合 x に対する $\{x \mid \sim(x \in x)\}$ はパラドックスを生じさせることを Russell は指摘した．よって，$\{x \mid P(x)\}$ を全て集合とみなすことはできない．ＢＧでは集合 x に対する $\{x \mid P(x)\}$ を一般にクラスとよび，クラスのうちで集合とみなされないもの（例えば前述の $\{x \mid P(x)\}$）を固有クラスとよび区別する．すなわち，クラスは集合と固有クラスに分けられる．このようにパラドックスに導くものの集まりは集合ではなく固有クラスであるとして，集合の理論としてはパラドックスを避けることができるとするのである．したがって，クラスのうちどのような条件をみたすものの集まりを再び集合と考えてよいのかが重要となるが，このことは公理化を通じて明確にされるのである．よってＢＧでは，個体はクラスと集合の２種類ということになる．

ＢＧ集合論の記述は通常の等号をもった第１階述語論理を用いて行うことができるが，ここでは論理記号としては次のものを用いることにする：$\sim$，$\wedge$，$\vee$，$\rightarrow$，$\equiv$，$=$，$\forall$，$\exists$，$\exists!$.

なお定義や定理は全称閉包の形で表現されるとは限らない．

以下 Gödel 集合論の公理系 Σ について概説する．

II　Σ における基本的観念（primitive notion）は次の３つである．

1　クラス……Cls で表される．

2　集合……M で表される．

3　関係 $\in$……クラス（あるいは集合）とクラス（あるいは集合）．

ZF における基本的観念（無定義術語）は集合と∈の2つであり，Σとは異なる．Σにおける個体はクラスと集合のみである．集合やクラスの要素（元）も集合ないしクラスである．上記3つの観念は，文脈においては次のように現われる［ただし，大文字 X, Y, Z……は全てのクラスの上を動く変数であり，小文字 x, y, z……は全ての集合の上を動く変数である］.

Cls(A)……‘A はクラスである’を意味する．

M(A)……‘A は集合である’を意味する．

$X \in Y$, $X \in y$, $x \in Y$, $x \in y$……‘X は Y に属する’を意味する．以下同じ．

Σにおける公理は以下の A，B，C，D の4つの群に分けられる．

［A群］

1　Cls(x).

2　$X \in Y \rightarrow \mathrm{M}(X)$.

3　$\forall u[u \in X \equiv u \in Y] \rightarrow X = Y$.

4　$\forall x, y \exists z \forall u[u \in z \equiv (u = x \vee u = y)]$.

公理 A1 は‘あらゆる集合はクラスである’を意味している.[8] 集合でないクラスは固有クラス（proper class）とよばれる．すなわち

1．1　定義　$\mathrm{Pr}(X) = \sim \mathrm{M}(X)$.

公理 A 2は‘クラスのメンバーであるどのクラスも集合である’を意味している．つまり，固有クラスはメンバーとはなりえない．公理 A 3はいわゆる外延性公理（axiom of extentionality）であり，‘2つのクラスはそれらのメンバーが同じであれば同じである’を意味している.[9] 公理 A 4は，‘任意の集合 x, y に対して，x と y だけをメンバーとしてもつような集合が存在する’を意味している．さらに A 3を用いるならば，そのような集合は一意的に決定される（すなわち，A 4の条件をみたす集合 z_1 がほかに存在するとすると，$\forall u[u \in z \equiv u \in z_1]$．よって A 3より，$z = z_1$）．A 4によって定義される z は x と y の非順序対（non-ordered pair）とよばれ，$\{x, y\}$ によって表される．

1．2　定義　$u \in \{x, y\} \equiv (u = x \vee u = y)$.

1．3　定義　$\{x\} = \{x, x\}$.

$\{x\}$ は x だけを元とする集合（singleton）である．

1．4　定義　$\langle x, y\rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\}$.

$\langle x, y\rangle$ は x と y の順序対（ordered pair）とよばれる．次が成立する．

1．5　$\langle x, y\rangle = \langle u, v\rangle \rightarrow (x = u \wedge y = v)$.

順序3-組（ordered triple）は順序対を用いて次のように定義される．

1．6　定義　$\langle x, y, z\rangle = \langle x, \langle y, z\rangle\rangle$.

順序3-組に対しても1．5と同様の定理が成立する．順序 n-組 $\langle x_1, \cdots\cdots, x_n\rangle$ の場合は次のように帰納的に定義される．

1．7　定義　$\langle x_1, x_2 \cdots\cdots, x_n\rangle = \langle x_1, \langle x_2, \cdots\cdots, x_n\rangle\rangle$.

この定義は次の定理を与える．

1．8　$\langle x_1, \cdots\cdots, x_n, \langle x_{n+1}, \cdots\cdots, x_{n+p}\rangle\rangle = \langle x_1, \cdots\cdots, x_n, x_{n+1}, \cdots\cdots, x_{n+p}\rangle$.

これは n に関する帰納法によって示すことができる．また，任意の n に対して順序 n－組を定義するためには次の定義を与えておくのが便利である．

1．9　定義　$\langle x\rangle = x$.

次に，包含‘⊆’と真正の包含‘⊂’を定義する．

1．10　定義　$X \subseteq Y \equiv \forall u[u \in X \to u \in Y]$

$X \subset Y \equiv (X \subseteq Y) \wedge \sim (X = Y)$.

クラスはいかなるメンバーももたないとき，空（empty）であるとよばれる．任意のクラス X に対して，‘X は空である’は‘$\mathrm{Em}(X)$’で表される．

1．11　定義　$\mathrm{Em}(X) \equiv \forall u[\sim u \in X]$.

X と Y が共通のメンバーをもたなければ，‘$\mathrm{Ex}(X, Y)$’と表す．すなわち，X と Y は互いに排反的（exclusive）である．

1．12　定義　$\mathrm{Ex}(X, Y) \equiv \forall u[\sim (u \in X \wedge u \in Y)]$.

任意の u に対して，$\langle v, u\rangle \in X$ なる v がせいぜい 1 つ存在するのであれば，X は 1 価的（sigle-valued）であるとよばれ，‘$\mathrm{Un}(X)$’で表される．

1．13　定義　$\mathrm{Un}(X) \equiv \forall u, v, w[\langle v, u\rangle \in X \wedge \langle w, u\rangle \in X \to v = w]$.[10]

2 番目のグループの公理はクラスの存在に関わる．

［B 群］

1　$\exists A \forall x, y[\langle x, y\rangle \in A \equiv x \in y]$.

2　$\forall A, B \exists C \forall u[u \in C \equiv u \in A \wedge u \in B]$.

3　$\forall A \exists B \forall u[u \in B \equiv \sim (u \in A)]$.

4　$\forall A \exists B \forall x[x \in B \equiv \exists y[\langle y, x\rangle \in A]]$.

5　$\forall A \exists B \forall x, y[\langle y, x\rangle \in B \equiv x \in A]$.

6　$\forall A \exists B \forall x, y[\langle x, y\rangle \in B \equiv \langle y, x\rangle \in A]$.

7　$\forall A \exists B \forall x, y, z[\langle x, y, z\rangle \in B \equiv \langle y, z, x\rangle \in A]$.

8　$\forall A \exists B \forall x, y, z[\langle x, y, z\rangle \in B \equiv \langle x, z, y\rangle \in A]$.

公理 B 1は∈関係の公理である．B 2は共通クラス（intersection）の公理，B 3は補クラス（complement）の公理，B 4は定義域（domain）の公理，B 5は直積（direct product）の公理である．なぜなら，固有クラス V に対して B 5は $V \times A$ の存在を与えるからである．B 6−8は反転（inversion）の公理とよばれる．ところで，1 − 8 において存在が主張されるクラスのうち，例えば B 1の A の存在は一義的には決定されない．なぜなら，$\langle x, y\rangle \in A$ は順序対が A に属することは述べているが，それ以外の集合が A に属するか否かについては何も述べていないからである．同様のことは B 5−8におけるクラス B の存在に関してもいえる．それに対して，B 2におけるクラス C，B 3，B 4におけるクラス B の存在は，外延性公理を用いると一義的に決定することができる．そして，B 2−4においてその存在が一義的に決定されるクラスはそれぞれ，$A \cap B$，$-A$，$\mathrm{Dom}(A)$と表され，‘A と B の共通部分（クラス）’，‘A の補クラス’，‘A の定義域’とよばれる．

1．14　定義　$x \in A \cap B \equiv x \in A \wedge x \in B$.

1．15　定義　$x \in -A \equiv \sim x \in A$.

1．16　定義　$x \in \mathrm{Dom}(A) \equiv \exists y[\langle y, x\rangle \in A]$.

公理の 3 番目のグループは集合の存在を規定するものである．

［C 群］

1　$\exists a[\sim \mathrm{Em}(a) \wedge \forall x[x \in a \to \exists y[y \in a \wedge x \subset y]]]$.

2　$\forall x \exists y \forall u, v[u \in v \wedge v \in x \rightarrow u \in y]$.

3　$\forall x \exists y \forall u[u \subseteq x \rightarrow u \in y]$.

4　$\forall x \forall A[\mathrm{Un}(A) \rightarrow \exists y \forall u[u \in y \equiv \exists v[v \in x \wedge \langle u, v\rangle \in A]]]$.

公理C1はいわゆる無限公理 (axiom of infinity) である. 無限公理には他にいくつかの同値な表現があるが, Gödel は上記のものを採用する. a の任意の元 x が与えられると, x がそれの真部分集合となるような a のもう1つの元 y が存在する, といったような空ならざる集合 a が存在することをC1は主張している. C2は, 任意の集合 x に対して, x の全ての元の和を含む集合 y が存在すると主張している. C3は x の全ての部分集合を含む集合 y の存在を主張するものである. C4は現在でいう置換公理 (axiom of replacement) である. これは'任意の集合 x と任意の1価的 A とに対して, y の元は A によって定義される関係を x のメンバーに対してもつ, といった集合 y が存在する'と主張している. このC4のかわりに, Zermelo はこれよりも弱い次の分出公理 (Aussonderungsaxiom) を用いた.

$$\forall x \forall A \exists y \forall u[u \in y \equiv u \in x \wedge x \in A].$$

これは'性質 A をもつ x の元を元とする集合 y が存在する'と主張するものであり, この公理は前述の Russell のパラドックスを避けるために考え出されたものである. また, 置換公理から分出公理を証明することができるので, 分出公理は定理として自由に用いてよい.

以上A, B, Cの公理群に Gödel はさらに次の公理を付加する. もっとも, この公理は不可欠というものではなく, その後の展開を容易にしてくれるからとの理由で彼は付加している. そして, この公理は von Neumann によりその無矛盾性がすでに証明されているものである.

[公理D]　　$\sim \mathrm{Em}(A) \rightarrow \exists u[u \in A \wedge \mathrm{Ex}(u, A)]$.

この公理は'いかなる空ならざる A も, A と共通のメンバーをもたないある元をもつ'と主張している. これは現在, 正則性(基底)公理(axiom of regularity (foundation)) とよばれている. Gödel 自身述べているように, この公理は集合の無限下降列 (例えば, $\cdots\cdots x \in x \in x$) の非存在と同値である. よって, この公理は空集合から出発すべきことを含意しているともいえる. この公理Dを用いると次がえられる.

1.17　$\sim(x \in x)$.

もしそのような x が存在するとすると, x は x と $\{x\}$ の共通の元 ($x \in x \wedge x \in \{x\}$) となるが, Dによって, A として $\{x\}$ をとると, x は $\{x\}$ と共通の元をもつことはできないからである. 同様にして

1.18　$\sim(x \in y \wedge y \in x)$.

これは上と同様にして, $A=\{x, y\}$ を考察することによって示される.

次は選択公理 (axiom of choice) である.

[公理E]　　$\exists A[\mathrm{Un}(A) \wedge \forall x[\sim \mathrm{Em}(x) \rightarrow \exists y[y \in x \wedge \langle y, x\rangle \in A]]]$.

この公理は, 1価的関係 A によって, 考察中の世界のそれぞれの集合から1つの元を同時に選び出すことを可能とするものであり, Gödel 自身述べているように, 非常に強力な形での選択公理である.[11] この公理Eの無矛盾性が示されるならば, それより弱い形の選択公理の無矛盾性も明らかとなろう.

以上の公理群A, B, C, Dの体系が Gödel 集合論の体系Σである.[12]

2　クラスと集合の存在

I　Gödel 集合論では集合もクラスであるから，最も基本的な対象はクラスであるといってよい．ある条件（述語）をみたす集合の集まりをクラスとすれば，この述語には制限がなされなければならない．どのような述語をみたす集合の集まりを集合論で必要なクラスとすべきか．これを一般的観点から規定するのが，クラスの存在に関する'一般存在定理（general existence theorem)'である．この定理およびそれの証明を述べる前に，若干の予備的な結果に触れておきたい．

まず，原始命題関数（primitive propositional function），略して ppf なる概念を導入する．これは変数，特殊クラスに対する記号 A_1，……，A_k，関係記号∈，および論理語のみを含み，束縛変数としては集合変数のみをもつ有意味な論理式のことである．帰納的には次のように定義される［Π，Γ，……は変数ないし特殊クラスを意味する］．

(1)　$\Pi\in\Gamma$ は ppf である．

(2)　ϕ と ψ が ppf ならば，$\sim\phi$，$\phi\wedge\psi$ も ppf である．

(3)　ϕ が ppf ならば，$\exists x\phi$ も ppf であり，さらに，x を他の集合変数でおきかえてえられる結果も ppf である．

(4)　以上(1)，(2)，(3)によってえられる論理式のみが ppf である．

したがって，例えば $\forall u[u\in X\rightarrow u\in A]$ とか $\forall u[u\in x\equiv\forall v[v\in u\rightarrow v\in y]]$ などは ppf であるが，$\forall X$ とか $\exists X$ の現れる式は ppf でない．

またここで，空クラスや普遍クラスを導入する．公理 B 2や B 3を用いると，任意のクラス A に対して，$\forall u[u\in C\equiv\sim(u\in A)\wedge\sim(u\in -A)]$ なるクラス C が存在する．これは空のクラスであり，0で表される．さらに，$V=-0$で定義し，V を普遍クラス（universal class）とよぶ．外延性公理により，0と V は次の性質によって一義的に決定される．

2．1　定義　$\forall x[\sim x\in 0]$.

2．2　定義　$\forall x[x\in V]$.

ところで上述（特に公理 B 群）より，次の諸定理が成立する．

2．3　$\forall A\exists B\forall x,y[\langle x, y\rangle\in B\equiv x\in A]$.

2．4　$\forall A\exists B\forall x,y,z[\langle z, x, y\rangle\in B\equiv\langle x, y\rangle\in A]$.

2．5　$\forall A\exists B\forall x,y,z[\langle x, z, y\rangle\in B\equiv\langle x, y\rangle\in A]$.

2．6　$\forall A\exists B\forall x,y,z[\langle x, y, z\rangle\in B\equiv\langle x, y\rangle\in A]$.

これらのうち 2．3 は公理 B 5と B 6の帰結であり，2．4 は変数を適当にかえ，B 5にでてくる順序対の 2 番目のメンバーにある順序対を代入することによってえられる．2．5 と 2．6 は B 7と B 8を 2．4 に適用することによってえられる．同様にして，B 5の x に $\langle x_1$，……，$x_n\rangle$ を代入すると

2．7　$\forall A\exists B\forall y\forall x_1, \ldots\ldots, x_n[\langle y, x_1, \ldots\ldots, x_n\rangle\in B\equiv\langle x_1, \ldots\ldots, x_n\rangle\in A]$

がえられ，これからくり返しによって

2．8　$\forall A\exists B\forall y_1, \ldots\ldots, y_k\forall x_1, \ldots\ldots, x_n[\langle y_1, \ldots\ldots, y_k, x_1, \ldots\ldots, x_n\rangle\in B\equiv\langle x_1, \ldots\ldots, x_n\rangle\in A]$

がえられ，同様にして 1．8 や 2．5 を用いると

2．9　$\forall A\exists B\forall y_1, \ldots\ldots, y_k\forall x_1, \ldots\ldots, x_n[\langle x_1, y_1, \ldots\ldots, y_k, x_2, \ldots\ldots, x_n\rangle\in B\equiv\langle x_1,$

……, $x_n\rangle \in A]$

がえられる．さらに2．6と2．3のzとyに $\langle y_1,$ ……, $y_k\rangle$ を代入し，1．8を適用すると

2．10 $\forall A \exists B \forall x_1, x_2 \forall y_1,$ ……, $y_k[\langle x_1, x_2, y_1,$ ……, $y_k\rangle \in B \equiv \langle x_1, x_2\rangle \in A]$,

2．11 $\forall A \exists B \forall x \forall y_1,$ ……, $y_k[\langle x, y_1,$ ……, $y_k\rangle \in B \equiv x \in A]$

がえられる．また次の定理はB4の一般化であり，B4においてxのかわりに $\langle x_2,$ ……, $x_n\rangle$ を代入することによってえられる．

2．12 $\forall A \exists B \forall x_2,$ ……, $x_n[\langle x_2,$ ……$x_n\rangle \in B \equiv \exists x_1[\langle x_1,$ ……, $x_n\rangle \in A]]$.

特に，$B=\mathrm{Dom}(A)$は上の同値関係をみたす．

また，一般存在定理の証明では，特殊クラスA_iのどれも$A_i \in \Gamma$の形で現れることはないとみなしてよい．なぜなら，公理A2によって，$A_i \in \Gamma$は$\exists x[x=A_i \wedge x \in \Gamma]$ でおきかえることができるし，公理A3によって，$x=A_i$は$\forall u[u \in x \equiv u \in A_i]$ でおきかえることができるからである．

Ⅱ　以上の準備のもとに一般存在定理の証明を行う．次のメタ定理は，どのようなppfの外延もクラスを用いて表すことができるということを述べている．

［M1］　一般存在定理　$\phi(x_1,$ ……, $x_n)$が自由変数として$x_1,$ ……, x_nのみを含む［ただし，これら全てを含む必要はない］ppfであれば，任意の集合$x_1,$ ……x_nに対して次が成立するようなクラスAが存在する．

$$\langle x_1, \cdots\cdots, x_n\rangle \in A \equiv \phi(x_1, \cdots\cdots, x_n)$$

［証明］　証明はϕに含まれる論理語の個数に関する帰納法による．

（Ⅰ）　ϕが論理語を全然含まない場合は，ϕは$x_r \in x_s$か$x_r \in A_k$のどちらかの形をとる$(1 \leq r, s \leq n)$．　ϕが$x_r \in x_s$の形をしているときは，$\langle x_1,$ ……, $x_n\rangle \in A \equiv x_r \in x_s$なるクラス$A$の存在することを示さねばならない．

さて，$r=s$のときは1．17より$\sim(x_r \in x_r)$であるから，Aとして空クラス0をとればよい．$r \neq s$のときは，ϕは$x_p \in x_q$か$x_q \in x_p (p<q)$のどちらかである．$x_p \in x_q$の場合，公理B1により，$\langle x_p, x_q\rangle \in F \equiv x_p \in x_q$なる$F$が存在する．$x_q \in x_p$に対しては，公理B1とB6により，$\langle x_p, x_q\rangle \in F \equiv x_q \in x_p$なる$F$が存在する．よっていずれにせよ，$\langle x_p, x_q\rangle \in F \equiv \phi(x_1,$ ……, $x_n)$なるFが存在する．また，定理2．10により

$$\langle x_p, x_q, x_{q+1}, \cdots\cdots, x_n\rangle \in F_1 \equiv \langle x_p, x_q\rangle \in F$$

なるF_1が存在し，さらに，2．9により

$$\langle x_p, \cdots\cdots, x_n\rangle \in F_2 \equiv \langle x_p, x_q, x_{q+1}, \cdots\cdots, x_n\rangle \in F_1$$

なるF_2が存在する．最後に，2．8により

$$\langle x_1, \cdots\cdots, x_n\rangle \in A \equiv \langle x_p, \cdots\cdots, x_n\rangle \in F_2$$

なるクラスAが存在する．よって，以上の同値関係を結合すると次がえられる．

$$\langle x_1, \cdots\cdots, x_n\rangle \in A \equiv \phi(x_1, \cdots\cdots, x_n)$$

次に，ϕが$x_r \in A_k$の形をとる場合．まず，2．3により

$$\langle x_r, x_{r+1}\rangle \in F \equiv \phi(x_1, \cdots\cdots, x_n)$$

なるFが存在する．$r=n$のときは，公理B5により

$$\langle x_{r-1}, x_r\rangle \in F \equiv \phi(x_1, \cdots\cdots, x_n)$$

なるFが存在する．いずれにせよ，上と同様の論法により，定理2．8と2．10を用いてそれらから結果する同値関係を結合することによって，Aの存在を示すことができる．すなわ

ち

$$\langle x_1, \cdots\cdots x_n\rangle \in A \equiv \phi(x_1, \cdots\cdots, x_n)$$

なるクラス A が存在する．

（II） 論理語の個数が m より小さいときに成立すると仮定して m の場合を示す．この場合，ϕ は次のうちのどれかの形をしている．

$$(1)\ \sim\psi,\ (2)\ \psi\wedge\chi,\ (3)\ \exists x\,\theta$$

帰納法の仮定により，次のようなクラス B, C, D が存在する．

$$\langle x_1, \cdots\cdots, x_n\rangle \in B \equiv \psi(x_1, \cdots\cdots, x_n)$$

$$\langle x_1, \cdots\cdots, x_n\rangle \in C \equiv \chi(x_1, \cdots\cdots, x_n)$$

$$\langle x, x_1, \cdots\cdots, x_n\rangle \in D \equiv \theta(x, x_1, \cdots\cdots, x_n)$$

(1)の場合は A を $-B$ としてとればよい．なぜなら，公理 B 3により

$$\langle x_1, \cdots\cdots, x_n\rangle \in -B \equiv \sim[\langle x_1, \cdots\cdots x_n\rangle \in B]$$

よって，　$\langle x_1, \cdots\cdots, x_n\rangle \in -B \equiv \sim\psi(x_1, \cdots\cdots, x_n)$

すなわち，$\langle x_1, \cdots\cdots, x_n\rangle \in -B \equiv \phi(x_1, \cdots\cdots, x_n)$

(2)の場合は A を $B\cap C$ としてとればよい．なぜなら，公理 B 2により

$$\langle x_1, \cdots\cdots, x_n\rangle \in B\cap C \equiv \langle x_1, \cdots\cdots, x_n\rangle \in B \wedge \langle x_1, \cdots\cdots, x_n\rangle \in C$$

すなわち，$\langle x_1, \cdots\cdots x_n\rangle \in B\cap C \equiv \psi(x_1, \cdots\cdots, x_n) \wedge \chi(x_1, \cdots\cdots, x_n)$

ゆえに，　$\langle x_1, \cdots\cdots, x_n\rangle \in B\cap C \equiv \phi(x_1, \cdots\cdots, x_n)$

(3)の場合は A を $\mathrm{Dom}(D)$ としてとればよい．なぜなら，定理 2 .12により

$$\langle x_1, \cdots\cdots, x_n\rangle \in \mathrm{Dom}(D) \equiv \exists x[\langle x, x_1, \cdots\cdots, x_n\rangle \in D]$$

よって，　$\langle x_1, \cdots\cdots, x_n\rangle \in \mathrm{Dom}(D) \equiv \exists x\,\theta(x, x_1, \cdots\cdots, x_n)$

ゆえに，　$\langle x_1, \cdots\cdots, x_n\rangle \in \mathrm{Dom}(D) \equiv \phi(x_1, \cdots\cdots, x_n)$

これで M 1の証明は終わった．

III　ここで，今までに導入された定義ずみの記号をみてみると，次の 4 つのタイプに分類することができる．

1　特殊クラス　　　　：0, V, ……
2　観念（notion）　　：$\mathrm{M}(X)$, $\mathrm{Pr}(X)$, $X\subseteq Y$, ……
3　演算（operation）：$-X$, $\mathrm{Dom}(X)$, $X\cap Y$, ……
4　変数（variable）　：x, X, ……

ところで，上で証明された M 1は ppf に対する存在定理であった．しかし，定義によって導入される諸記号をみると，より広範な命題関数を視野に入れておいた方が望ましいように思われる．もちろんそれらの命題関数に対しても存在定理の成立することが期待されるのであるが．そのことを明らかにするために，Gödel は一般的視点からの命題関数を定義した後に，新たに正規命題関数なる概念を導入する．

まず，ターム（項）と命題関数であるが，これらは通常の帰納的やり方で定義される．すなわち，(1) 変数と特殊クラスを表す記号はタームであり，A が n 変数の演算で，t_1, ……, t_n がタームならば $A(t_1, \cdots\cdots t_n)$ はタームである．そして以上によって規定されたものだけがタームである．(2) B が n 変数の観念で，t_1, ……t_n がタームならば $B(t_1, \cdots\cdots t_n)$ は（極小）命題関数である．極小命題関数を論理語や任意の種類の変数に対する限定作用素を用いて結合した結果えられるものが命題関数である．そして以上によりえられるものだけが命題

関数である.

また.前述の4つのタイプの記号のそれぞれに対してはそれに対応する種類の定義が存在するが,それは次のようである.

(1) 特殊クラス A は定義公準 (defining postulate) $\phi(A)$によって定義され,導入される.ただし,ϕはそれ以前に定義された記号だけを含む命題関数であり,しかも,$\phi(A)$をみたす A はただ1つ存在するということが示されねばならない.

(2) 観念 $\mathscr{B}$ は次の規約によって導入される.

$$\mathscr{B}(X_1,\ \cdots\cdots,\ X_n)=\phi(X_1,\ \cdots\cdots,\ X_n).$$

ただし,ϕはそれ以前に定義された記号だけを含む命題関数である.

(3) 演算 $\mathscr{A}$ は次の定義公準によって導入される.

$$\forall X_1,\ \cdots\cdots,\ X_n\phi(\mathscr{A}(X_1,\ \cdots\cdots,\ X_n),\ X_1,\ \cdots\cdots,\ X_n).$$

ただし,ϕはそれ以前に定義された記号だけを含む命題関数であり,また次が証明されねばならない.

$$\forall X_1,\ \cdots\cdots,\ X_n\exists!Y\phi(Y,\ X_1,\ \cdots\cdots,\ X_n).$$

(4) 変数 x は次の規約により導入される:任意の命題関数ϕに対して,$\forall \mathrm{x}\phi(\mathrm{x})$は$\forall X[\mathscr{B}(X)\rightarrow\phi(X)]$ を意味し,$\exists\mathrm{x}\phi(\mathrm{x})$は$\exists X[\mathscr{B}(X)\wedge\phi(X)]$ を意味する.ただし,$\mathscr{B}$はそれ以前に定義された観念であり,それの外延は変数 x の変域とよばれる.

Ⅳ さて,一般に命題関数$\phi(x_1,\ \cdots\cdots,\ x_n)$に対して $\langle x_1,\ \cdots\cdots,\ x_n\rangle\in A\equiv\phi(x_1,\ \cdots\cdots x_n)$が成立するとしても,それからただちに集合論で必要とされるクラス A の存在はいえない.そこで,定義によって新たに導入された概念によってある意味で拡大された命題関数のうち,どのようなものに対して存在定理が成立するかを明らかにするために Gödel は正規性概念を導入する.それは次のように説明される.

(1) 次のような ppf ϕが存在するならば,$\mathscr{B}$は正規観念 (normal notion) とよばれる.

$$\mathscr{B}(X_1,\ \cdots\cdots,\ X_n)\equiv\phi(X_1,\ \cdots\cdots,\ X_n).$$

(2) 次のような ppf ϕが存在するならば,$\mathscr{A}$ は正規演算とよばれる.

$$Y\in\mathscr{A}(X_1,\ \cdots\cdots,\ X_n)\equiv\phi(Y,\ X_1,\ \cdots\cdots,\ X_n).$$

(3) 変数は,それの変域がクラスの元からなるのであれば,正規的である.

(4) 命題関数$\phi(X_1,\ \cdots\cdots,\ X_n)$は,それが正規観念,正規演算,および正規束縛変数だけを含むならば,正規的である.

(5) タームは,それが正規演算だけを含むならば,正規的である.

ここで,ppf と正規命題関数の関係を考えてみる.ある正規命題関数$\phi(X_1,\ \cdots\cdots,\ X_n)$が与えられたとする.もし$\phi$の中に集合変数でない束縛変数が含まれているなら,それは全て集合変数でおきかえることができる.例えば,$\exists\mathrm{x}\theta(\mathrm{x})$は$\exists x[x\in A\wedge\theta(x)]$ でおきかえることができる.ただし,A は変数 x の変域である.また,ϕに含まれる観念$\mathscr{B}$に対しては,極小命題関数$\mathscr{B}(X_1,\ \cdots\cdots,\ X_n)$はそれと同値な ppf たる$\psi(X_1,\ \cdots\cdots,\ X_n)$でおきかえることができる.さらに$\in$関係に対しては,$X$ が集合変数でないときの $X\in Y$ の形の文脈は,前述したように,$u\in X$ の形の極小論理式だけを残して除去することができるし,X が変数ないし特殊クラスでないときは,正規演算 $\mathscr{A}$ に対して $\mathscr{A}(X_1,\ \cdots\cdots,\ X_n)$の形をしている.そして,$u\in\mathscr{A}(X_1,\ \cdots\cdots,\ X_n)$なる形の演算 $\mathscr{A}$ の場合は,$u\in\mathscr{A}(X_1,\ \cdots\cdots,\ X_n)\equiv\psi(u,\ X_1,\ \cdots\cdots,\ X_n)$となるような ppf たる$\psi$でおきかえることができる.このようにして,$\phi$は ppf

に還元することが可能である．よって次が成立する．

［M 2］　どの正規命題関数もある ppf に同値である．したがって，M 1は任意の正規命題関数 $\phi(X_1,\ \cdots\cdots,\ X_n)$ に対してもまた成立する．

さて，Gödel にならって特殊クラスや観念，演算を共通名 ‘概念 (concept)’ とよぶことにすれば，[13] 今までに導入された概念は全て正規的であることが示される．すなわち，$Y \in \mathscr{A}(X_1,\ \cdots\cdots,\ X_n)$ と $\mathscr{B}(X_1,\ \cdots\cdots,\ X_n)$ のそれぞれに対して，それらと同値な命題関数で，それ以前に正規的であることが示された観念，演算および束縛変数だけを含むようなものを構成することが可能となるのである．そこで次に正規的概念を列挙するが，その前に，集合変数を用いて定義されたもの（例えば１．２，１．３，１．４）をクラス変数によるものに拡大しておきたい．クラスが基本的と考えるからである．上述の 3 つの定義は次のようになる．

2．13　定義　$\forall u[u \in \{X,\ Y\} \equiv (u=X \vee u=Y)]$.

2．14　定義　$\{X\} = \{X,\ X\}$.

2．15　定義　$\langle X,\ Y\rangle = \{\{X\},\ \{X,\ Y\}\}$.

今までに導入された正規的概念は次のようである．

$X \in Y = \in(X,\ Y) \equiv X \in Y$,

$X=Y \equiv \forall u[u \in X \equiv u \in Y]$,

$\mathrm{M}(X) \equiv \exists u[u=X] \equiv \exists u \forall x[x \in u \equiv x \in X]$,

$\mathrm{Pr}(X) \equiv \sim \mathrm{M}(X)$,

$Z \in \{X,\ Y\} \equiv (Z=X \vee Z=Y) \wedge \mathrm{M}(Z)$,

$Z \in \langle X,\ Y\rangle \equiv Z \in \{\{X\},\ \{X,\ Y\}\}$,　順序 3 -組等についても同様．

$X \subseteq Y \equiv \forall u[u \in X \rightarrow u \in Y]$,

$X \subset Y \equiv \forall u[u \in X \rightarrow u \in Y] \wedge \sim(X=Y)$,

$\mathrm{Un}(X) \equiv \forall u,v,w[\langle u,\ v\rangle \in X \wedge \langle w,\ v\rangle \in X \rightarrow u=w]$,

$X \in -A \equiv \mathrm{M}(X) \wedge \sim(X \in A)$,

$X \in A \cap B \equiv X \in A \wedge X \in B$,

$X \in \mathrm{Dom}(A) \equiv \mathrm{M}(X) \wedge \exists y[\langle y,\ X\rangle \in A]$,

$\mathrm{Em}(X) \equiv \sim \exists u[u \in X]$,

$\mathrm{Ex}(X,\ Y) \equiv \sim \exists u[u \in X \wedge u \in Y]$.

V　正規命題関数 $\phi(x_1,\ \cdots\cdots,\ x_n)$ の中には特殊クラス $A_1 \cdots\cdots,\ A_k$ も含まれているが，それらは完全に任意であり，一般的なクラス変数 $X_1,\ \cdots\cdots,\ X_k$ でおきかえてよい．したがって，存在定理は次のようになる．

［M 3］　ϕ が正規的であれば

$\forall X_1,\ \cdots\cdots,\ X_n \exists A \forall x_1,\ \cdots\cdots,\ x_n\ [\langle x_1,\ \cdots\cdots,\ x_n\rangle \in A \equiv \phi(x_1,\ \cdots\cdots,\ x_n,\ X_1,\ \cdots\cdots,\ X_n)]$.

この M 3を用いると，例えば直積 $A \times B$ を定義，導入することができる．

2．16　定義　$\forall x[x \in A \times B \equiv \exists y,z[x=\langle y,\ z\rangle \wedge y \in A \wedge z \in B]]$.

$\phi(x) = \exists y,z[x=\langle y,\ z\rangle \wedge y \in A \wedge z \in B]$ とおけば，明らかに $\phi(x)$ は正規的である．M 3は全ての A，B に対して $A \times B$ の存在を保証するものである．また，$A \times B$ の一意性は外延性公理による．

2．17　定義　$A^2 = A \times A$.

2.18 定義 $A^3=A\times A^2$.

以下，A^4, A^5, ……も同様に定義される．よって，V^2 は全ての順序対のクラスであり，V^n は全ての順序 n-組のクラスである．さらに，全ての順序3-組は順序対でもあるので次が成立する．

2.19 $V^3\subseteq V^2$.

(2項) 関係は順序対のクラスとして定義でき，3項関係は順序3-組のクラスとして，一般に n 項関係は順序 n-組のクラスとして定義できる．例えば

2.20 定義 $\mathrm{Rel}(X)\equiv X\subseteq V^2$

2.21 定義 $\mathrm{Rel}_3(X)\equiv X\subseteq V^3$

'$\mathrm{Rel}(X)$' は '$\mathrm{Rel}_2(X)$' と表してもよい．$\mathrm{Rel}(A)$の場合，$\langle x,\ y\rangle\in A$ は 'x は y に対して関係 A をもつ' と読まれる．これはまた 'xAy' と表してもよい．

2.22 定義 $xAy\equiv\langle x,\ y\rangle\in A$

関係は，一般的にいって，多価 (many-valued) 関数と考えることができる．よって，xAy は 'x は (アーギュメント) y に対する A の値である' と読んでよい．あるいは，対応概念を用いるなら，'x は A による y の像である' とか 'y は A に関する x の原像である' と読んでよい．

関数概念を外延性公理に適用すると，関係に対する次の外延性原理がえられる．

2.23 $\mathrm{Rel}(X)\wedge\mathrm{Rel}(Y)\rightarrow\forall u,v[\langle u,\ v\rangle\in X\equiv\langle u,\ v\rangle\in Y\rightarrow X=Y]$

明らかに，上の外延性原理は n 項関係に拡大することができる．そして，存在定理は次の形で表現することが可能となる．

[M 4] 正規命題関数 $\phi(x_1,\ \cdots\cdots,\ x_n)$が与えられると，次をみたすようなただ1つの n 項関係 A が存在する．

$$\forall x_1,\ \cdots\cdots,\ x_n[\langle x_1,\ \cdots\cdots,\ x_n\rangle\in A\equiv\phi(x_1,\ \cdots\cdots,\ x_n)]$$

A の一意性の証明は直接にできる．すなわち，条件をみたす任意のクラス A'をとり，A を $A'\cap V^n$とする．A は n 項関係であり，外延性原理2.23により一意的である．

ところで Gödel は，M 4によって定義される A を $\hat{x}_1,\ \cdots\cdots,\ \hat{x}_n\ [\phi(x_1,\ \cdots\cdots,\ x_n)]$ で表している．$\alpha_1,\ \cdots\cdots,\ \alpha_n$ が正規変数である場合，$\hat{\alpha}_1,\ \cdots\cdots,\ \hat{\alpha}_n\ [\phi(\alpha_1,\ \cdots\cdots,\ \alpha_n)]$ は$\hat{x}_1,\ \cdots\cdots,\ \hat{x}_n[\phi(x_1,\ \cdots\cdots,\ x_n)\wedge x_1\in C\wedge\cdots\cdots\wedge x_n\in C]$ と同じである．ただし，C は変数 α_i の変域である．

Ⅵ M 4を用いて，$\in$-関係 E, 同一性関係 I は定義される．

2.24 定義 $\mathrm{Rel}(E)\wedge\forall u,v[\langle u,\ v\rangle\in E\equiv u\in v]$.

2.25 定義 $\mathrm{Rel}(I)\wedge\forall u,v[\langle u,\ v\rangle\in I\equiv u=v]$.

逆関係 (converse relation) は，公理B 6, B 7, B 8に対応して，次のように定義される．

2.26 定義 $\mathrm{Rel}[\mathrm{Cnv}(X)]\wedge\forall u,v[\langle u,\ v\rangle\in\mathrm{Cnv}(X)\equiv\langle v,\ u\rangle\in X]$.

2.27 定義 $\mathrm{Rel}_3[\mathrm{Cnv}_2(X)]\wedge\forall u,v,w[\langle u,\ v,\ w\rangle\in\mathrm{Cnv}_2(X)\equiv\langle v,\ w,\ u\rangle\in X]$.

2.28 定義 $\mathrm{Rel}_3[\mathrm{Cnv}_3(X)]\wedge\forall u,v,w[\langle u,\ v,\ w\rangle\in\mathrm{Cnv}_3(X)\equiv\langle u,\ w,\ v\rangle\in X]$.

2.29 定義 $\mathrm{Cnv}(X)$は$\mathrm{Cnv}_1(X)$，X^{-1}，$\check{X}$ によって表してもよい．

2項ブール演算 '+' と '−' は '∩' と '−(補，complement)' を用いて定義される．

2.30 定義 $X+Y=-(-X\cap-Y)$.

2.31 定義 $X-Y=X\cap-Y$.

2．32　定義　$\mathrm{Rng}(X)=\mathrm{Dom}(X^{-1})$.

定義2 .30からわかるように，$X+Y$ は集合論的には $X\cup Y$ と解釈できる．$\mathrm{Rng}(X)$ は X の値の領域（値域，range）とよばれる．

クラス A の B への制限は '$A\restriction B$' で表される．

2．33　定義　$A\restriction B=A\cap(V\times B)$.

$A\restriction B$ は，B のメンバーを第2メンバーとする順序対であるような A の全ての元からなる．次の定理がえられる．

2．34　$\mathrm{Dom}(A\restriction B)=\mathrm{B}\cap\mathrm{Dom}(\mathrm{A})$.

2．35　定義　$B\upharpoonleft A=A\cap(B\times V)$.

2．36　定義　$B``X=\mathrm{Rng}(B\restriction X)$.

$B``X$ は，B による X の全ての元の像のクラスである．

2．37　定義　$\langle x,\ y\rangle\in R\mid S\equiv\exists z[xRz\wedge zSy]\wedge\mathrm{Rel}(R\mid S)$.

2．38　定義　$\mathrm{Un}_2(X)=\mathrm{Un}(X)\wedge\mathrm{Un}(X^{-1})$.

$\mathrm{Un}_2(X)$ は，'X は1対1（one-to-one）である'，つまり，'関係 $X\cap V^2$ は1対1である' を意味する．X が関係であると同時に1価的であれば，X は関数（function）であるといわれる．

2．39　定義　$\mathrm{Fnc}(X)\equiv\mathrm{Rel}(X)\wedge\mathrm{Un}(X)$.

定義域が A である関数 X は A 上の関数（function over A）とよばれる．

2．40　定義　$X\mathrm{Fn}A\equiv\mathrm{Fnc}(X)\wedge\mathrm{Dom}(X)=A$.

なお，A から B への関数 F が1対1であるときは '$F:A\xrightarrow{1-1}B$' と表してよい．

$A`x$ は，y が一義的に存在するときは $\langle y,\ x\rangle\in A$ なる y を表し，y が存在しないか一義的でないときは0である．

2．41　定義　$\{\exists!y[\langle y,\ x\rangle\in A]\rightarrow\langle A`x,\ x\rangle\in A\}\wedge\{\sim\exists!y[\langle y,\ x\rangle\in A]\rightarrow A`x=0\}$
$\wedge\mathrm{M}[A`x]$.

前述の2 .23は関数に対する次の外延性原理を与える．

2．42　$X\mathrm{Fn}A\wedge Y\mathrm{Fn}A\rightarrow\{\forall u[u\in A\rightarrow X`u=Y`u]\rightarrow X=Y\}$.

この原理を用いると次がえられる．

［M 5］　$\phi(u_1,\ \cdots\cdots,\ u_n)$ が正規タームで，$B\subseteq V^n$ かつ

$$\langle u_1,\ \cdots\cdots,\ u_n\rangle\in B\rightarrow\mathrm{M}[\phi(u_1,\ \cdots\cdots,\ u_n)]$$

であれば，次をみたすただ1個の B 上の関数 C が存在する．

$$\langle u_1,\ \cdots\cdots,\ u_n\rangle\in B \text{ に対して，} C`\langle u_1,\ \cdots\cdots,\ u_n\rangle=\phi(u_1,\ \cdots\cdots,\ u_n).$$

［証明］　次の条件によって C を定義する．

$$\langle u,\ u_1,\ \cdots\cdots,\ u_n\rangle\in C\equiv\{u=\phi(u_1,\ \cdots\cdots,\ u_n)\wedge\langle u_1,\ \cdots\cdots,\ u_n\rangle\in B\}.$$

右辺は正規的であるから，M 4によって，条件をみたす $n+1$ 項関係 C が存在する．今，そのような $n+1$ 項関係がほかに C_1 として存在するとすると，任意の $\langle u_1,\ \cdots\cdots u_n\rangle\in B$ に対して，

$$C`\langle u_1,\ \cdots\cdots,\ u_n\rangle=\phi(u_1,\ \cdots\cdots,\ u_n),$$

かつ，　$C_1`\langle u_1,\ \cdots\cdots,\ u_n\rangle=\phi(u_1,\ \cdots\cdots,\ u_n)$,

よって，　$C`\langle u_1,\ \cdots\cdots,\ u_n\rangle=C_1`\langle u_1,\ \cdots\cdots,\ u_n\rangle$,

ゆえに任意の $\langle u_1,\ \cdots\cdots,\ u_n\rangle$ に対して，

$$\langle u_1,\ \cdots\cdots,\ u_n\rangle\in B\rightarrow C`\langle u_1,\ \cdots\cdots,\ u_n\rangle=C_1`\langle u_1,\ \cdots\cdots,\ u_n\rangle.$$

また明らかに，$C\mathrm{Fn}B$ かつ $C_1\mathrm{Fn}B$．よって，2 .42により，$C=C_1$ となり，C は定理の条件を

みたす.

さらに，このM5を一般化して次がえられる.

[M6]　B_1, ……, B_k が相互に排反であり，$B_i \subseteq V^n$，かつ ϕ_1, ……, ϕ_k が $\langle u_1, \ldots\ldots, u_n\rangle \in B_i$ に対して，$M[\phi_i(u_1, \ldots\ldots, u_n)]$ となるような正規タームであれば，次のような $B_1+B_2+\cdots\cdots+B_n$ 上のただ1個の関数 C が存在する.

$\langle u_1, \cdots\cdots u_n\rangle \in B_i (i=1, 2, \ldots\ldots, k)$ に対して

$$C`\langle u_1, \ldots\ldots, u_n\rangle = \phi_i(u_1, \ldots\ldots, u_n).$$

Ⅶ　以下の公準により関数 P_1, ……, P_5 を定義する．なお，これらの関数の存在と一意性はM5による.

2．43　定義　$P_1`\langle x, y\rangle = x \wedge P_1 \mathrm{Fn} V^2$.

2．44　定義　$P_2`\langle x, y\rangle = y \wedge P_2 \mathrm{Fn} V^2$.

2．45　定義　$P_3`\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle \wedge P_3 \mathrm{Fn} V^2$.

2．46　定義　$P_4`\langle x, y, z\rangle = \langle z, x, y\rangle \wedge P_4 \mathrm{Fn} V^3$.

2．47　定義　$P_5`\langle x, y, z\rangle = \langle x, z, y\rangle \wedge P_5 \mathrm{Fn} V^3$.

クラスXの合併クラスは次のように定義される.

2．48　定義　$u \in \cup X \equiv \exists v[u \in v \wedge v \in X]$.

次の結果がえられる.

2．49　$\cup\{x, y\} = x+y$.

2．50　$\cup\{x\} = x$.

2．51　$\cup X = E``X$.

X のべきクラス，つまり，X の部分集合のクラス $\mathscr{P}(X)$ は次のように定義される.

2．52　定義　$u \in \mathscr{P}(X) \equiv u \subseteq X$.

上に定義された演算のうちのあるものは次のような単調性（monotonicity）をもつ.

2．53　$X \subseteq Y \rightarrow \mathrm{Dom}(X) \subseteq \mathrm{Dom}(Y)$.

明らかに，Rng，∪，$\mathscr{P}$，Cnv_i も同じ性質をもつ．また次も成立する.

2．54　$A \subseteq B \wedge X \subseteq Y \rightarrow A``X \subseteq B``Y$.

1，↾，＋，∩，×等も同様の性質をもつ．また次の分配性も成立する.

2．55　$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$.

次は2.55の特殊ケースである.

2．56　$(A \times V) \cap (V \times B) = A \times B$.

同様にして

2．57　$\cup(X+Y) = \cup X + \cup Y$.

2．58　$\cup(X \cap Y) \subseteq \cup X \cap \cup Y$.

次の諸定理は定義2.43～2.47からえられる.

2．59　$\mathrm{Rng}(A) = P_1``A$.

2．60　$\mathrm{Dom}(A) = P_2``A$.

2．61　$\mathrm{Cnv}(A) = P_3``A$.

2．62　$\mathrm{Cnv}_2(A) = P_4``A$.

2．63　$\mathrm{Cnv}_3(A) = P_5``A$.

2．64　$V \times A = P_2^{-1}``A$.

なお，これまでに導入された観念，演算は全て正規的である．

VIII　ところで，今まで列挙された定理はＡとＢの公理群に依存するものであったが，集合の存在に関する定理は残りのＣ，Ｄの両公理群に依存する．以下，集合と固有クラスの存在について概説する．

2．65　$\mathrm{Un}(A) \wedge \mathrm{M}(X) \to \mathrm{M}(A``X)$.

［証明］　$\mathrm{M}(X)$であるから，公理Ｃ4により，それの元がXのメンバーに対して関係$A \cap V^2$をもつような集合である集合yが存在する．すなわち，$\forall u[u \in y \equiv u \in A``X]$が成立するような集合$y$が存在する．したがって外延性公理により，$y$は$A``X$と同じであり，$y$は集合であったから$\mathrm{M}(A``X)$．

2．66　$\mathrm{M}(X) \to \mathrm{M}(X \cap Y)$.

［証明］　２.65のAに$I \restriction Y$を代入すると，$\mathrm{M}[(I \restriction Y)``X]$．しかるに，$(I \restriction Y)``X = X \cap Y$.

2．67　$\mathrm{M}(X) \wedge Y \subseteq X \to \mathrm{M}(Y)$.

［証明］　２.66と，$Y \subseteq X \to Y = X \cap Y$による．

2．68　$\mathrm{M}(X) \to \mathrm{M}(\mathscr{P}(X))$.

［証明］　$\mathrm{M}(X)$とすると，Ｃ3と２.52より$\mathscr{P}(X) \subseteq y$なる$y$が存在する．これと２.67により，$\mathrm{M}(\mathscr{P}(X))$．

2．69　$\mathrm{M}(X) \to \mathrm{M}(\cup X)$.

［証明］　公理Ｃ2と２.67による．

2．70　$\mathrm{M}(X) \wedge \mathrm{M}(Y) \to \mathrm{M}(X+Y)$.

［証明］　XとYが集合ならば，$X+Y = \cup\{X, Y\}$．公理Ａ4により，$\{X, Y\}$は集合である．よって，２.69により，$\mathrm{M}(X+Y)$．

次の３つの定理は２.59～２.63を用いて２.65により証明される．

2．71　$\mathrm{M}(\mathrm{Dom}(x))$.

2．72　$\mathrm{M}[\mathrm{Cnv}_i(x)]$　$(i=1, 2, 3)$.

2．73　$\mathrm{M}(\mathrm{Rng}(x))$.

また，２.71とＭ5により，次のような関数D_oの存在することが示される．

2．74　**定義**　$D_o`x = \mathrm{Dom}(x) \wedge D_o \mathrm{Fn} V$.

2．75　$\mathrm{M}(x \times y)$.

［証明］　$x \times y$のメンバーは$u \in x$, $v \in y$となるような対$\langle u, v \rangle$である．そのとき特に，uとvは$x+y$の元であり，$\{u\}$と$\{u, v\}$は$x+y$の部分集合となる．ゆえに$\{\{u\}, \{u, v\}\}$は$\mathscr{P}(x+y)$の部分集合である．すなわち，$\langle u, v \rangle \subseteq \mathscr{P}(x+y)$．よって，$\langle u, v \rangle \in \mathscr{P}[\mathscr{P}(x+y)]$．すなわち，$x \times y \subseteq \mathscr{P}[\mathscr{P}(x+y)]$．ゆえに２.68，２.67，２.70により，$\mathrm{M}(x \times y)$．

2．76　$F \mathrm{Fn} x \to \mathrm{M}(F)$.

［証明］　$F \mathrm{Fn} x$とすると，$\mathrm{Un}(F) \wedge \mathrm{M}(x)$であるから２.65より，$\mathrm{M}(F``x)$．よって２.75より，$\mathrm{M}[(F``x) \times x]$.他方，$F \mathrm{Fn} x \to F \subseteq (F``x) \times x$．ゆえに$F \subseteq (F``x) \times x$．よって２.67より$\mathrm{M}(F)$.

2．77　$\mathrm{Un}(F) \to \mathrm{M}(F \restriction x)$.

［証明］　$\mathrm{Un}(F)$とする．すると$F \restriction x$は$\mathrm{Dom}(F \restriction x)$上の関数である．また，２.34より，$\mathrm{Dom}(F \restriction x) = x \cap \mathrm{Dom}(F) \subseteq x$．さらに，$\mathrm{M}(x)$．ゆえに，２.67より，$\mathrm{M}[\mathscr{P}(F \restriction x)]$．よって，集合$\mathrm{Dom}(F \restriction x)$に対して，$F \restriction x$は$\mathrm{Dom}(F \restriction x)$上の関数である．したがって，２．76より，$\mathrm{M}(F \restriction x)$．

2．78 M(0).

［証明］ $0 \subseteq x$. よって，2.67より，M(0).

2．79 $\sim$M(V).

［証明］ $x \in V$. よって，M(V)であれば $V \in V$ となるが，1.17よりそれは不可能である.

2．80 $\mathrm{Pr}(X) \rightarrow \mathrm{Pr}(\cup X)$.

［証明］ M($\cup X$)とする．すると，M($\mathscr{P}(\cup X)$)．しかるに，$X \subseteq \mathscr{P}(\cup X)$．ゆえに，M($X$)．これは仮定に反する.

上と同様にして

2．81 $\mathrm{Pr}(X) \rightarrow \mathrm{Pr}(\mathscr{P}(X))$.

2．82 $\mathrm{Pr}(X) \rightarrow \mathrm{Pr}(X+Y)$.

2．83 $\mathrm{Pr}(X) \wedge \sim \mathrm{Em}(Y) \rightarrow \mathrm{Pr}(X \times Y)$.

［証明］ $Y \neq 0$ならば，$X \subseteq \cup(\cup(X \times Y))$.

2．84 $\mathrm{Un}_2(F) \wedge X \subseteq \mathrm{Dom}(F) \rightarrow [\mathrm{Pr}(X) \rightarrow \mathrm{Pr}(F``X)]$.

［証明］ $\mathrm{Un}_2(F) \wedge X \subseteq \mathrm{Dom}(F) \wedge \mathrm{Pr}(X)$かつ M($F``X$)とする．ここで，$F^{-1}``(F``X) \subset X$ と仮定する．この場合明らかに，$\mathrm{Dom}(F) \subset X$．よって，$X \subseteq \mathrm{Dom}(F)$ならば，$X \subseteq F^{-1}``(F``X)$. また，$\mathrm{Un}_2(F)$であるから，$\mathrm{Un}(F^{-1})$．ゆえに，M($F``X$)と仮定すると，2.65より，M($F^{-1}``(F``X)$)．また，($X \subseteq \mathrm{Dom}(F)$の仮定の下では)$X \subseteq F^{-1}``(F``X)$．よって，2.67により，M($X$)．しかしこれは仮定に反する.

2．85 $\mathrm{Pr}(A) \rightarrow \mathrm{Pr}(A-x)$.

［証明］ $A \subseteq (A-x)+x$ と2.70より明らか.[14]

3 順序数

I 順序数の定義の前に，若干の補助的概念を定義する.

3．1 定義 $Y\mathrm{Con}X \equiv X^2 \subseteq Y+Y^{-1}+I$.

Xの異なる元u，vの任意の対に対して，$\langle u,v \rangle \in Y$あるいは$\langle v,u \rangle \in Y$のいずれかが成立するならば，$Y$は$X$において連結（connex）であるとよばれる．これは，関係Yは全順序であるということを意味している.

3．2 定義 Xのあらゆる元u，v，wに対して，次が成立するならば，YはXにおいて推移的（transitive）であるとよばれる.

$$\langle u,v \rangle \in Y \wedge \langle v,w \rangle \in Y \rightarrow \langle u,w \rangle \in Y.$$

3．3 定義 Xの元u，vに対して，次が成立しないとき，YはXにおいて反対称的（asymmetric）であるとよばれる.

$$\langle u,v \rangle \in Y \wedge \langle v,u \rangle \in Y.$$

3．4 定義 $X\mathrm{We}Y \equiv Y\mathrm{Con}X \wedge \forall U[U \neq 0 \wedge U \subseteq X \rightarrow \exists v[v \in U \wedge U \cap Y``\{v\} = 0]]$.

これは整列性に関する定義である．右辺は次を意味している．Xの異なる2つの元u，vに対しては，$\langle u,v \rangle \in Y$か$\langle v,u \rangle \in Y$のいずれかが成立し，かつ$X$の空ならざる任意の部分集合$U$に対しては，$U$の元で関係$Y$を成立せしめる最初(小)のものが存在する．このようなときに，XはYによって整列される(well ordered)といい，$X\mathrm{We}Y$と表すのである．なお，$X\mathrm{We}Y$は正規的でない．なぜなら，集合変数でない変数Uが束縛変数として用いられてい

るからである.[15]

次の定理が成立する.

3．5　$X\mathrm{We}Y$ ならば，Y は X において推移的かつ反対称的である.

［証明］　Y は X において反対称的である. なぜなら, xYy かつ yYx であれば，クラス $\{x,y\}$ はいかなる最初のメンバーももたないことになるが, $X\mathrm{We}Y$ であるから, X の部分集合 $\{x,y\}$ は関係 Y に関する最初のメンバーをもたねばならないからである. X における推移性を示すためには，xYy かつ yYz とせよ. すると反対称性より，$x \neq z$. よって，連結性より，xYz か zYx のいずれかである. $U=\{x\}+\{y\}+\{z\}(=\{x,y,z\})$ を考えみよ. zYx ならば，仮定より，$xYy \wedge yYz \wedge zYx$ となり, U の中には関係 Y に関する最初のメンバーは存在しないことになる. よって，$\sim(zYx)$. すなわち，xYz.

3．6　**定義**　$X\mathrm{Sect}_R Y \equiv X \subseteq Y \wedge [Y \cap (R``X) \subseteq X]$.

X の元の，Y における全ての R-先行者(R-predecessor)もまた X に属するとき，X は Y の R-セクションであるとよばれる.

3．7　**定義**　X が Y の R-セクションであり，かつ $X \neq Y$ ならば, X は Y の固有 (proper) R-セクションであるとよばれる.

3．8　**定義**　$\mathrm{Seg}_R(X,u)=X \cap R``\{u\}$.

これは始切片の定義である. $u \in X$ のとき，u によってうみ出される X の R-始切片 (R-segment)とは，u の R 先行者である X の元のクラスのことである.

3．9　$u \in X$，かつ R が X において推移的であれば，$\mathrm{Seg}_R(X,u)$ は X の R-セクションである.

［証明］　$u \in X$ かつ R が X において推移的であるとの仮定の下に，$\mathrm{Seg}_R(X,u) \subseteq X \wedge \{X \cap R``[\mathrm{Seg}_R(X,u)]\} \subseteq \mathrm{Seg}_R(X,u)$ を示すことができる.

3．10　$X\mathrm{We}R$ ならば，X の元によってうみ出される任意の R-始切片は R-セクションである.

［証明］　$X\mathrm{We}R$ ならば，3．5により，R は X において推移的である. よって，3．9により，X の元によってうみ出される任意の R-始切片は R-セクションである.

3．11　$X\mathrm{We}R$，かつ Y が X の固有 R-セクションであれば，Y は X の R-始切片，つまり，$X-Y$ の最初の元によってうみ出される R-始切片である.

［証明］　仮定より，X は線形順序集合であり，しかも，$Y \subset X$. また，X（したがって，Y）における R の推移性や 3．8により，求める結果がえられる.

次に同型関係が定義される. R が定義域 A と値域 B をもった 1 対 1 の関係であるとき，uSv となるような A の任意の対 u，v に対して，それに対応する B の元は関係 T にあり，またその逆も成り立つというのであれば，R は S と T に関して，A から B への同型関係 (isomorphism) であるとよばれる. すなわち，

3．12　**定義**　$$R\mathrm{Isom}_{S,\ T}(A,B) \equiv \mathrm{Un}_2(R) \wedge \mathrm{Rel}(R) \wedge \mathrm{Dom}(R)=A \wedge \mathrm{Rng}(R)=B \wedge \forall u,v[u \in A \wedge v \in A \rightarrow uSv \equiv (R`u)T(R`v)]$$

S と T に関する A から B への同型関係が存在するならば，A は S と T に関して B に同型的であるといわれる. さらに，3．12において $S=T$ ならば，R は S に関して A から B への同型関係であるといわれる.

3．13　**定義**　R が S に関して $\mathrm{Dom}(R)$ から $\mathrm{Rng}(R)$ への同型関係であれば，R は S に関

しての同型関係であるとよばれる.

なお, n 項関係 S に関する同型関係も上に準じて定義される.

Ⅱ　さて, 順序数に関する Gödel の定義は, 本質的には, von Neumann に負うている. すなわち, オーディナル α は α より小さい全てのオーディナルのクラスである. 例えば, $0=\phi$, $1=\{0\}$, $2=\{0, 1\}$, ……ω＝全ての自然数の集合, 等々. よって, オーディナルのクラスは$\in$-関係によって整列され, $\alpha\in\beta$ は $\alpha<\beta$ に対応することになる. さらに, どのオーディナルもそれ自体が$\in$-関係によって整列される (なぜなら, オーディナルは諸々のオーディナルのクラスであるから). また, オーディナルのどのメンバーも, そのオーディナルによってうみ出される始切片と同一である. なぜなら, その始切片はそれより小さな全てのオーディナルの集合であるから.

このような von Neumann のアイデアは, 1937年, Robinson によってさらに明確かつ簡単な表現にされるに至った. 要するに, (1)　$X\mathrm{We}E$, (2)　$u\in X\rightarrow u=\mathrm{Seg}_E(X\ u)$, の2つが成立するならば, X はオーディナルであるということであるが, Robinson は, 公理Dによれば, 上記の条件(1), (2)はそれよりも弱い条件：(1')　$E\mathrm{Con}X$, (2')　$u\in X\rightarrow u\subseteq X$, によっておきかえることができることを示したのである. 現在では, Robinson による(1')と(2')による順序数の定義が一般的であるように思われる.

X が条件(2')をみたすということ, すなわち, X の元のどの元も再び X の元であるというとき, X は完全 (complete) であるといわれる.

3.14　定義　$\mathrm{Comp}(X)\equiv\forall u[u\in X\rightarrow u\subseteq X]$

これは, 推移性の定義3.2において, Y を E に限定したものである. よって, '推移的' という表現が用いられることも多い. 3.14と2.48から次がえられる.

3.15　$\mathrm{Comp}(X)\equiv\cup X\subseteq X$.

3.16　定義　$\mathrm{Ord}(X)\equiv\mathrm{Comp}(X)\wedge E\mathrm{Con}X$.

これは, von Neumann や Robinson にしたがい, オーディナルを条件(1')と(2')によって定義したものである. なお, Ord は正規的である. 集合であるオーディナルは順序数 (ordinal numnber) とよばれる. 'X は順序数である' は $\mathrm{O}(X)$で表される.

3.17　定義　$\mathrm{O}(X)\equiv\mathrm{Ord}(X)\wedge\mathrm{M}(X)$.

順序数のクラスは On で表される.

3.18　定義　$x\in On\equiv\mathrm{O}(x)$.

3.19　定義　順序数を表す変数として, α, β, γ, ……を用いる.

これらの変数は正規的である.

3.20　定義　$X<Y\equiv X\in Y$.

3.21　定義　$X\leq Y\equiv X<Y\vee X=Y$.

3.22　$\mathrm{Comp}(X)\wedge\mathrm{Comp}(Y)\rightarrow\mathrm{Comp}(X+Y)\wedge\mathrm{Comp}(X\cap Y)$.

［証明］　$\mathrm{Comp}(X)\wedge\mathrm{Comp}(Y)$ より, $\cup X\subseteq X\wedge\cup Y\subseteq Y$. だから, $\cup X+\cup Y\subseteq X+Y$. 他方, 2.57より, $\cup(X+Y)=\cup X+\cup Y$ であるから, 3.15より, $\mathrm{Comp}(X+Y)$. 同様にして, 2.58と3.15より, $\mathrm{Comp}(X\cap Y)$.

3.23　1　$\mathrm{Ord}(X)\rightarrow X\mathrm{We}E$.

2　$\mathrm{Ord}(X)\wedge u\in X\rightarrow u=\mathrm{Seg}_E(X,u)$.

［1の証明］　2.50, 2.51より, $u=\cup\{u\}=E``\{u\}$. ここで, X の任意の部分集合で空

ならざる Y が与えられると，公理 D により，$Y\neq 0$ であるから，$\exists u[u\in Y\wedge \mathrm{Ex}(u,Y)]$．すなわち，$\exists u[u\in Y\wedge Y\cap u=0]$．よって，$\exists u[u\in Y\wedge Y\cap E``\{u\}=0]$．また明らかに，$Y$ は任意であるから，$\forall Y[Y\neq 0\wedge Y\subseteq X\rightarrow \exists u[u\in Y\wedge Y\cap E``\{u\}=0]]$．さらに，$\mathrm{Ord}(X)$ ならば，$E\mathrm{Con}X$．

［2の証明］　$\mathrm{Ord}(X)\wedge u\in X$ とする．3.14より，$u\subseteq X$．また，3.8より，$\mathrm{Seg}_E(X,u)=X\cap E``\{u\}=X\cap u=u$．

3．24　$\mathrm{Ord}(X)\wedge Y\subset X\rightarrow[\mathrm{Comp}(Y)\rightarrow Y\in X]$．

［証明］　$\mathrm{Ord}(X)\wedge Y\subset X\wedge \mathrm{Comp}(Y)$ とする．$\mathrm{Comp}(Y)$ であるから，3.15により，$\cup Y\subseteq Y$．したがって，2.51により，$E``Y\subseteq Y$．また，$Y\subseteq X$．よって，$Y\subseteq X\wedge(X\cap E``Y)\subseteq Y$ であるから，3.6より，$Y\mathrm{Sect}_E X$．さらに，$\mathrm{Ord}(X)$ であるから，3.23の1より，$X\mathrm{We}E$．よって，3.11より，Y は X のある元によってうみ出された X の始切片でなければならない．だが，$\mathrm{Ord}(X)\wedge u\in X$ のときは，3.23の2より，$u=\mathrm{Seg}_E(X,u)$．すなわち，$Y=u$．よって，$Y\in X$．

3．25　$\mathrm{Ord}(X)\wedge \mathrm{Ord}(Y)\rightarrow[Y\subset X\equiv Y\in X]$．

［証明］　$\mathrm{Comp}(Y)$ と3.24により，$\mathrm{Ord}(X)\wedge\mathrm{Ord}(Y)\wedge Y\subset X\rightarrow Y\in X$．$\mathrm{Comp}(Y)$ と1.17により，$\mathrm{Ord}(X)\wedge\mathrm{Ord}(Y)\wedge Y\in X\rightarrow Y\subset X$．

3．26　X と Y がオーディナルであれば，次の関係のうち1つだけが成立する．

$$X\in Y,\qquad X=Y,\qquad Y\in X.$$

［証明］　$X\cap Y\subseteq X$ かつ $X\cap Y\subseteq Y$．今，$X\cap Y\subset X$ かつ $X\cap Y\subset Y$ とせよ．仮定より，$\mathrm{Comp}(X)\wedge\mathrm{Comp}(Y)$ であるから，3.22より，$\mathrm{Comp}(X\cap Y)$．よって，$\mathrm{Ord}(X)\wedge X\cap Y\subset X\wedge\mathrm{Comp}(X\cap Y)$．したがって，3.24より，$X\cap Y\in X$．同様にして，$X\cap Y\in Y$．よって，$X\cap Y\in X\cap Y$．これは，1.17と公理 A 2により不可能である．ゆえに，$X\cap Y=X$ か $X\cap Y=Y$ のどちらかである．つまり，$X\subset Y\vee X=Y\vee Y\subset X$．よって，3.25より，$X\in Y\vee X=Y\vee Y\in X$．しかし，いかなる2つも同時に成立することはない．なぜなら，$X\in Y\wedge X=Y$ は $X\in X$ となり不可能，$X=Y\wedge Y\in X$ も同様，$X\in Y\wedge Y\in X$ も不可能となるからである．

3.26と3.20により，どの2つのオーディナルも比較可能であることがわかる．また，このことより，次が明らかに成立する．

3．27　$E\mathrm{Con}On$．

3．28　$\mathrm{Ord}(A)\rightarrow A\subseteq On$．

［証明］　$\mathrm{Ord}(A)\wedge x\in A$ とする．$\mathrm{Comp}(x)\wedge E\mathrm{Con}x$ が示されればよい．$z\in y\wedge y\in x$ とせよ．$\mathrm{Ord}(A)$ であるから，$\mathrm{Comp}(A)$．ゆえに，$y\in A$．さらにくり返すと，$z\in A$．すなわち，$x,y,z\in A$．3.23の1より，$A\mathrm{We}E$．よって，3.5より，E は A において推移的である．ゆえに，$z\in x$．したがって，$\mathrm{Comp}(x)$．また，$\mathrm{Ord}(A)$ より，$E\mathrm{Con}A$．$\mathrm{Comp}(x)$ であったから，3.14より，$x\subseteq A$．よって，$E\mathrm{Con}x$．すなわち，$\mathrm{Comp}(x)\wedge E\mathrm{Con}x$．

3．29　$\mathrm{Comp}(On)$．

［証明］　3.28より，$\forall x[x\in On\rightarrow x\subseteq On]$．

3．30　$\mathrm{Ord}(On)$．

［証明］　3.16，3.27，3.29による．

次は3.23と3.30より，直接に明らかである．

3．31　On（したがって，順序数の任意のクラス）は E によって整列される．

Ⅲ　さて，順序数についての性質ϕが正規命題関数$\phi(X)$によって定義されるとする．そのときはもちろん，$\sim\phi(X)$も正規命題関数である．よって，M 2により

$$X\in A\equiv\phi(X),\qquad X\in B\equiv\sim\phi(X)$$

をみたすようなクラスAとクラスBが存在する．したがって，順序数に関する性質が$\phi(X)$によって定義されるならば，その性質ϕをもたない順序数のクラスBが存在する．さらに，3．31により，$On\mathrm{We}E$．ゆえに，$B\subseteq On$なるBが空でなければ，Bは最小元をもつ．今，

$$\forall X[\forall Y[Y<X\rightarrow\phi(Y)]\rightarrow\phi(X)]\rightarrow\forall X\phi(X) \tag{1}$$

を示したい．そのために

$$\forall X[\forall Y[Y<X\rightarrow\phi(Y)]\rightarrow\phi(X)],\ \text{かつ}\sim\forall X\phi(X)$$

と仮定する．そして，$\sim\forall X\phi(X)$，つまり，$\exists X\sim\phi(X)$なる$X(X\in B)$のうち，最小のもの（これは，前述の如く，3．31と3．4によって，その存在は保証される）をX_0とする．明らかに

$$\sim\phi(X_0). \tag{2}$$

他方，X_0は$\sim\phi(X)$なるXのうち最小のものであるから，X_0より小なる順序数に対しては次が成立する．

$$\forall Y[Y<X_0\rightarrow\phi(Y)]. \tag{3}$$

一方

$$\forall X[\forall Y[Y<X\rightarrow\phi(Y)]\rightarrow\phi(x)]$$

であるから，(3)により，$\phi(X_0)$．これは(2)と矛盾する．すなわち，性質ϕをもたない最小のオーディナルの存在は矛盾を生じさせる．よって，(1)が示された．このようにして，3．31によって，順序数についての性質を超限帰納法を用いて証明することのできることがわかる．

また，xが順序数であれば，3．28により，$x\subseteq On$．すなわち，$\forall m[m\in x\rightarrow m\in On]$であるから，順序数のどの元もそれ自体順序数である．さらに，$\in$-関係はオーディナルに対する順序関係であることを考慮に入れると，xはxより小さい順序数の集合と同一であることがわかる．

3．32　$\mathrm{Pr}(On)$．

［証明］　3．30より，$\mathrm{Ord}(On)$であるから，$\mathrm{M}(On)$ならば，3．17より，$0(On)$．すると，$On\in On$となるが，1．17より，これは不可能である．

3．33　$\mathrm{Ord}(X)\rightarrow X\in On\vee X=On$．（順序数でない唯一のオーディナルは$On$である．）

［証明］　$\mathrm{Ord}(X)$とする．すると，3．28より，$X\subseteq On$．$X\neq On$（つまり，$X\subset On$）ならば，3．25より，$X\in On$．

3．34　オーディナルのどのE-セクションもオーディナルである．

［証明］　3．11により，オーディナルXのどの固有E-セクションuもXの元である．よって，3．28により，$\mathrm{Ord}(u)$．さらに，uがXの非固有E-セクションであるときは，$u=X$であるから，$\mathrm{Ord}(u)$．

3．35　$A\subseteq On\rightarrow\mathrm{Ord}(\cup A)$．

［証明］　$x\in\cup A$ならば，2．48より，$x\in\alpha\in A$なるオーディナルαが存在する．次に，$y\in x$ならば，$\mathrm{Comp}(\alpha)$より，$y\in\alpha$．したがって，$y\in\alpha\in A$なるαが存在して，再び2．48により，$y\in\cup A$．すなわち，$x\in\cup A\wedge y\in x\rightarrow y\in\cup A$．つまり，$\mathrm{Comp}(\cup A)$．$\cup A$の元$x\neq$

y をとると，2 .48より，$x \in \alpha \in A$，$y \in \beta \in A$ なるオーディナル α，β が存在する．よって，3 .25と 3 .26により，$\alpha \subseteq \beta$ か $\beta \subseteq \alpha$ のどちらかであるが，x も y も共に α と β の大きい方のメンバーとなることがわかる．他方，$ECon\,\alpha$ かつ $ECon\,\beta$．ゆえに，$x \in y$ あるいは $y \in x$．すなわち，$ECon(\cup A)$．

ところで，この $\cup A$ に関しては次が成立する．

(1)　$\forall \alpha\,[\alpha \in A \rightarrow \alpha \leq \cup A]$.

(2)　$\forall \beta\,[\forall \alpha\,[\alpha \in A \rightarrow \alpha \leq \beta] \rightarrow \cup A \leq \beta]$.

すなわち，$\cup A$ は A の全ての元よりも大きな最小のオーディナルであるか，または A の元に等しいのである．換言すれば，$\cup A$ は A の最小上界 $\mathrm{Sup}A$ にほかならない．要するに，A の元に最大のオーディナルが存在するときは，それが $\cup A$ となり，存在しないときは，A は整列(線形順序)集合であるから，極限値となる元が $\cup A$ ということになる．したがって，$\cup$ と同じ演算を表す記号として，‘Lim’や‘Max’を用いることができる．

3．36　定義　$\mathrm{Lim}(A) = \cup A$.

$\mathrm{Max}(A) = \cup A$.

3．37　定義　$x \dot{+} 1 = x + \{x\}$.

これは3．38，3．39からわかるように，順序数に対して後続者関係 (successor relation) を定義するものである．

3．38　$x \dot{+} 1 \in On \equiv x \in On$.

［証明］　$x \dot{+} 1$ は順序数であるから，3 .31より，x も順序数である．次に，$x \in On$ とする．$a \in b \in \{x + \{x\}\}$ を考える．$b \in x$ あるいは $b \in \{x\}$ であるが，いずれにせよ，$a \in x$．よって，$a \in x + \{x\}$．ゆえに，$\mathrm{Comp}(x + \{x\})$．また，$m, n \in x + \{x\}$ とする．この場合，(1)　$m, n \in x$，(2)　$m \in x \wedge n \in \{x\}$，(3)　$m, n \in \{x\}$，(4)　$m \in \{x\} \wedge n \in x$，の 4 つのケースが考えられるが，いずれにせよ，$ECon(x + \{x\})$ となるから，$\mathrm{Ord}(x + \{x\})$．$x + \{x\}$ は集合．よって，$x \dot{+} 1 \in On$.

3．39　$\sim \exists \beta\,[\alpha < \beta < \alpha \dot{+} 1]$.

［証明］　$\alpha < \beta < \alpha \dot{+} 1$ とする．すると，3 .20より，$\beta \in \alpha \dot{+} 1$．すなわち，$\beta \in \alpha + \{\alpha\}$．よって，$\beta \in \alpha$ あるいは $\beta = \alpha$．すなわち，$\beta \leq \alpha$ となるが，これは仮定に反する．

通常，順序数は次の 2 種に分けられる．

3．40　定義　$x \in K_{\mathrm{I}} \equiv \exists \alpha\,[x = \alpha \dot{+} 1] \vee x = 0$.

$x \in K_{\mathrm{I}}$ とは‘x は第 1 種順序数である’を意味する．x がある順序数の後続者であるか，あるいは $x=0$ であれば，x は第 1 種順序数であり，そうでなければ，第 2 種順序数である．

3．41　定義　$K_{\mathrm{II}} = On - K_{\mathrm{I}}$.

3．42　定義　$1 = 0 \dot{+} 1$.

3．43　定義　$2 = 1 \dot{+} 1$.

同じようにして，$3 = 2 \dot{+} 1$ 等々が定義される．明らかに，次が成立する．

3．44　m が順序数の集合であれば，オーディナル $\alpha = \cup(m) \dot{+} 1$ は m のどの元よりも大きな順序数である．

［証明］　仮定より $m \subseteq On$ であるから，3 .35より，$\mathrm{Ord}(\cup(m))$．また，$\mathrm{M}(m)$ であるから，公理 C 2より，$\cup(m)$ も集合である．よって，$\cup(m) \in On$．したがって，3 .38より，$\cup(m) \dot{+} 1 \in On$．また，2 .48より，$x \in \cup(m) \equiv \exists v\,[x \in v \wedge v \in m]$．この場合，$v$ と x は順序数である．そして，$v \in m$ なる任意の v に対して，$v \subseteq \cup(m)$．$v \in On \wedge \cup(m) \in On \wedge v \subseteq$

$\cup(m)$であるから，3.25より，$v \in \cup(m) \vee v = \cup(m)$．また，$\cup(m) \in [\cup(m) + \{\cup(m)\}] = \cup(m) \dotplus 1 = \alpha$．すなわち，$\cup(m) \in \alpha$．よって，$v \in \cup(m) \in \alpha \vee v = \cup(m) \in \alpha$．$\alpha = \cup(m) \dotplus 1 \in On$となるから，3.20より，$v < \cup(m) < \alpha \vee v = \cup(m) < \alpha$．よって，$v < \alpha$．

IV 超限帰納法による順序数上の関数の定義については，次の定理が成立する．

3．45 $\forall G \exists ! F\, [F \mathrm{Fn} On \wedge \forall \alpha\, [F`\alpha = G`(F \upharpoonright \alpha)]]$．

［証明］ 存在定理M2によって，次のようなクラスKが存在する．

$$f \in K \equiv \exists \beta\, [f \mathrm{Fn}\, \beta \wedge \forall \alpha\, [\alpha \in \beta \rightarrow f`\alpha = G`(f \upharpoonright \alpha)]]$$

さて，$F = \cup K$とせよ．$f, g \in K$，かつ$f \mathrm{Fn}\, \beta \wedge g\ \mathrm{Fn}\, \gamma \wedge \beta \leq \gamma$ならば，$f = g \upharpoonright \alpha$．なぜならば，$\beta$までの超限帰納法を用いて，$\forall \alpha\, [\alpha \in \beta \rightarrow f`\alpha = g`\alpha]$を示すことができるからである．これは，$\forall \alpha\, [\alpha \in \beta \rightarrow f`\alpha = G`(f \upharpoonright \alpha)]$によって$\beta$上の関数$f$が一義的に決定されることを意味する．そしてまた，$f = g \upharpoonright \alpha$とは，どの2つの$f, g \in K$もそれらの定義域の共通部分においては合致するということである．ゆえに，Fは全ての$f \in K$の定義域の和を定義域とする関数であり，$\mathrm{Dom}(f)$においてはそれぞれの$f \in K$と合致する．また，Fはそれぞれの$\alpha \in \mathrm{Dom}(F)$に対して，$f`\alpha = G`(f \upharpoonright \alpha)$を満足する．なぜならば，$\alpha \in \mathrm{Dom}(F)$とは，$\mathrm{Dom}(f)$において$f`\alpha = G`(f \upharpoonright \alpha)$を満足し，かつ，$f = F \upharpoonright \mathrm{Dom}(f)$であるようなある$f$に対する$\alpha \in \mathrm{Dom}(f) \in On$のことであるからである．すなわち，$\forall \alpha\, [F`\alpha = G`(F \upharpoonright \alpha)]$．また明らかに，$F \mathrm{Fn} On$．$F$の一意性は$\alpha$に関する帰納法による．

3．46 定義 順序関数（ordinal function）とは，関数値として順序数をとるところの，オーディナル上の関数Gのことである．すなわち，（あるαに対して）$G \mathrm{Fn}\, \alpha$あるいは$G \mathrm{Fn} On$であり，かつ$\mathrm{Rng}(G) \subseteq On$．

3．47 定義 順序関数Gは，$\alpha < \beta \rightarrow G`\alpha < G`\beta$（$\alpha, \beta \in \mathrm{Dom}(G)$に対して）ならば厳密に単調であるといわれる．

3．48 Gが厳密に単調であれば，$\alpha \in \mathrm{Dom}(G)$に対して，$\alpha \leq G`\alpha$．

［証明］ $\alpha \in \mathrm{Dom}(G)$に対して，$\sim(\alpha \leq G`\alpha)$，つまり，$G`a < a$なる$a \in \mathrm{Dom}(G)$が存在するとする．$\mathrm{Dom}(G)$はオーディナルであるから，整列集合であり，$u = \{x \mid x \leq a \wedge G`x < x\}$は$\mathrm{Dom}(G)$の空でない部分集合である．よって，$u$の中には最小元$b$が存在する．これに対して明らかに

$$G`b < b.$$

$G`x < x$を成立せしめる$x$としては$b$が最小であるから，それより小さい$G`b$に対しては，$G`x < x$は成立しない．すなわち，$G`G`b < G`b$は成立しない．他方において，Gは厳密に単調であったから，$G`b < b$のときは，$G`G`b < G`b$が成立する．これは矛盾である．

このことから，いかなる2つの異なるオーディナルX，YもEに関して同型的ではありえないことがわかる．

3．49 $\mathrm{Ord}(X) \wedge \mathrm{Ord}(Y) \wedge H \mathrm{Isom}_{E,E}(X, Y) \rightarrow X = Y \wedge H = I \upharpoonright X$．

［証明］ 同型関係の定義より次が成立する：α，βが$\alpha \in \beta$なるXの元であれば，$H`\alpha \in H`\beta$．すなわち，Hは厳密に単調である．また，α，βが$\alpha \in \beta$なるYの元であれば，$H^{-1}`\alpha \in H^{-1}`\beta$．すなわち，H^{-1}も厳密に単調である．よって，3.48より，$\alpha \in X$に対して，$\alpha \leq H`\alpha$．同様にして，$H`\alpha \in Y$に対して，$H`\alpha \leq H^{-1}`(H`\alpha)$．しかるに，$H^{-1}`(H`\alpha) = \alpha$であるから，$H`\alpha \leq \alpha$．ゆえに，$\alpha \in X$に対して，$\alpha \leq H`\alpha \wedge H`\alpha \leq \alpha$．よって，$H`\alpha = \alpha$．換言すれば，$X = Y$かつ$H = I \upharpoonright X$．

V　ここで，整列クラス Z が2つのオーディナル X，Y に対して同型であり，Z から X への同型写像を H，Z から Y への同型写像を G とする．そのとき，$\alpha \in Z$ に対して $H'\alpha$ を $G'\alpha$ に対応づける X 上の写像 L に関しては，次が成立する．

$$\mathrm{Un}_2(L) \wedge \mathrm{Rel}(L) \wedge \mathrm{Dom}(L) = X \wedge \mathrm{Rng}(L) = Y.$$

また，任意の $H'\alpha$，$H'\beta \in X$（ただし，$\alpha, \beta \in Z$）に対して，次が成立する．

$$(H'\alpha)E(H'\beta) \equiv (G'\alpha)E(G'\beta).$$

なぜならば，Z を整列する関係を R とすると，Z は X と Y に対して同型であるから，次が成立することによる．

$$\alpha R\beta \equiv (H'\alpha)E(H'\beta),\quad \alpha R\beta \equiv (G'\alpha)E(G'\beta).$$

よって，$\mathrm{Ord}(X) \wedge \mathrm{Ord}(Y) \wedge L\mathrm{Isom}_{E,E}(X,Y)$．よって，3.49により，$X=Y$ となる．

上のことより，整列クラスは高々1つのオーディナルに対して同型でありうることがわかる．

整列クラスが1つのオーディナルに対して同型であるための十分条件は次の定理によって与えられる．

3．50

1　$\mathrm{Pr}(A)$ かつ $A\mathrm{We}W$ であり，しかも A のどの固有 W-セクションも集合であれば，A は W と E に関して On に同型である．

2　$a\mathrm{We}W$ であれば，a は W と E に関して1つの順序数に同型である．

［1の証明］　3.45により，次のようなクラス G に対して，$\forall\alpha[F'\alpha = G'(F\restriction\alpha)]$ をみたす On 上の関数 F がただ1つ存在する．

$$\langle y, x\rangle \in G \equiv y \in (A - \mathrm{Rng}(x)) \wedge (A - \mathrm{Rng}(x)) \cap W``\{y\} = 0.$$

任意の集合 x に対して，$G'x \in A - \mathrm{Rng}(x)$．なぜなら，$A - \mathrm{Rng}(x)$ は2.85，2.73によって固有クラスであり，よって，$\neq 0$ であるから．ゆえに，任意の α に対して，$F'\alpha \in A - \mathrm{Rng}(F\restriction\alpha)$．よって，$\mathrm{Rng}(F) \subseteq A$．また，$F$ は1対1である．$\mathrm{Dom}(F) = On$ かつ $\mathrm{Pr}(On)$ であるから，2.84により，$\mathrm{Pr}(F``On)$．すなわち，$\mathrm{Pr}[\mathrm{Rng}(F)]$．ところで，$\mathrm{Rng}(F) \subseteq A \wedge [A \cap W``\mathrm{Rng}(F) \subseteq \mathrm{Rng}(F)]$．ゆえに，3.6より，$\mathrm{Rng}(F)$ は A の W-セクションである．よって，仮定より，$\mathrm{Rng}(F) \neq A$ ではありえない．すなわち，$\mathrm{Rng}(F) = A$．さらに，任意の $\alpha, \beta \in On$ に対して，$\alpha < \beta \equiv (F'\alpha)W(F'\beta)$．以上より，$F\mathrm{Isom}_{E,W}(On, A)$．

［2の証明］　A を a でおきかえて，1の証明と同様にして G と F を構成し，$\forall\alpha[a - \mathrm{Rng}(F\restriction\alpha) \neq 0]$ とせよ．すると，$\mathrm{Rng}(F) \subseteq a$ と $\mathrm{Pr}[\mathrm{Rng}(F)]$ を示すことができる．しかし，$\mathrm{M}(a)$ であるから，これは矛盾である．よって，$\exists\alpha[a - \mathrm{Rng}(F\restriction\alpha) = 0]$．このような α のうち最小のオーディナルを β とすると，$F\restriction\beta$ は a と β の間の同型関係を確立する．

VI　選択公理を用いると，次の整列可能定理がえられる．

3．51　任意の集合 a に対して，$a = g``\alpha$ となるような順序数 α，ならびに α 上の1対1の関数 g が存在する

［証明］　選択公理Eによって，$x \neq 0 \rightarrow C'x \in x$ なる V 上の関数 C が存在する．さて，F を次によって定義する．

$$\forall\alpha[F'\alpha = C'(a - \mathrm{Rng}(F\restriction\alpha))] \text{ かつ } F\mathrm{Fn}On.$$

すると，$C'(a - \mathrm{Rng}(x))$ は正規タームであり，$x \in V \rightarrow \mathrm{M}[C'(a - \mathrm{Rng}(x))]$．よって，M5により，次のようなただ1個の V 上の関数 G が存在する．

$$x \in V \text{ に対して}, \; G`x = C`(a - \mathrm{Rng}(x)).$$

ここで，$x = F \restriction \alpha$とすると，$F$は$\forall\alpha[F`\alpha = G`(F \restriction \alpha)]$ をみたす．もちろん，このようなFの存在と一意性は3.45により保証される．

今，$\forall\alpha[a - \mathrm{Rng}(F \restriction \alpha) \neq 0]$ と仮定する．$C`x \in x$であるから，任意のαに対して

$$F`\alpha = C`(a - \mathrm{Rng}(F \restriction \alpha)) \in a - \mathrm{Rng}(F \restriction \alpha).$$

すなわち，$F`\alpha \in a - \mathrm{Rng}(F \restriction \alpha)$．よって，$\mathrm{Rng}(F) \subseteq a$．他方において．$\mathrm{Un}_2(F)$．さらに，$\mathrm{Dom}(F) = On$，$\mathrm{Pr}(On)$．よって，2.84より，$\mathrm{Pr}(F``On)$，すなわち，$\mathrm{Pr}(\mathrm{Rng}(F))$．しかるに，$\mathrm{M}(a)$．これは矛盾である．よって，$\exists\alpha[a - \mathrm{Rng}(F \restriction \alpha) = 0]$．このような$\alpha$のうち最小のオーディナルを$\beta$とすれば，$F \restriction \beta$を g と考えることができるからこの定理がえられる．

整列関係を拡大して，順序数の順序対に対しても付与することが望ましい．これは次のように定義される．

3．52　定義　$\langle\alpha, \beta\rangle Le \langle\gamma, \delta\rangle \equiv [\beta < \delta \vee (\beta = \delta \wedge \alpha < \gamma)] \wedge Le \subseteq (On^2)^2$.

3．53　定義　$\langle\alpha, \beta\rangle R \langle\gamma, \delta\rangle \equiv [\mathrm{Max}\{\alpha, \beta\} < \mathrm{Max}\{\gamma, \delta\} \vee [\mathrm{Max}\{\alpha, \beta\} = \mathrm{Max}\{\gamma, \delta\} \wedge \langle\alpha, \beta\rangle Le \langle\gamma, \delta\rangle]] \wedge R \subseteq (On^2)^2$.

上記3.52をみたすLeの存在はM4からでてくる．なぜならば，次によって定義される関係Leは，明らかに3.52をみたすからである．

$$\langle x, y\rangle \in Le \equiv \exists\alpha, \beta, \gamma, \delta\, [x = \langle\alpha, \beta\rangle \wedge y = \langle\gamma, \delta\rangle \wedge (\beta < \delta \vee (\beta = \delta \wedge \alpha < \gamma))]$$

Rに対しても同様である．

3．54　On^2のどの固有R-セクションも集合である．

［証明］　$\langle\mu, \nu\rangle R \langle\alpha, \beta\rangle$となるような対$\langle\mu, \nu\rangle$を任意にとって考えてみる．この$R$は定義3.53における$R$であるから次をみたす．

$$\mathrm{Max}\{\mu, \nu\} \leq \mathrm{Max}\{\alpha, \beta\} < \mathrm{Max}\{\alpha, \beta\} \dot{+} 1$$

ゆえに，$\mu, \nu \in \mathrm{Max}\{\alpha, \beta\} \dot{+} 1$．よって，$\langle\mu, \nu\rangle \in [\mathrm{Max}\{\alpha, \beta\} \dot{+} 1]^2$．そして，$[\mathrm{Max}\{\alpha, \beta\} \dot{+} 1]^2 = a$とおくと，2.75より，$\mathrm{M}(a)$（これは次の理由による：$\alpha, \beta \in On$であるから，$\mathrm{M}(\alpha) \wedge \mathrm{M}(\beta)$．さらに，$\mathrm{M}(\mathrm{Max}\{\alpha, \beta\})$．ゆえに，公理A4により，$\mathrm{M}(\{\mathrm{Max}\{\alpha, \beta\}\})$．よって，2.70により，$\mathrm{Max}\{\alpha, \beta\} + \{\mathrm{Max}\{\alpha, \beta\}\} = \mathrm{Max}\{\alpha, \beta\} \dot{+} 1$は集合であり，さらに，2.75により，$[\mathrm{Max}\{\alpha, \beta\} \dot{+} 1]^2 = a$も集合である）．よって，$\{\langle\mu, \nu\rangle \mid \langle\mu, \nu\rangle R \langle\alpha, \beta\rangle\} \subseteq a$．$\langle\mu, \nu\rangle$ と $\langle\alpha, \beta\rangle$ のクラスは1対1であるから，$\langle\alpha, \beta\rangle$ の全てのクラスも集合である．すなわち，On^2のどの固有R-セクションも集合である．

ところで，Gödelは次の2つについては言及はしても証明はしていない．次にそれについて少し触れておきたい（2の証明は要約のみ示す）．

1　On^2のLeによる整列可能性

2　On^2のRによる整列可能性

［1の証明］　On^2の任意のLe-始切片は集合であるので，On^2の任意の空でない部分集合uが最小元をもつことを示せばよい．(i)　$\mathrm{Min}\{\beta \mid \langle\alpha, \beta\rangle \in u\} = \delta$，(ii)　$\mathrm{Min}\{\alpha \mid \langle\alpha, \delta\rangle \in u\} = \gamma$とおくと，$\langle\gamma, \delta\rangle$ はuの最小元である．次にそれを示す．今，任意に $\langle\xi, \eta\rangle \in u$をとると，$\delta$と$\eta$を比べると，(i)より，$\delta \leq \eta$．$\delta < \eta$のときは，定義3．52により，$\langle\gamma, \delta\rangle Le \langle\xi, \eta\rangle$．$\delta = \eta$のときは，$\langle\xi, \eta\rangle$は$\langle\xi, \delta\rangle$となる($\because \delta = \eta$)．よって，(ii)より，$\gamma$は $\langle\alpha, \delta\rangle$なる$\alpha$のうち最小のものであるから，$\gamma \leq \xi$．$\gamma < \xi$のときは，$\delta = \eta \wedge \gamma <$

ξ であるから，3.52より，$\langle \gamma,\delta\rangle Le\langle \xi,\eta\rangle$．$\gamma=\xi$ のときは，$\delta=\eta\wedge\gamma=\xi$ であるから，$\langle \gamma,\delta\rangle=\langle \xi,\eta\rangle$．よって，$\langle \gamma,\delta\rangle$ は u の最小元である．

［2の証明］　3.54の証明と同様のやり方で，On^2 のどの R-始切片も集合となることが示される．よって，On^2 の任意の部分集合 u が最小元をもつことを示せばよい．$\mathrm{Min}\{\mathrm{Max}\{\alpha,\beta\}|\langle\alpha,\beta\rangle\in u\}=\gamma$，$\delta=\mathrm{Min}\{\alpha\,|\,\alpha\leq\gamma\wedge[\langle\alpha,\gamma\rangle\in u\vee\langle\gamma,\alpha\rangle\in u]\}$ とすれば，$\langle\gamma,\delta\rangle$ が求める u の最小元である．

さて，On^2 は3.32，2.83により固有クラスであり，また，$On^2\mathrm{We}R$ であった．そこで，3.50，3.54を適用すると次が成立する．

3．55　On^2 は R と E に関して，On に同型である．

さらに，On^2 から On への同型関係を P で表す．

3．56　定義　$P\mathrm{Fn}On^2\wedge\mathrm{Rng}(P)=On\wedge\forall\alpha,\beta,\gamma,\delta[\langle\alpha,\beta\rangle R\langle\gamma,\delta\rangle\rightarrow P`\langle\alpha,\beta\rangle<P`\langle\gamma,\delta\rangle]$．

3．57　$\mathrm{Max}\{\alpha,\beta\}\leq P`\langle\alpha,\beta\rangle$．

［証明］　$\gamma=\mathrm{Max}\{\alpha,\beta\}$ とする．$\mathrm{Max}\{\gamma,0\}=\mathrm{Max}\{\alpha,\beta\}$ であり，$0<\beta$ かあるいは $0=\beta$ のときは，$\gamma=\alpha\wedge 0=\beta$ であるから，3.53より，$\langle\gamma,0\rangle R\langle\alpha,\beta\rangle$，あるいは $\langle\gamma,0\rangle=\langle\alpha,\beta\rangle$．よって，3.56より，$P`\langle\gamma,0\rangle\leq P`\langle\alpha,\beta\rangle$．ところで，$P`\langle\gamma,0\rangle$ は $\gamma$ の関数と考えることができる．それを $F`\gamma$ と表すと，3.56より，P は厳密に単調であるから，F も厳密に単調である．よって，3.48により，$\gamma\leq F`\gamma$．したがって，$\mathrm{Max}\{\alpha,\beta\}=\gamma\leq F`\gamma=P`\langle\gamma,0\rangle\leq P`\langle\alpha,\beta\rangle$．

4　基数

I　ここでの展開も一般的である．われわれはすでに，選択公理を仮定すればどの整列集合もある順序数に同型であり（3.50の2），また，3.51の整列可能定理によって，どの集合も整列集合となることをみてきた．したがって，2つの集合の間の全単射関係の存在をもってそれらの集合の元の個数が同じであると考える限りにおいては，集合の元の個数を順序数（これも集合）でもって定義できることになる．こうしたことから，選択公理を仮定して基数の理論を建設することが可能となる．もちろん，周知のように，選択公理を仮定しない基数の理論もある．Gödel 自身は有限カーディナルに関するものを除けば，選択公理を仮定する立場をとっている．以下，彼の記述にしたがい，基数の理論を概説するが‘ * ’印のついている定義ないし定理は選択公理に基づくものである．

まず，同等性について．2つのクラス X，Y は，それらの元の間に1対1対応が存在するならば，同等（equivalent）であるといわれる．

4．1　定義　$X\simeq Y\equiv\exists Z[\mathrm{Un}_2(Z)\wedge\mathrm{Rel}(Z)\wedge\mathrm{Dom}(Z)=X\wedge\mathrm{Rng}(Z)=Y]$

明らかに，この観念は正規的でない．それに対応する正規的観念は次のようである．

4．2　定義　$X\simeq' Y\equiv\exists z[\mathrm{Un}_2(z)\wedge\mathrm{Rel}(z)\wedge\mathrm{Dom}(z)=X\wedge\mathrm{Rng}(z)=Y]$．

4．3　$x\simeq y\equiv x\simeq' y$．

［証明］　2つの集合 X，Y に対して，4.1の右辺をみたすクラス Z は，2.76より，集合である．

4．4　定義　$\langle x,y\rangle\in\mathrm{Aeq}\equiv x\simeq y\wedge\mathrm{Rel}(\mathrm{Aeq})$．

Xのカーディナルは '$\overline{\overline{X}}$' によって表され，次の公準によって定義される．

＊4．5　定義　$x\simeq\overline{\overline{x}}\wedge\overline{\overline{x}}\in On\wedge\forall\alpha[\alpha<\overline{\overline{x}}\rightarrow\sim(\alpha\simeq x)]\wedge(\mathrm{Pr}(X)\rightarrow\overline{\overline{X}}=On)$.

すなわち，$\overline{\overline{x}}$を集合xと同等な順序数とし，かつ，xと同等な順序数のうち最小のものを$\overline{\overline{x}}$とするのである．そして，固有クラスXに対する$\overline{\overline{X}}$ を On と定めるのである．$\overline{\overline{X}}$ の存在は3 .51により，一意性は最小性による．また，$\overline{\overline{X}}$ は正規演算である．なぜなら

$$X\in\overline{\overline{Y}}\equiv X\in On\wedge\forall\alpha[\alpha\simeq' Y\rightarrow X\in\alpha].$$

また，ターム$\overline{\overline{x}}$は正規演算であり，$x\in V$に対して，$\mathrm{M}(\overline{\overline{x}})$．よって，M5により，$V$上の関数で '$x\in V$ に対して，$Nc`x=\overline{\overline{x}}$' をみたすものが存在する．

＊4．6　定義　$Nc`x=\overline{\overline{x}}\wedge Nc\mathrm{Fn}V$.

Ⅱ　集合のカーディナルは基数(cardinal number)とよばれる．すなわち，基数のクラスNは次のように定義される．

＊4．7　定義　$N=\mathrm{Rng}(Nc)\ (=\{\overline{\overline{x}}\mid x\in V\})$.

＊4．8　$N\subseteq On$.

［証明］　4．5と4．7より明らか．

基数を始数(initial number)概念を用いて説明すれば次のようになる：順序数がそれよりも小さなオーディナルと同等でないとき，すなわち，始数であるとき，かつそのときに限って，順序数は基数である．

＊4．9　$\overline{\overline{\alpha}}\leq\alpha$.

［証明］　αの基数$\overline{\overline{\alpha}}$とは，$\alpha$と同等な最小の順序数であり，$\alpha$自身が$\alpha$と同等な順序数である．よって，$\overline{\overline{\alpha}}\leq\alpha$.

＊4．10　$x\in N\equiv x=\overline{\overline{x}}$.

［証明］　$x=\overline{\overline{x}}$とすると，4．7より，$x\in N$．逆に，$x\in N$とすると，4．7より，$\exists y[x=\overline{\overline{y}}]$．よって，$x$は$y$と同等な最小の順序数$(=\overline{\overline{y}})$である．ここで，$\overline{\overline{x}}<x$とすると，$\overline{\overline{x}}\simeq x$かつ$x\simeq y$($\because y\simeq\overline{\overline{y}}\wedge x=\overline{\overline{y}}$)であるから，$\overline{\overline{x}}\simeq y$．$\overline{\overline{x}}<x$であったから，$\overline{\overline{x}}\simeq y\equiv y\simeq\overline{\overline{x}}\wedge\overline{\overline{x}}<x$．ゆえに，$y\simeq\overline{\overline{x}}<x$．これは矛盾である．よって，$x\leq\overline{\overline{x}}$．ところで，4．9より，$\overline{\overline{x}}\leq x$．したがって，$x=\overline{\overline{x}}$.

＊4．11　$\overline{\overline{x}}\simeq x$.

［証明］　3 .51によるxの存在と4．5による．

＊4．12　$x\simeq y\equiv\overline{\overline{x}}=\overline{\overline{y}}$.

［証明］　$x\simeq y$とする．$x\simeq\overline{\overline{x}}$であるから，$\overline{\overline{x}}\simeq y$，ゆえに，$\overline{\overline{x}}$は$y$と同等な順序数である．他方，$\overline{\overline{y}}$は$y$と同等な最小の順序数であるから，$\overline{\overline{y}}\leq\overline{\overline{x}}$．同様にして，$y\simeq\overline{\overline{y}}$．よって，$x\simeq y\wedge y\simeq\overline{\overline{y}}$より，$\overline{\overline{y}}\simeq x$．よって，$\overline{\overline{x}}\leq\overline{\overline{y}}$となるから，$\overline{\overline{x}}=\overline{\overline{y}}$．逆に，$\overline{\overline{x}}=\overline{\overline{y}}$とすると，$x\simeq\overline{\overline{x}}$であるから，$x\simeq\overline{\overline{y}}$．また，$\overline{\overline{y}}\simeq y$．ゆえに，$x\simeq y$.

＊4．13　$Nc`[Nc`x]=Nc`x$.

［証明］　4 .11より，$\overline{\overline{x}}\simeq x$．よって，4 .12より，$\overline{\overline{(\overline{\overline{x}})}}=\overline{\overline{x}}$.

＊4．14　$x\subseteq y\rightarrow\overline{\overline{x}}\leq\overline{\overline{y}}$.

［証明］　$x\subseteq y$とする．$y\simeq\overline{\overline{y}}$．ゆえに，$x\simeq z\wedge z\subseteq\overline{\overline{y}}$なる集合$z$が存在する．$z$は順序数の集合である（つまり，$z\subseteq On$)．3 .31を用いると，この$z$は$E$によって整列されるから，3 .50の2により，ある順序数βに同型である．すなわち，$h\mathrm{Isom}_{E,E}(\beta,z)$なる$h$が存在する．定義3 .12より，$h$は厳密に単調である．また，$h$は順序関数でもある．したがって，3 .48

より，$\alpha\in\beta\,(=\mathrm{Dom}(h))$に対して，$\alpha\leq h`\alpha$．一方，$\alpha\in\beta$に対しては，$h`\alpha\in z\subseteq\bar{\bar{y}}$．よって，$\alpha\in\beta\rightarrow\alpha\leq h`\alpha\in\bar{\bar{y}}$．つまり，$\alpha\in\beta\rightarrow\alpha\in\bar{\bar{y}}$．ゆえに，$\beta\subseteq\bar{\bar{y}}$．だが，同型関係より，$\bar{\bar{\beta}}=\bar{\bar{z}}$であり，また，$x\simeq z$であったから，4.12より，$\bar{\bar{x}}=\bar{\bar{z}}$．よって，$\bar{\bar{\beta}}=\bar{\bar{z}}=\bar{\bar{x}}$．したがって，$\bar{\bar{x}}=\bar{\bar{z}}=\bar{\bar{\beta}}\leq\beta\leq\bar{\bar{y}}$．

これらの定理からの帰結として，Schroeder-Bernstein の定理がでてくる．すなわち，$x\simeq t\subseteq y$，かつ$y\simeq u\subseteq x$であれば，$\bar{\bar{x}}=\bar{\bar{t}}\leq\bar{\bar{y}}\wedge\bar{\bar{y}}=\bar{\bar{u}}\leq\bar{\bar{x}}$．よって，$\bar{\bar{x}}=\bar{\bar{y}}$となるから．

＊4．15　$\alpha>1$に対して，$\overline{\overline{\alpha\dot{+}1}}\leq\overline{\overline{\alpha^2}}$.

［証明］　$A=\{\langle 0,\beta\rangle\,|\,\beta<\alpha\}\cup\{\langle 1,0\rangle\}$とおけば，$\alpha\dot{+}1\simeq A$かつ$A\subseteq\alpha\times\alpha$．よって，4.12，4.14より，$\overline{\overline{\alpha\dot{+}1}}=\bar{\bar{A}}$，かつ$\bar{\bar{A}}\leq\overline{\overline{\alpha^2}}$.

＊4．16　$\mathrm{Un}(A)\rightarrow\overline{\overline{A``x}}\leq\bar{\bar{x}}$.

［証明］　$\alpha=\bar{\bar{a}}$とおけば，$a\simeq\bar{\bar{a}}$であるから，$h:\alpha\rightarrow a$なる全単射関係hが存在する．ところで，置換公理 C 4において，$x=a$とおけば次が成立する．

$$\mathrm{Un}(A)\rightarrow\exists y\forall u[u\in y\equiv\exists v[v\in a\wedge\langle u,v\rangle\in A]].$$

よって，$y=\mathrm{Rng}(A\,|\,a)=A``a$であり，かつ，$\mathrm{M}(y)$．すなわち，$\mathrm{Un}(A)\rightarrow\mathrm{M}(A``a)$．ここで，$\mathrm{Un}(A)$の仮定の下で，$b=A``a$とおく．さらに，$g:b\xrightarrow{1-1}\alpha$を次でもって定義する（もちろん，$\mu\beta$は‘最小の$\beta$’を意味する）．

$$x\in b\rightarrow g(x)=\mu\beta[A`h(\beta)=x].$$

すると，gは1対1であるから，$b\simeq g``b$．また，$y\in g``b$とすると，$g(m)=y$なる$m\in b$が存在する．よって，上記gの定義より，$m\in b$であるから，$g(m)=\mu\beta[A`h(\beta)=m]$となる．また，$A`h(\beta)=m$かつ$m\in b$，すなわち，$A`h(\beta)\in b$．さらに，$b=A``a$．よって，$h(\beta)\in a$．また，$h$は$h:\alpha\rightarrow a$なる全単射であった．ゆえに，$\beta\in\alpha$．

他方，定義より，$g(m)=\beta$であるから，$g(m)\in\alpha$．$g(m)=y$であったから，$y\in\alpha$．すなわち，$y\in g``b\rightarrow y\in\alpha$．よって，$g``b\subseteq\alpha$．以上より，$b\simeq g``b\wedge g``b\subseteq\alpha$が示された．ゆえに，4.12，4.14より，$\bar{\bar{b}}=\overline{\overline{g``b}}\wedge\overline{\overline{g``b}}\leq\bar{\bar{\alpha}}$．よって，$\bar{\bar{b}}\leq\bar{\bar{\alpha}}=\overline{\overline{(\bar{\bar{a}})}}=\bar{\bar{a}}$．よって，$\bar{\bar{b}}\leq\bar{\bar{a}}$．すなわち，$\overline{\overline{A``a}}\leq\bar{\bar{a}}$．したがって，$\overline{\overline{A``x}}\leq\bar{\bar{x}}$となり定理は証明された．[16]

＊4．17　$\bar{\bar{x}}<\overline{\overline{\mathscr{P}(x)}}$．(Cantor の定理)

［証明］　集合xの各元$m\in x$に，部分集合$\{m\}\subset x$を対応させることにより，集合$A=\{\{m\}\,|\,m\in x\}$をうる．$x\simeq A\subset\mathscr{P}(x)$であるから，4.14より，$\bar{\bar{x}}\leq\overline{\overline{\mathscr{P}(x)}}$．したがって，$\bar{\bar{x}}=\overline{\overline{\mathscr{P}(x)}}$として矛盾を導けばよい．$\bar{\bar{x}}=\overline{\overline{\mathscr{P}(x)}}$とする．すると，$x\simeq\mathscr{P}(x)$．よって，$h:x\rightarrow\mathscr{P}(x)$なる全単射関数$h$が存在する．さらに，M 2により，次のようなクラスCが存在する．

$$\beta\in C\equiv\exists f[f\,\mathrm{Fnx}\wedge\mathrm{Dom}(f)=x\wedge\mathrm{Rng}(f)=\mathscr{P}(x)\wedge\beta\in x\wedge\sim(\beta\in h`\beta)].$$

$C=\{\beta\,|\,\beta\in x\wedge\sim(\beta\in h`\beta)\}$であるから，$C\subseteq x$．ゆえに，$C\in\mathscr{P}(x)$．ところで，$h$の存在より，$h`\delta=C$なる$\delta\in x$が存在する．そして，$\delta$と$C$の関係としては，$\delta\in C$か$\sim(\delta\in C)$のいずれか一方のみが成立する．$\delta\in C$と仮定する．クラス$C$の定義より，$\delta\in x\wedge\sim(\delta\in h`\delta)$．$h`\delta=C$であるから，$\sim(\delta\in C)$．他方，$\sim(\delta\in C)$と仮定する．$C=h`\delta$より，$\sim(\delta\in h`\delta)$．また，$\delta\in x$であるから，$\sim(\delta\in C)\rightarrow\delta\in x$．よって，$\delta\in x\wedge\sim(\delta\in h`\delta)$．したがって，$C$の定義より，$\delta\in C$．すなわち，$\delta\in C\equiv\sim(\delta\in C)$.

＊4．18　$\mathrm{Pr}(N)$.

［証明］　Nが集合であるとして，それをnで表す．$\cup n=v$とすると，2.69より，$\mathrm{M}(v)$．$x\in n\rightarrow x\subseteq\cup n$，すなわち，$x\in n\rightarrow x\subseteq v\rightarrow\bar{\bar{x}}\leq\bar{\bar{v}}$．ところで，$x\in n\,(=N)$のときは，4.10より，

$x=\bar{\bar{x}}$である．すなわち，$x \in n \rightarrow x=\bar{\bar{x}}$．よって，$x \in n \rightarrow x=\bar{\bar{x}} \leq \bar{\bar{v}}$．他方，4 .17より，$\bar{\bar{v}}<\overline{\overline{\mathscr{P}(v)}}$．よって，$x \in n \rightarrow x=\bar{\bar{x}} \leq \bar{\bar{v}}<\overline{\overline{\mathscr{P}(v)}}$．すなわち，$x \in n \rightarrow x<\overline{\overline{\mathscr{P}(v)}}$．ここで，$x$ として$\overline{\overline{\mathscr{P}(v)}}$をとると，$\overline{\overline{\mathscr{P}(v)}}<\overline{\overline{\mathscr{P}(v)}}$．これは矛盾である．よって，$\mathrm{Pr}(N)$．

Ⅲ　自然数のクラス ω は次のように定義される．

4．19　定義　$x \in \omega \equiv x+\{x\} \subseteq K_{\mathrm{I}}$．

x が第1種順序数であり，しかもそれより小さい全てのオーディナルも同じく第1種順序数であるならば，x は自然数である．

4．20　1　$\alpha \in \omega \rightarrow \alpha \dot{+} 1 \in \omega$

2　$\alpha \in \omega \wedge \beta<\alpha \rightarrow \beta \in \omega$

［1の証明］　$\alpha \in \omega$とする．$\alpha \in K_{\mathrm{I}} \subseteq On$ より，$\alpha \in On$．よって，3 .38より，$\alpha \dot{+} 1 \in On$．また，$\exists \alpha[\beta=\alpha \dot{+} 1]$ であるから，3 .40より，$\beta \in K_{\mathrm{I}}$．すなわち，$\alpha \dot{+} 1 \in K_{\mathrm{I}}$．ゆえに，$\{\alpha \dot{+} 1\} \subseteq K_{\mathrm{I}}$．また，$\alpha \dot{+} 1=\alpha+\{\alpha\} \subseteq K_{\mathrm{I}}$ より，$\alpha \dot{+} 1 \subseteq K_{\mathrm{I}}$．よって，$(\alpha \dot{+} 1)+\{\alpha \dot{+} 1\} \subseteq K_{\mathrm{I}}$．したがって，4 .19より，$\alpha \dot{+} 1 \in \omega$．

［2の証明］　$\alpha \in \omega \wedge \beta<\alpha$とする．すると，4 .19より，$\alpha \in K_{\mathrm{I}}$．$\beta \in \alpha$であるから，$\beta \in K_{\mathrm{I}}$．よって，$\{\beta\} \subseteq K_{\mathrm{I}}$．また，$\beta<\alpha$より，$\beta \subset \alpha$．さらに，4 .19より，$\alpha \subseteq K_{\mathrm{I}}$．よって，$\beta \subset K_{\mathrm{I}}$．したがって，$\beta+\{\beta\} \subseteq K_{\mathrm{I}}$ より，$\beta \in \omega$．

4．21　定義　i，k は変域が ω であるような変数である．

帰納法の原理が自然数に対して成立する．

4．22　$0 \in A \wedge \forall k[k \in A \rightarrow k \dot{+} 1 \in A] \rightarrow \omega \subseteq A$．

［証明］　$0 \in A \wedge \forall k[k \in A \rightarrow k \dot{+} 1 \in A] \wedge \sim(\omega \subseteq A)$とする．$A \subset \omega$であるから，$A$ には属さない最小の ω の元 i が存在する．よって，4 .19より，$i+\{i\} \subseteq K_{\mathrm{I}}$．したがって，3 .40より，$\exists k[i=k \dot{+} 1] \vee i=0$．ところで，$0 \in A$ であるから，$i=0$なら $i \in A$ となり，仮定に反する．また，$i=k \dot{+} 1$とすると，i は A に属さない ω の最小の元なのであるから，i よりも小さい k は A に属することになる．すなわち，$k \in A$．だがこのときは，$\forall k[k \in A \rightarrow k \dot{+} 1 \in A]$より，$k \dot{+} 1 \in A$．すなわち，$i \in A$ となり，これも仮定に反する．

自然数のクラス上の関数は帰納的に定義される．

4．23　$\forall a \forall G \exists ! F[F \mathrm{Fn}\, \omega \wedge F^{\prime} 0=a \wedge \forall k[F^{\prime}(k \dot{+} 1)=G^{\prime}(F^{\prime} k)]]$．

これは3 .45における G を特殊化するか，あるいは3 .45の証明で用いられた論法と同じ論法を用いることによって証明することができる．

4．24　$i \simeq k \rightarrow i=k$.

［証明］　$\forall i \forall k[i \simeq k \rightarrow i=k]$ を i に関する帰納法で示す．(1)　$i=0$のとき．$0 \simeq k$ のときは明らかに，$k=0$．よって，$\forall k\ [0 \simeq k \rightarrow 0=k]$．(2)　$i=i_0$のとき成立するとする．すなわち，$\forall k\ [i_0 \simeq k \rightarrow i_0=k]$ と仮定する．今，任意の k に対し，$i_0 \dot{+} 1 \simeq k$ とする．k は0ではありえないから，$k=k_0 \dot{+} 1$なる k_0 が存在する．よって，$i_0 \dot{+} 1 \simeq k_0 \dot{+} 1$と仮定することになる．ところで，$i \dot{+} 1 \simeq k \dot{+} 1 \rightarrow i \simeq k$である［$\because \sim(i \simeq k)$ならば，4 .12より，$\bar{\bar{i}} \risingdotseq \bar{\bar{k}}$，ゆえに，$\overline{\overline{i \dot{+} 1}} \risingdotseq \overline{\overline{k \dot{+} 1}}$．よって再び，4 .12より，$\sim(i \dot{+} 1 \simeq k \dot{+} 1)$．ゆえに，$i \dot{+} 1 \simeq k \dot{+} 1 \rightarrow i \simeq k$］．一方，帰納法の仮定より，$i_0 \simeq k \rightarrow i_0=k$ であった．よって，$i_0 \dot{+} 1 \simeq k_0 \dot{+} 1 \rightarrow i_0 \simeq k_0 \rightarrow i_0=k_0$．また，$i_0=k_0 \rightarrow i_0 \dot{+} 1=k_0 \dot{+} 1$．したがって，$i_0 \dot{+} 1 \simeq k_0 \dot{+} 1 \rightarrow i_0 \dot{+} 1=k_0 \dot{+} 1$．すなわち，$i_0 \dot{+} 1$のときも成立する．[17]

4．25　$\alpha \simeq k \rightarrow \alpha=k$

［証明］　$\alpha<\omega$ならば，$\alpha \in \omega$であるから，4 .24より明らかに成立する．$\omega \leq \alpha$の

ときはどうか．$\alpha \simeq k$ と仮定する．ここで，$k \dot{+} 1$を考えてみる．$k \in \omega$ であるから，4 .20より，$k \dot{+} 1 \in \omega$．よって，$k \dot{+} 1 \subseteq \omega$．また，$\omega \subseteq N$ [$\because$ $n \in \omega$ とする．4 . 9 より，$\overline{\overline{n}} \leq n \in \omega$．よって，$k \in \omega$ に対しては，4 .24より，$n \simeq k \rightarrow n = k$. ゆえに，$k < n \rightarrow \sim (n \simeq k)$．よって，$\overline{\overline{n}} < n$ ならば$\sim (n \simeq \overline{\overline{n}})$であり，これは不合理．よって，$n \leq \overline{\overline{n}}$となり，$\overline{\overline{n}} = n$，他方，$\overline{\overline{n}} \in N$ であるから，$n \in N$. すなわち，$n \in \omega \rightarrow n \in N$]．ゆえに，$k \dot{+} 1 \in N$. よって，4 .10より，$k \dot{+} 1 = \overline{\overline{k \dot{+} 1}}$. $k \dot{+} 1 \subseteq \alpha \simeq k$ であるから，$\overline{\overline{k \dot{+} 1}} \leq \overline{\overline{\alpha}}$．$\alpha \simeq k$ であるから，4 .12より，$\overline{\overline{\alpha}} = \overline{\overline{k}}$．4 . 9 より，$\overline{\overline{k}} \leq k$. よって，$\overline{\overline{k \dot{+} 1}} \leq \overline{\overline{\alpha}} = \overline{\overline{k}} \leq k$. ゆえに，$k \dot{+} 1 = \overline{\overline{k \dot{+} 1}} \leq \overline{\overline{\alpha}} = \overline{\overline{k}} \leq k$. すなわち，$k \dot{+} 1 \leq k$. これは矛盾である．よって，$\omega \leq \alpha$ のときは，$\sim (\alpha \simeq k)$であるから，そのときは，$\alpha \simeq k$ は偽となる．したがって，$\omega \leq \alpha$ のときも，$\alpha \simeq k \rightarrow \alpha = k$.

＊4．26　$i \in N$.

［証明］　4 .11より，$\overline{\overline{i}} \simeq i$. $k = \overline{\overline{i}}$とすれば，$k \simeq i$. よって，4 .24より，$k = i$. $k = \overline{\overline{i}} \wedge k = i$ であるから，$i = \overline{\overline{i}}$．したがって，4 .10より，$i \in N$.

IV　クラスは，それが自然数と同等であれば有限(finite)とよばれ，そうでなければ無限(infinite)とよばれる．

4．27　定義　$\mathrm{Fin}(x) \equiv \exists \alpha [\alpha \in \omega \wedge \alpha \simeq' x]$.

4．28　定義　$\mathrm{Inf}(x) \equiv \sim \mathrm{Fin}(x)$.

4．29　1　$\mathrm{Fin}(x) \wedge z \subseteq x \rightarrow \mathrm{Fin}(z)$.

　　　　2　$\mathrm{Fin}(x) \wedge \mathrm{Fin}(y) \rightarrow \mathrm{Fin}(x+y) \wedge \mathrm{Fin}(x \times y)$.

［1の証明］　$\mathrm{Fin}(x) \wedge z \subseteq x$ とする．すると，$\exists \alpha [\alpha \in \omega \wedge \alpha \simeq' x]$．3 .51により，$x = f``\alpha$となるような順序数$\alpha (\in \omega)$，ならびに$\alpha$上の１対１の関数$f$が存在する．同様にして，$z \subseteq x$ なる $z$ に対しても，$z = f``\beta \wedge \beta \leq \alpha$ となるような順序数$\beta (\in \omega)$，ならびにβ上の１対１の関数fが存在する．１対１より，$\beta \simeq' z$. また，$\beta \in \omega$．よって，$\mathrm{Fin}(z)$.

［2の証明］　次の３つは明らかに成立する．

(1)　$\mathrm{Fin}(x) \rightarrow \mathrm{Fin}(x + \{a\})$．　(2)　$\mathrm{Fin}(x) \rightarrow \mathrm{Fin}(\{a\} \times x)$．　(3)　$\overline{\overline{x}} = n+1 \wedge a \in x \rightarrow \overline{\overline{x - \{a\}}} = n$.

与式の証明は$\overline{\overline{x}}$に関する数学的帰納法による．(i)　$\overline{\overline{x}} = 0$のときは，$x = 0$. よって，$x+y = y$，かつ，$x \times y = 0$. しかし，$\mathrm{Fin}(y)$であり，さらに，$\mathrm{Fin}(0)$でもある($\because 0 \in \omega \wedge 0 \simeq' 0$)．(ii) 帰納法の仮定として，$\forall x [\overline{\overline{x}} = n \wedge \mathrm{Fin}(y) \rightarrow \mathrm{Fin}(x+y) \wedge \mathrm{Fin}(x \times y)]$ とする．さて，$\overline{\overline{x}} = n+1$ とする．明らかに，$x \neq 0$であるから，$\exists a [a \in x]$．すると(3)より，$\overline{\overline{x - \{a\}}} = n$. よって，帰納法の仮定より，$(x - \{a\}) + y$ は有限であり，$(x - \{a\}) \times y$ も有限である．しかるに，$x + y = [(x - \{a\}) + y] + \{a\}$であるが，これは(1)より，有限である．さらに，$x \times y = [(x - \{a\}) \times y] + [\{a\} \times y]$ であるが，仮定より，$\mathrm{Fin}(y)$．よって，(2)より，$\mathrm{Fin}(\{a\} \times y)$．したがって，$\mathrm{Fin}(x \times y)$となり定理は証明された．[18]

4．30　$\mathrm{Fin}(\alpha) \equiv \alpha \in \omega$.

［証明］　$\mathrm{Fin}(\alpha)$とすると，$\exists \beta [\beta \in \omega \wedge \beta \simeq' \alpha]$．しかるに，$\beta \simeq \alpha$のときは，4 .25より，$\alpha = \beta$．よって，$\alpha \in \omega$．逆に，$\alpha \in \omega$ とする．$\mathrm{M}(\alpha)$であるから，3 .51より，$\alpha = f``\beta$ となるような順序数β，およびβ上の１対１の関数fが存在する．明らかに，$\alpha \simeq \beta$．よって，$\alpha = \beta$．また，$\alpha \in \omega \wedge \alpha = \beta$ より，$\beta \in \omega$．すなわち，$\beta \in \omega \wedge \beta \simeq \alpha$ なるβが存在し，$\mathrm{Fin}(\alpha)$.

4．31　$\mathrm{Ord}(\omega)$.

［証明］　4 .19より，ω は順序数のクラスであるから，$\omega \subseteq On$. よって，3 .31，3 .

4より，$E\mathrm{Con}\omega$. また，$x \in \omega$とする．上述のように，$\omega \subseteq On$. さらに，$a \in b \wedge b \in \omega$とすると，$\mathrm{Ord}(b)$. ゆえに，$\mathrm{Comp}(b)$. よって，3.14より，$\forall u[u \in b \rightarrow u \subseteq b]$. 仮定より，$a \in b$であるから，$a \subseteq b$. また，$b \in \omega$であるから，$b+\{b\} \subseteq K_{\mathrm{I}}$. よって，$a \subseteq b \subseteq b+\{b\} \subseteq K_{\mathrm{I}}$. すなわち，$a \subseteq K_{\mathrm{I}}$. また，$b \subseteq K_{\mathrm{I}} \wedge a \in b$より，$a \in K_{\mathrm{I}}$. ゆえに，$\{a\} \subseteq K_{\mathrm{I}}$. よって，$a+\{a\} \subseteq K_{\mathrm{I}}$. したがって，4.19より，$a \in \omega$. すなわち，$\mathrm{Comp}(\omega)$となり，$\mathrm{Ord}(\omega)$.

4．32　$\mathrm{M}(\omega)$.

［証明］　無限公理C1によってその存在が保証される集合aに対して，bとしてaの元の全ての部分集合のクラスをとる．$b \subseteq \mathscr{P}(\cup a)$であるから，$b$は集合である．$m \in a$なる$m$に対する$\mathscr{P}(m)$は$b$の部分集合であり，$m \in a$のときは，$m+\{n\} \in a$である．よって，$\mathscr{P}(m+\{n\}) \subseteq b$でもある．さらに，任意の$x$に対して

$$x \in \mathscr{P}(m)\,(\subseteq b) \rightarrow x+\{n\} \in \mathscr{P}(m+\{n\})\,(\subseteq b).$$

すなわち，$\forall x[x \in b \rightarrow x+\{n\} \in b]$.

さて，$C=(\omega \upharpoonright \mathrm{Aeq})``b$によって定義されるクラス$C$，すなわち，$b$の元と同等である自然数のクラスを考えてみる．$\mathrm{Un}(\omega \upharpoonright \mathrm{Aeq}) \wedge \mathrm{M}(b)$. よって，2.65より，$\mathrm{M}(C)$. また，任意の$t \in C$をとると，$t \in \omega$であるから，4.20より，$\exists s[s \in b \wedge s \simeq t] \wedge t \dotplus 1 \in \omega$. よって，$\exists s+\{n\}\,[s+\{n\} \in b \wedge s+\{n\} \simeq t \dotplus 1] \wedge t \dotplus 1 \in \omega$. したがって，$t \dotplus 1 \in C$. ここで，$C \subset \omega$と仮定する．$\phi \in b$であるから，$\phi \simeq \phi$より，$0 \in C$. $\omega - C$の最小の順序数をαとする．$0 \in C$であるから，$\alpha \neq 0$. $\alpha \in \omega - C$より，$\alpha \in \omega$. ゆえに，4.19より，$\alpha \in K_{\mathrm{I}}$. よって，$\exists \beta[\alpha=\beta \dotplus 1]$. このような順序数$\beta$に対しては，$\beta<\alpha$. また，$\beta \dotplus 1=\alpha \in \omega$のときは，$\beta \in \omega$. さらに，$\beta<\alpha$，かつ$\alpha$は$\omega - C$の最小の順序数であったから，$\beta \in C$. よって，$\beta \dotplus 1 \in C$. しかるに，$\beta \dotplus 1=\alpha$であったから，$\alpha \in C$. これは，$\sim(\alpha \in C)$という仮定に反する．ゆえに，$\omega \subseteq C$. したがって，2.67より$\mathrm{M}(\omega)$となり，定理は証明された.[19]

4．33　$\omega \in K_{\mathrm{II}}$.

［証明］　$\omega \in K_{\mathrm{I}}$とすると，$\exists \alpha[\omega=\alpha \dotplus 1]$. $\alpha \in \alpha+\{\alpha\}=\alpha \dotplus 1$より，$\alpha \in \omega$. よって，4.20より，$\alpha \dotplus 1 \in \omega$. ゆえに，$\omega \in \omega$となるが，これは不可能である．

4．34　第2種順序数が存在する．

［証明］　4.31，4.32，4.33による．

＊4．35　定義　$N'=N-\omega$.

＊4．36　$N' \subseteq On$.

［証明］　$x \in N'$，つまり，$x \in N-\omega$とする．すると，$x \in N$. 他方，4.8より，$N \subseteq On$. よって，$x \in On$.

＊4．37　N'はEに関してOnと同型である．

［証明］　4.18，4.32，2.85により，$\mathrm{Pr}(N')$. また，4.36より，$N' \subseteq On$. よって，3.31より，N'はEによって整列される．また，XがN'の固有E-セクションであるとすると，3.11により，XはN'のE-始切片，つまり，$N'-X$の最初の元αによってうみ出されるE-始切片である．よって，$X \subseteq \alpha$. $\mathrm{M}(\alpha)$であるから，2.67により，$\mathrm{M}(X)$. よって，3.50の1より，N'はEに関してOnに同型である．

OnからN'への同型関係は一般に，$\aleph$で表される．

＊4．38　定義　$\aleph \mathrm{Isom}_{E,E}(On, N')$.

明らかに，次が成立する．

＊4．39　$\aleph`0=\omega$.

4.25により，$\omega\in N$であるから，$\aleph_\gamma$とω_γは次によって定義される．

＊4．40　定義　$\aleph_\gamma=\omega_\gamma=\aleph`\gamma$.

＊4．41　$\overline{\overline{\aleph^2{}_\alpha}}=\aleph_\alpha$.

［証明］　4.38，4.40より，$\omega_\gamma(=\aleph`\gamma)\in N'$となるから，$\omega_\gamma\in N$．よって，4.9より，$\omega_\gamma=\overline{\overline{\omega_\gamma}}$．$\gamma$は$\overline{\overline{\aleph^2{}_\gamma}}\neq\aleph_\gamma$なる最小の順序数であると仮定して，$\omega^2{}_\gamma\simeq\omega_\gamma$を示せばよい．なぜならば，$\omega^2{}_\gamma\simeq\omega_\gamma$なら，4.11より，$\overline{\overline{\omega^2{}_\gamma}}=\overline{\overline{\aleph^2{}_\gamma}}=\overline{\overline{\omega_\gamma}}=\overline{\overline{\aleph_\gamma}}=\aleph_\gamma$，つまり，$\overline{\overline{\aleph^2{}_\gamma}}=\aleph_\gamma$となり，最初の仮定に反し，与式が成立することになるからである．

3.56で定義されたPに対して，3.57より，$\mathrm{Max}\{\alpha,\beta\}\le P`\langle\alpha,\beta\rangle$であり，また明らかに，$\langle\alpha,\beta\rangle\in\omega^2{}_\gamma\equiv\alpha\in\omega_\gamma\wedge\beta\in\omega_\gamma$．よって，$\omega_\gamma\subseteq P``(\omega^2{}_\gamma)$．したがって，Schroeder-Bernstein の定理より，$P``(\omega^2{}_\gamma)\subseteq\omega_\gamma$が示されるならば，$P``(\omega^2{}_\gamma)=\omega_\gamma$となり，$\mathrm{Un}_2(P)$，かつ$P$は全射であることから，$\omega^2{}_\gamma\simeq\omega_\gamma$となる．ゆえに，$P``(\omega^2{}_\gamma)\subseteq\omega_\gamma$が示されればよい．

以下，γは$\overline{\overline{\aleph^2{}_\gamma}}\neq\aleph_\gamma$なる最小の順序数であるとの仮定の下に，$P``(\omega^2{}_\gamma)\subseteq\omega_\gamma$となることを示す．ところで，$P`\langle\alpha,\beta\rangle<\omega_\gamma\rightarrow P``(\omega^2{}_\gamma)\subseteq\omega_\gamma$であるから，$\alpha,\beta\in\omega_\gamma$に対して，$P`\langle\alpha,\beta\rangle<\omega_\gamma$を示せば十分となる．また，あらゆる$\delta$に対して（$\delta\in N$より，$\delta=\overline{\overline{\delta}}$（4.10）であるから），$\delta<\omega_\gamma\equiv\overline{\overline{\delta}}<\omega_\gamma$である．よって結局，$\alpha,\beta<\omega_\gamma$に対して，$\overline{\overline{P`\langle\alpha,\beta\rangle}}<\omega_\gamma$を示せば十分ということになる．

さて，$\overline{\overline{P`\langle\alpha,\beta\rangle}}$は$P`\langle\alpha,\beta\rangle$より小さなオーディナルの集合のべき（濃度）である．つまり，

$$\overline{\overline{P`\langle\alpha,\beta\rangle}}=\overline{\overline{\{x\mid\mathrm{Ord}(x)\wedge x<P`\langle\alpha,\beta\rangle\}}}.$$

Pの定義3.56により，この集合は順序Rにおいて$\langle\alpha,\beta\rangle$に先行する対の集合$m$に$P^{-1}$によって写される．すなわち

$$m=\{\langle x,y\rangle\mid\langle x,y\rangle R\langle\alpha,\beta\rangle\}\wedge m=P^{-1}``(P`\langle\alpha,\beta\rangle).$$

よって，$\overline{\overline{P`\langle\alpha,\beta\rangle}}=\overline{\overline{m}}$．また，3.54の証明において示されたように，$\langle x,y\rangle\in m$に対して

$$\langle x,y\rangle\in m\rightarrow x,y\in[\mathrm{Max}\{\alpha,\beta\}\dot{+}1]\rightarrow\langle x,y\rangle\in[\mathrm{Max}\{\alpha,\beta\}\dot{+}1]^2.$$

ここで，$\mathrm{Max}\{\alpha,\beta\}=\mu$とおくと，$\langle x,y\rangle\in m\rightarrow\langle x,y\rangle\in(\mu\dot{+}1)^2$．よって，$m\subseteq(\mu\dot{+}1)^2$．この$\mu$に対して，次の区別を行う．

(1)　μが有限であるとき．$\mathrm{Fin}(\mu)$であるから，4.29より，$\mathrm{Fin}(\mu\dot{+}1)$．ゆえに，$\mathrm{Fin}((\mu\dot{+}1)^2)$．よって，4.30より，$(\mu\dot{+}1)^2\in\omega$．すなわち，$(\mu\dot{+}1)^2<\omega$．よってこの場合，$\overline{\overline{m}}\le\overline{\overline{(\mu\dot{+}1)^2}}<\omega\le\omega_\gamma$．すなわち，$\overline{\overline{m}}=\overline{\overline{P`\langle\alpha,\beta\rangle}}<\omega_\gamma$.

(2)　μが無限であるとき．$\mu=\mathrm{Max}\{\alpha,\beta\}\wedge\alpha,\beta\in\omega_\gamma$であるから，$\mu<\omega_\gamma$．よって，ある$\delta<\gamma$に対して，$\overline{\overline{\mu}}=\omega_\delta(=\aleph_\delta)$．ところで，$\gamma$は仮定より，$\overline{\overline{\aleph^2{}_\gamma}}\neq\aleph_\gamma$，つまり，$\overline{\overline{\omega^2{}_\gamma}}\neq\omega_\gamma$なる最小の順序数であった．ゆえに，$\gamma$より小さい$\delta$に対しては，$\overline{\overline{\omega^2{}_\delta}}=\omega_\delta$が成立する．つまり（$\omega_\delta=\overline{\overline{\mu}}$であるから，$\overline{\overline{(\overline{\overline{\mu}})^2}}=\overline{\overline{\mu}}$が成立する．$\overline{\overline{\mu}}\simeq\mu$であるから，$\overline{\overline{(\overline{\overline{\mu}})^2}}=\overline{\overline{\mu^2}}$．よって，$\overline{\overline{\mu^2}}=\overline{\overline{\mu}}$．ゆえに，4.15を用いると，$\overline{\overline{\mu\dot{+}1}}\le\overline{\overline{\mu^2}}$であるから，$\overline{\overline{m}}\le\overline{\overline{(\mu\dot{+}1)^2}}\le\overline{\overline{(\mu^2)^2}}=\overline{\overline{\mu^2}}=\overline{\overline{\mu}}<\omega_\gamma$．すなわち，$\overline{\overline{m}}=\overline{\overline{P`\langle\alpha,\beta\rangle}}<\omega_\gamma$.

以上，$\overline{\overline{P`\langle\alpha,\beta\rangle}}<\omega_\gamma$が示され，よって，$\omega^2{}_\gamma\simeq\omega_\gamma$が示され，この定理の証明は終わった．

＊4．42 任意の無限集合 x に対して，$\overline{\overline{x^2}}=\overline{\overline{x}}$

［証明］ 4.39より，$\aleph`0=\omega$．4.40により，$\aleph_\gamma=\omega_\gamma=\aleph`\gamma$．また，$\aleph$ $\mathrm{Isom}_{E,E}(On,N')$で，$N'=N-\omega$であるから，$\aleph`\alpha\in N'=N-\omega$．よって，$\aleph`\alpha\in N$．したがって，4.41は任意の無限集合$\aleph_\alpha$に対して成立する．そこで，4.4において，$\aleph_\alpha=x$とすると，$\overline{\overline{x^2}}=x$．そして，$x=\aleph_\alpha=\aleph`\alpha\in N$．つまり，$x\in N$であるから，4.10より，$x=\overline{\overline{x}}$．よって，$\overline{\overline{x^2}}=\overline{\overline{x}}$．

＊4．43 $\mathrm{Inf}(x)\wedge y\neq 0\to\overline{\overline{x\times y}}=\overline{\overline{x+y}}=\mathrm{Max}\{\overline{\overline{x}},\overline{\overline{y}}\}$.

［証明］ $\mathrm{Inf}(x)\wedge y\neq 0$とする．ゆえに，$\omega\le\overline{\overline{x}}\wedge 0<\overline{\overline{y}}$．$\mathrm{Max}\{\overline{\overline{x}},\overline{\overline{y}}\}=\alpha$とおくと，4.11より，$x\simeq\overline{\overline{x}}$，$y\simeq\overline{\overline{y}}$であるから，$x\times y\simeq\overline{\overline{x}}\times\overline{\overline{y}}\subseteq\alpha\times\alpha$．よって，$\overline{\overline{x\times y}}\le\overline{\overline{\alpha\times\alpha}}=\alpha$．すなわち，$\overline{\overline{x\times y}}\le\mathrm{Max}\{\overline{\overline{x}},\overline{\overline{y}}\}$．

ところで，$y\neq 0$は次の2つのケースに分けられる．(1) $\overline{\overline{y}}=1$のとき．$\omega\le\overline{\overline{x}}$であるから，$x\times y\simeq x+y$ ［$\because\mathrm{Inf}(x)\wedge\overline{\overline{y}}=1$であるから，$x\times y\simeq x$，かつ$x+y\simeq x$］．よって，$\overline{\overline{x\times y}}=\overline{\overline{x+y}}=\overline{\overline{x}}=\mathrm{Max}\{\overline{\overline{x}},\overline{\overline{y}}\}$．(2) $1<\overline{\overline{y}}$のとき．$1<\overline{\overline{x}}\wedge 1<\overline{\overline{y}}\to\overline{\overline{x+y}}\le\overline{\overline{x\times y}}$である ［$\because 1<\overline{\overline{x}}\wedge 1<\overline{\overline{y}}$であるから，$\exists x_1,x_2\in x[x_1\neq x_2]\wedge\exists y_1,y_2\in y[y_1\neq y_2]$．そこで，次のような$x\times y$上の関数$F$を定義する：$F`\langle x_2,y_2\rangle=x_2$，$x\neq x_2$のときは，$F`\langle x,y_1\rangle=x$，それ以外のときは，$F`\langle x,y\rangle=y$．すると，$x\times y$から$x+y$への関数$F$は全射であり，よって，$\mathrm{Un}(F)$であるから，4.16により，$\overline{\overline{x+y}}=\overline{\overline{F``(x\times y)}}\le\overline{\overline{x\times y}}$］．ゆえに，$\overline{\overline{x+y}}\le\overline{\overline{x\times y}}$．しかるに，上述より，$\overline{\overline{x\times y}}\le\mathrm{Max}\{\overline{\overline{x}},\overline{\overline{y}}\}$．よって，$\overline{\overline{x+y}}\le\overline{\overline{x\times y}}\le\mathrm{Max}\{\overline{\overline{x}},\overline{\overline{y}}\}$．さらに，$x\subseteq x+y\wedge y\subseteq x+y$であるから，$\overline{\overline{x}}\le\overline{\overline{x+y}}\wedge\overline{\overline{y}}\le\overline{\overline{x+y}}$．よって，$\mathrm{Max}\{\overline{\overline{x}},\overline{\overline{y}}\}\le\overline{\overline{x+y}}$．したがって，$\mathrm{Max}\{\overline{\overline{x}},\overline{\overline{y}}\}\le\overline{\overline{x+y}}\le\overline{\overline{x\times y}}\le\mathrm{Max}\{\overline{\overline{x}},\overline{\overline{y}}\}$となり，定理は証明された．[20]

＊4．44 任意の$y\in m$に対して，$\overline{\overline{F`y}}\le\overline{\overline{a}}$ならば，$\overline{\overline{\bigcup(F``m)}}\le\overline{\overline{a\times m}}$.

［証明］ まず，$\forall x\in a[\overline{\overline{x}}\le\overline{\overline{b}}]\to\overline{\overline{\bigcup a}}\le\overline{\overline{a\times b}}$を示す．$\forall x\in a[\overline{\overline{x}}\le\overline{\overline{b}}]$とする．すると，$\forall x\in a\,\exists fx[fx:x\xrightarrow{1-1}b]$．ここで，$fx=fx$とおくと

$$\exists f\,\forall x\in a[fx:x\xrightarrow{1-1}b]. \tag{1}$$

さらに，もし$m\in\bigcup a$であれば，$\exists y[m\in y\wedge y\in a]$．選択公理たる公理Eを用いると

$$\exists h\,\forall m\in\bigcup a[m\in h`m\wedge h`m\in a]. \tag{2}$$

また，次のようにして，$\bigcup a$上の関数Gを定義する．

$$m\in\bigcup a\text{ に対して，}G`m=\langle h`m,(f`h`m)`m\rangle.$$

(1)，(2)より，$m\in\bigcup a$ならば，$m\in h`m\wedge h`m\in a$であり，かつ

$$(f`h`m)`m\in b.$$

よって，$G:\bigcup a\to a\times b$．次に，$\mathrm{Un}_2(G)$を示す．$m\in\bigcup a\wedge n\in\bigcup a\wedge G`m=G`n$とすると

$$h`m=h`n\wedge(f`h`m)`m=(f`h`n)`n.$$

しかし，$h`m=h`n$のときは，$f`h`m=f`h`n$．さらに，$f`h`m$は1対1であるから

$$(f`h`m)`m=(f`h`n)`n\to m=n.$$

よって，$G:\bigcup a\xrightarrow{1-1}a\times b$．ゆえに，$\overline{\overline{\bigcup a}}\le\overline{\overline{a\times b}}$．

ところで，$\sim\mathrm{Un}(F)$のときは，2.41より，4.44は明らかに成り立つ．$\mathrm{Un}(F)$のときは，4.16より，$\overline{\overline{F``m}}\le\overline{\overline{m}}$ であるから，$\overline{\overline{a\times F``m}}\le\overline{\overline{a\times m}}$．さらに，$x\in F``m$のときは，$\exists y\in m[x=F`y]$．よって，$y\in m$に対して，$\overline{\overline{F`y}}\le\overline{\overline{a}}$ならば，$\overline{\overline{\bigcup(F``m)}}\le\overline{\overline{a\times F``m}}\le\overline{\overline{a\times m}}$．すなわち，$\overline{\overline{\bigcup(F``m)}}\le\overline{\overline{a\times m}}$．これで定理の証明は終わった．

4．45 定義 $R``A\subseteq A$ならば，AはRに関して閉じている．

4．46　定義　$S``(A^2) \subseteq A$ ならば，A は3項関係としての S に関して閉じている．

4．47　定義　Y が R_1，……，R_k について閉じ，また，3項関係としての S_1，……，S_j に関して閉じており，しかも，X を含む最小のクラスであれば，Y は R_1，……，R_k，および3項関係としての S_1，……，S_j に関する X の閉包であるとよばれる．

このクラスの存在は次の条件の下でのみ必要となる．

＊4．48　$\mathrm{M}(X)$，かつ R_1，……，R_k と S_1，……，S_j が1価的であれば，閉包 Y が存在し，集合である．さらに，X が無限であれば，$\overline{\overline{Y}} = \overline{\overline{X}}$．

［証明］　$G\mathrm{Fn}V$ を次のように定義する．

$$G`x = x + R_1``x + \cdots\cdots + R_k``x + S_1``(x^2) + \cdots\cdots + S_j``(x^2).$$

右辺は正規タームであり，かつ2.65，2.70，2.75により，任意の集合 x に対して，集合である．よって，M5により，G は存在する．また，$f\mathrm{Fn}\omega$ を次のように定義する．

$$f`0 = x,\ f`(k\dot{+}1) = G`(f`k).$$

明らかに，$n \in \omega$ に対して，$f`n \subseteq f`(n+1)$．ここで，$\cup(f``\omega)$ を考えてみると，これは集合であり，定義4.47における Y のみたすべき条件を全て満足する．さらに，任意の無限集合 y に対して，4.16，4.42，4.43により，$\overline{\overline{G`y}} = \overline{\overline{y}}$．したがって，$x$ が無限集合であれば，$n$ に関する帰納法により，$\overline{\overline{f`n}} = \overline{\overline{f`0}} = \overline{\overline{x}}$ を示すことができる．よって，4.44，4.43により

$$\overline{\overline{\cup(f``\omega)}} \leq \overline{\overline{x \times \omega}} = \mathrm{Max}\{\overline{\overline{x}}, \overline{\overline{\omega}}\} = \overline{\overline{x}}$$

であり，また，4.14により

$$\overline{\overline{x}} = \overline{\overline{f`0}} \leq \overline{\overline{\cup(f``\omega)}}.$$

したがって，$\overline{\overline{\cup(f``\omega)}} = \overline{\overline{x}}$．

注

(1)　竹内[14]，P.267.

(2)　選択公理と数学の関わりについては，田中[17]を参照.

(3)　前述の竹内氏によると，‘P.Cohen の forcing の考えはゲーデルの上の考えのちょっとした拡張であるというのは多くの専門家の意見である’ということである．竹内[14]．P.12.

(4)　竹内[14]，P.12.

(5)　このあたりの事情については，Wang[18]，特に P.88−107．廣瀬・横田[6]を参照.

(6)　竹内[14]，P.27.

(7)　本稿の記述は Gödel 全集第2巻所収の1940年の講義録（文献[5]）に基づく．

(8)　集合とは $\mathrm{M}(X)$ をみたすクラス X のことであるから，この公理は不要である．

(9)　集合に対する外延性公理は，この公理の特別な場合である．

(10)　ここでの記法は現在多く使われている記法とは異なる．つまり，ここでの $\langle v, u\rangle$ は，現在では $\langle u, v\rangle$ と書かれることが多い．後の定義域や値域その他の定義においても同様である．

(11)　例えば Takeuti & Zaring[15]（P.83−84）においては，選択公理は次のように説明されている．

強い形　$\exists F \forall x[x \neq 0 \rightarrow F`x \in x]$

弱い形　$\exists f \forall x \in a[x \neq 0 \rightarrow f`x \in x]$

すなわち，弱い形での選択公理は，a に限定された場合の選択関数 f の存在を主張しているのであるが，強い形の選択公理の場合はそのような限定がない．

(12) 以上の諸公理のうち，外延性公理[A 3]，対集合公理[A 4]，無限公理[C 1]，和集合公理[C 2]，べき集合公理[C 3]，置換公理(図式)[C 4]，正則性(基底)公理[公理 D]はＺＦにも含まれている．ＺＦには上記以外に，$\exists x \forall y[\sim y \in x]$が空集合存在公理として含まれる場合がある．しかし，この公理は，やがて示されるように，Gödel 集合論では定理となる．

(13) 1951年に付加した注では，'概念' は観念と演算にのみあてはまり，特殊クラスはむしろ '対象 (object)' とよばれるべきであるといっている．

(14) 以上，Gödel 集合論の公理系について述べてきたが，一般に，ＢＧ(したがって，Gödel 集合論)とＺＦの関係については次が成立し，集合の理論としては対等であるといわれている．

1　ＺＦのどの定理もＢＧの定理である．

2　集合についてのみ立言するＢＧの定理はいずれもＺＦの定理である．

コーヘン[3]，P.83. Fraenkel, Bar-Hillel & Levy[4]，P.130－133.

(15) 1951年に付加した注において，Gödel は次のような趣旨のことを述べている：2のⅣで与えられた正規性の定義にしたがうならば，'We は正規的でない' という表現は正しくない．それは '正規的であることを証明することはできない' といった方がよい．しかし，選択公理が仮定されるなら，違ったやり方ではあるが，We の正規性を示すことができる．つまり，定義3．4でUをuでおきかえることができるのである．

(16) これと次の4.17の証明は Takeuti & Zaring[15]に負う．

(17) これと次の4.25の証明は竹内[14]に負う．

(18) 4.29の証明は Takeuti & Zaring[15]に負う．

(19) Mendelson[8]は無限公理C 1は論理式

$$\exists a[0 \in a \wedge \forall x[x \in a \rightarrow x \cup \{x\} \in a]]$$

と同値であること (P.198) と，上の論理式の無限公理を用いると$M(\omega)$となることを示している (P.188)．

(20) これと次の4．44の証明は Takeuti & Zaring[15]に負う．

文　献

[1] P.Bernays, A system of Axiomatic Set Theory-Part Ⅰ, *Journal of Symbolic Logic* **2** (1937), P.65－77.

[2] P.Bernays & A.A.Fraenkel, *Axiomatic Set Theory*, North-Holland, 1958.

[3] P.コーヘン (近藤基吉・坂井秀寿・沢口昭聿訳) ：連続体仮説，東京図書，1972.

[4] A.A.Fraenkel, Y.Bar-Hillel & A.Levy, *Foundations of Set Theory*, North-Holland, 1984.

[5] K.Gödel, *The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum Hypothesis with the Axioms of Set Theory* (lecture notes taken by G.W.Brown), Princeton Univ. Pr., 1940. also in：*Kurt Gödel Collected Works*, Vol.Ⅱ (ed. by S.Feferman, Oxford Univ. Pr., 1990), P.33－101.

[6] 廣瀬健・横田一正：ゲーデルの世界，海鳴社，1985.

[7] 倉田令二朗：数学論序説，ダイヤモンド社，1972.

[8] E.Mendelson, *Introduction to Mathematical Logic*, Van Nostrand, 1979.

[9] 日本数学会 (編) ：岩波数学辞典 (第3版)，岩波書店，1985.

[10] 大芝猛：数学基礎概説，共立出版，1987.

[11] W.van O.Quine, *Set Theory and Its Logic*, Harvard Univ. Pr., 1963.

[12] 赤摂也：集合論入門，培風館，1959.

[13] P.Suppes, *Axiomatic Set Theory*, Van Nostrand, 1960.
[14] 竹内外史：現代集合論入門（増補版），日本評論社，1989.
[15] G.Takeuti & W.M.Zaring, *Introduction to Axiomatic Set Theory* (Graduate texts in Mathematics ; 1), Springer-Verlag, 1981.
[16] 田中尚夫：公理的集合論，培風館，1982.
[17] 田中尚夫：選択公理と数学，遊星社，1987.
[18] H.Wang, *Reflections on Kurt Gödel*, The MIT Pr., 1987.