

負の数と方程式の指導に関する数学史的考察

上 垣 渉*

A Study on the Teaching of Negative numbers and Equations from the Viewpoint of Mathematical History

Wataru UEGAKI

[1] はじめに

数学の教育にたずさわっている人々は、生徒たちが数学に親しみをもち、さらに数学をよりよく理解してくれることを常に願っているものである。筆者は、数学教育をこのような意味においてよりよいものにしていくために、数学史から学ぶことが多いと考えている。

教師が生徒たちに、数学を出来合いのものとして、単に受動的に受け入れるだけの数学学習を強いるならば、一面的な「数学的知識の蓄積」に陥ってしまうであろう。いや、「数学的知識の蓄積」さえも、学習者の主体性なくしては成功しないという意味では、それすらおぼつかないと言ってよい。

したがって、単に「数学的知識の蓄積」という側面だけでなく、諸々の数学的概念、原理、法則などの理解、あるいは方法の修得などを図る意味においても、生徒たちが数学を主体的に学習し、自分自身の中に1つのまとまりのある数学を創ることが望まれるのである。

数学教育をそのようなものとしてとらえるとき、第1に、生徒の頭の中での数学理解の仕方、すなわち認知の様式が問題とされねばならない。また第2には、数学の体系が組み立てられていくときに用いられる数学固有の論理や手法といった内容を抜きにすることはできない。

しかし、上の2つの観点だけでは、数学教育の望ましい教育系統は作れないと言ってもよい。つまり、数学という体系が社会の中で出来上がってきた順序、その背景あるいは契機といった問題を考慮に入れることが第3の観点として取り上げられなければならないと思うのである。「個体発生は系統発生を繰り返す」という格言もあるように、このような歴史的観点からの示唆は、生徒をして自分自身の中に数学を組み立てさせていくときの参考になると思うのである。

ここに、数学史からの知見が数学教育に貢献しうる側面を見出しうる。

以上述べた観点は、かつて遠山啓が数学教育を現代化していくために提起した、

①認識の微視的發展 ②認識の巨視的發展 ③現代数学

という3つの視点と同様の趣旨のものである⁽¹⁾。

本論文は、このような立場から、中学校数学における「負の数」と「方程式」の指導にかかわる若干の問題を数学史的に考察するものである。

原稿受理日 平成8年10月9日

* 三重大大学教育学部数学教室

〔2〕 分数と負の数について

まず初めに“数”について考えてみよう。

人類が数を獲得したのは、おそらく人類が言葉を使用し始めた時期とそう離れてはいないと思われる。当然のことながら、初めに使用されたのは自然数であったと考えられる。そして歴史的には、自然数→有理数（正）→無理数→負数という順序で発展してきている。数学的には、数は自然数→負数→有理数→無理数という順序で構成されていくわけであるが、これは「曲がりくねった道を直線化する」という数学特有の方法の賜であって、この順序をそのまま教育に適用できるとは思われない。なぜなら、子どもの生活経験を一つの大きな拠り所とすべき小学校の算数教育にあっては、正の有理数はありえても、負の数はありえないからである。その意味で、負の数はやはり「現実ばなれした数」なのである。

私たちが日常生活を営む上で、長さ・重さ・かさ・広さ等、いわゆる“量”を欠かすことはできない。つまり、量は人間社会と深いかわりを持っているのである⁽²⁾。この意味において、子どもに量の世界をコントロールする力を与えることは小学校算数教育の一つの重要な目的であると言ってもよい。そして、現実の量の世界の数学的表現が正の数の世界なのである。

したがって、正の有理数についての演算を完成させるのが小学校算数教育の目的の一つになっているのだと言える。日常的にあまり使うことのない分数⁽³⁾が小学校の教育内容となっていながら、それでいて負の数が扱われない理由の一つは、分数が量の世界、とくに連続量の世界を記述するのに必要な数であるからだと言ってもよい。したがって、私たちが生活している現実の量の世界における重要性から考えると、負の数よりも分数が優先されるべきだということになるのである。

この分数は、数学史的には“分割”にその起源を持っている。

分数を意味する英語は fraction であるが、他の西欧語の多くが似たような単語である⁽⁴⁾。実は、この fraction は多くの西欧語の母語であるラテン語の frangere から来ており、その意味は「砕く」(break) である。日本に西洋数学を初めて紹介した柳河春三 (1832－1870) の『洋算用法』(1857 年、安政 4 年) では、分数は「碎数」と書かれている⁽⁵⁾。

分数の起源に関する数学史的考察の詳細については、拙論「分数の起源に関する史的考察」を参照していただきたい⁽⁶⁾。

〔3〕 方程式の出現

次に負の数についてであるが、負の数をいつ導入すればよいかについては、古くからいろいろ議論されてきている。明治時代にも、文字の導入を先にする方法と負の数を先にする方法とがあった、ラッグ・クラークの『初等数学の基礎』は、初めに方程式とその解法を正の数の範囲ですまし、次に負の数を導入して、再び負の数を含めて方程式とその解法を扱っているのである⁽⁷⁾。しかし、“授業の経済性”という観点から、このような系統は次第に影が薄れ、その結果今日のような姿になっていったと思われる。

ところで、数学史の上から言えば、もちろん方程式の出現が先である。方程式はすでに、紀元前 1800－1700 頃の成立といわれる『リンド・パピルス』に現れている。問題 24 から 29 まですでに登場する「アハの問題」というのがそれである⁽⁸⁾。

この「アハ」(aha) という単語は“量”とか“堆積”とかの意味⁽⁹⁾であるが、これらの問題のほとんどが「アハ」という単語で始まっていることから、後に「アハの問題」と呼ばれるようになったようである。

『リンド・パピルス』では、たとえば「ある量にその $\frac{1}{7}$ を加えると19になる。ある量とはいくつか」(問題24) という問題が解かれている。もちろん、未知数 x を用いた解法ではなく、“仮定法”(method of false position) という独特な解法が用いられている。

すなわち、次のような解法が示されている⁽¹⁰⁾。

(ある量を7と仮定せよ)

$$\begin{array}{rcl} \backslash 1 & & 7 \\ \backslash \frac{1}{7} & & 1 \\ \text{(合計)} & & 8 \end{array}$$

(8に掛けて19が得られる数に

7を掛ければ、求める量が出る)

$$\begin{array}{rcl} 1 & & 8 \\ \backslash 2 & & 16 \\ \frac{1}{2} & & 4 \\ \backslash \frac{1}{4} & & 2 \\ \backslash \frac{1}{8} & & 1 \\ \text{(合計)} & & 2\frac{1}{4}\frac{1}{8} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \backslash 1 & & 2\frac{1}{4}\frac{1}{8} \\ \backslash 2 & & 4\frac{1}{2}\frac{1}{4} \\ \backslash 4 & & 9\frac{1}{2} \end{array}$$

このような手順による。(求める) 量は $16\frac{1}{2}\frac{1}{8}$ 。その $\frac{1}{7}$ は $2\frac{1}{4}\frac{1}{8}$ で、合計19になる。(ゆえに正しい)

注 釈

・ある量7とその $\frac{1}{7}$ との和が8になる計算を示す。

・現在の記法では、

$$\frac{8}{7}x=19, x=\frac{19}{8}\times 7$$

そこで、 $\frac{19}{8}$ をまず求めて、 $2\frac{1}{4}\frac{1}{8}$ となることを示す。

・この計算法では、まず $8\times 2=16$ を求め、ついで $8\times\frac{1}{4}=2$ および $8\times\frac{1}{8}=1$ との和が19であるところから求られた。

・次に、 $2\frac{1}{4}\frac{1}{8}\times 7$ を求めるのに、 $2\frac{1}{4}\frac{1}{8}\times 1$ 、 $2\frac{1}{4}\frac{1}{8}\times 2$ 、 $2\frac{1}{4}\frac{1}{8}\times 4$ の和として求めている。

この解法を見てわかるように、仮定法とは、まず答の数値を仮定するのである。その仮定した数値を用いて、問題の示すところに従って計算をし、1つの数値を得るのである。そして、その得た数値と初めに与えられた数値とを比較するわけである。

つまり、「真の値」と「仮定した値」との関係は、「与えられた数」と「仮定した値のもとに得られた数」との関係に同じであるという考えを背景にしているのである。これは今日の眼からみれば、比例計算と言ってもよいであろうが、あえて“仮定法”と呼ばれている。それは、エジプト人の観念により近いものを想定したいとの思いからのようである。

この仮定法はエジプトだけでなく、ギリシア・インド・アラビアなどでも広く用いられたようである。アラビア人が仮定法を「ヒサーブ アル・カターン」(hisab al-Khataayn) と

呼んだため、中世ヨーロッパにもたらされてから、「エルカタイム」(elchataym あるいは el chataym) と呼ばれるようになったようである。その他、Regula Falsi とか、Regula positionum、False positie などとも呼ばれている⁽¹¹⁾。

〔4〕方程式の発展

方程式の問題に対して、未知数を用いる解法を行なった最初の人はおそらく古代ギリシアのディオファントス (Diophantos, Διοφάντος, 250 年頃活躍) であつたと思われる。

ところで、代数の発展史に関しては、19 世紀中頃のドイツの数学史家であるネッセルマン (G. H. F. Nesselmann, 1811-1881) の 3 段階説が有名である。彼はこの説を『ギリシアの代数学』(Die Algebra der Griechen, 1842) において展開している⁽¹²⁾。

その第 1 段階は「修辭的代数」(rhetorische Algebra) と呼ばれ、この段階では記号はまったく使用されず、計算の全過程が言葉で述べられるのである。また、第 2 段階は「省略的代数」(synkopierte Algebra) と呼ばれ、そこではしばしば繰り返して用いられる概念や演算については、言葉で言い表す代わりに決まった省略記号が使用されるのである。さらに、第 3 段階は「記号的代数」(symbolische Algebra) と呼ばれ、この段階に至って、すべての式や演算が完全に発達した記号的言語で表現されることになるのである。

ディオファントスの代数は、このネッセルマン説の第 2 段階、すなわち省略的代数の段階に位置づけられる。

彼は未知量を「単位的不定あるいは不確定量」(πληθος μονάδων ἀόριστου) と定義し、さらにそれを簡単に“ἀριθμός”、すなわち“数”と呼び、その最後の文字「ς」で未知数を表したのである⁽¹³⁾。もっとも、初期には別の記号「Υ」を用いたと言われている⁽¹⁴⁾。

彼の主著に『アリスメティカ』(Arithmetica, ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ) があるが、その序文によると、この書は全部で 13 巻あつたことがわかる⁽¹⁵⁾ のであるが、現存しているのは、そのうちの 6 つの巻である。その第 IV 巻には、たとえば、 $27x^3 + 6x - 27x^2 = 6x - x^2$ いう 3 次方程式が現れているが、これを彼は、

$$K^Y \overline{\kappa \zeta 5 \bar{5}} \wedge \Delta^Y \overline{\kappa \zeta ' \iota \sigma. 5 \bar{5}} \wedge \Delta^Y \bar{a}$$

のように書いている⁽¹⁶⁾。

ここで、「ς、 Δ^Y 、 K^Y 」はそれぞれ x 、 x^2 、 x^3 を表し⁽¹⁷⁾、「 \wedge 」は引き算の記号を表しているのである。また、「 $\iota \sigma.$ 」は“等しい”という意味のギリシア語である“ $\iota \sigma \sigma$ ”の縮約形であつて、記号“=”を表している。ディオファントスはこのような省略記号を使用しているのである。

そして、たとえば 2 次方程式については、結局のところ彼は次のような 3 つの型、

$$ax^2 + bx = c, \quad ax^2 + c = bx, \quad ax^2 = bx + c$$

について解いている⁽¹⁸⁾ のであるが、解としては正の数しか認めていない。つまり、きわめて高度な方程式を解きながらも、彼は負の数というものをまったく扱っていないのである。方程式は初め、実際の問題を解くために考え出されたものであることから、負の数が解から除外されたのはきわめて自然なことであつたと思われる。

たとえば、ディオファントス自身の年齢に関する有名な問題で、中学校の教科書にもしばし

ば取り上げられているものがある⁽¹⁹⁾。

この墓石の下、ディオファントス眠れり。見よ、この驚異の人を！
ここに眠る人のわざを介して、墓石はその齢いを示せり。
神の許しのままに、彼は生涯の六分の一を少年として過ごせり。
続く生涯の十二分の一は、ひげをその頬に蓄えたり。
さらにその七分の一を経て妻をめとり、五つとせの後、一人の息を得たり。
悲しいかな、その子、人びとの愛を享けつつ、
父の生の半ばを生き、運命の下にみまかる。
この大いなる悲しみに追わるること四年、
父もまたその地上の生を終えたり。

これは『パラティナ詩華集』の中にある一風刺詩であるが、ディオファントスの年齢を x 歳として方程式を立てれば、

$$\frac{1}{6}x + \frac{1}{12}x + \frac{1}{7}x + 5 + \frac{1}{2}x + 4 = x$$

のようになり、これを解くことによって、彼が84歳の生涯を閉じたことがわかるのである。このように、方程式は実際の問題を解くためのものであったから、負の数が解となることは考えられなかったのである。

今日では、方程式の解法の学習を終えてから、その応用として実際の問題を解かせるわけであるが、これは方程式発生の歴史からみると、まったく逆であるということになる。

〔5〕負の数の出現

さて、歴史上における負の数の出現も、この方程式の扱いに関する歴史的順序と深い関係をもっているのである。

方程式は、初め問題を解くことに主たる関心が置かれていた。ところが、方程式の研究が進むと、今度は方程式の解法そのものが研究の対象になってくるようになり、方程式を一般的に解く方法が研究されるようになってくるわけである。

ディオファントスは、2次方程式を3つの型に分類して解いたが、中世初期アラビアの有名な数学者であるアル＝フワーリズミー（780?－850?）はその主著である『アル・ジャブル・ヴァ・ル・ムカーバラ』（Al-jabr wa'l muqabalah）において、次のような5つの型に分類して解いたのである⁽²⁰⁾。ちなみに、この書物の名称から今日の「代数学」（algebra）が生まれたという話はよく知られているところである⁽²¹⁾。

$$ax^2 = bx, \quad ax^2 = b, \quad ax^2 + bx = c, \quad ax^2 + c = bx, \quad ax^2 = bx + c$$

アル＝フワーリズミーの解法は記号をまったく使用しない、言葉だけを用いた非常に詳しいものであった。したがって、その代数はネッセルマンのいう第1段階、すなわち修辭的代数の段階にあたっていると言える。

そして、解法には幾何学的な説明がつけられており⁽²²⁾、したがって、当然のことながら、負の数は登場してこないのである。

これに対して、インドでは、天文学での計算の必要性から2次方程式が一般的に解かれてい

たと言われている。インドの有名な数学者・天文学者であるブラフマグプタ (598–660?) は、彼が 30 歳のときに著した天文学書『ブラーフマスプタシッダーンタ』(628) の第 18 章「クッタカ」において 2 次方程式を扱い、 $ax^2 + bx = c$ について、今日のいわゆる“解の公式”の一部である、

$$x = \frac{\sqrt{b^2 + 4ac} - b}{2a}$$

を得ている⁽²³⁾。

これを用いる限り、当然のことながら負の数が登場してくる。しかし、負の数が出てきても、それは「方便的な数」としての扱いしか受けず、最後の答えについては、必ずしも負の数が認められたのではなかった。後に、12 世紀の数学者バースカラ 2 世 (1114–1185 頃) に至って、 $ax^2 + bx + c = 0$ の左辺を完全平方に導いて解く近代的な方法が示され、2 根を採用した上で、その根を解釈した後、題意に適するものをとる方法が確立されたのであった⁽²⁴⁾。

一方、古代中国では、『九章算術』の巻第八で“方程”が扱われている。その内容は実質的に方程式解法であるが、同時に「正負のまじりあい」でもある。実際、3 世紀の劉徽は「これによって、錯揉する正数負数をおさめる」という注釈を付けている⁽²⁵⁾。

方程式を解くにあたっては、平面上に「碁盤の目」状の区切りを想定して、その方眼の中に係数を表す算木を置き、それを一定の規則に従って操作することにより解を見出していったのである。ここで、「方」は正方形を意味し、「程」は“課程”（わりあて）を意味している⁽²⁶⁾。今日の“方程式”という用語の語源はもちろんここにあるわけである。

また、この「方程」章には「正負術」という項が置かれており、劉徽の注釈によれば、「いま二種の算の得失は相い反するから、つまるところ正と負で名付ける。そして正算は赤、負算は黒を用う。」と解説されている⁽²⁷⁾。

中国数学史に詳しい数内清は次のように述べている⁽²⁸⁾。

この方程章には正負術というものがあるが、正数および負数の加減に言及したもので、計算の過程についてだけであるが、負数を取り扱っていることは注目に値する。ヨーロッパで負数が正数や零とともに数字に数えられるようになったのは、17 世紀のデカルト以後である。中国では数字として負数を取り扱うことなく、方程式の根を求める場合も正根だけが取り扱われているのであるが、負数の表示と正負相互の加減法則はすでに『九章算術』の時代から知られていたのである。

このように中国でも、答えとしては正の数しか認めていないから、負の数は「方便としての数」として扱われてきたとすることができる。もちろん、「財産」を表す正数に対して、負数は「負債」を表現したという側面を否定することはできないが、同時に、負数は連立方程式や 2 次方程式などを機械的に解くプロセスの中から次第に“正式な数”として承認されていったとすることができる。

今日の中学校のカリキュラムでは、方程式解法の前に正負の数が導入されるが、このような行き方が負の数の理解にとって望ましいとは必ずしも言えないのである。“正負の数から方程式解法へ”という進み方は、「授業の経済性」や「系統性の過度の重視」からくるものであ

て、固定的にとらえてはならない。現在の数学教育の体系では、方程式の前に負の数を導入することがほとんど自明のこととされている。しかし、歴史的に言えば、そんなところで負の数が出てくる必然性はなかったのである。

したがって、方程式解法を優先し、その過程において正負の数を指導するカリキュラムを構想することは、歴史的にみても十分な価値を有すると思われる。

〔6〕連立方程式の解法について

次に、方程式の指導について考えてみよう。

現在の中学校2年生の連立方程式では、その解法は加減法中心で、代入法は2次的・補足的な扱いになっている。その背景の1つとして、代入法は生徒にとって難しいということがあるようである。そこで、方程式の解法について数学史が何を教えてくれるのかを見てみよう。

すでに述べたように、今日のような未知数を用いた方程式解法はすでに3世紀のギリシアのディオファントスに始まっていた。ディオファントスは、未知数をいくつか含む問題で、未知数のすべてがそのうちの1つで代表できる場合には、そのうちの1つの未知数だけが残るように、巧みに工夫をこらして解いていたのである。つまり、未知数の取り方、選択の仕方が巧みであったということである。

具体的な例を2つ紹介しよう。

(1)『アリスメティカ』第Ⅰ巻問題29は、

「2数の和とそれらの平方の差とが与えられた数であるような2数を見い出すこと」とあって⁽²⁹⁾、

「与えられた和が20、与えられた平方の差が80とせよ」

とされている。そして続いて、

「 $2x$ が求められた2数の差とする」

「それゆえに、2数は $10+x$ 、 $10-x$ である」

とした上で、方程式

$$(10+x)^2 - (10-x)^2 = 80$$

が立てられ、 $x=2$ が求められ、最終的に12と8という2数が求められている。この解法では、和が20であるような2数が $(10+x)$ と $(10-x)$ のように、うまく選ばれているために、上の方程式の中において x^2 の項が消去されてしまうのである。

(2)『アリスメティカ』第Ⅱ巻問題10は、

「与えられた差をもつような2つの平方数を見い出すこと」とあって⁽³⁰⁾、

「与えられた差が60とせよ」

とされている。そして続いて、

「一方の辺の数を x とし、他方の辺の数は x プラス任意の数であるが、その平方が60を超えないものである。それを3とせよ。」

と述べた後、方程式

$$(x+3)^2 - x^2 = 60$$

が立てられ、 $x=8\frac{1}{2}$ が求められ、最終的に、 $72\frac{1}{4}$ 、 $132\frac{1}{4}$ が得られているのである。

もちろん、この問題の解は無数にあるが、ディオファントスはこの問題に限らず、一般に解が無数にある不定方程式問題についても、ただ1つの解しか示していない。つまり、解というものを実際・具体的に提示されればよいと考えられていたわけである。負数の解を考えなかったのも、それが実際的ではなかったからである。

以上の2つの例をみても、ディオファントスの方程式解法の手法がわかっていただけると思う。つまり、2つの数が2つの条件を満たさなければならないとき、まずそのうちの1つを満たすように2数を選び、その後で、2番目の条件へと進んでいくという手法なのである。言い換えると、未知数2つの連立方程式をそのまま扱うことはせずに、逐次条件によって未知数を1つだけにしていたと言える。

しかし、未知数を1つしか使用しない場合には、方程式の立式の際の思考が煩雑になる傾向がありうる。したがって、思考の経済性という観点からは、未知数を2つ用いるほうが容易になると言える。つまり、連立方程式のほうが立式が容易な場合があるわけである。したがって、代入法の指導にあたっては、生徒に代入法の必要性を感じさせ、それを使用することが自然であるような問題を提示することが重要になってくるのである。

先に紹介した『アリスメティカ』第Ⅱ巻問題10では、一方を x^2 とし、他方を $(x+3)^2$ として、

$$(x+3)^2 - x^2 = 60$$

のように立式していた。

しかし、「2つの平方数の差が60」ということから、

$$y^2 - x^2 = 60$$

と立式するのが自然である。そして、その後に $y=x+3$ という関係を使用することにするのである。

これと同様なことは、現在の中学校にもあると思われる。

たとえば、次のような問題がある。

「ある店で、鉛筆10本とノート8冊を買うと、1480円でした。また、ノートの値段は鉛筆の値段の2倍より10円安いそうです。鉛筆1本、ノート1冊はそれぞれ何円だったのでしょうか。」

この問題は次のように考えられる。

鉛筆1本の値段がわかれば、ノート1冊の値段はそれからすぐに求められるから、鉛筆1本の値段を未知数にして、これを x 円とする。すると、ノート1冊の値段は $2x-10$ と表される。

したがって、

$$10x + 8(2x - 10) = 1480 \quad (\ast)$$

という方程式が立てられるのである。

これが、今まで学んできた1元1次方程式の作り方である。連立方程式に入るまでは、未知数を1つしか用いなかったわけであるから、当然上のような立式になるわけである。しかし、ここで方程式を立てる前に、ノート1冊の値段を、鉛筆1本の値段 x (円)を用いて $2x-10$ と表し、同時に、方程式(※)の立式を一挙にやってしまうのが難解なところである。

そこで、初めから鉛筆1本を x 円、ノート1冊を y 円としておけば、

$$10x + 8y = 1480$$

と自然に立式ができるし、生徒にもこのほうが簡単だと思われる。ところが、この方程式には未知数が2つあって、解けないので、問題の後段の文章から、 $y = 2x - 10$ であることがわかり、これを先の方程式の y の代わりに使えば、

$$10x + 8(2x - 10) = 1480$$

となって、未知数が1つになり、解くことができるわけである。

未知数を2つ用いれば、立式に際して負担が軽くなるから、代入法の指導にあたっては、このような問題を提示するところから入っていけばよいと思われる。

現在の教科書では、代入法を避ける傾向があるように見受けられる。代入法がまったく必要なら、それでもかまわないであろうが、そうではないのであるから、代入法に自然に結びつく問題の提示と展開が考えられなければならない。歴史的にみても、ディオファントスは未知数を1つだけ使って方程式を作ったから、非常な技巧をこらさなければならなかったのである。そこへ補助の未知数が導入されるようになり、連立方程式が生まれたわけである。このように考えると、連立方程式の解法における代入法もそれなりに位置づけされるのではないかと思われる。

[注]

- (1) 遠山啓「現代数学と数学教育」(数学教育協議会編『数学教室』国土社、No. 60、1959年10月増刊号に所収)
- (2) 「量と人間社会の深いかかわり」に関しては、銀林浩『量の世界—構造主義的分析』(むぎ書房、1975年8月)が参考になる。
- (3) 日常的に使用される分数としては、量を表す分数よりも、割合を表す分数の方が多い。
- (4) 仏語ではfraction、独語ではFraktion、伊語ではfrazione、西語ではfracciónである。
- (5) 柳河春三『洋算用法』(1857年、安政4年)
- (6) 上垣涉「分数の起源に関する史的考察」(三重大学教育学部研究紀要第47巻[自然科学] 1996年3月に所収)
- (7) ラッグ・クラーク著 小倉金之助序・新宮恒次郎訳『初等数学の基礎』(山海堂、昭和2年1月)では、「第二章 方程式の用法」において、正の数の範囲での方程式解法が扱われ、その後「第九章 正数及び負数の用法」を経て、「第十章 簡単な方程式の進んだ用法」で再び方程式解法が扱われている。
なお、ラッグはアメリカの教育心理学者であり、クラークはアメリカの数学教育者である。
- (8) A. B. チェイス著 平田寛監修・吉成薫訳『リンド数学パピルス』(朝倉書店、1985年7月) pp. 45-47
- (9) 同上書(p. 94)では「この単語は、本来“(物を積み上げた)山”を意味しているが、ここでは“量”に相当する数学用語として使われていると思われる」というT. E. ピートの解釈が紹介されている。
また、吉成薫著『ヒエログリフ入門』(六興出版、1988年10月)の「ヒエログリフ・日本語辞書」では、「堆積、量、財産」と訳されている。
- (10) 上掲書(8)、p. 45
- (11) D. E. Smith, History of Mathematics, vol. II, Dover, pp. 437-438
- (12) G. H. F. Nesselmann, Die Algebra der Griechen, Berlin, 1842, pp. 301-302
- (13) P. Tannery, DIOPHANTVS ALEXANDRINVS OPERA OMNIA, vol. I, Teubner, 1974, p. 6
- (14) T. L. Heath, A History of Greek Mathematics, vol. II, Dover, p. 456

- (15) 上掲書 (13)、p. 16
- (16) 上掲書 (13)、p. 244
- (17) 上掲書 (13)、pp. 4 – 6
- (18) 上掲書 (14)、p. 463
- (19) この訳は、ファン・デル・ヴェルデン著 村田全・佐藤勝造訳『数学の黎明』（みすず書房、1984年7月）の p. 383 にあるものを使用した。
- (20) B. L. van der Waerden, *A History of Algebra*, Springer, 1985, p. 5
- (21) “al-jabr” は「復元」(restoration) あるいは「完成」(completion) というような意味で、今日の“移項”にあたる。また、“muqabalah”は「縮小」(reduction) あるいは「対置」(balancing) の意味で、今日の“同類項の簡約”にあたる。
- (22) A. P. JUSCHKEWITSCH, *GESCHICHTE DER MATHEMATIK IM MITTELALTER*, Teubner, 1964, pp. 206–208
- (23) 同上書、p. 135–136
- (24) 林隆夫『インドの数学』中公新書、pp. 231–232
- (25) 薮内清責任編集『中国天文学・数学集』朝日出版社〔科学の名著 2〕、p. 220
- (26) 同上書、p. 220
- (27) 同上書、p. 223
- (28) 薮内清編『中国の科学』中央公論社〔世界の名著 12〕、pp. 39–40
- (29) 上掲書 (13)、p. 64
- (30) 上掲書 (13)、p. 94