

相互作用量子場理論における  
Casimir 効果の摂動論

平成 27 年度

三重大学大学院工学研究科  
博士前期課程 物理工学専攻  
秋田尊丸

# 目次

1	序論	2
2	境界が存在する場合:自由場	4
2.1	分配関数と真空エネルギー . . . . .	4
2.2	電荷間相互作用への帰着 . . . . .	6
2.3	経路積分の評価 . . . . .	8
3	境界のない場合における場の量子論の摂動論	14
3.1	摂動論と Feynman 則 . . . . .	14
3.2	真空泡グラフと連結グラフ . . . . .	21
3.3	有効作用 . . . . .	22
3.4	有効作用の評価法 . . . . .	25
3.5	有効作用の物理的意味 . . . . .	26
4	境界が存在：相互作用あり	29
5	まとめと課題点	33
6	謝辞	34
付録 A	経路積分	35
A.1	Heisenberg 描像 . . . . .	35
A.2	遷移振幅と経路積分 . . . . .	36
A.3	経路積分と分配関数 . . . . .	38
付録 B	並進行列	39

# 1 序論

場の量子論は現代物理学における基礎理論である。場の量子論では電磁場を初めとする「場」を量子論的に取り扱う。場の量子論における最低エネルギー状態 (真空) は無限大のエネルギーを保有する。この真空エネルギーは物体が存在すると修正を受ける。この修正されたエネルギーと自由空間の真空エネルギーの差 (Casimir エネルギー) は物体間距離に依存し、力を生ずる。これが Casimir 効果であり、驚くべきことに場の量子論から電氣的に中性な物体間に力が生じることが予言される [1]。二枚の平行導体板では、この力による圧力は  $L$  を導体板間距離として  $F/A = -\pi^2 \hbar c / 240 L^4$  であることが理論的に導かれる。平行板間の距離が  $1\mu\text{m}$  のとき圧力は  $1.3\text{ mPa}$  であり、実験的にも検証可能な効果である。

Casimir による予言から現在に至るまでに Casimir 効果に対する研究は実験、理論面ともに著しい発展を遂げてきた。場の間の相互作用が存在しない、つまり自由場における Casimir エネルギーの計算法は近年大きな進展を見せた。その中でも Jaffe(2008) らの散乱的アプローチ [2] は任意の形状、個数、配置における Casimir エネルギーを系統的に求める方法確立した。このアプローチは電磁場 [3] を始めとした様々な場 [4]-[5] に対して適用できる。そのため、二つの誘電体球を始めとする多様な配置、形状をもつ物体間の Casimir エネルギーが分かるようになってきている [6]-[9]。

上述のような理論面での発展から、多様な配置、形状の物体間の Casimir 力の実験値と理論的な計算値を比較することが可能になってきた。Casimir 効果を初めて検出した実験は Lamoreaux(1997) によって行われた [10]。この実験では理論値と実験値との相対誤差 5% ほどであった。その翌年 Mohideen,Roy(1998) らが金属球と金属板の間の Casimir 力を AFM を用いて測定した。この実験での理論値と実験値の相対誤差は数 % となっている。より最近の実験 (Decca,2007) ではさらに精度が上がり、相対誤差は 1% 未満まで抑えられた [11]。このように近年における Casimir 力の測定は精密実験の領域に達しようとしている。

散乱アプローチを代表とする、自由場に対する Casimir エネルギーの理論研究は数多くなされてきた。しかし、場の間の相互作用までを考慮に入れた Casimir 効果の研究は 1-loop 補正の計算などが行われているものの [12]-[14] 自由場のものと比べると非常に少ない。そこで、本研究では場の間に相互作用が存在する場合の Casimir 効果をスカラー場  $\phi$  を例にとって考察した。その際には以下の点に着目した。

- 元々の系に場  $\phi$  と相互作用する外場  $J$  を仮想的に導入した系を考える。そのような系

の分配関数  $Z[J]$  は場  $\phi$  の経路積分によって書き下すことができる。

- 元々の系の真空エネルギーは  $Z[J]$  から導かれる有効作用  $\Gamma$  によって得られる。

本論文の第 2 章では、先程述べた散乱的アプローチについて簡潔に説明する。これは自由場中の任意形状、複数物体間の Casimir 力を求める強力な手法である。第 3 章では境界は存在しないが、場の間に相互作用がある場合を考える。ここでは通常の場の量子論における摂動論をまとめる。第 4 章では本研究の主題である、相互作用が存在する場合の Casimir 効果について議論する。第 5 章はまとめと課題点に充てる。

## 2 境界が存在する場合:自由場

空間中に物体が存在すると、場は境界条件を満たすように制限を受ける。それに伴い真空エネルギーも境界が存在しない場合から変化する。この変化分こそが Casimir エネルギーである。以下に見るように、分配関数  $Z$  に対して極限操作を行うことで真空エネルギーを取り出すことができる。このことに注目すると Casimir エネルギーは物体表面上の電荷間の相互作用として記述される。この方法における最終的な Casimir エネルギーは個々の物体の散乱行列と異なる座標原点から見た部分波を関係づける並進行列のみで表記される。この新しい Casimir エネルギーの導出法では、任意形状の物体、配位を取り扱うことが可能である。

ここでは実スカラー場中に物体を複数配置した状況を取り扱う。なお、物体は境界条件で記述され、境界上で場がゼロ (Dirichlet 条件) になる理想的な場合を考える。

### 2.1 分配関数と真空エネルギー

系の分配関数は境界条件付きの経路積分によって

$$\mathrm{Tr} e^{-iH_c T} = \int [\mathcal{D}\phi]_C e^{iS[\phi]} = Z[C] \quad (2.1)$$

と書くことができる。作用  $S[\phi]$  は質量ゼロの実スカラー場のラグランジアンを時刻 0 から  $T$  まで積分

$$S[\phi] = \int_0^T dt \int d^3\mathbf{x} \{ (\partial_t \phi)^2 - (\nabla \phi)^2 \} \quad (2.2)$$

したものである。分配関数 (2.1) において、時間  $T$  を虚時間  $\Lambda$  へ

$$T = -i\Lambda \quad (2.3)$$

置き換え、 $\Lambda \rightarrow \infty$  の極限操作を施すと、真空エネルギー

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_0[C] &= \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{-1}{\Lambda} \ln \mathrm{Tr} e^{-H_c \Lambda} \\ &= \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{-1}{\Lambda} \ln Z[C] \end{aligned} \quad (2.4)$$

を取り出すことができる。従って、Casimir エネルギーは、

$$\mathcal{E}[C] = - \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{\Lambda} \ln \frac{Z[C]}{Z_\infty} \quad (2.5)$$

で与えられる。ここで  $Z_\infty$  は境界を無限遠に持って行ったときの  $Z_C$  であり、境界が存在しない場合の分配関数である。(2.1) におけるスカラー場  $\phi(t, \mathbf{x})$  は時間  $T$  の周期関数 (付録 A.4 参照) ゆえ、Fourier 級数展開

$$\phi(t, \mathbf{x}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi_n(\mathbf{x}) e^{2\pi i n t / T} \quad (2.6)$$

$$\phi_{-n}(\mathbf{x}) = \phi_n^*(\mathbf{x}) \quad (2.7)$$

が可能である。経路積分では可能な場の配位全てに対して積分を行う。そのため場の Fourier 級数展開を行うと、展開係数  $\phi_n(\mathbf{x})$  に関する経路積分

$$\int [\mathcal{D}\phi]_C = \prod_{n=-\infty}^{\infty} \int [\mathcal{D}\phi_n(\mathbf{x})]_C \quad (2.8)$$

に置き換わり、境界条件は  $\phi_n(\mathbf{x})$  に引き継がれる。 $\phi(\mathbf{x})$  の Fourier 展開を (2.2) に代入すれば作用はすべて  $\phi_n(\mathbf{x})$  の二次形式の和で書かれる。従って、(2.4) の対数をとれば積は和に変わり、

$$\ln Z[C] = \sum_{n=0}^{\infty} \ln \left\{ \int [\mathcal{D}\phi_n(\mathbf{x})]_C \exp \left[ iT \int d^3 \mathbf{x} \left( \frac{2\pi n}{T} \right) |\phi_n(\mathbf{x})|^2 - |\nabla \phi_n(\mathbf{x})|^2 \right] \right\} \quad (2.9)$$

となる。なお (2.8) に伴いやコピアンが生じるが、この変数変換に境界依存性は無いため Casimir エネルギーへは寄与しない。

$T \rightarrow \infty$  の極限では  $n$  は連続変数に、和は積分に

$$\phi_n(\mathbf{x}) \rightarrow \phi(k, \mathbf{x}) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \rightarrow \frac{T}{2\pi} \int_0^{\infty} dk \quad (2.10)$$

$$k = \frac{2\pi n}{T} \quad (2.11)$$

なるので、(2.9) は

$$\begin{aligned} \ln Z[C] &= \frac{T}{2\pi} \int_0^{\infty} dk \ln \left\{ [\mathcal{D}\phi(k, \mathbf{x})]_C \exp \left[ iT \int d^3 \mathbf{x} (k^2 |\phi(k, \mathbf{x})|^2 - |\nabla \phi(k, \mathbf{x})|^2) \right] \right\} \\ &= \frac{T}{2\pi} \int_0^{\infty} dk \ln \mathfrak{Z}_C(k) \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\mathfrak{Z}_C(k) = \int [\mathcal{D}\phi(k, \mathbf{x})]_C \exp \left[ iT \int d^3 \mathbf{x} (k^2 |\phi(k, \mathbf{x})|^2 - |\nabla \phi(k, \mathbf{x})|^2) \right] \quad (2.13)$$

と表記される  $T \rightarrow i\Lambda$  の変換に伴う、置き換え  $k \rightarrow i\kappa$  を施せば、Casimir エネルギー (2.5) は

$$\mathcal{E}[C] = -\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty d\kappa \ln \frac{3_C(i\kappa)}{3_\infty(i\kappa)} \quad (2.14)$$

である。

物体  $\alpha$  の境界上  $\Sigma_\alpha$  で場がゼロになるという Dirichlet 条件

$$\phi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & \mathbf{x} \in \Sigma_\alpha \\ \phi(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \notin \Sigma_\alpha \end{cases} \quad (2.15)$$

は汎関数  $\delta$  関数によって達成できる。これにより制限付き経路積分は以下

$$\int [\mathcal{D}\phi(\mathbf{x})]_C = \int \mathcal{D}\phi(\mathbf{x}) \prod_{\alpha=1}^N \int \mathcal{D}\varrho_\alpha(\mathbf{x}) \exp \left[ iT \int_{\Sigma_\alpha} d^3\mathbf{x} (\varrho_\alpha^*(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x}) + c.c.) \right] \quad (2.16)$$

のように全空間の  $\phi$  と各物体上の電荷  $\varrho_\alpha$  の経路積分になる。(2.16) によって、(2.13) は

$$3_C(k) = \prod_{\alpha=1}^N \int \mathcal{D}\varrho_\alpha(\mathbf{x}) \mathcal{D}\phi(\mathbf{x}) \exp(iT \tilde{S}[\phi, \varrho]) \quad (2.17)$$

のようになる。 $\tilde{S}[\phi, \varrho]$  は

$$\tilde{S}[\phi, \varrho] = \int d^3\mathbf{x} (k^2 |\phi(k, \mathbf{x})|^2 - |\nabla \phi(k, \mathbf{x})|^2) + \sum_\alpha \int_{\Sigma_\alpha} d^3\mathbf{x} (\varrho_\alpha^*(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x}) + c.c.) \quad (2.18)$$

であり、自由場の作用に各物体上に導入された電荷との結合項が加わったものとなる。

## 2.2 電荷間相互作用への帰着

変形された作用  $\tilde{S}$  を部分積分により以下

$$\tilde{S}[\phi, \varrho] = \int d^3\mathbf{x} \phi^*(\mathbf{x}) (\nabla^2 + k^2) \phi(\mathbf{x}) + \sum_\alpha \int_{\Sigma_\alpha} d^3\mathbf{x} (\varrho_\alpha^*(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x}) + c.c.) \quad (2.19)$$

のように書き直す。場の方程式は作用  $\tilde{S}[\phi, \varrho]$  の場  $\phi(\mathbf{x})$  に関する変分原理

$$\frac{\delta \tilde{S}[\phi, \varrho]}{\delta \phi(\mathbf{x})} = 0 \quad (2.20)$$

によって導かれる。従って、古典場は

$$(\nabla^2 + k^2)\phi_{cl}(\mathbf{x}) = \begin{cases} -\varrho_\alpha & \mathbf{x} \in \Sigma \\ 0 & \mathbf{x} \notin \Sigma \end{cases} \quad (2.21)$$

という方程式から決定される。また、場の方程式より、境界  $\Sigma_\alpha$  内部の場  $\phi_{\text{in}}$  と外部の場  $\phi_{\text{out}}$  の関係が導かれる:

$$\phi_{\text{in}}(\mathbf{x}) = \phi_{\text{out}}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Sigma_\alpha \quad (2.22)$$

$$\partial_n(\phi_{\text{in}}(\mathbf{x}) - \phi_{\text{out}}(\mathbf{x})) = \varrho_\alpha(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Sigma_\alpha \quad (2.23)$$

$\partial_n$  は物体  $\alpha$  の表面に垂直な方向への微分である。

(2.19) において積分変数  $\phi$  を

$$\phi(\mathbf{x}) \rightarrow \phi_{cl}(\mathbf{x}) + \Delta\phi(\mathbf{x}) \quad (2.24)$$

$$\int \mathcal{D}\phi(\mathbf{x}) \rightarrow \int \mathcal{D}\Delta\phi(\mathbf{x}) \quad (2.25)$$

のように古典場  $\phi_{cl}$  と量子場と古典場の差  $\Delta\phi$  の和に書き直す。この変数変換は単なる並進のため、変換に伴って生じるヤコビアンは 1 である。 $\tilde{S}[\phi_{cl} + \Delta\phi, \varrho]$  を古典場  $\phi_{cl}$  のまわりで展開すると、

$$\begin{aligned} \tilde{S}[\phi_{cl} + \Delta\phi, \varrho] &= \tilde{S}[\phi_{cl}, \varrho] + \int d^3\mathbf{x} \left( \frac{\delta\tilde{S}[\phi_{cl}, \varrho]}{\delta\phi(\mathbf{x})} \Delta\phi(\mathbf{x}) + c.c. \right) \\ &+ \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{y} \left( \Delta\phi^*(\mathbf{x}) \frac{\delta\tilde{S}[\phi_{cl}, \varrho]}{\delta\phi^*(\mathbf{x})\delta\phi(\mathbf{y})} \Delta\phi(\mathbf{y}) + c.c. \right) \end{aligned} \quad (2.26)$$

のようになる。古典場は (2.20) を満たすため  $\Delta\phi$  の一次の項は消える。そのため  $\tilde{S}[\phi_{cl} + \Delta\phi, \varrho]$  は変形された作用と、自由な量子場の作用の和

$$\tilde{S}[\phi_{cl} + \Delta\phi, \varrho] = \tilde{S}[\phi_{cl}, \varrho] + \int d^3\mathbf{x} \Delta\phi^*(\mathbf{x}) (\nabla^2 + k^2) \Delta\phi(\mathbf{x}) \quad (2.27)$$

となる。また、 $\tilde{S}[\phi_{cl}, \varrho]$  は場の方程式 (2.21) を用いれば

$$\tilde{S}[\phi_{cl}, \varrho] = \frac{1}{2} \sum_\alpha \int_{\Sigma_\alpha} d^3\mathbf{x} (\varrho_\alpha^* \phi_{cl}(\mathbf{x}) + c.c.) \quad (2.28)$$

のように、古典的な場と電荷間の結合で書くことが出来る。また、変形された作用  $\tilde{S}[\phi_{cl}, \varrho]$  のみが電荷  $\varrho_\alpha$  を含んでいる。それゆえ、場と物体上の電荷に関する経路積分は分離できる。つまり、(2.27) より  $\mathfrak{Z}_C(k)$  は二つの因子の積

$$\mathfrak{Z}_C(k) = \prod_{\alpha=1}^N \int \mathcal{D}\varrho_\alpha e^{iT\tilde{S}[\phi_{cl}, \varrho]} \int \mathcal{D}\Delta\phi(\mathbf{x}) \exp \left[ iT \int d^3\mathbf{x} \Delta\phi^*(\mathbf{x}) (\nabla^2 + k^2) \Delta\phi(\mathbf{x}) \right] \quad (2.29)$$



となる。(2.29) の第二因子

$$\int \mathcal{D}\Delta\phi(\mathbf{x}) \exp \left[ iT \int d^3\mathbf{x} \Delta\phi^*(\mathbf{x})(\nabla^2 + k^2)\Delta\phi(\mathbf{x}) \right] \quad (2.30)$$

は自由場の分配関数で、 $Z_\infty$  と同一のものである。そのため Casimir エネルギー (2.5) を求める場合、この因子は分子と分母で打ち消される。

古典場  $\phi_{cl}$  は場の方程式が線形であるため、各々の物体上の電荷が作る場の和

$$\phi_{cl}(\mathbf{x}) = \sum_{\beta} \phi_{\beta}(\mathbf{x}) \quad (2.31)$$

で表される。従って、Casimir エネルギーへの寄与は

$$3_C(k) = \prod_{\alpha=1}^N \int \mathcal{D}\varrho_{\alpha} \exp \left[ \frac{iT}{2} \sum_{\alpha,\beta} \int_{\Sigma_{\alpha}} d^3\mathbf{x} (\varrho_{\alpha}^* \phi_{\beta}(\mathbf{x}) + c.c.) \right] \quad (2.32)$$

のみとなる。

## 2.3 経路積分の評価

Casimir エネルギーを知るためには、

$$3_C(k) = \prod_{\alpha=1}^N \int \mathcal{D}\varrho_{\alpha} \exp \left[ \frac{iT}{2} \sum_{\alpha,\beta} \int_{\Sigma_{\alpha}} d^3\mathbf{x} (\varrho_{\alpha}^* \phi_{\beta}(\mathbf{x}) + c.c.) \right] \quad (2.33)$$

において、 $\varrho_{\alpha}$  積分をどのように実行するかが問題となる。以下では  $\alpha \neq \beta$ 、 $\alpha = \beta$  で場合分けすれば、この積分が実行可能であることを示す。

- $\alpha \neq \beta$  の場合 : 相互作用項

$$\tilde{S}_{\beta\alpha} = \frac{1}{2} \int_{\Sigma_{\alpha}} d^3\mathbf{x}_{\alpha} (\varrho_{\alpha}^*(\mathbf{x}_{\alpha}) \phi_{\beta}(\mathbf{x}_{\alpha}) + c.c.) \quad (2.34)$$

$\phi_{\beta}$  は物体  $\beta$  上の電荷が作る場である。それゆえ  $\tilde{S}_{\alpha\beta}$  は異なる物体  $\alpha, \beta$  上の電荷同士の相互作用を記述する。また、 $\mathbf{x}_{\alpha}$  は物体  $\alpha$  内部の原点から測定した座標であることを示している。 $\phi_{\beta}$  は物体  $\beta$  上の電荷が作る古典場であるため、Helmholtz 方程式の Green 関数  $\mathcal{G}_0$  によって、

$$\phi_{\beta}(\mathbf{x}_{\beta}) = \int_{\Sigma_{\beta}} d^3\mathbf{x}'_{\beta} \mathcal{G}_0(\mathbf{x}_{\beta}, \mathbf{x}'_{\beta}, k) \varrho_{\beta}(\mathbf{x}'_{\beta}) \quad (2.35)$$

と書かれる。今の場合  $\mathbf{x}_\beta$  は物体  $\alpha$  上を指し示しており、積分変数  $\mathbf{x}_\beta$  は物体  $\beta$  上の点であるゆえ、 $r_\beta = |\mathbf{x}_\beta| > r'_\beta = |\mathbf{x}'_\beta|$  である。そのため、Helmholtz 方程式の Green 関数  $\mathcal{G}_0$  の部分波展開

$$\mathcal{G}_0(\mathbf{x}_\beta, \mathbf{x}'_\beta, k) = ik \sum_{l,m} j_l(kr'_\beta) h_l^{(1)}(kr_\beta) Y_{lm}(\hat{\mathbf{x}}_\beta) Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{x}}'_\beta) \quad (2.36)$$

を用いることが出来る。これにより (2.35) は

$$\phi_\beta(\mathbf{x}_\beta) = ik \sum_{l,m} h_l^{(1)}(kr_\beta) Y_{lm}(\hat{\mathbf{x}}_\beta) \int_{\Sigma_\beta} d^3\mathbf{x}'_\beta j_l(kr'_\beta) Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{x}}'_\beta) \varrho_\beta(\mathbf{x}'_\beta) \quad (2.37)$$

となる。上の式において、 $\Sigma_\beta$  上の積分は電荷  $\varrho_\beta$  の配位で決まる量であるため、多重極を定義する：

$$Q_{\beta,lm} \equiv \int_{\Sigma_\beta} d^3\mathbf{x}'_\beta j_l(kr'_\beta) Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{x}}'_\beta) \varrho_\beta(\mathbf{x}'_\beta) \quad (2.38)$$

$$\phi_\beta(\mathbf{x}_\beta) = ik \sum_{lm} Q_{\beta,lm} h_l^{(1)}(kr_\beta) Y_{lm}(\hat{\mathbf{x}}_\beta) \quad (2.39)$$

(2.39) における  $\mathbf{x}_\beta$  は物体  $\beta$  内の原点から測定した物体  $\alpha$  上の座標である。原点  $\beta$  から見た部分波を原点  $\alpha$  から見た部分波で展開すれば

$$h_l^{(1)}(kr_\beta) Y_{lm}(\hat{\mathbf{x}}_\beta) = \sum_{l'm'} \mathcal{U}_{l'm'lm}^{\alpha\beta}(\mathbf{X}_{\alpha\beta}) j_{l'}(kr_\alpha) Y_{l'm'}(\hat{\mathbf{x}}_\alpha) \quad (2.40)$$

となる。基底の変換行列  $\mathcal{U}^{\alpha\beta}$  は原点  $\alpha$  から測定した  $\beta$  の位置  $\mathbf{X}_{\alpha\beta}$  に依存する。これらの記号は図 1 に示してある。

$\mathbf{x}_\alpha, \mathbf{x}_\beta$  はともに物体  $\alpha$  上の同一点を指定しているので  $\phi_\beta(\mathbf{x}_\beta) = \phi_\beta(\mathbf{x}_\alpha)$  であることに注意すると、(2.39) は

$$\phi_\beta(\mathbf{x}_\alpha) = ik \sum_{lm} Q_{\beta,lm} \sum_{l'm'} \mathcal{U}_{l'm'lm}^{\alpha\beta}(\mathbf{X}_{\alpha\beta}) j_{l'}(kr_\alpha) Y_{l'm'}(\hat{\mathbf{x}}_\alpha) \quad (2.41)$$

と書かれる。(2.41) を (2.34) に代入すれば

$$\tilde{S}_{\beta\alpha}[Q_\alpha, Q_\beta] = \frac{ik}{2} \sum_{lm l'm'} (Q_{\alpha, l'm'}^* \mathcal{U}_{lm l'm'}^{\alpha\beta} Q_{\beta, lm} + c.c.) \quad (2.42)$$

となる。

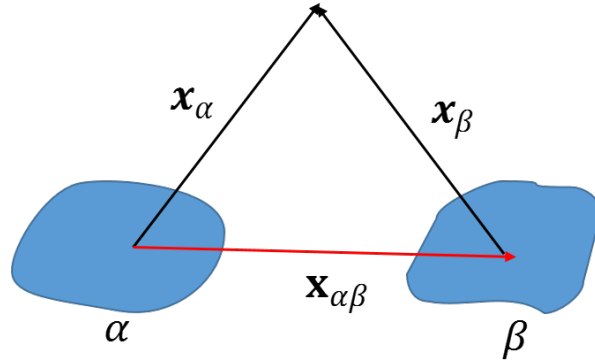


図 1

- $\alpha = \beta$  の場合: 自己相互作用項

$\alpha = \beta$  における古典的作用への寄与は

$$\tilde{S}[\varrho_\alpha] = \frac{1}{2} \int_{\Sigma_\alpha} d^3x (\varrho_\alpha^*(\mathbf{x}_\alpha) \phi_\alpha(\mathbf{x}_\alpha) + c.c.) \quad (2.43)$$

となる。古典的作用におけるこの部分は  $\alpha$  上の電荷が同じく物体  $\alpha$  上の電荷によって作られた場との相互作用を記述する。以下では  $x_\alpha$  の添え字を省略するが、 $x$  は常に物体  $\alpha$  内の原点から測定した位置であるものとする。(2.43) は物体  $\alpha$  上での積分であるが、境界上の被積分関数の値  $\phi_\alpha(x)$  は場の方程式より

$$\phi_{\alpha,in}(\mathbf{x}) = \phi_{\alpha,out}(\mathbf{x}) \quad (2.44)$$

であるゆえ、 $\phi_{\alpha,in}, \phi_{\alpha,out}$  のうち、どちらを選んでもよい。ここでは  $\phi_{\alpha,in}$  を被積分関数として採用する。 $\phi_{\alpha,in}$  は境界内部における Helmholtz 方程式の解であるため、物体  $\alpha$  内の原点で正則になっていなければならない。そのため、 $\phi_{in,\alpha}$  は Helmholtz 方程式の正則な解のみによって展開される。すなわち、

$$\phi_{\alpha,in}(\mathbf{x}) = \sum_{lm} \phi_{\alpha,lm} j_l(kr) Y_{lm}(\hat{\mathbf{x}}) \quad (2.45)$$

である。これを (2.43) に代入すれば、

$$\tilde{S}[\varrho_\alpha] = \frac{1}{2} \sum_{lm} (\phi_{\alpha,lm} Q_{\alpha,lm}^* + c.c.) \quad (2.46)$$

を得る。一方  $\phi_{\alpha,out}$  は (2.44) を満たすので、

$$\phi_{\alpha,out}(\mathbf{x}) = \phi_{\alpha,in}(\mathbf{x}) + (\Sigma_\alpha \text{ 上で消える項}) \quad (2.47)$$

と書くことができる。(2.47) の右辺第 2 項目は物体  $\alpha$  の境界上で Dirichlet 条件を満たすような Helmholtz 方程式の解

$$\psi_{lm}^\alpha(\mathbf{x}) = h_l^{(2)}(kr)Y_{lm}(\hat{\mathbf{x}}) + \sum_{l'm'} \mathcal{S}_{lm'l'm'}(k)h_{l'}^{(1)}(kr)Y_{l'm'}(\hat{\mathbf{x}}) \quad (2.48)$$

の線形結合で一般的に表すことができる。ただし、内向き球面波  $h_l^{(2)}Y_{lm}$  を規格化してあるので、Helmholts 方程式の解は散乱行列  $\mathbb{S}$  で書かれる。この散乱行列  $\mathbb{S}$  は境界上で  $\psi_{lm}^\alpha$  が 0 になるように決定される。さらに、散乱行列  $\mathbb{S}$  から単位行列を差し引いたものを  $\mathbb{T}$  で定義する:

$$\mathbb{T}(k) = \frac{1}{2}(\mathbb{S}(k) - \mathbb{I}) \quad (2.49)$$

右辺の  $1/2$  は便宜上付けた。そうすると、(2.48) は

$$\psi_{lm}^\alpha(\mathbf{x}) = 2j_l(kr)Y_{lm}(\hat{\mathbf{x}}) + \sum_{l'm'} 2\mathcal{T}_{lm'l'm'}^\alpha(k)h_{l'}^{(1)}(kr)Y_{l'm'}(\hat{\mathbf{x}}) \quad (2.50)$$

と書き直される。(2.50) 式により (2.47) は

$$\begin{aligned} \phi_{\alpha,out}(\mathbf{x}) &= \phi_{\alpha,in}(\mathbf{x}) + \sum_{lm} \chi_{\alpha,lm} \psi_{lm}^\alpha(\mathbf{x}) \\ &= \sum_{lm} (\phi_{\alpha,lm} + \chi_{\alpha,lm}) j_l(kr)Y_{lm}(\hat{\mathbf{x}}) + \sum_{lm'l'm'} \chi_{\alpha,lm} \mathcal{T}_{lm'l'm'}^\alpha h_{l'}^{(1)}(kr)Y_{l'm'}(\hat{\mathbf{x}}) \end{aligned} \quad (2.51)$$

と書くことができる。しかし、一方で  $\phi_{\alpha,out}$  は物体  $\alpha$  上の電荷  $\varrho_\alpha$  と Helmholtz 方程式の Green 関数  $\mathcal{G}_0$  によっても得ることができる。それゆえ (2.51) は  $kr \rightarrow \infty$  において  $\mathcal{G}_0$  と同様の漸近形を持つはずである。つまり、 $r \rightarrow \infty$  では  $h_l^{(1)}$  のみが生き残らなければならない。それゆえ、

$$\chi_{\alpha,lm} = -\phi_{\alpha,lm} \quad (2.52)$$

が成り立つ。従って、 $\phi_{\alpha,out}$  は

$$\phi_{\alpha,out}(\mathbf{x}) = - \sum_{lm} \phi_{\alpha,lm} \sum_{l'm'} \mathcal{T}_{lm'l'm'}^\alpha(k)h_{l'}^{(1)}(kr)Y_{l'm'}(\hat{\mathbf{x}}) \quad (2.53)$$

と書き表される。また、前述のように  $\phi_{\alpha,out}$  は  $\mathcal{G}_0$  によって

$$\phi_{\alpha,out}(\mathbf{x}) = \int_{\Sigma_\alpha} d^3\mathbf{x}' \mathcal{G}_0(\mathbf{x}, \mathbf{x}', k) \varrho_\alpha(\mathbf{x}') \quad (2.54)$$

と書かれる。 $x$  は物体の外部、 $x'$  は物体の境界上の点であるため、 $r > r'$  である。Green 関数の部分波展開 (2.36) を代入すれば、 $\phi_{\alpha,out}$  の別の表現として、

$$\phi_{\alpha,out}(x) = ik \sum_{l'm'} Q_{\alpha,l'm'} h_{l'}^{(1)}(kr) Y_{l'm'}(\hat{x}) \quad (2.55)$$

を得る。(2.53) と (2.55) を比較すれば、

$$ikQ_{\alpha,l'm'} = - \sum_{lm} \mathcal{T}_{l'm'lm}^{\alpha}(k) \phi_{\alpha,lm} \quad (2.56)$$

が導かれる。 $\phi_{\alpha,lm}$  について解けば

$$\phi_{\alpha,lm} = -ik \sum_{l'm'} [\mathcal{T}^{\alpha}]_{lml'm'}^{-1} Q_{\alpha,l'm'} \quad (2.57)$$

となる。これを (2.46) に代入すれば、最終的に

$$\tilde{S}_{\alpha}[Q_{\alpha}] = -\frac{ik}{2} \sum_{lml'm'} (Q_{\alpha,lm}^* [\mathcal{T}^{\alpha}]_{lml'm'}^{-1} Q_{\alpha,l'm'} + c.c.) \quad (2.58)$$

が得られる。

Casimir エネルギーの評価を行うために

$$\mathfrak{Z}_C(k) = \prod_{\alpha=1}^N \int \mathcal{D}\varrho_\alpha \exp \left[ \frac{iT}{2} \sum_{\alpha,\beta} \int_{\Sigma_\alpha} d^3\mathbf{x} (\varrho_\alpha^* \phi_\beta(\mathbf{x}) + c.c.) \right] \quad (2.59)$$

を計算する必要があった。(2.59) は先ほど導いた自己相互作用、相互作用項

$$\tilde{S}_\alpha[Q_\alpha] = -\frac{ik}{2} \sum_{lm'l'm'} (Q_{\alpha,lm}^* [\mathcal{T}^\alpha]_{lm'l'm'}^{-1} Q_{\alpha,l'm'} + c.c.) \quad (2.60)$$

$$\tilde{S}_{\beta\alpha}[Q_\alpha, Q_\beta] = \frac{ik}{2} \sum_{lm'l'm'} (Q_{\alpha,l'm'}^* \mathcal{U}_{lm'l'm'}^{\alpha\beta} Q_{\beta,lm} + c.c.) \quad (2.61)$$

及び、演算子

$$\mathbb{M}_C^{\alpha\beta} \equiv [\mathbb{T}^\alpha]^{-1} \delta_{\alpha\beta} - \mathbb{U}^{\alpha\beta} (1 - \delta_{\alpha\beta}) \quad (2.62)$$

を定義することにより、

$$\mathfrak{Z}_C(k) = \prod_{\alpha=1}^N \int \mathcal{D}Q_\alpha \mathcal{D}Q_\alpha^* \exp \left[ \frac{ikT}{2} \sum_{\alpha,\beta} (Q_\alpha^* \mathbb{M}_C^{\alpha\beta} Q_\beta + c.c.) \right] \quad (2.63)$$

と書かれる。(2.63) において、積分変数の変更  $\mathcal{D}\varrho_\alpha \mathcal{D}\varrho_\alpha^* \rightarrow \mathcal{D}Q_\alpha \mathcal{D}Q_\alpha^*$  に伴って生じるヤコビアンは物体の配置  $C$  に依存しないものであるため、Casimir エネルギーに全く寄与しない。そのため、ここではヤコビアンを省略している。(2.63) は  $Q$  の二次形式の指数関数であるから経路積分が実行できる。

$k \rightarrow i\kappa$  に置き直し、積分を実行すると

$$\mathfrak{Z}_C(i\kappa) = (\det \mathbb{M}_C)^{-1} \quad (2.64)$$

を得る。従って、Casimir エネルギー (2.5) は

$$\mathcal{E}[C] = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty d\kappa \ln \frac{\det \mathbb{M}_C(i\kappa)}{\det \mathbb{M}_\infty(i\kappa)} \quad (2.65)$$

となる。

2 物体の場合の Casimir エネルギーは

$$\mathcal{E}_2[C] = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty d\kappa \ln \det(\mathbb{I} - \mathbb{T}^1 \mathbb{U}^{12} \mathbb{T}^2 \mathbb{U}^{21}) \quad (2.66)$$

である。

### 3 境界のない場合における場の量子論の摂動論

前章までは自由場を対象にした議論だった。ここからは相互作用する量子場を考えていく。この章では境界が存在せず、相互作用項を含む場の理論の摂動論を取り扱う。

#### 3.1 摂動論と Feynman 則

相互作用を含む質量ゼロの実スカラー場の理論はラグランジアン密度

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\phi(x)\Box\phi(x) + \mathcal{L}_{int}(\phi) \quad (3.1)$$

で記述される。第一項目は自由場のラグランジアン密度を、第二項目はスカラー場の間の相互作用をそれぞれ表している。ここでいくつか記号の約束を行う。まず、演算子  $\Delta_F^{-1}$  を

$$-i\Delta_F^{-1}(x, y) \equiv \Box\delta^4(x - y) \quad (3.2)$$

のように定義する。演算子  $\Delta_F^{-1}$  は伝搬関数

$$\Delta_F(x - y) = \int \frac{d^4k}{i(2\pi)^4} \frac{-1}{k^2 + i\epsilon} e^{-ik(x-y)} \quad (3.3)$$

の逆演算子である。また、引数  $x, y$  を持つ演算子が作用した関数の積分を行列演算のように

$$(-i\Delta_F^{-1}\phi)(x) \equiv \int d^4y -i\Delta_F^{-1}(x, y)\phi(y) \quad (3.4)$$

と書く。さらに、4次元積分を

$$\phi \cdot J \equiv \int d^4x \phi(x)J(x) \quad (3.5)$$

$$(\mathcal{L}_{int}(\phi)) \equiv \int d^4x \mathcal{L}_{int}(\phi) \quad (3.6)$$

と略記する。

この約束の下でラグランジアン密度 (3.1) で記述される系の生成汎関数は場の経路積分で

$$\begin{aligned} Z[J] &= \int \mathcal{D}\phi \exp i \int d^4x \left( -\frac{1}{2}\phi(x)\Box\phi(x) + \mathcal{L}_{int}(\phi) + \phi(x)J(x) \right) \\ &= \int \mathcal{D}\phi \exp i \left[ -\frac{1}{2}\phi \cdot (-i\Delta_F^{-1}\phi) + (\mathcal{L}_{int}(\phi)) + \phi \cdot J \right] \end{aligned} \quad (3.7)$$

のように書かれる。

(3.7) を外場  $J$  で汎関数微分すると

$$\frac{\delta}{\delta i J(x)} \exp i(\phi \cdot J) = \phi(x) \exp i(\phi \cdot J) \quad (3.8)$$

から分かるように  $J$  微分は場  $\phi$  に置き換わる。これを利用することで (3.7) 中の相互作用項  $\mathcal{L}_{int}(\phi)$  は、

$$\begin{aligned} \exp i\left[-\frac{1}{2}\phi \cdot (-i\Delta_F^{-1}\phi) + (\mathcal{L}_{int}(\phi)) + \phi \cdot J\right] = \\ \exp i\left(\mathcal{L}_{int}\left(\frac{\delta}{\delta i J}\right)\right) \exp i\left[-\frac{1}{2}\phi \cdot (-i\Delta_F^{-1}\phi) + \phi \cdot J\right] \end{aligned} \quad (3.9)$$

のように変数  $\phi$  を  $J$  微分に置き換えることができる。(3.9) を用い、さらに経路積分  $\mathcal{D}\phi$  において、積分変数を

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) - i(\Delta_F J)(x) \quad (3.10)$$

と変更する。そうすると、(3.7) の被積分関数は

$$\exp i\left[\frac{1}{2}\phi \cdot (-i\Delta_F^{-1}\phi) + \phi \cdot J\right] = \exp \left[-\frac{i}{2}\phi \cdot (-i\Delta_F^{-1}\phi) + \frac{1}{2}iJ \cdot (\Delta_F iJ)\right] \quad (3.11)$$

となり  $\phi$  と  $J$  の結合が分離される。(3.11) に対して経路積分  $\mathcal{D}\phi$  を実行することができる。生成汎関数は次式

$$Z[J] = Z_0 \exp i\left(\mathcal{L}_{int}\left(\frac{\delta}{\delta i J}\right)\right) \exp \left[\frac{1}{2}(iJ \cdot \Delta_F iJ)\right] \quad (3.12)$$

で表される。ここで、 $Z_0$  は自由場の生成汎関数

$$Z_0 = \int \mathcal{D}\phi \exp i\phi \cdot (-i\Delta_F^{-1}\phi) \quad (3.13)$$

である。

式 (3.11) における外場  $J$  依存性を担う因子  $\exp \left[\frac{1}{2}(iJ \cdot \Delta_F iJ)\right]$  も

$$\exp \frac{1}{2}(iJ \cdot \Delta_F iJ) = \exp \left[\frac{1}{2}\frac{\delta}{\delta \phi} \cdot \Delta_F \frac{\delta}{\delta \phi}\right] \exp i(\phi \cdot J)|_{\phi=0} \quad (3.14)$$

のように微分演算子で書き換えることができることが分かる。(3.14) を (3.12) に適用すると

$$Z[J] = Z_0 \exp i\left(\mathcal{L}_{int}\left(\frac{\delta}{\delta i J}\right)\right) \exp \left[\frac{1}{2}\frac{\delta}{\delta \phi} \cdot \Delta_F \frac{\delta}{\delta \phi}\right] \exp i(\phi \cdot J)|_{\phi=0} \quad (3.15)$$



となるが、相互作用項中の微分  $\delta/\delta J$  と  $\phi$  微分は順序が交換可能である。結局、 $Z[J]$  は

$$Z[J] = Z_0 \exp \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\delta}{\delta \phi} \cdot \Delta_F \frac{\delta}{\delta \phi} \right) \right] \exp i[(\mathcal{L}_{int}(\phi)) + \phi \cdot J]|_{\phi=0} \quad (3.16)$$

となる。

$\phi$  微分を行い、最後に  $\phi$  をゼロにする操作を記号

$$\exp \left[ \frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta \phi} \cdot \Delta_F \frac{\delta}{\delta \phi} \right] F[\phi]|_{\phi=0} \equiv \langle F[\phi] \rangle_0 \quad (3.17)$$

で定義する。すると、式 (3.16) は

$$Z[J] = Z_0 \langle \exp i[(\mathcal{L}_{int}(\phi)) + \phi \cdot J] \rangle_0 \quad (3.18)$$

と表記される。また、 $J = 0$  で生成汎関数が 1 となるように規格化すれば、

$$Z[J] = \frac{\langle \exp i[(\mathcal{L}_{int}(\phi)) + \phi \cdot J] \rangle_0}{\langle \exp i(\mathcal{L}_{int}(\phi)) \rangle_0} \quad (3.19)$$

を得る。この式が  $Z[J]$  に対する摂動的な評価法の規則を与える。

上式において  $\exp i(\phi \cdot J)$  を展開すれば (3.19) 式の分子は

$$\langle \exp i[(\mathcal{L}_{int}(\phi)) + \phi \cdot J] \rangle_0 = \sum_{n=0} \frac{i^n}{n!} \int d^4 x_1 \cdots d^4 x_n J_1(x_1) \cdots J_n(x_n) G^n(x_1 \cdots x_n) \quad (3.20)$$

となる。ここで外場の  $n$  次の係数を

$$G^n(x_1 \cdots x_n) = \langle \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) \exp i(\mathcal{L}_{int}(\phi)) \rangle_0 \quad (3.21)$$

と書いた。ここで定義した  $G^n(x_1 \cdots x_n)$  は場の量子論において  $n$  点 Green 関数として知られるものである。さらに相互作用の指数関数を展開すれば  $G^n(x_1 \cdots x_n)$  に対する摂動展開

$$G^n(x_1 \cdots x_n) = G_{(0)}^n(x_1 \cdots x_n) + G_{(1)}^n(x_1 \cdots x_n) \cdots + G_{(m)}^n(x_1 \cdots x_n) \quad (3.22)$$

が与えられる。ここで、 $G_{(m)}^n(x_1 \cdots x_n)$  は  $G^n(x_1 \cdots x_n)$  の  $m$  次の摂動項であり、具体的には、

$$G_{(m)}^n(x_1 \cdots x_n) = \frac{i^m}{m!} \int d^4 y_1 \cdots d^4 y_m \langle \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) \mathcal{L}_{int}(\phi(y_1)) \cdots \mathcal{L}_{int}(\phi(y_m)) \rangle_0 \quad (3.23)$$

と表記される。

$G_{(m)}^n(x_1 \cdots x_n)$  を求めるためには

$$\langle \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) \mathcal{L}_{int}(\phi(y_1)) \cdots \mathcal{L}_{int}(\phi(y_m)) \rangle_0 \quad (3.24)$$

を実行する必要がある。簡単のために、まず  $G_{(0)}^2(x_1, x_2)$  を例に挙げる。 $G_{(0)}^2(x_1, x_2)$  は

$$G_{(0)}^2(x_1, x_2) = \langle \phi(x_1) \phi(x_2) \rangle_0 \quad (3.25)$$

であるが、記号  $\langle \rangle_0$  の元々の意味を思い出すと

$$\langle \phi(x_1) \phi(x_2) \rangle_0 = \exp \left[ \frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta \phi} \cdot \Delta_F \frac{\delta}{\delta \phi} \right] \phi(x_1) \phi(x_2) |_{\phi=0} \quad (3.26)$$

になる。また、略記

$$\frac{\delta}{\delta \phi} \cdot \Delta_F \frac{\delta}{\delta \phi} = \int d^4 y_1 d^4 y_2 \frac{\delta}{\delta \phi(y_1)} \Delta_F(y_1 - y_2) \frac{\delta}{\delta \phi(y_2)} \quad (3.27)$$

に注意し、汎関数微分を実行すれば

$$G_{(0)}^2(x_1, x_2) = \langle \phi(x_1) \phi(x_2) \rangle_0 = \Delta_F(x_1 - x_2) \quad (3.28)$$

が得られる。以上の計算から分かるように、演算  $\langle \rangle_0$  は 2 つの  $\phi$  を  $\Delta_F$  に置き換える操作 (縮約) である。 $\Delta_F$  の引数はそれぞれの  $\phi$  の時空座標を引き継ぐ。縮約を 2 つの時空点を繋ぐ線に各端点の時空座標を引数として持つ伝搬関数を付与する操作として捉えると摂動項の計算を見通しよく行うことが可能になる。

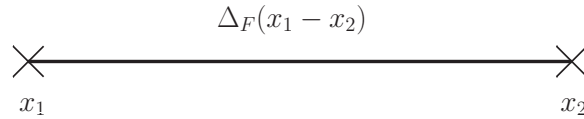


図 2

例えば  $\phi^3$  理論

$$\mathcal{L}_{int}(\phi) = -\frac{\lambda}{3!}\phi^3 \quad (3.29)$$

における  $G^2(x_1, x_2)$  の 2 次摂動項  $G_{(2)}^2(x_1, x_2)$  は

$$G_{(2)}^2(x_1, x_2) = \frac{1}{2!} \int d^4y_1 d^4y_2 \left\langle \phi(x_1)\phi(x_2) \left(-\frac{i\lambda}{3!}\right) \phi^3(y_1) \left(-\frac{i\lambda}{3!}\right) \phi^3(y_2) \right\rangle_0 \quad (3.30)$$

であるが、これは縮約の仕方によって分類された 5 種類の項の和

$$\begin{aligned} G_{(2)}^2(x_1, x_2) &= G_{(2:a)}^2(x_1, x_2) + G_{(2:b)}^2(x_1, x_2) \\ &\quad + G_{(2:c)}^2(x_1, x_2) + G_{(2:d)}^2(x_1, x_2) + G_{(2:e)}^2(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (3.31)$$

で与えられる。 $G_{(2)}^2$  に寄与する各項は

$$\begin{aligned} G_{(2:a)}^2(x_1, x_2) &= \frac{3 \cdot 3 \cdot 2}{(3!)^2} \int d^4y_1 d^4y_2 \Delta_F(x_1 - y_1) (-i\lambda) [\Delta_F(y_1 - y_2)]^2 (-i\lambda) \Delta_F(y_2 - x_2) \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} G_{(2:b)}^2(x_1, x_2) &= \frac{3 \cdot 2 \cdot 3}{(3!)^2} \int d^4y_1 d^4y_2 \Delta_F(x_1 - y_1) (-i\lambda) \Delta_F(y_1 - y_2) \Delta_F(y_2 - x_2) (-i\lambda) \Delta_F(y_2 - y_2) \end{aligned} \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} G_{(2:b)}^2(x_1, x_2) &= \frac{3 \cdot 2 \cdot 3}{(3!)^2} \int d^4y_1 d^4y_2 \Delta_F(x_1 - y_1) (-i\lambda) \Delta_F(y_1 - y_2) \Delta_F(y_2 - x_2) (-i\lambda) \Delta_F(y_2 - y_2) \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$G_{(2:c)}^2(x_1, x_2) = G_{(1)}^1(x_1) G_{(1)}^1(x_2) \quad (3.35)$$

$$G_{(2:d)}^2(x_1, x_2) = G_{(0)}^2(x_1, x_2) \frac{1}{2} \frac{3!}{(3!)^2} \int d^4y_1 d^4y_2 (-i\lambda) [\Delta_F(y_1 - y_2)]^3 (-i\lambda) \quad (3.36)$$

$$G_{(1)}^1(x) = \frac{3}{3!} \int d^4y \Delta_F(x - y) (-i\lambda) \Delta_F(y - y) \quad (3.37)$$

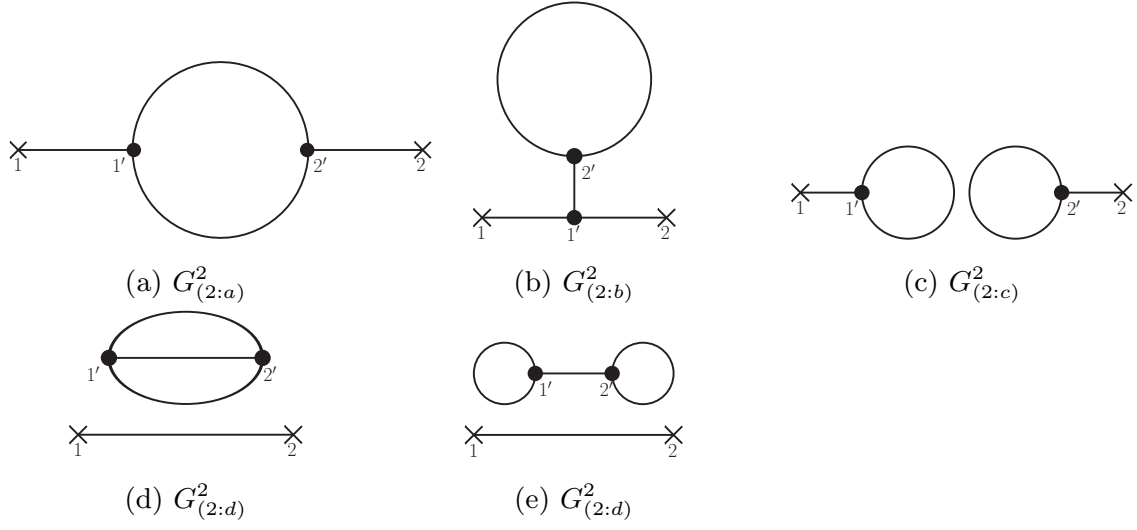


図 3: 縮約の仕方

$$\begin{aligned}
 G^2_{(2:e)}(x_1, x_2) \\
 = G^2_{(0)}(x_1, x_2) \frac{3 \cdot 3}{(3!)^2} \int d^4 y_1 d^4 y_2 \Delta_F(y_1 - y_1) (-i\lambda) \Delta_F(y_1 - y_2) (-i\lambda) \Delta_F(y_2 - y_2)
 \end{aligned}
 \tag{3.38}$$

となるが、これらは時空座標  $x_1, x_2$  を持つ 2 つの端点 (外場) と  $y_1, y_2$  という座標をもつ 2 つの相互作用頂点を適当に縮約することで得られる。図 3 は式 (3.32) (3.38) の縮約を図で表現したものである。

統計因子は各項がどれだけの重みで  $G^2_{(2)}$  に寄与するかを示す。例えば  $G^2_{(2:a)}$  の統計因子  $3 \cdot 3 \cdot 2 / (3!)^2$  は次のように計算される。

図 4 のように  $x_1 - y_1, x_2 - y_2$  で縮約する仕方であれば、図 5 のように  $x_1 - y_2, y_1 - x_2$  という縮約も可能である。これら 2 つの図は積分変数  $y_1, y_2$  の入れ替えで全く同じものになる。そのため、まず 2 という統計因子が出てくる。これは  $y_1, y_2$  を 2 つ相互作用頂点に割り当てる場合の数と等しい。一般に  $m$  個の頂点に  $y_1, \dots, y_m$  を割り当てる場合の数は  $m!$  であるから、これは (2.1) の  $1/m!$  と相殺する。残りの統計因子  $3 \cdot 3 \cdot 2$  は相互作用  $\phi^3(y_i)$  のうち、どれを端点  $x_i$  を縮約するか  $3 \cdot 3$  通り、残った  $\phi^2(y_1)\phi^2(y_2)$  の縮約の仕方の 2 通りから来ている。

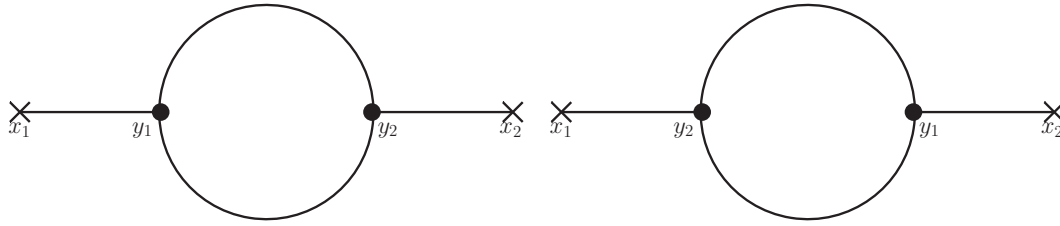


図 4

図 5

摂動計算 (3.32) 式 (3.38) 式から摂動計算の一般的規則である Feynman 則を見出すことができる。

Feynman 則

$n$  点 Green 関数の  $m$  次摂動項は以下の規則で与えられる。

1. 外場に対応する  $n$  個の端点  $x_1, \dots, x_n$  と  $\mathcal{L}_{int}(\phi)$  に相当する  $m$  個の相互作用頂点を繋ぎ、可能なグラフ (Feynman ダイアグラム) を全て書き出す。 $\phi^3$  相互作用なら相互作用頂点は図 6 のようになる。
2. 端点や相互作用頂点を接続する各線に伝搬関数  $\Delta_F$  を付与する。例えば  $x$  と  $y$  を繋ぐ線の場合は  $\Delta_F(x - y)$  となる。
3. 各相互作用頂点に対し  $i\mathcal{L}$  の結合定数を付与する。 $\phi^3$  相互作用で  $-i\lambda$  である。
4. 各頂点の位置  $y_i$  について積分  $\int d^4 y_i$  を実行する。
5. 各々のグラフの重みを計算して掛ける。
6. 全てのグラフの寄与を足しあげる。

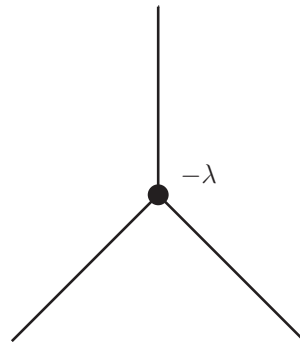


図 6:  $\phi^3$  相互作用頂点

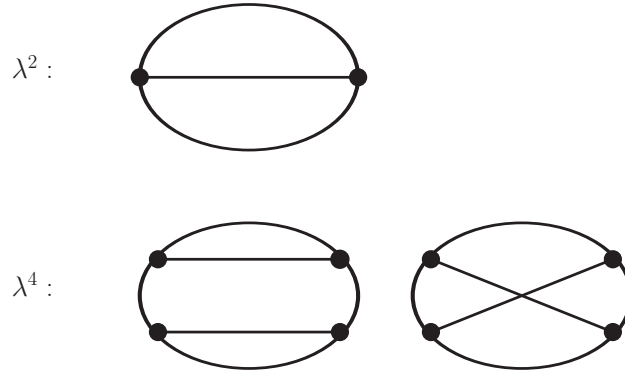


図 7: 真空泡グラフ

### 3.2 真空泡グラフと連結グラフ

図 1(d),(e) において見られるような全く外場 (端点  $x_i$ ) に接続していないグラフは真空泡グラフと呼ばれる。真空泡グラフの例を図 7 に示す。

先の  $G_{(2)}^2$  の例からも分かるように、 $G^n$  の摂動項の中には真空泡グラフを含むものが存在する。しかし、そのようなグラフからの寄与は (3.36),(3.38) 式と同じように必ず、(真空泡グラフを含まないグラフ)  $\times$  (真空泡グラフ) と書かれる。従って (3.19) の分子は以下のように

$$Z[J] = (1 + \text{真空泡グラフの総和} : \mathcal{B}) \times (1 + \text{真空泡を含まないダイヤグラムの総和} : \mathcal{C}) \quad (3.39)$$

で与えられる。だが一方で、(3.19) の分母は  $\mathcal{B}$  に等しい。結局、

$$Z[J] = \frac{\mathcal{B} \times \mathcal{C}}{\mathcal{B}} = \mathcal{C} \quad (3.40)$$

となり、これは真空泡を含むグラフから  $Z[J]$  へは全く寄与しないことを示している。

従って、 $Z[J]$  は真空泡を含まないグラフから構成されている。しかし、図 1(c) のように全体が一つに連結していないグラフを含んでいる。そのため、 $\mathcal{C}$  は

$$\mathcal{C} = (\text{一つの連結グラフからなる部分}) + (\text{二つの連結グラフからなる部分}) + \cdots \quad (3.41)$$

と書くことが出来る。一つの連結グラフの総和を  $iW[J]$  で書くことにすると、(3.41) は

$$Z[J] = 1 + iW[J] + \frac{i^2}{2!} W[J]^2 + \cdots \quad (3.42)$$

に等しい。 $n$  個の連結グラフからなる部分では、 $n!$  通りの単連結グラフの配置の仕方があるため、それだけの重複を含む。そのため、係数  $1/n!$  が必要になる。従って、

$$iW[J] = \ln Z[J] \quad (3.43)$$

で定義された  $W[J]$  は全ての連結グラフを足し挙げたもの

$$iW[J] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int d^4x_1 \cdots d^4x_n J(x_1) \cdots J(x_n) G_{conn}^n(x_1 \cdots x_n) \quad (3.44)$$

であることが分かる。

### 3.3 有効作用

有効作用は  $W[J]$  の Legendre 変換

$$\Gamma[\varphi] = W[J] - \varphi \cdot J \quad (3.45)$$

で定義される。ここで  $\varphi$  は

$$\varphi(x) = \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} \quad (3.46)$$

である。これは図 8 で示してあるように  $x$  という引数をもつ端点と接続した連結グラフの総和で与えられる。tadpole グラフにおける右側の灰色の円は連結グラフの総和を表し

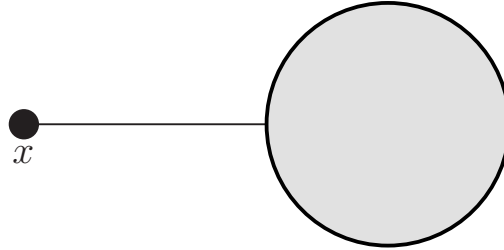


図 8: tadpole グラフ

ている。

$\varphi$  が tadpole グラフで表せることは、定義 (3.46) と Feynman 則の元になった式 (3.19) から分かる。 $\varphi$  の定義は

$$\varphi(x) = \frac{\langle \phi(x) \exp i[(\mathcal{L}_{int}(\phi)) + \phi \cdot J] \rangle_0}{\langle \exp i(\mathcal{L}_{int}(\phi)) \rangle_0} / \frac{\langle \exp i[(\mathcal{L}_{int}(\phi)) + \phi \cdot J] \rangle_0}{\langle \exp i(\mathcal{L}_{int}(\phi)) \rangle_0} \quad (3.47)$$

と書き換えが可能である。(3.47)における分子

$$\frac{\langle \phi(x) \exp i[(\mathcal{L}_{int}(\phi)) + \phi \cdot J] \rangle_0}{\langle \exp i(\mathcal{L}_{int}(\phi)) \rangle_0} \quad (3.48)$$

は (端点  $x$  と接続している連結グラフの総和:  $\mathcal{F}$ )  $\times \mathcal{B}$  と書くことができる。従って (3.47) は

$$\mathcal{F} \times \mathcal{B} / \mathcal{B} = \mathcal{F} \quad (3.49)$$

となる。tadpole グラフを利用することで有効作用が 1 粒子規約なグラフから構成されることを示すことができる。

図 9 のグラフは波線を境にして 2 つの部分に分けることができる。連結グラフにおいて、ある内線を境にグラフが別々の部分に分離できるとき、そのような線のことを間接線と呼ぶ。

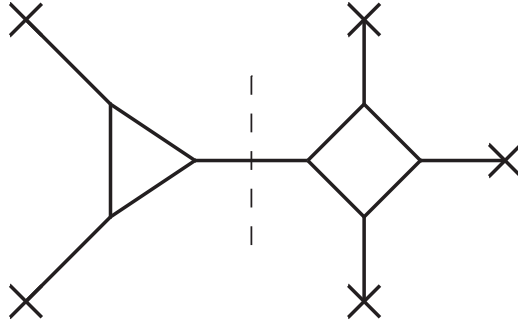


図 9: 間接線を持つような連結グラフ

1 粒子規約なグラフとは外線以外に間接線を持たないような連結グラフのことである。

1 粒子規約なグラフの例としては図 10 のようなものがある。

有効作用  $\Gamma$  が 1 粒子規約なグラフのみを含むことを示すには、tadpole グラフによって  $iW[J]$  を構成することを考えればよい。構成の方法として次の候補が考えられる:

1. 端点  $x$  に外場  $iJ$  を付与する。つまり、

$$iW[J] = ? iJ \cdot \varphi \quad (3.50)$$

2. tadpole グラフの端点  $x$  と接続している伝搬関数を切断したものを (図 8 灰色の円) を端点  $x$  に付与する。つまり、

$$iW[J] = ? \varphi \cdot (\Delta_F^{-1} \varphi) \quad (3.51)$$



3. 一粒子規約なグラフの総和  $\kappa^{1PI}[\Delta_F J]$  において外場が付与された外線伝搬関数  $\Delta_F J$  を全て  $\varphi$  に置き換える。つまり、

$$iW[J] = ? \kappa^{1PI}[\varphi] \quad (3.52)$$

ところが、1 3 どの候補もグラフの数え過ぎがあるために正しく  $iW[J]$  を与えない。しかし、(3.50) – (3.51) + (3.52) は正確に  $iW[J]$  となっている。すなわち、

$$iW[J] = -\frac{1}{2}\varphi \cdot \Delta_F^{-1}\varphi + \kappa^{1PI}[\varphi] + iJ \cdot \varphi \quad (3.53)$$

である。これはまた、有効作用が 1 粒子規約なグラフから構成されること

$$i\Gamma[\varphi] = -\frac{1}{2}\varphi \cdot \Delta_F^{-1}\varphi + \kappa^{1PI}[\varphi] \quad (3.54)$$

を意味している。

$\kappa^{1PI}$  から tree グラフ (ループを含まないグラフ) を抜き出すと

$$\kappa^{1PI}[\varphi] = i \int d^4x \mathcal{L}_{int}(\varphi) + \kappa_{loop}^{1PI}[\varphi] \quad (3.55)$$

となる。このため有効作用は以下

$$\Gamma[\varphi] = S[\varphi] - i\kappa_{loop}^{1PI}[\varphi] \quad (3.56)$$

$$S[\varphi] = \int d^4x \mathcal{L}(\varphi) \quad (3.57)$$

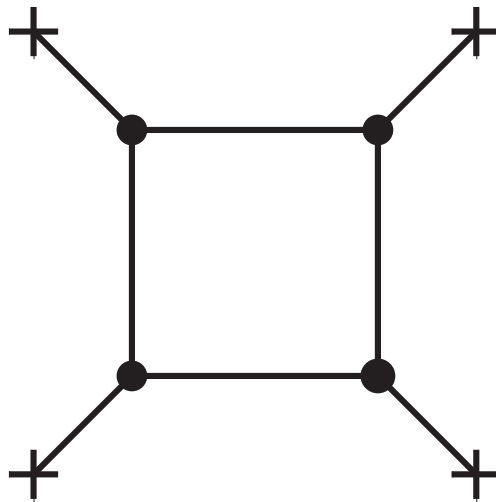


図 10: 1 粒子規約な連結グラフ

のように書くことができる。(3.56) から  $\Gamma$  は量子補正を含む一般化された作用と解釈される。また、有効作用の定義から、

$$\frac{\delta\Gamma[\varphi]}{\delta\varphi(x)} = -J(x) \quad (3.58)$$

が成り立つ。外場  $J \rightarrow 0$  の極限で理論は元々のラグランジアン密度で記述されたものに戻るが、このとき  $\varphi$  は

$$\frac{\delta\Gamma[\varphi]}{\delta\varphi(x)} = 0 \quad (3.59)$$

を満たす。すなわち、 $J \rightarrow 0$  としたときの  $\varphi$  は有効作用の変分原理から得られる Euler-Lagrange 方程式で決定されることを示している。

### 3.4 有効作用の評価法

有効作用を具体的に評価する方法は  $\Gamma$  の定義 (3.45) から与えられる。(3.45) の指数をとると  $\Gamma$  は

$$\begin{aligned} e^{i\Gamma[\varphi]} &= Z[J]e^{-i(\phi \cdot J)} \\ &= \int \mathcal{D}\phi \exp i[S[\phi] + (\phi - \varphi) \cdot J] \end{aligned} \quad (3.60)$$

と変形される。(3.60) に対し、積分変数の変換  $\phi \rightarrow \phi + \varphi$  を行うと

$$\Gamma[\varphi] = -i \ln \int \mathcal{D}\phi \exp i[S[\varphi + \phi] + \phi \cdot J] \quad (3.61)$$

を得る。さらに、 $S[\varphi + \phi]$  を固定された関数  $\varphi$  の周りで展開すれば、

$$S[\varphi + \phi] = S[\varphi] + \frac{\delta S[\varphi]}{\delta\varphi} \cdot \phi + \frac{1}{2} \phi \cdot iD_F^{-1}(\varphi)\phi + (\mathcal{L}_{int}(\phi; \varphi)) \quad (3.62)$$

$$\left. \frac{\delta S[\phi]}{\delta\phi} \right|_{\phi=\varphi} = \frac{\delta S[\varphi]}{\delta\varphi} \quad (3.63)$$

となる。ここで、 $iD_F^{-1}$  を作用の  $\varphi$  に関する 2 階の汎関数微分

$$iD_F^{-1}(\varphi) = \frac{\delta^2 S[\varphi]}{\delta\varphi\delta\varphi} \quad (3.64)$$

で定義している。(3.62) を (3.60) に代入し、(3.58) を用いると、有効作用は

$$\Gamma[\varphi] = S[\varphi] - i \ln \int \mathcal{D}\phi \exp i \left[ \frac{1}{2} \phi \cdot i D_F^{-1}(\varphi) \phi + (\mathcal{L}_{int}(\phi; \varphi)) - \frac{\delta}{\delta \varphi} \{ \Gamma[\varphi] - S[\varphi] \} \cdot \phi \right] \quad (3.65)$$

$$\Gamma[\varphi] = S[\varphi] + \tilde{\Gamma}[\varphi] \quad (3.66)$$

$$\tilde{\Gamma}[\varphi] \equiv -i \ln \int \mathcal{D}\phi \exp i \left[ \frac{1}{2} \phi \cdot i D_F^{-1}(\varphi) \phi + (\mathcal{L}_{int}(\phi; \varphi)) - \frac{\delta \tilde{\Gamma}[\varphi]}{\delta \varphi} \cdot \phi \right] \quad (3.67)$$

と書ける。新たに定義された  $\tilde{\Gamma}$  の式の形は、(3.7) 式  $Z[J]$  の対数をとったものと同じ形をしている。そのため、有効作用を求めるには

$$\Delta_F \rightarrow D_F(\varphi) \quad (3.68)$$

$$\mathcal{L}_{int}(\phi) \rightarrow \mathcal{L}_{int}(\phi; \varphi) \quad (3.69)$$

$$J \rightarrow \tilde{J} = \frac{\delta \tilde{\Gamma}[\varphi]}{\delta \varphi} \quad (3.70)$$

と置き換え、Feynman 則に従って各ダイアグラムからの寄与を足し挙げればよいことが分かる。また、 $\tilde{\Gamma}$  へは 1 粒子規約なグラフだけが寄与する。その理由は、 $\varphi$  の定義 (3.46) から得られる

$$\int \mathcal{D}\phi (\phi(x) - \varphi(x)) \exp i (S[\phi] + J \cdot \phi) = 0 \quad (3.71)$$

に、積分変数の変換  $\phi \rightarrow \phi + \varphi$  を施すことにより導かれる

$$\int \mathcal{D}\phi \phi(x) \exp i \left[ \frac{1}{2} \phi \cdot i D_F^{-1}(\varphi) \phi + (\mathcal{L}_{int}(\phi; \varphi)) + \tilde{J} \cdot \phi \right] = 0 \quad (3.72)$$

から言える。 $\tilde{\Gamma}$  は

$$\int \mathcal{D}\phi \exp i \left[ \frac{1}{2} \phi \cdot i D_F^{-1}(\varphi) \phi + (\mathcal{L}_{int}(\phi; \varphi)) + \tilde{J} \cdot \phi \right] \quad (3.73)$$

の対数であるから、一体となって連結しているグラフのみが寄与していることがただちに分かる。そして、式 (3.72) は連結グラフしているが、途中で  $\phi(x)$  の一本線になるものの総和がゼロになることを示している。そのため、 $\tilde{\Gamma}$  には 1 粒子規約なグラフのみが寄与する。

### 3.5 有効作用の物理的意味

有効作用が  $\varphi$  の関数として決定できれば、系の真空エネルギーを求めることができる。外場  $J$  と  $\varphi$  が共に時間に依存しないと仮定すると、有効作用と真空エネルギーの関係が

明らかになる。

$J$ 、 $\varphi$  はそれぞれ空間成分のみの関数であるとしているので、 $W[J]$ 、 $\Gamma[\varphi]$  は時間並進不変性をもつ。それゆえ

$$\begin{aligned} W[J] &= -w[J] \int dt \\ &= -w[J]T \end{aligned} \quad (3.74)$$

$$\Gamma[\varphi] = -\mathcal{E}[\varphi]T \quad (3.75)$$

が得られる。また、外場  $J$  を含む系の分配関数は経路積分によって

$$\text{Tre}^{-i\hat{H}[J]T} = \int \mathcal{D}\phi \exp i \left[ \int_0^T dt d^3\mathbf{x} \{ \mathcal{L} + \phi(\mathbf{x})J(\mathbf{x}) \} \right] \quad (3.76)$$

$$\hat{H}[J] = \hat{H} - \int d^3\mathbf{x} \hat{\phi}(\mathbf{x})J(\mathbf{x}) \quad (3.77)$$

と表記される。従って、 $T \rightarrow \infty$  の極限で上式の分配関数は、(3.7) 式  $Z[J]$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \text{Tre}^{-i\hat{H}[J]T} = Z[J] \quad (3.78)$$

に一致する。トレースを  $\hat{H}[J]$  の固有状態でとることにすれば、

$$\text{Tre}^{-i\hat{H}[J]T} = \sum_{n=0} \langle n_J | e^{-i\hat{H}[J]T} | n_J \rangle \quad (3.79)$$

となるが、 $i\epsilon$  処方 ( $\hat{H}[J] \rightarrow e^{i\epsilon} \hat{H}[J]$ ) の下で、 $T \rightarrow \infty$  の極限操作を行うと真空以外からの寄与は無くなる。すなわち、

$$Z[J] = \langle 0_J | e^{-i\hat{H}[J]T} | 0_J \rangle \quad (3.80)$$

である。また、 $Z[J] = e^{iW[J]}$  であることを用いると上式から

$$e^{-iw[J]T} = \langle 0_J | e^{-i\hat{H}[J]T} | 0_J \rangle \quad (3.81)$$

が得られる。従って、 $T \rightarrow \infty$  において固有値方程式

$$\hat{H}[J] | 0_J \rangle = w[J] | 0_J \rangle \quad (3.82)$$

が成り立つ。この式から  $w[J]$  の物理的な意味が明確になる。すなわち、 $w[J]$  は  $\hat{H}[J]$  の基底エネルギーと解釈することができる。

また、固有値方程式を書き換えると

$$\langle 0_J | H | 0_J \rangle = w[J] + \int d^3\mathbf{x} J(\mathbf{x}) \langle 0_J | \hat{\phi}(\mathbf{x}) | 0_J \rangle \quad (3.83)$$

のようになる。仮に  $\langle 0_J | \hat{\phi}(\boldsymbol{x}) | 0_J \rangle$  が  $w[J]$  の外場による汎関数微分になっていれば、上式右辺は  $w[J]$  の Legendre 変換である。実際にそのようになっていることが、以下のようにして確かめられる。まず、任意状態を引数としても汎関数を

$$F[\Psi, \Psi^*] = \langle \Psi | \{ H - E - \int d^3 \boldsymbol{x} J(\boldsymbol{x}) \hat{\phi}(\boldsymbol{x}) \} | \Psi \rangle \quad (3.84)$$

で定義する。そのようにすると、固有値方程式

$$\hat{H}[J] |\Psi\rangle = E |\Psi\rangle \quad (3.85)$$

は  $F$  の状態  $|\Psi\rangle$  の変分に対する停留解となっている。このため、 $\langle 0_J | \{ \hat{H}[J] - w[J] \} | 0_J \rangle$  の外場に対する変分を実行すると、

$$\langle 0_J | \{ \delta \hat{H}[J] - \delta w[J] \} | 0_J \rangle = 0 \quad (3.86)$$

という関係が導かれる。この関係式に  $\delta \hat{H}[J] / \delta J = -\hat{\phi}$  を用いれば、

$$\varphi_J(\boldsymbol{x}) = \langle 0_J | \hat{\phi}(\boldsymbol{x}) | 0_J \rangle = -\frac{\delta w[J]}{\delta J(\boldsymbol{x})} \quad (3.87)$$

が証明される。従って、(3.83) 式は

$$\langle 0_J | H | 0_J \rangle = w[J] - \int d^3 \boldsymbol{x} J(\boldsymbol{x}) \varphi_J(\boldsymbol{x}) \quad (3.88)$$

となる。右辺は  $w[J]$  の Legendre 変換であるから

$$\langle 0_J | \hat{H} | 0_J \rangle = \mathcal{E}[\varphi_J] \quad (3.89)$$

が導かれる。このため、 $J \rightarrow 0$  とすれば、 $\mathcal{E}[\varphi]$  はオリジナルの系の基底エネルギーに相当する量であることが分かる。ただし、このときの  $\varphi$  は Schrödinger 表示の場の演算子の真空期待値

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \langle 0 | \hat{\phi}(\boldsymbol{x}) | 0 \rangle \quad (3.90)$$

である。

## 4 境界が存在：相互作用あり

前章では場の間に相互作用がない場合の Casimir エネルギーをスカラー場、Dirichlet 条件を例にとりて導いた。現実的にはスカラー場ではなく、電磁場が導体や誘電体によって制限を受けることによって Casimir 効果が生じるものと考えられる。さらに、空間中には電磁場以外にも電子などの粒子を記述するフェルミオン場が存在する。そのため、より厳密に Casimir 効果を考えるのであれば、電磁場と相互作用するフェルミオン場からの影響なども考慮に入れる必要がある。相互作用場の Casimir エネルギーを考察する動機はそのような所にある。そこで、この章では相互作用をする実スカラー場を例にとり、物体が Dirichlet 境界条件で記述されている状況で Casimir 効果を摂動的に求める方法の定式化を行う。

この章ではオーバーライン、アンダーライン付きの関数を

$$\underline{J}(t, \mathbf{x}) = \begin{cases} J(x) & \mathbf{x} \in \Sigma \\ 0 & \mathbf{x} \notin \Sigma \end{cases}, \quad \bar{J}(t, \mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & \mathbf{x} \in \Sigma \\ J(x) & \mathbf{x} \notin \Sigma \end{cases} \quad (4.1)$$

のように物体の境界  $\Sigma$  とそれ以外の点で上記の値を持つように定義する。このような約束をすれば全空間で定義されている関数  $J(x)$  は

$$J(x) = \underline{J}(x) + \bar{J}(x) \quad (4.2)$$

と書くことが出来る。相互作用はないが、場に境界条件が課されたときの分配関数は (2.1) 式であった。これは自由場の作用に物体の境界上にのみ導入された電荷  $\varrho$  との結合項を加えたものを電荷で経路積分することによって求めることが出来た。つまり、場に対する境界条件は物体境界上に電荷を導入することによって達成される。今度はこの考えを相互作用がある場合に対しても適用する。ただし、この章では全空間で定義された外場を導入する：

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi \exp i \int d^4x (\mathcal{L} + \phi(x)J(x)) \quad (4.3)$$

場に対する境界条件 ( $\Sigma$  上で  $\phi = 0$ ) は  $Z[J]$  を境界上の外場  $\underline{J}$  での経路積分

$$Z_c[\bar{J}] = \int \mathcal{D}\underline{J} Z[J] \quad (4.4)$$

によって課される。物体の形状が常に一定であると仮定すれば、各物体が異なる配置をとっても積分  $\underline{J}$  を行うことによって生じる規格化因子は変化しない。つまり、分配関数

の規格化因子は物体の配置に依存しないため省略している。

(3.43),(3.45) と同様に  $W_c, \Gamma_c$  を  $Z_c$  から定義する:

$$iW_c[\bar{J}] = \ln Z_c[\bar{J}] \quad (4.5)$$

$$\Gamma_c[\bar{\varphi}] = W_c[\bar{J}] - \bar{J} \cdot \bar{\varphi} \quad (4.6)$$

$$\bar{\varphi}(x) = \frac{\delta W_c[\bar{J}]}{\delta \bar{J}(x)} \quad (4.7)$$

$W_c$  は境界上での外場依存性を持たないため、 $\bar{\varphi}$  は境界外部でのみ値を持つ。

新たに定義された  $\Gamma_c$  に対しても、境界が無い場合での議論と同様にして物理的な解釈が可能である。(4.4) 式  $Z_C[\bar{J}]$  は (4.2) を用いると

$$Z_C[\bar{J}] = \int \mathcal{D}\underline{J} \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\pi \exp i \int d^4x \{ \phi(x) \pi(x) - \mathcal{H}(\phi, \pi) + \bar{\phi}(x) \bar{J}(x) + \underline{\phi}(x) \underline{J}(x) \} \quad (4.8)$$

のように書き表すことができる。ただし、 $\pi(x) = \partial \mathcal{L} / \partial \dot{\phi}(x)$  は  $\phi(x)$  に共役な場である。

(4.8) の被積分関数

$$\int \mathcal{D}\underline{J} \exp i \int d^4x \underline{\phi}(x) \underline{J}(x) \quad (4.9)$$

は境界  $\Sigma$  上で場  $\phi$  をゼロにするような汎関数  $\delta$  関数である。それゆえ、境界上の場  $\underline{\phi}, \underline{\pi}$  から  $Z_C[\bar{J}]$  への寄与は存在しない。すなわち、

$$Z_C[\bar{J}] = \int \mathcal{D}\bar{\phi} \mathcal{D}\bar{\pi} \exp i \int d^4x \{ \bar{\phi}(x) \bar{\pi}(x) - \mathcal{H}(\bar{\phi}, \bar{\pi}) - \bar{\phi}(x) \bar{J}(x) \} \quad (4.10)$$

である。外場が時間に依存しない場合  $\bar{J}(x) = \bar{J}$  には (3.76) ~ (3.78) と同様に

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \text{Tr} e^{-i \hat{H}_C[\bar{J}] T} = Z_C[\bar{J}] \quad (4.11)$$

$$\hat{H}_C[\bar{J}] = \hat{H}_C - \int d^3x \hat{\phi}(x) \bar{J}(x) \quad (4.12)$$

であることが分かる。3.5 での議論と同様に

$$\langle 0_{\bar{J}} | \hat{H}_C | 0_{\bar{J}} \rangle = \mathcal{E}_C[\bar{\varphi}_{\bar{J}}(x)] \quad (4.13)$$

$$\bar{\varphi}_{\bar{J}}(x) = \langle 0_{\bar{J}} | \hat{\phi}(x) | 0_{\bar{J}} \rangle \quad (4.14)$$

を言うことができる。従って、 $\Gamma_C[\bar{\varphi}]$  から得られる  $\mathcal{E}_C[\bar{\varphi}(x)]$  に対しても境界条件が存在する系の真空エネルギーという解釈が可能である。そのため Casimir エネルギーの有効作用を用いた表式は

$$\mathcal{E}_c = \mathcal{E}_c[\bar{\varphi}_{\bar{J}}] - \mathcal{E}[\varphi_J] \quad (J \rightarrow 0) \quad (4.15)$$

となる。

境界条件が存在する系の有効作用  $\Gamma_C[\varphi]$  も 3.4 とほとんど同様に評価することができる。 $\Gamma_C$  は定義から

$$\Gamma_c[\bar{\varphi}] = -i \ln \int \mathcal{D}\underline{J} \mathcal{D}\phi \exp i[S[\phi] + \bar{J} \cdot (\bar{\phi} - \bar{\varphi}) + \underline{J} \cdot \underline{\phi}] \quad (4.16)$$

と表記される。ただし、

$$\begin{aligned} J \cdot \phi &= \int_{x \in \Sigma} d^4x J(x) \phi(x) + \int_{x \notin \Sigma} d^4x J(x) \phi(x) \\ &= \bar{J} \cdot \bar{\phi} + \underline{J} \cdot \underline{\phi} \end{aligned} \quad (4.17)$$

を用いた。ここでも変数変換  $\phi \rightarrow \phi + \bar{\varphi}$  を行う。作用  $S[\bar{\varphi} + \phi]$  の  $\bar{\varphi}$  まわりでの展開は

$$S[\bar{\varphi} + \phi] = S[\bar{\varphi}] + \frac{\delta S[\bar{\varphi}]}{\delta \bar{\varphi}} \cdot \phi + \frac{1}{2} \phi \cdot iD_F^{-1}(\bar{\varphi})\phi + \mathcal{L}_{int}(\phi; \bar{\varphi}) \quad (4.18)$$

$$\left. \frac{\delta S[\phi]}{\delta \phi} \right|_{\phi=\bar{\varphi}} = \frac{\delta S[\bar{\varphi}]}{\delta \bar{\varphi}} \quad (4.19)$$

$$iD_F^{-1}(\bar{\varphi}) = \frac{\delta^2 S[\bar{\varphi}]}{\delta \bar{\varphi} \delta \bar{\varphi}} \quad (4.20)$$

となる。さらに、(4.6) から得られる関係

$$\bar{J} = -\frac{\delta \Gamma[\bar{\varphi}]}{\delta \bar{\varphi}} \quad (4.21)$$

に加え、

$$\frac{\delta S[\bar{\varphi}]}{\delta \bar{\varphi}} \cdot \phi = \frac{\delta S[\bar{\varphi}]}{\delta \bar{\varphi}} \cdot \bar{\phi} \quad (4.22)$$

であることに注意すると、(4.16) は

$$\begin{aligned} \Gamma_c[\bar{\varphi}] &= S[\bar{\varphi}] \\ &-i \ln \int \mathcal{D}\underline{J} \mathcal{D}\phi \exp i\left[\frac{1}{2} \phi \cdot iD_F^{-1}(\bar{\varphi})\phi + (\mathcal{L}_{int}(\phi; \bar{\varphi})) - \frac{\delta}{\delta \bar{\varphi}}(\Gamma_c[\bar{\varphi}] - S[\bar{\varphi}]) \cdot \bar{\phi} + \underline{J} \cdot \underline{\phi}\right] \end{aligned} \quad (4.23)$$

と書き表される。また、(4.23) は

$$\widetilde{\Gamma}_c[\bar{\varphi}] = -i \ln \int \mathcal{D}\underline{J} \mathcal{D}\phi \exp i\left[\frac{1}{2} \phi \cdot iD_F^{-1}(\bar{\varphi})\phi + (\mathcal{L}_{int}(\phi; \bar{\varphi})) + \tilde{J}_c \cdot \bar{\phi} + \underline{J} \cdot \underline{\phi}\right] \quad (4.24)$$



を定義すると、

$$\Gamma_c[\bar{\varphi}] = S[\bar{\varphi}] + \widetilde{\Gamma}_c[\bar{\varphi}] \quad (4.25)$$

である。 $\bar{\phi}$  と結合している外場  $\bar{J}_c$  は以下

$$\frac{\delta \widetilde{\Gamma}_c[\bar{\varphi}]}{\delta \bar{\varphi}} = -\tilde{J}_c \quad (4.26)$$

を満たす。 $\widetilde{\Gamma}_c[\bar{\varphi}]$  に対しても境界上の場からの寄与は存在しないため

$$\tilde{\Gamma}_c[\bar{\varphi}] = -i \ln \int \mathcal{D}\bar{\phi} \exp i[\frac{1}{2}\bar{\phi} \cdot iD_F^{-1}(\bar{\varphi})\bar{\phi} + (\mathcal{L}_{int}(\bar{\phi}; \bar{\varphi})) + \tilde{J}_c \cdot \bar{\phi}] \quad (4.27)$$

となる。従って  $\tilde{\Gamma}_c[\bar{\varphi}]$  を求めるには境界のない場合の Feynman 則において、置き換え

$$\Delta_F \rightarrow D_F(\bar{\varphi}) \quad (4.28)$$

$$\mathcal{L}_{int}(\phi) \rightarrow \mathcal{L}_{int}(\bar{\phi}; \bar{\varphi}) \quad (4.29)$$

$$J \rightarrow \tilde{J}_c \quad (4.30)$$

を施したのち、1 粒子規約なグラフを全て足し合わせればよいことが分かる。

## 5 まとめと課題点

物体が空間中に存在すると、場はその物体を記述する境界条件を満たすように修正される。この場の修正は同時に真空エネルギーにも変化を引き起こす。この真空エネルギーの変化が Casimir エネルギーであった。自由場の場合の Casimir エネルギーは物体表面上の電荷間の相互作用に帰着することができ、個々の物体の散乱行列と並進行列のみで表現された。場の間の相互作用が存在する場合にはこの考えは適用できない。なぜならば、相互作用項に場の 3 次以上の項が含まれると、境界が存在しない場合の真空エネルギーとの相殺がうまくいかないからである。そのため、相互作用量子場理論における Casimir エネルギーを求めるには摂動論に頼る必要があった。

場に対して境界  $\Sigma$  上での Dirichlet 条件を課すためには  $\Sigma$  上に導入された仮想的な電荷の経路積分によって達成できた。この考えを相互作用場の理論に適用し、場が境界条件を満たすような系の分配関数  $Z_c[\bar{J}]$  を求めた。境界が存在する場合でも、伝搬関数、相互作用項、外場に対して修正を加えれば境界が存在しない場合の摂動論の手法を用いることができることが分かった。

本研究では、有効作用  $\Gamma_c[\varphi]$  を摂動的に求める方法を定式化したが、Casimir エネルギーを知るために必要な  $\bar{\varphi} = \langle 0_{\bar{J}} | \hat{\phi} | 0_{\bar{J}} \rangle$  ( $\bar{J} \rightarrow 0$ ) を求める方法は確立していない。原理的には (4.21) の外場  $J$  を取り除いたときの方程式  $\delta\Gamma_c[\varphi]/\delta\varphi = 0$  から求めることができるはずである。とは言え、境界が存在する場合では真空の並進対称性は消失してしまうため、方程式は非常に複雑になることが予想される。さらに、Feynman ダイアグラムから求めた摂動項はループダイアグラムを含む。ループダイアグラムからの寄与は境界以外の時空点での積分となっており、発散する。そのため、正則化を行わなければならない。しかし、積分が全時空点に渡っていないため、ループ項の正則化には通常の場合の理論で使われるような次元正則化やカットオフなどは適さない。それゆえ、境界が存在する場合には正則化を工夫する必要がある。

また、本論文では実スカラー場、Dirichlet 条件の組み合わせのみを取り扱ったが、本研究の結果が Neumann 条件や Robin 条件、電磁場を始めとする異なる種類の場に対しても一般的に適用可能かどうか検証する必要がある。

## 6 謝辞

この修士論文の執筆にあたって、大変ご多忙の中で時間を割いて議論、御指導賜りました教養教育機構、松永守教授に感謝致します。また、この博士前期課程の2年間、苦楽を共にしてきた量子、物性物理学研究室の皆さまに感謝します。

## 付録 A 経路積分

場の量子論は自由度無限大の量子力学である。そのため 1 自由度系の量子力学における経路積分に基本的な考えは全て含まれている。ここでは最も単純な 1 自由度系の経路積分について簡単に述べる。

### A.1 Heisenberg 描像

Heisenberg 描像 (H.P.) は

- 物理量 (演算子) が Heisenberg 方程式

$$i\dot{\hat{A}}(t) = [\hat{A}(t), \hat{H}] \quad (\text{付録 A.1})$$

に従って時間発展する

- 状態  $|\psi\rangle$  は時間変化しない

で特徴づけられるような量子力学の記述法である。H.P. における演算子は時間発展で移り変わるため、その固有状態も時間の経過とともに異なるものへと変化する。例えば位置演算子  $\hat{x}(t)$  の固有状態は

$$\hat{x}(t) |x, t\rangle = x |x, t\rangle \quad (\text{付録 A.2})$$

を満たす。位置固有状態  $|x, t\rangle$  に  $t$  が明示されているのは時刻  $t$  における位置演算子  $\hat{x}(t)$  の固有状態であることを強調するためである。

ハミルトニアンが時間に依存しない場合、Heisenberg 方程式より演算子の時間依存性は

$$\hat{A}(t) = e^{i\hat{H}(t-t_0)} \hat{A}(t_0) e^{-i\hat{H}(t-t_0)} \quad (\text{付録 A.3})$$

のように決定することができる。このことから時刻  $t_0$  における位置  $x$  の固有状態  $|x, t_0\rangle$  と時刻  $t$  における固有状態  $|x, t\rangle$  は関係

$$|x, t\rangle = e^{i\hat{H}(t-t_0)} |x, t_0\rangle \quad (\text{付録 A.4})$$

によって結びつけられる。

## A.2 遷移振幅と経路積分

異なる時刻、場所における位置固有状態間の内積

$$\langle x, t | x_0, t_0 \rangle \quad (\text{付録 A.5})$$

を考える。これは時刻  $t_0$  で位置  $x_0$  にあった粒子が時刻  $t$  で位置  $x$  に見出される遷移振幅を与える。 $x, t$  をそれぞれ  $x_{N+1}, t_{N+1}$  と書き直し、時間  $t - t_0$  を  $N + 1$  分割する:

$$\Delta t \equiv \frac{t - t_0}{N + 1} \quad (\text{付録 A.6})$$

$$t_i \equiv t_0 + i\Delta t \quad (i = 0, 1, \dots, N + 1) \quad (\text{付録 A.7})$$

遷移振幅に対し時刻  $t_i (i = 1, \dots, N)$  における位置の完全系

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dx_i |x_i, t_i\rangle \langle x_i, t_i| \quad (\text{付録 A.8})$$

を挿入すると、(付録 A.5) は

$$\langle x_{N+1}, t_{N+1} | x_0, t_0 \rangle = \int dx_1 \cdots dx_N \langle x_{N+1}, t_{N+1} | x_N, t_N \rangle \cdots \langle x_1, t_1 | x_0, t_0 \rangle \quad (\text{付録 A.9})$$

となる。時刻  $t_i$  と時間  $\Delta t$  経過後の固有状態間の遷移振幅は

$$\langle x_{i+1}, t_{i+1} | x_i, t_i \rangle = \langle x_{i+1}, t_i | e^{-i\hat{H}\Delta t} | x_i, t_i \rangle \quad (\text{付録 A.10})$$

である。ハミルトニアンが

$$\hat{H} = H(\hat{p}, \hat{x}) = T(\hat{p}) + V(\hat{x}) \quad (\text{付録 A.11})$$

のように位置演算子と運動量演算子それぞれの関数  $T, V$  に分離できることを仮定し、 $N$  を十分大きくとれば

$$e^{-i\hat{H}\Delta t} = I - i\Delta t(T(\hat{p}) + V(\hat{x})) \quad (\text{付録 A.12})$$

と書くことができる。そのため (付録 A.10) に時刻  $t_i$  における運動量固有状態の完全系

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dp_i |p_i, t_i\rangle \langle p_i, t_i| \quad (\text{付録 A.13})$$

を挿入すれば、 $t_i \sim t_i + \Delta t$  間の遷移振幅は

$$\langle x_{i+1}, t_{i+1} | x_i, t_i \rangle = \int \frac{dp_i}{2\pi} \exp i \Delta t \left[ p_i \frac{x_{i+1} - x_i}{\Delta t} - H(p_i, x_i) \right] \quad (\text{付録 A.14})$$

と変形される。(付録 A.14) の変形において運動量演算子の固有方程式

$$\hat{p}(t) |p, t\rangle = p |p, t\rangle \quad (\text{付録 A.15})$$

と運動量固有状態の位置表示が

$$\langle x, t | p, t \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ipx} \quad (\text{付録 A.16})$$

であることを用いた。(付録 A.14) を遷移振幅 (付録 A.9) に代入すると

$$\langle x_{N+1}, t_{N+1} | x_0, t_0 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \prod_{i=1}^N \frac{dp_i dx_i}{2\pi} \right) \exp i \sum_{i=0}^N \Delta t \left[ p_i \frac{x_{i+1} - x_i}{\Delta t} - H(p_i, x_i) \right] \quad (\text{付録 A.17})$$

を得る。分割  $N \rightarrow \infty$  の極限では (付録 A.17) の指数関数の和は時間  $t$  に関する積分になる ( $i \rightarrow t$  と置き換わる)。また、 $\dot{x}_i \equiv (x_{i+1} - x_i)/\Delta t$  は時刻  $t$  における古典的な速度に相当する量となるので

$$\langle x, t | x_0, t_0 \rangle = C \int \mathcal{D}p \int \mathcal{D}x \Big|_{x(0)=x_0}^{x(t)=x} \exp i \int_{t_0}^t dt [p(t) \dot{x}_i(t) - H(p(t), x(t))] \quad (\text{付録 A.18})$$

となる。 $C$  は連続無限重積分に伴って生じる発散する係数である。ここでは無限重積分を

$$\int \mathcal{D}x \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \prod_{i=0}^N dx_i \right) \quad (\text{付録 A.19})$$

と書き直した。これは時刻  $t_0$  から時刻  $t$  までの全ての可能なあらゆる古典的な経路を足し上げる操作と解釈することができる。式 (付録 A.18) は位相空間上の経路積分と呼ばれるものである。

ハミルトニアン<sup>1)</sup>の運動項  $T$  が

$$T(\hat{p}) = \frac{\hat{p}^2}{2m} \quad (\text{付録 A.20})$$

で表される場合 (付録 A.18) における  $p$  積分が実行できる。(付録 A.14) 式は指数内の被積分関数

$$-\frac{p_i^2}{2m} + p_i \dot{x}_i - V(x_i) \quad (\text{付録 A.21})$$

に対し  $p_i$  に関して平方完成を行うと

$$\langle x_{i+1}, t_{i+1} | x_i, t_i \rangle = e^{i\Delta t(\frac{m\dot{x}_i}{2} - V(x_i))} \int \frac{dp_i}{2\pi} e^{-\frac{i\Delta t}{2m}(p_i - m\dot{x}_i)^2} \quad (\text{付録 A.22})$$

となる。 $p_i$  に関する積分は複素 Gauss 積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} ds e^{-as^2} = \sqrt{\frac{\pi}{ia}} \quad (\text{付録 A.23})$$

になっている。従って

$$\langle x_{i+1}, t_{i+1} | x_i, t_i \rangle = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \Delta t}} \exp i \Delta t \left[ \left( \frac{m\dot{x}_i}{2} \right) - V(x_i) \right] \quad (\text{付録 A.24})$$

が導かれる。これを先程と同様に (付録 A.9) に代入し  $N \rightarrow \infty$  の極限操作を行うと

$$\langle x, t | x_0, t_0 \rangle = C' \int \mathcal{D}x \Big|_{x(0)=x_0}^{x(t)=x} \exp i \int_{t_0}^t dt' L_{cl}(x(t'), \dot{x}(t')) \quad (\text{付録 A.25})$$

を得る。ただし

$$C' = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{m}{2\pi i \Delta t} \right)^{N/2} \quad (\text{付録 A.26})$$

$$L_{cl}(x, \dot{x}) = \frac{m\dot{x}^2}{2} - V(x) \quad (\text{付録 A.27})$$

である。

### A.3 経路積分と分配関数

始め時刻  $t_0$  に位置  $x'$  にあった状態が時刻  $t_0 + T$  で同じ位置  $x'$  に留まる振幅

$$\langle x', t_0 + T | x', t_0 \rangle \quad (\text{付録 A.28})$$

を考える。この遷移振幅は経路積分によって

$$\langle x, t_0 + T | x, t_0 \rangle = C' \int \mathcal{D}x \Big|_{x(t_0)=x}^{x(t_0+T)=x} \exp i \int_{t_0}^t dt' L_{cl}(x(t'), \dot{x}(t')) \quad (\text{付録 A.29})$$

と表記される。一方

$$\langle x', t_0 + T | x', t_0 \rangle = \langle x', t_0 | e^{-i\hat{H}T} | x', t_0 \rangle \quad (\text{付録 A.30})$$

である。そのため時間発展演算子の対角和、つまり分配関数を求める際に経路積分が有効となる。分配関数は

$$\text{Tre}^{-i\hat{H}T} = \int dx' \langle x', t_0 | e^{-i\hat{H}T} | x', t_0 \rangle \quad (\text{付録 A.31})$$

であるが、経路積分表示では

$$\text{Tre}^{-i\hat{H}T} = C' \int \mathcal{D}x|_{x(t_0+T)=x(t_0)} \exp i \int_{t_0}^t dt' L_{cl}(x(t'), \dot{x}(t')) \quad (\text{付録 A.32})$$

と書くことができる。記号  $\int \mathcal{D}x|_{x(t_0+T)=x(t_0)}$  は時間  $T$  で周期的になるような経路  $x$  について全て足し上げよ、ということを意味している。

## 付録 B 並進行列

ここでは 2.4 で用いた並進行列の具体的な表式を与えておく。並進行列の定義は異なる座標系から測った部分波間の変換行列

$$h_l^{(1)}(kr_2)Y_{lm}(\hat{x}_2) = \sum_{l'm'} \mathcal{U}_{l'm',lm}^{12}(\mathbf{X}_{12})j_{l'}(kr_1)Y_{l'm'}(\hat{x}_1) \quad (\text{付録 B.1})$$

である ( $\alpha = 1, \beta = 2$  とした)。  $\mathcal{U}^{12}$  を求めるために  $\mathcal{G}_0$  を物体 2 の内部の原点  $\mathcal{O}_2$  に関して部分波展開する ( $|x_2| > |x|$  となるような  $x$  に対して):

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_0(x, x_2, k) &= ik \sum_{lm} j_l(kr)h_l^{(1)}(kr_2)Y_{lm}^*(\hat{x})Y_{lm}(\hat{x}_2) \\ &= \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{q}(\mathbf{x}_2-\mathbf{x})}}{q^2 - k^2} \end{aligned} \quad (\text{付録 B.2})$$

球面調和関数の直交性

$$\int d\hat{x} Y_{lm}^*(\hat{x})Y_{l'm'}(\hat{x}) = \delta_{lm'l'm'} \quad (\text{付録 B.3})$$

を用いると (付録 B.2) は

$$ikj_l(kr)h_l^{(1)}(kr_2)Y_{lm}(\hat{x}_2) = \int d\hat{x} Y_{lm}(\hat{x}) \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{q}(\mathbf{x}_2-\mathbf{x})}}{q^2 - k^2} \quad (\text{付録 B.4})$$

となる。また  $x_2 = \mathbf{X}_{21} + x_1$  ゆえ、(付録 B.4) 右辺の指数関数は

$$e^{i\mathbf{q}(\mathbf{x}_2-\mathbf{x})} = e^{i\mathbf{q}(\mathbf{X}_{21}+\mathbf{x}_1-\mathbf{x})} \quad (\text{付録 B.5})$$

と書き換えられる。平面波の部分波展開

$$e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} = 4\pi \sum_{lm} i^l j_l(kr)Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{k}})Y_{lm}(\hat{\mathbf{x}}) \quad (\text{付録 B.6})$$



を用いると (付録 B.4) における  $q$  積分は 3 つの球面調和関数の積に対して実行することになる。そのため公式

$$\int d\hat{\mathbf{k}} Y_{lm}(\hat{\mathbf{k}}) Y_{l'm'}^*(\hat{\mathbf{k}}) Y_{l''m''}^*(\hat{\mathbf{k}}) = (-1)^{m'+m''} \sqrt{\frac{\lambda\lambda'\lambda''}{4\pi}} \times \begin{pmatrix} l & l' & l'' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l & l' & l'' \\ m & m' & m'' \end{pmatrix} \quad (\text{付録 B.7})$$

が適用できる。ここで  $\lambda = 2l + 1$  で、行列は Wigner の 3-j 記号で表記された Clebsch-Gordan 係数である。(付録 B.7) を用いると結局

$$ik j_l(kr) h_l^{(1)}(kr_2) Y_{lm}(\hat{\mathbf{x}}_2) = \frac{8(-1)^m}{\sqrt{4\pi}} \sum_{l'm'l''m''} i^{l+l''-l'} \sqrt{\frac{\lambda\lambda'\lambda''}{4\pi}} \times \begin{pmatrix} l & l' & l'' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l & l' & l'' \\ m & m' & m'' \end{pmatrix} \times \left[ \int_0^\infty dq \frac{q^2}{q^2 - k^2} j_{l''}(qd_{12}) j_{l'}(qr_1) j_l(qr) \right] Y_{l''m''}(\hat{\mathbf{X}}_{12}) Y_{l'm'}(\hat{\mathbf{x}}_1) \quad (\text{付録 B.8})$$

となる。ただし、 $d_{12} = |\mathbf{X}_{12}|$  である。これに積分公式

$$\int_0^\infty dq \frac{q^2}{q^2 - k^2} j_{l''}(qd_{12}) j_{l'}(qr_1) j_l(qr) = \frac{ik\pi}{2} j_l(kr) j_{l'}(kr_1) h_{l''}(kd_{12}) \quad (\text{付録 B.9})$$

を適用すると、並進行列

$$\mathcal{U}_{l'm'l_m}^{12}(\mathbf{X}_{12}) = \sqrt{4\pi} (-1)^{m'} i^{l-l'} \sqrt{(2l+1)(2l'+1)} \times \sum_{l''m''} (-1)^{m''} i^{l''} \sqrt{2l''+1} \begin{pmatrix} l & l' & l'' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l & l' & l'' \\ m & m' & m'' \end{pmatrix} h_{l''}^{(1)}(kd_{12}) Y_{l''m''}(\hat{\mathbf{X}}_{12}) \quad (\text{付録 B.10})$$

が導かれる。

## 参考文献

- [1] H.B.G.Casimir, Proc. K. Ned. Akad. Wed. Ser. B: Phys.Sci. **51**,793 (1948)
- [2] T.Emig, N.Graham,R.L.Jaffe, and M.Karder, Phys. Rev. D **77**,025005 (2008)
- [3] S.J.Rahi, T.Emig, N.Graham, R.L.Jaffe, and M.Kardar, Phys. Rev. D **80**,085021 (2009)
- [4] X.Zhai, X.Li, and C.Feng, Eur.Phys.J.C **71**,1654 (2011)
- [5] R. Saghian, M. A. Valuyan, A. Seyedzahedi, S. S. Gousheh, J. Mod. Phys. A **27**,1250038 (2012)
- [6] V.N.Marachevsky, J. Phys. A**41**,164007,2008
- [7] A.Shupnt, S.J.Rahi, T.Emig, N.Graham,R.L.Jaffe, and M.Karder, Phys. Rev. D **83**,125007 (2011)
- [8] S.Zaheer, S.J.Rahi, T.Emig,and R.L.Jaffe, Phys. Rev. A **82**, 052507 (2010)
- [9] A.Bitbol,and J.Fournier,Phys. Rev. E **83**, 061107 (2011)
- [10] S.K.Lamoreaux, Phys. Rev. Lett. 81, 5475 (1998)
- [11] G.L.Klimchitskaya, U.Mohideen, and V.M.Mostepanenko, 10.1103/RevModPhys.**81**.1827 (2009) pp.1850-1861
- [12] S.S. Gousheh, R. Moazzemi,and M.A. Valuyan, Phys. Lett. B **681**,(2009) pp.477-483,
- [13] F.Ravndal,and J.B.Thomassen, Phys. Rev. D **63**, 113007 (2001)
- [14] A.Mojavezi,and R.Moazzemi, arXiv:1212.4122
- [15] 九後 汰一郎, ゲージ場の量子論 1, 第 4 章 (培風館,1989)