

—修士学位論文—

周波数応答を用いた多変数制御器設計における
対角優勢化に関する研究

A Study on
Multivariable Controller Design Achieving
Diagonal Dominance Using Frequency Responses

平成27年度

三重大学大学院工学研究科
博士前期課程 電気電子工学専攻
篠田翔吾

目 次

第 1 章	緒言	1
1.1	研究の背景と目的	1
1.2	論文の構成	4
1.3	表記	5
第 2 章	周波数応答を用いた制御器設計	6
2.1	制御器	6
2.2	設計問題	6
2.3	DNA 安定定理に基づく安定条件	8
2.4	ロバスト性能条件	11
第 3 章	開ループの対角優勢を評価する制御器設計	15
3.1	対角優勢	15
3.2	相似変換による固有値の存在範囲の縮小	16
3.3	安定制約	17
3.4	設計問題	18
3.5	Concave-Convex procedure	19
3.6	設計アルゴリズム	20
3.7	実機実験	22
3.7.1	実験 1	22
3.7.2	実験 2	28
第 4 章	閉ループの相互干渉を評価する制御器設計	33
4.1	閉ループの相互干渉に対する性能指標	33
4.2	設計問題	34
4.2.1	近似あり	36
4.2.2	近似なし	37
4.3	反復 LMI 制約の適用	37

4.3.1	近似あり	40
4.3.2	近似なし	42
4.4	閉ループシステムの安定性	44
4.5	シミュレーション	45
第 5 章	相互干渉を評価する極調整可能な制御器設計	52
5.1	制御器のパラメータ化	52
5.2	設計問題	53
5.3	反復 LMI 制約の適用	54
5.4	閉ループシステムと制御器の安定性	58
5.5	シミュレーション	60
5.5.1	シミュレーション 1	60
5.5.2	シミュレーション 2	66
5.6	実機実験	72
5.6.1	実験 1	73
5.6.2	実験 2	77
第 6 章	結言	81
6.1	まとめ	81
6.2	今後の課題と展望	82
6.2.1	制御器の極調整	82
6.2.2	システムの広帯域化	84
	参考文献	87
	謝辞	91
	論文目録	92

第1章 緒言

1.1 研究の背景と目的

モデルベース制御器設計法では、一般に制御対象の同定を行い、得られた数式モデルより制御器を設計する。この設計法は、数式モデルを用いることで制御器の実装前にシステムの性能や安定性の評価が可能となる点から、産業界で広く用いられている。しかし、複雑な特性を有する制御対象の場合、高精度な同定は煩雑かつ困難であり、実際の制御対象との間にはモデル化誤差が生じる。また、動作環境や経年劣化によっても、制御対象の特性は変化してしまう。その結果、制御性能が劣化し、最悪の場合にシステムの不安定化を招く恐れがある。これに対して、ロバスト制御では数式モデルと制御対象との誤差を不確かさとして捉え、モデル化誤差が存在する場合においても安定性や所望の制御性能を確保できる。しかしながら、一般的にロバスト制御を用いる際、不確かさ自体も数式モデルで表現する必要があり、保守的な設計となる可能性がある^{[1]–[3]}。さらに、性能要求を満たす制御器は高次数で設計されることが多く、実装の際に計算機に高い性能が要される場合がある。これらの制御器設計を複雑化する問題は、Multi-Input Multi-Output システム（以下 MIMO システム）において、より顕著に現れる^[4]。

上記の問題に対して、周波数応答のみを用いた固定次数の制御器設計手法が提案されている^{[5]–[11]}。これら設計法では、数式モデル化を介さずに制御対象の周波数応答から制御器の設計を行うため、モデル化誤差を伴わずに制御対象の情報を直接反映させた簡易な制御器設計が可能となる。また、制御器の次数を任意に指定でき、周波数領域で課された制約を満たす固定次数制御器が設計される。MIMO システムに対する制御器設計は、文献 [7]–[11] で取り扱われている。文献 [7] の手法では、Nyquist 線図上で表現された閉ループシステムの安定制約およびロバスト性能条件を満たし、設計者が定めた望みの特性に近似する制御器の設計が可能である。さらに、設計問題は凸最適化問題に帰着され、容易に制約を満足する制御器を設計できる。ここで、文献 [7] の手法では、安定性を評価する際に固有値軌跡の存在範囲を示す Gershgorin bands を導入している。MIMO システムの安定性は、開ループ伝達関数行列の固有値軌跡により

評価できる^[12]。この際、Gershgorin bands を用いることで固有値軌跡の存在範囲が制御器パラメータに対する凸関数として表現され、安定性の評価を凸最適化問題で記述できる。しかし、制御対象によっては固有値軌跡の存在範囲に過度な見積もりが生じ、制御器のハイゲイン化の要求を満足できずに設計が保守的となる恐れがある。また、この手法では設計において望みの特性を定義することが必要となる。望みの特性は、設計者が任意に定めることができ、設計結果に応じて調整が可能である利点を持つ反面、制約と整合をとりながら制御対象の構造上実現可能な特性を試行錯誤の上で設定しなければならない。そのため、望みの特性を与える際に、制御性能に妥協が生じ、本来達成可能である制御性能が達成できない場合が存在する。また、文献 [8]–[10] では、佐伯らにより周波数応答を用いた H_∞ 制御問題に対する制御器設計手法が提案されている。モデルベース制御器設計法において広く知られている H_∞ 標準制御問題を周波数応答により表現しており、 H_∞ ノルムの制約を満たす固定次数制御器を設計できる。大域的最適解が導出される保証はないが、Linear Matrix Inequality (LMI) 最適化の反復計算により求解される。特に、文献 [10] の手法は、制御器の A , B , C , D 行列を同時に調整することが可能である。そして、文献 [11] の手法は、MIMO システムの性能評価において重要な意味を持つ最大特異値に関する制約を付加し、低周波数の感度を最小化する PID 制御器の設計を行う。また、同時に最適化アルゴリズムが提案されており、大域的最適解が導出される保証はないが評価値の単調収束を保証し、ある種の非凸な問題を LMI 最適化の反復計算により解くことができる。同じく LMI 最適化の反復計算により設計を行う文献 [8]–[10] の手法とは異なり、各伝達関数に対して個々に制約を付加することが可能であり、評価値と制御器パラメータを同時に評価できる。

一方で、MIMO システムを扱う際には、低感度化や広帯域化等の設計要求の他に、相互干渉を抑制することが求められる。相互干渉は、MIMO システムの制御を複雑化する要因一つであり、入出力間に生じて応答を劣化させる。これに対して、相互干渉を抑制するため、前置補償器（デカップラ）が用いられることが多々ある。それに伴い、前置補償器の設計に関する研究も盛んに行われている^{[13]–[15]}。ここで、前置補償器の設計には、一般に制御対象の数式モデルが必須であり、逆システムが利用されることが多い。そのため、前置補償器を用いる場合、上述のようなモデル化誤差による制御性能の劣化が著しくなる^[16]。この点からも、MIMO システムに対する制御器設計に関して周波数応答を用いた設計の有用性が窺える。しかしながら、文献 [7]–[11] のいずれの手法においても、直接的な相互干渉の評価はされていない。

これに対して、著者らは文献 [17] で伝達関数行列の対角要素と非対角要素の大きさ

の相対的な値である対角優勢を評価した制御器設計手法を提案した。この手法により、周波数応答を用いて開ループ伝達関数における対角優勢化を達成する制御器の設計が可能となった。しかしながら、開ループシステムに対する評価のみを行うため、閉ループシステムを直接評価できない。開ループシステムに対する評価は、時に実際に運用する閉ループシステムの評価と一致しない場合があり、開ループの評価では高い制御性能の実現が困難となる可能性がある。そこで、著者らは文献 [18] で閉ループシステムに対する相互干渉の性能指標^[19]を導入し、これを最小化する多変数制御器設計手法を提案した。これにより、陽に閉ループの相互干渉を抑制する制御器設計が実現された。ここで、上記の文献 [17], [18] の設計法では制御器の構造および次数を指定できるが、調整パラメータは制御器に対して線形に表現できる範囲に限られていた。ゆえに、制御器の極調整は行えず、指定された次数で実現できる特性すべてが最適化問題の解領域に含まれないため、達成される制御性能に限界が生じていた。

以上の背景から、本研究では、周波数応答を用いた相互干渉を評価する制御器設計手法の提案を第一の目的とする。これに加え、本研究においては、相互干渉を抑制した上で制御器のハイゲイン化を図る。この設計要求は、SISO システムにない MIMO システム独自の問題であり、システムの対角優勢化により達成される。対角優勢は、開ループ伝達関数行列における非対角要素の絶対行（列）和を対応する対角要素の絶対値が上回る状態を指す^{[20][21]}。そのため、十分な対角優勢化を達成することは、相互干渉を抑制し、対応する入出力におけるハイゲイン化を満足することと同義である。したがって、周波数応答を用いて十分な対角優勢化を達成する多変数制御器設計を実現することが本研究の目標となる。本論文では、この目標に対して、大きく 3 つの制御器設計手法を提案する。1 つ目は、対角優勢化の概念に基づき、開ループ伝達関数の対角優勢を評価する制御器設計手法である。この手法では、文献 [7] の手法で問題としていた設定に試行錯誤を伴う望みの特性を用いず、対角優勢化を直接的に評価する問題を定式化する。また、相似変換を利用して Gershgorin bands の固有値軌跡の存在範囲の縮小を行う。これにより、問題として挙げた固有値の推定で生じる保守性を、パラメータに対する凸性を維持したまま低減する。ここで、対角優勢に対する評価が制御器パラメータに対して非凸な問題となり、求解が困難となる。そこで、ある種の非凸な問題に対する最適化アルゴリズムである Concave-Convex procedure^{[22][23]} (CCCP) を用いることで、凸最適化による簡易な設計を実現する。CCCP で導出される解は大域的最適解である保証はないが、求解が簡易な凸最適化計算の反復により、評価値の単調収束を保証して準最適解が得られる。直接的な評価を導入することで、高い対角優

勢化を達成する制御器設計が望める。しかし、上述のように、開ループシステムに対する評価のみでは、閉ループシステムの評価に直結しない点が問題となり得る。そこで、閉ループシステムに対する直接的な評価に目を向けたのが、2つ目の手法である。2つ目の手法では、閉ループシステムの相互干渉に関する性能指標^[19]を導入し、閉ループの相互干渉を抑制する制御器を設計する。この手法では、望みの特性を用いずに直接性能指標を評価し、同時に感度関数や相補感度関数などの閉ループ特性の整形を行う。加えて、反復 LMI 制約^[11]を適用することで、パラメータに対して非凸となる問題を LMI 最適化計算の繰り返しにより求解する。そして、3つ目として、従来、制御器パラメータに対して線形に制御器を定義しているために調整が不可能であった、制御器の極調整も可能とする手法を提案する。この手法では、2つ目の手法と同様の設計問題を考え、分母多項式もパラメータ化した制御器を定義することにより、閉ループの相互干渉を抑制する制御器を極も併せて調整する。分母多項式のパラメータ化により、最適化問題がより難解となり、求解が困難となる。これに対して、本研究では、反復 LMI 制約に基づいて設計問題を求解の容易な LMI で記述する。また、分母多項式のパラメータ化により、設計される制御器自体が不安定となる恐れがある。そのため、この手法では、制御器の分母多項式によるベクトル軌跡を考え、制御器自体の安定制約を定式化する。そして、複数のシミュレーションおよび実機実験を通して、本研究における優位性を検証する。

1.2 論文の構成

本論文は全 6 章で構成されており、各章の内容は以下の通りである。

第 2 章 周波数応答を用いた制御器設計

Galdos らにより提案された多変数制御器設計手法^[7]を紹介し、周波数応答を用いた制御器設計の概念および利点を述べる。加えて、MIMO システムにおける安定性や相互干渉について説明する。

第 3 章 開ループの対角優勢を評価する制御器設計

相互干渉を直接評価する手法として提案した、開ループの対角優勢を評価する制御器設計手法について説明する。そして、実機実験にて有効性を検証する。

第 4 章 閉ループの相互干渉を評価する制御器設計

閉ループシステムにおける相互干渉を評価する制御器設計手法を提案する。この際、著者らが取り組んだ評価関数に近似を導入する手法、評価関数の近似をしない手法それぞれについて述べる

第 5 章 相互干渉を評価する極調整可能な制御器設計

極調整を可能とした閉ループの相互干渉を評価する制御器設計手法を提案する。加えて、設計後の制御器が安定となる制約式を定式化する。そして、シミュレーションおよび実機実験にて有効性を示す。

第 6 章 結言

本論文のまとめを述べる。そして、今後の課題および本論文の主題である周波数応答を用いた制御器設計における今後の展望について言及する。

1.3 表記

本論文で用いる表記を以下に示す。

$\ \mathbf{A}\ _F$	行列 \mathbf{A} のフロベニウスノルム
$\ \mathbf{G}(s)\ _\infty$	伝達関数行列 $\mathbf{G}(s)$ の H_∞ ノルム
$\sigma(\mathbf{A})$	行列 \mathbf{A} の特異値
$\bar{\sigma}(\mathbf{A})$	行列 \mathbf{A} の最大特異値
$\underline{\sigma}(\mathbf{A})$	行列 \mathbf{A} の最小特異値
\mathbf{A}^T	行列 \mathbf{A} の転置
\mathbf{A}^*	行列 \mathbf{A} の複素共役転置
\mathbf{A}^{-*}	行列 \mathbf{A} の逆行列の複素共役転置 $(\mathbf{A}^{-1})^*$
\mathbf{A}_{pq}	行列 \mathbf{A} の (p, q) 要素
$\det(\mathbf{A})$	行列 \mathbf{A} の行列式
$\text{adj}(\mathbf{A})$	行列 \mathbf{A} の余因子行列
$\text{diag}\{A_{11}, A_{22}, \dots, A_{nn}\}$	対角要素が順に $A_{11}, A_{22}, \dots, A_{nn}$ となる対角行列
$\text{Re}\{C\}, \text{Im}\{C\}$	複素数 C の実部および虚部
$\nabla f(\mathbf{x})$	関数 $f(\mathbf{x})$ の変数 \mathbf{x} に対する勾配
\mathbf{I}_n	n 次の単位行列

第2章 周波数応答を用いた制御器設計

本章では，Galdos らにより提案された文献 [7] の手法を紹介し，周波数応答を用いた制御器設計の概念を述べる。加えて，多変数制御器設計における Gershgorin bands を用いた安定性評価について触れる。そして，本論文の目的を明らかにする。

2.1 制御器

線形時不変な n_i 入力 n_o 出力の制御対象 $\mathbf{P}(s)$ に対して， $n_i \times n_o$ の制御器 $\mathbf{C}(s)$ を設計する。文献 [7] の手法では，制御器 $\mathbf{C}(s)$ は (2.1) 式に示すように制御器パラメータベクトル $\boldsymbol{\rho}$ に対して線形に定義している。

$$\mathbf{C}(s, \boldsymbol{\rho}) = \boldsymbol{\rho}^T \boldsymbol{\phi}(s) \quad (2.1)$$

ここで， $\boldsymbol{\phi}(s)$ は設計者が与える任意の安定な伝達関数により構成された基底関数ベクトルである。 $\boldsymbol{\phi}(s)$ の決定により設計する制御器の次数および構造を指定できる。ゆえに，パラメータに対して線形に表現できる範囲に限るが，任意の固定構造制御器が設計可能である。

2.2 設計問題

本節では，文献 [7] の手法における設計問題を説明する。文献 [7] の手法では，周波数応答を用いて望みの開ループ伝達関数行列 $\mathbf{L}_D(s)$ と実際の開ループ伝達関数行列 $\mathbf{L}(s)$ の差を最小化する制御器設計を行う。この際，設計問題は凸最適化問題に定式化され，大域的最適解を導出できる。

$n_o \times n_i$ の制御対象 $\mathbf{P}(s)$ および $n_i \times n_o$ の制御器 $\mathbf{C}(s)$ により，開ループ伝達関数行列 $\mathbf{L}(s)$ は (2.2) 式に示すように n_o 次の正方な伝達関数行列となる。

$$\mathbf{L}(s, \boldsymbol{\rho}) = \mathbf{P}(s)\mathbf{C}(s, \boldsymbol{\rho}) = \mathbf{P}(s)\boldsymbol{\rho}^T \boldsymbol{\phi}(s) \quad (2.2)$$

(2.2) 式より, 開ループ伝達関数行列 $\mathbf{L}(s)$ はパラメータ $\boldsymbol{\rho}$ に対して線形に表現される。そして, 設計問題はこの開ループ伝達関数 $\mathbf{L}(s)$ を設計者が定める望みの開ループ伝達関数 $\mathbf{L}_D(s)$ に近似させる問題となる。文献 [7] の設計問題を以下に示す。

$$\min_{\boldsymbol{\rho}} \sum_{k=1}^N \|\mathbf{L}(j\omega_k, \boldsymbol{\rho}) - \mathbf{L}_D(j\omega_k)\|_F \quad (2.3)$$

subject to

$$|r_q(\omega_k, \boldsymbol{\rho})[1 + L_{Dq}(j\omega_k)]| - \operatorname{Re}\{[1 + L_{Dq}^*(j\omega_k)][1 + L_{qq}(j\omega_k, \boldsymbol{\rho})]\} < 0 \quad (2.4)$$

$$|W_{1q}(j\omega_k)[1 + L_{Dq}(j\omega_k)]| + |W_{2q}(j\omega_k)L_{qq}(j\omega_k, \boldsymbol{\rho})[1 + L_{Dq}(j\omega_k)]| \\ - \operatorname{Re}\{[1 + L_{Dq}^*(j\omega_k)][1 + L_{qq}(j\omega_k, \boldsymbol{\rho})]\} < 0 \quad (2.5)$$

for $k = 1, \dots, N$ and $q = 1, \dots, n_o$

設計問題は, あらかじめ定義した N 個の周波数点 ω_k ($k = 1, \dots, N$) に対して定式化された, (2.3) 式の評価関数と (2.4), (2.5) 式の制約式で構成されている。ここで, (2.4) 式は direct Nyquist array^[24] (DNA) 安定定理に基づいて定式化された安定条件, (2.5) 式はシステムの十分な非干渉化の達成を前提としたロバスト性能条件である。(2.4) 式の $r_q(\omega_k)$ は, DNA 安定定理における Gershgorin circle の半径を表し, 詳細は 2.3 節にて述べる。また, (2.5) 式の $W_{1q}(j\omega_k)$ および $W_{2q}(j\omega_k)$ は, それぞれ感度に対する重み関数, 制御対象の乗法的不確かさを表す重み関数であり, 制約式の定式化について 2.4 節で説明する。そして, 設計問題は制御器パラメータ $\boldsymbol{\rho}$ に対する凸関数で記述されており, 求解が容易な凸最適化計算による制御器設計が可能である。

各周波数点 ω_k に対して連立された設計問題 (2.3) 式を解くことにより, 望みの特性に近似する制御器が設計できる。この際, 周波数応答のみを用いて最適化計算を行うため, 制御対象の数式モデルは必要としない。ゆえに, 数式モデル化によるモデル化誤差を伴わない設計が可能である。そして, 非干渉性, 追従性を有する所望の特性に十分に近似させることができれば, 高い制御性能が実現される。一方で, 評価を離散周波数点 ω_k においてのみ行うため, 設計されたシステムが連続周波数で見た際に, 厳密に全周波数で制約を満たしている保証はない。しかし, 設計者が離散的に定義する周波数点 ω_k を細かく設定することにより, 実用上では十分な制御性能を得ることが可能である。

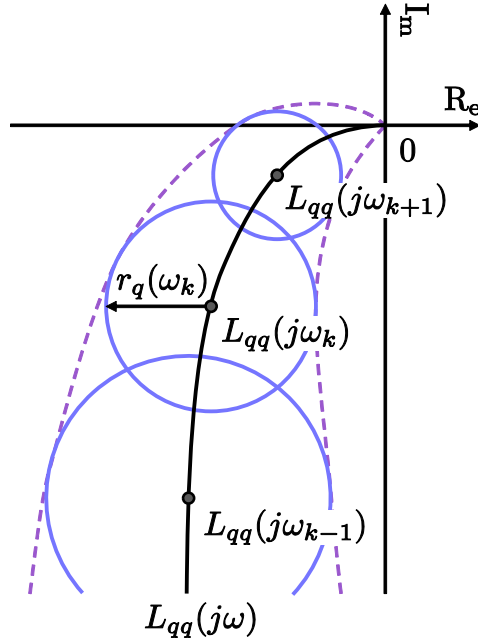


図 2.1: Gershgorin band

2.3 DNA 安定定理に基づく安定条件

MIMO システムにおいて閉ループシステムが安定となる必要十分条件は、Nyquist の安定判別法より、制御対象 $\mathbf{P}(s)$ の不安定極の数と同数だけ開ループ伝達関数行列 $\mathbf{L}(s)$ の固有値軌跡 $\lambda_q(s)$ ($q = 1, \dots, n_o$) が臨界点 $(-1, j0)$ を反時計回りに回ることである^[12]。しかし、 $\mathbf{L}(s)$ の固有値軌跡 $\lambda_q(s)$ は、パラメータ $\boldsymbol{\rho}$ に対して凸関数で表現できず、最適化が困難である。ここで、DNA 安定定理を考えると安定性の十分条件は、全周波数における $\mathbf{L}(j\omega)$ の q 番目の対角要素 $L_{qq}(j\omega)$ を中心とし、(2.6) 式で示される $r_q(\omega)$ を半径とする円盤 (Gershgorin circle) により描かれる図 2.1 のようなバンド状の軌跡群 (Gershgorin bands) が臨界点 $(-1, j0)$ を $\mathbf{P}(s)$ の不安定極の数と同数だけ反時計回りに回ることと表される^[24]。

$$r_q(\omega_k, \boldsymbol{\rho}) = \sum_{p=1, p \neq q}^{n_o} |L_{pq}(j\omega_k, \boldsymbol{\rho})| \quad (2.6)$$

Gershgorin の定理より、Gershgorin circle は行列の固有値すべてを必ず包含する^[25]。したがって、Gershgorin bands は開ループ伝達関数行列 $\mathbf{L}(j\omega_k)$ の固有値軌跡の存在範囲を表し、これを用いて間接的に固有値軌跡を評価できる。この際、 $r_q(\omega)$ は制御器パラメータ $\boldsymbol{\rho}$ に対する凸関数となるため、Gershgorin bands は $\boldsymbol{\rho}$ に対して凸な関数で表現できる。

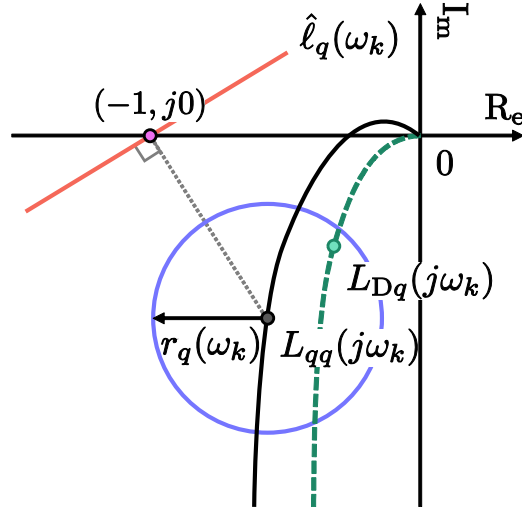


図 2.2: DNA 安定定理に基づく安定条件の定式化

ここで、図 2.2 のように、臨界点 $(-1, j0)$ と開ループ伝達関数行列 $\mathbf{L}(j\omega_k)$ の対角要素 $L_{qq}(j\omega_k)$ を結ぶ直線に直交し、臨界点 $(-1, j0)$ を通る直線を $\hat{\ell}_q(\omega_k)$ と定義する。Nyquist 線図上で直線 $\hat{\ell}_q(\omega_k)$ の下に半径 $r_q(\omega_k)$ の円盤が常に存在することは、DNA 安定定理に基づく安定条件と等価な条件となる。さらに、この表現で安定性を考える場合、直線 $\hat{\ell}_q(\omega_k)$ に対する円盤上の最近点のみを考えればよく、この最近点が直線 $\hat{\ell}_q(\omega_k)$ の下に常に存在することで閉ループシステムの安定性は満たされる。以上より、半径 $r_q(\omega_k)$ の円盤が常に直線 $\hat{\ell}_q(\omega_k)$ の下に存在するという制約を考える。直線 $\hat{\ell}_q(\omega_k)$ は、(2.7) 式で表される。

$$\hat{\ell}_q(\omega_k, \boldsymbol{\rho}) : -\text{Im}\{L_{qq}(j\omega_k, \boldsymbol{\rho})\}y - \text{Re}\{[1 + L_{qq}(j\omega_k, \boldsymbol{\rho})]\}(1+x) = 0 \quad (2.7)$$

ここで、(2.7) 式における x, y はそれぞれ複素平面上の実軸と虚軸を示す。この際、 $L_{qq}(j\omega_k)$ が制御器パラメータ $\boldsymbol{\rho}$ の依存関数であるため、それにより定義される直線 $\hat{\ell}_q(\omega_k)$ もパラメータ依存関数となる。ゆえに、直線 $\hat{\ell}_q(\omega_k)$ を用いた安定条件をパラメータに対して凸な関数で表現できない。そこで、この手法では設計問題で開ループ伝達関数行列 $\mathbf{L}(j\omega_k)$ と望みの開ループ伝達関数行列 $\mathbf{L}_D(j\omega_k)$ の差を最小とすることに注目し、 $L_{qq}(j\omega_k)$ により定義される直線 $\hat{\ell}_q(\omega_k)$ ではなく、図 2.3 に示す $\mathbf{L}_D(j\omega_k)$ の対角要素 $L_{Dq}(j\omega_k)$ と臨界点を結ぶ直線の垂線 $\ell_q(\omega_k)$ を用いて安定条件を定式化している。開ループ伝達関数行列 $\mathbf{L}(j\omega_k)$ が望みの開ループ伝達関数行列 $\mathbf{L}_D(j\omega_k)$ を十分近似すれば、直線 $\ell_q(\omega_k)$ の評価は $\hat{\ell}_q(\omega_k)$ を用いた場合と同等の評価となる。そして、(2.8) 式に示すように直線 $\ell_q(\omega_k)$ はパラメータ $\boldsymbol{\rho}$ に依存しないため、直線 $\ell_q(\omega_k)$ の下に半径 $r_q(\omega_k)$ の

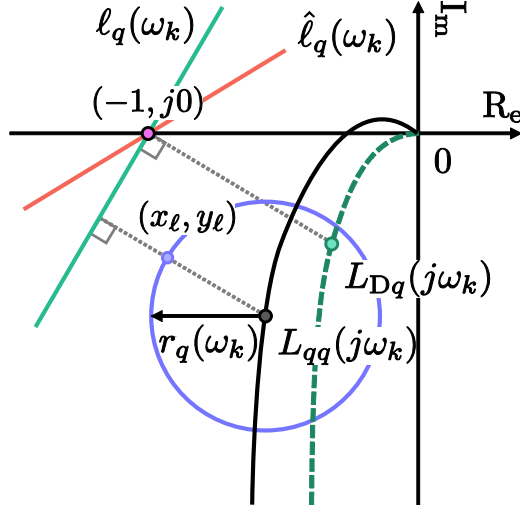


図 2.3: 近似した DNA 安定定理に基づく安定条件

円盤が存在する条件を ρ に対する凸関数で記述できる。

$$\ell_q(\omega_k) : -\text{Im}\{L_{Dq}(j\omega_k)\}y - \text{Re}\{[1 + L_{Dq}(j\omega_k)]\}(1 + x) = 0 \quad (2.8)$$

ここで、直線 $\ell_q(\omega_k)$ に対する円盤上の最近点の座標を (x_ℓ, y_ℓ) とすると、 x_ℓ および y_ℓ はそれぞれ (2.9), (2.10) 式と表される。

$$x_\ell = \text{Re}\{L_{qq}(j\omega_k, \rho)\} - r_q(\omega_k, \rho) \frac{\text{Re}\{1 + L_{Dq}(j\omega_k)\}}{|1 + L_{Dq}(j\omega_k)|} \quad (2.9)$$

$$y_\ell = \text{Im}\{L_{qq}(j\omega_k, \rho)\} - r_q(j\omega_k, \rho) \frac{\text{Im}\{L_{Dq}(j\omega_k)\}}{|1 + L_{Dq}(j\omega_k)|} \quad (2.10)$$

そして、(2.8) 式に (2.9), (2.10) 式の x_ℓ および y_ℓ を代入する。これより、半径 $r_q(\omega_k)$ の円盤が直線 $\ell_q(\omega_k)$ の下に存在するための制約式は、制御器パラメータ ρ に対して凸な (2.4) 式と定式化できる。

Gershgorin bands を用いる場合、固有値の存在範囲であるバンドの大きさは (2.6) 式の定義上 $\mathbf{L}(j\omega)$ の非対角要素 $L_{pq}(j\omega)$ のゲインに依存する。そのため、システムの相互干渉を意味する開ループ伝達関数行列 $\mathbf{L}(s)$ の非対角要素の大きさが制御器設計時の安定性評価に大きく影響を及ぼす。これに対し、文献 [7] の手法では、望みの開ループ伝達関数行列 $\mathbf{L}_D(s)$ を対角行列で定義することにより相互干渉の抑制を図っている。しかし、 $\mathbf{L}_D(s)$ を対角行列で与えたとしても、制御対象や与えられた制御器の構造によっては相互干渉を十分に打ち消しきれない場合がある。この際、制御器設計時の固有値の推定に過度な見積もりが生じ、制御器のハイゲイン化の要求を満足できずに設計が保守的になる可能性がある。そこで、本研究では相似変換を用いて固有値の存在範囲を

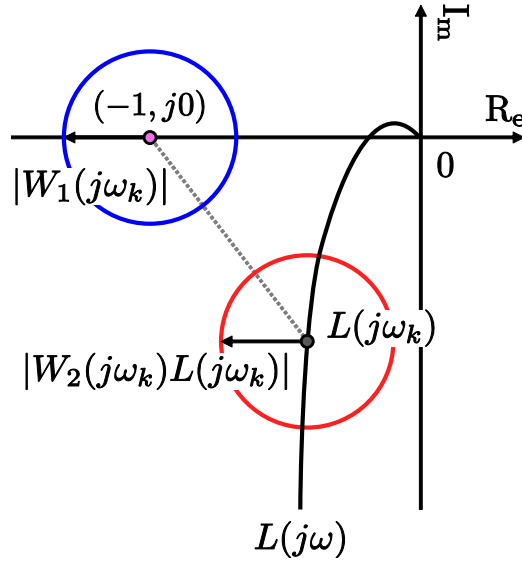


図 2.4: SISO システムのロバスト性能条件

縮小して評価に用いる。これにより，制御対象に依らず，固有値軌跡を過度な見積もりなく評価でき，設計の保守性を低減できる。この保守性を低減した安定制約の定式化については，3.3 節で説明する。また，この手法では，設計に望みの開ループ伝達関数行列 $\mathbf{L}_D(s)$ を設定する必要がある。望みの特性は，設計者が任意に定めることができ，設計結果に応じて調整することも容易にできる。しかしながら，望みの特性は，制約との整合性をとりながら制御対象の構造上実現可能な特性を試行錯誤の上で設定しなければならない。実現が困難な特性を望みの特性とすると，望みの特性に十分近似させる制御器を設計できず，良好な制御性能を得ることはできない。この点から，高い制御性能を有する特性を望みの特性に設定できずに，望みの特性の制御性能に妥協が生じ，本来達成可能である制御性能が実現できない可能性がある。これに対して，本研究では，望みの特性を用いず，対角優勢に関する評価を直接行うことで，対角優勢化の観点でより高い制御性能の達成を図る。

2.4 ロバスト性能条件

SISO システムの場合，ロバスト性能条件は一般的に (2.11) 式のように表現される。

$$|W_1(j\omega)| + |W_2(j\omega)L(j\omega)| < |1 + L(j\omega)| \quad \forall \omega \quad (2.11)$$

ここで， $W_1(j\omega_k)$ はノミナル性能を指定する重み関数， $W_2(j\omega_k)$ は制御対象の乗法的な不確かさを表す重み関数である。(2.11) 式の条件を満たすことは，図 2.4 に示す Nyquist

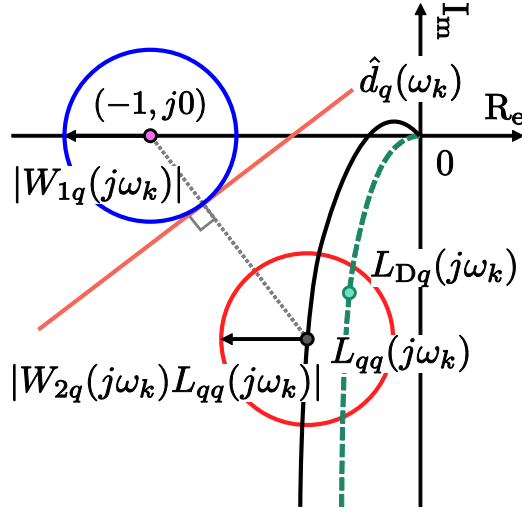


図 2.5: ロバスト性能条件の定式化

線図上にける 2 つの円盤が常に交差しないことと等価である。ロバスト性能条件を満足するとき、システムが変動した場合においても指定されたノミナル性能が保証される。ロバスト制御の分野における重要な指標であり、広く評価に用いられている。しかし、MIMO システムの場合、安定性やノミナル性能の考え方が SISO システムと異なり、図 2.4 のように Nyquist 線図上で表現できない。そこで、文献 [7] では望みの特性を対角行列で定義し、完全に非干渉化されることを前提に、MIMO システムを複数の SISO システムの集合と見なしてロバスト性能を評価している。完全に非干渉化されれば、図 2.4 のような SISO システムの条件を複数並列して考えることで、MIMO システムの評価として等価的に置き換えることができる。したがって、この手法で扱っているロバスト性能条件は (2.12) 式となる。

$$|W_{1q}(j\omega)| + |W_{2q}(j\omega)L_{qq}(j\omega)| < |1 + L_{qq}(j\omega)| \quad \forall \omega \quad (2.12)$$

$$\text{for } q = 1, \dots, n_o$$

ここで、 $W_{1q}(j\omega_k)$ および $W_{2q}(j\omega_k)$ は各対角要素に対するノミナル性能を指定する重み関数、制御対象の乗法的不確かさを表す重み関数を示す。

(2.12) 式に示した条件式は、制御器パラメータ $\boldsymbol{\rho}$ に対して非凸となる。そこで、2.3 節にて説明した安定制約の定式化と同様の考え方より、パラメータに対する凸関数で表現する。図 2.5 に示すように、臨界点 $(-1, j0)$ と開ループ伝達関数 $\mathbf{L}(j\omega_k)$ の対角要素 $L_{qq}(j\omega_k)$ を結ぶ直線に直交し、中心 $(-1, j0)$ 、半径 $|W_{1q}(j\omega_k)|$ の円盤に接する直線を $\hat{d}_q(\omega_k)$ と定義する。しかし、この直線 $\hat{d}_q(\omega_k)$ がパラメータ $\boldsymbol{\rho}$ の依存関数となるため、ロバスト性能条件をパラメータに対して凸な関数で表現できない。そこで、開ルー

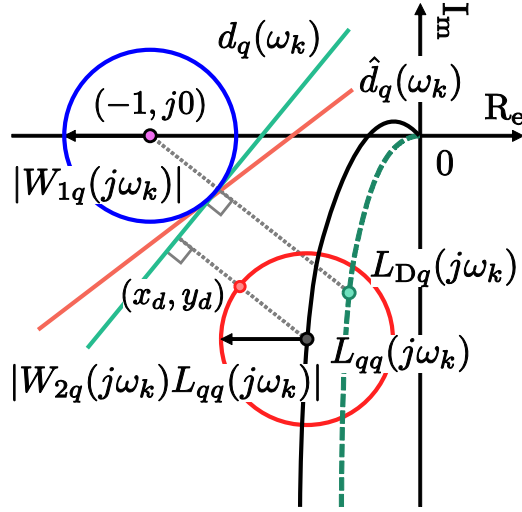


図 2.6: 近似したロバスト性能条件

プ伝達関数行列 $\mathbf{L}(j\omega_k)$ と望みの開ループ伝達関数行列 $\mathbf{L}_D(j\omega_k)$ が十分に近似することを前提に，図 2.6 に示す直線 $d_q(\omega_k)$ を用いている。直線 $d_q(\omega_k)$ は (2.13) 式で表され，この直線 $d_q(\omega_k)$ に対する中心 $L_{qq}(j\omega_k)$ ，半径 $|W_{2q}(j\omega_k)L_{qq}(j\omega_k)|$ の円盤上の最近点の座標 (x_d, y_d) は (2.14)，(2.15) 式と表される。

$$\begin{aligned}
 d_q(\omega_k) : & |W_{1q}(j\omega_k)[1 + L_{Dq}(j\omega_k)]| \\
 & -\text{Im}\{L_{Dq}(j\omega_k)\}y - \text{Re}\{[1 + L_{Dq}(j\omega_k)]\}(1+x) = 0 \quad (2.13)
 \end{aligned}$$

$$x_d = \text{Re}\{L_{qq}(j\omega_k, \boldsymbol{\rho})\} - |W_{2q}(j\omega_k)L_{qq}(j\omega_k, \boldsymbol{\rho})| \frac{\text{Re}\{1 + L_{Dq}(j\omega_k)\}}{|1 + L_{Dq}(j\omega_k)|} \quad (2.14)$$

$$y_d = \text{Im}\{L_{qq}(j\omega_k, \boldsymbol{\rho})\} - |W_{2q}(j\omega_k)L_{qq}(j\omega_k, \boldsymbol{\rho})| \frac{\text{Im}\{L_{Dq}(j\omega_k)\}}{|1 + L_{Dq}(j\omega_k)|} \quad (2.15)$$

そして，(2.13) 式に (2.14)，(2.15) 式の x_d および y_d を代入する。これにより，図 2.6 に示される 2 つの円盤が常に交差しない条件は，制御器パラメータ $\boldsymbol{\rho}$ に対して凸な (2.5) 式と定式化できる。

(2.5) 式を用いる場合，システムの不確かさを重み $W_{2q}(j\omega_k)$ で表現しなければならない。そのため，制御対象の不確かさの定義によっては過度な見積もりが生じ，設計が保守的になる可能性がある。これに対して，文献 [26] では不確かさ $W_{2q}(j\omega_k)$ を各周波数ごとに定義できることを利用し，複数の周波数応答から各周波数点で不確かさを最小に見積もる手法が提案された。しかし，不確かさは円盤でしか定義できず，取得される周波数応答によっては過度に不確かさをも積もることになる。そして，元より制約式 (2.5) 式はシステムが非干渉化されることを前提としており，十分な非干渉化を達

成できないと SISO システムに対する評価に基づいた (2.5) 式ではロバスト性の観点で良好な設計が行われない。上述のように，文献 [7] の手法では望みの開ループ伝達関数行列 $\mathbf{L}_D(s)$ を対角行列で定義するとシステム为非干渉化を図っているが，完全に非干渉化される保証はない。これらの問題に対して，本研究では複数にわたって取得した周波数応答のバラつきをシステムが持つ不確かさと捉え，すべての周波数応答に対して並列して評価を行う。これにより，取得したデータにおける変動に限られるが，不確かさを定義することなく，十分に非干渉化できない状況下においてもロバスト性の高い設計が望める。文献 [7] の手法においても，同様に複数の周波数応答をすべて評価することで，システムに関わらずロバスト性の高い設計ができる。しかしながら，2.3 節で述べた Gershgorin bands を用いることにより生じる保守性が顕著となる可能性がある。

第3章 開ループの対角優勢を評価する 制御器設計

本章では、本論文の主題のひとつである対角優勢について述べ、周波数応答を用いて開ループ伝達関数の対角優勢を評価する制御器設計手法を提案する。この際、(2.1)式に示すにパラメータに対して線形に定義された制御器の設計を考える。また、相似変換を用いて固有値の存在範囲を縮小し、保守性を低減する手法について説明する。

3.1 対角優勢

本研究では、MIMO システムに対する設計要求の一つである対角優勢に着目し、最適化問題を定式化する。対角優勢とは、開ループ伝達関数行列 $\mathbf{L}(j\omega)$ における対角要素 $L_{pp}(j\omega)$ の絶対値より非対角要素 $L_{pq}(j\omega)$ の絶対和が小さいことを指す。特に、(3.1)式を行対角優勢、(3.2)式を列対角優勢という^[12]。

$$|L_{pp}(j\omega)| > \sum_{q=1, q \neq p}^{n_o} |L_{pq}(j\omega)| \quad (3.1)$$

$$|L_{pp}(j\omega)| > \sum_{q=1, q \neq p}^{n_o} |L_{qp}(j\omega)| \quad (3.2)$$

ここで、MIMO システムにおける伝達関数行列の非対角要素は、システムの対応しない入出力関係である相互干渉の特性を示す。そのため、(3.1)、(3.2)式の不等式を満たすことにより、対応する入出力関係に対して相互干渉を小さくすることができる。さらに、非対角要素が十分に小さい場合に、MIMO システムは複数の SISO システムの集合と見なすことが可能であり、十分な対角優勢化によって制御器のハイゲイン化も容易となる。

上述の通り、MIMO システムでは十分な対角優勢を達成することが重要となる。この際、ある周波数における対角優勢の評価として (3.3) 式が考えられる。

$$\sum_{p=1}^{n_o} W_f(\omega) W_{cp} \left[\sum_{q=1, q \neq p}^{n_o} |L_{pq}(j\omega, \rho)| - |L_{pp}(j\omega, \rho)| \right] \quad (3.3)$$

ここで、 $W_f(\omega)$ および W_{cp} はそれぞれ各周波数点、各チャンネル間でゲインをスケールリングする実数重みである。(3.3) 式は、非対角要素 $L_{pq}(j\omega)$ の絶対行和と対角要素 $L_{pp}(j\omega)$ の絶対値との差を示す。ゆえに、(3.3) 式を評価関数として最小化することで、開ループ伝達関数行列 $\mathbf{L}(j\omega)$ の非対角要素 $L_{pq}(j\omega)$ が小さく、対角要素 $L_{pp}(j\omega)$ が大きくなり、十分な対角優勢化が望める。また、 $W_{cp} = 1$ ($\forall p$) であれば、(3.3) 式は非対角要素と対角要素の絶対総和の差を示すため、(3.3) 式の非対角要素の絶対行和と絶対列和は入れ換えても等価となる。

3.2 相似変換による固有値の存在範囲の縮小

本節では、安定性評価の際に保守性が生じることを防ぐため、Gershgorin bands を用いた固有値軌跡の存在範囲を縮小する手法を提案する。この手法では、相似変換の性質を利用してパラメータに対する凸性を維持したまま固有値の存在範囲のみを縮小する。

2.3 節で説明したように、(2.6) 式に示す $\mathbf{L}(j\omega_k)$ の非対角要素の絶対和 $r_q(\omega_k)$ が各周波数における固有値 $\lambda_q(j\omega_k)$ の存在範囲の大きさとなる。そのため、 $\mathbf{L}(j\omega_k)$ が対角化されれば $r_q(\omega_k) \rightarrow 0$ となり、固有値軌跡 $\lambda_q(j\omega_k) = L_{qq}(j\omega_k)$ を直接的に評価できる。しかし、実際に制御対象を完全に非干渉化することは概して構造的に困難である。本手法では、相似変換を用いて $\mathbf{L}(j\omega_k)$ を対角化し、安定性評価の保守性を低減する。相似変換は、行列の固有値を変化させずに行列を変換することから、行列の固有値を評価する有用な手段と知られている。この相似変換の性質に基づいて (3.4) 式の変換を行い、周波数点 ω_k における開ループ伝達関数行列 $\mathbf{L}(j\omega_k)$ の固有値を保存した行列 $\mathbf{L}_S(j\omega_k)$ を生成する。

$$\mathbf{L}_S(j\omega_k, \boldsymbol{\rho}) = \mathbf{V}(j\omega_k)^{-1} \mathbf{L}(j\omega_k, \boldsymbol{\rho}) \mathbf{V}(j\omega_k) \quad (3.4)$$

ここで、 $\mathbf{V}(j\omega_k)$ は (3.4) 式により $\mathbf{L}(j\omega_k)$ を対角化する正則な変換行列である。ゆえに、(3.4) 式の変換により生成される対角行列 $\mathbf{L}_S(j\omega_k)$ を用いれば、 $\mathbf{L}(j\omega_k)$ の固有値を直接的に評価できる。しかし、制御器パラメータ $\boldsymbol{\rho}$ の変化に伴って、対角化に用いる $\mathbf{V}(j\omega_k)$ も変化し、 $\boldsymbol{\rho}$ に対する凸関数として $\mathbf{L}_S(j\omega_k)$ を表現できない。そこで、現在の解 $\boldsymbol{\rho}_{i-1}$ に対して $\mathbf{L}(j\omega_k)$ を対角化する $\mathbf{V}_i(j\omega_k)$ の導出と、 $\mathbf{V}_i(j\omega_k)$ を固定して得られる (3.5) 式の $\mathbf{L}_S^{(i)}(j\omega_k)$ を用いた制御器設計の繰り返しを考える。ここで、 i は繰り返し回数を示す。

$$\mathbf{L}_S^{(i)}(j\omega_k, \boldsymbol{\rho}) = \mathbf{V}_i(j\omega_k)^{-1} \mathbf{L}(j\omega_k, \boldsymbol{\rho}) \mathbf{V}_i(j\omega_k) \quad (3.5)$$

この際、パラメータ ρ の変化により $\mathbf{L}_S^{(i)}(j\omega_k)$ は完全に対角化されないが、 $\mathbf{V}_i(j\omega_k)$ により $\mathbf{L}_S^{(i)}(j\omega_k)$ は $\mathbf{L}(j\omega_k)$ と比べて対角行列に近い行列となることが期待される。そのため、Gershgorin の定理に基づいて定義される $\mathbf{L}_S^{(i)}(j\omega_k)$ の Gershgorin circle の大きさは $r_q(\omega_k)$ より小さくなると考えられる。これに従い、(3.6) 式の $r_{Sq}^{(i)}(\omega_k)$ を半径とし、 $\mathbf{L}_S^{(i)}(j\omega_k)$ の対角要素 $L_{Sqq}^{(i)}(j\omega_k)$ を中心とする Gershgorin circle の集合により定義される Gershgorin bands を安定性の評価に用いる。

$$r_{Sq}^{(i)}(\omega_k, \rho) = \sum_{p=1, p \neq q}^{n_o} \left| L_{Spq}^{(i)}(j\omega_k, \rho) \right| \quad (3.6)$$

相似変換の性質より、 $\mathbf{L}_S^{(i)}(j\omega_k)$ の Gershgorin circle も $\mathbf{L}(j\omega_k)$ の固有値を包含するため、代替しても安定性の評価が可能である。そして、 $\mathbf{L}_S^{(i)}(j\omega_k)$ の Gershgorin circle も ρ に対する凸関数で表現でき、 $r_{Sq}^{(i)}(\omega_k) \leq r_q(\omega_k)$ となるため、保守性は低減される。また、対角化変換行列 $\mathbf{V}_i(j\omega_k)$ の導出と $\mathbf{L}_S^{(i)}(j\omega_k)$ を用いた制御器設計を繰り返すことにより、解の収束に伴って $\mathbf{L}_S^{(i)}(j\omega_k)$ は対角行列に近づき、固有値に対する直接的な評価が可能となる。

3.3 安定制約

2.3 節にて述べたように、MIMO システムにおける閉ループシステムの安定性は、開ループ伝達関数行列 $\mathbf{L}(j\omega)$ の固有値軌跡により評価できる。本節では、3.2 節で説明した相似変換により生成される行列 $\mathbf{L}_S^{(i)}(j\omega)$ から定義される固有値の存在範囲を用いた安定制約を定式化する。

3.2 節の定義より、 i 回目の設計における開ループ伝達関数行列 $\mathbf{L}(j\omega_k)$ の固有値 $\lambda_q(j\omega_k)$ の存在範囲は、(3.6) 式で定義される $r_{Sq}^{(i)}(\omega_k)$ を半径とし、 $\mathbf{L}_S^{(i)}(j\omega_k)$ の対角要素 $L_{Sqq}^{(i)}(j\omega_k)$ を中心とする円盤で表現される。ゆえに、固有値軌跡 $\lambda_q(j\omega)$ は、各周波数点 ω_k における $\mathbf{L}_S^{(i)}(j\omega_k)$ により描かれる円盤の集合である Gershgorin bands を用いて近似的に評価できる。そして、DNA 安定定理より、現在の解 ρ_{i-1} に対する閉ループシステムが安定であるとする、その状態から $\mathbf{L}_S^{(i)}(j\omega_k)$ の Gershgorin bands が臨界点 $(-1, j0)$ の上を通らなければ安定となる。これより、(3.7) 式が満たされれば閉ループシステムは安定となる。

$$r_{Sq}^{(i)}(\omega_k, \rho) - \left| 1 + L_{Sqq}^{(i)}(j\omega_k, \rho) \right| < 0 \quad (3.7)$$

また、一般に厳密にプロパーな制御対象においては周波数が高くなるにつれて開ループ伝達関数 $\mathbf{L}(j\omega)$ のゲインは低下し、固有値軌跡 $\lambda_q(j\omega)$ は Nyquist 線図上で原点に収

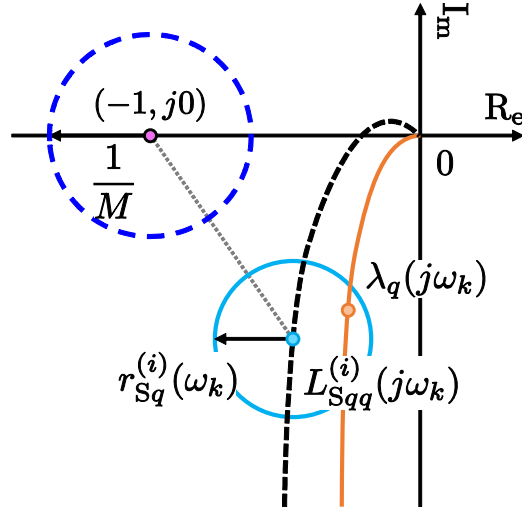


図 3.1: 固有値軌跡による安定条件

束する軌跡を描く。ゆえに，設計後の固有値軌跡 $\lambda_q(j\omega)$ が臨界点 $(-1, j0)$ に接近する恐れがある。そのため，ロバスト性やシステムの感度の観点から，(3.8) 式で定義される安定余裕 M の導入が好ましい^[27]。

$$M = \sup_{\substack{0 \leq \omega \leq \infty \\ 1 \leq q \leq n_o}} \frac{1}{|1 + \lambda_q(j\omega)|} \quad (3.8)$$

$1/M$ は，全周波数に対するすべての固有値軌跡と臨界点 $(-1, j0)$ との距離の下界を示す。Nyquist 線図上では，臨界点 $(-1, j0)$ を中心とし，半径を $1/M$ とする円盤で定義され，この円盤の外側をすべての固有値軌跡 $\lambda_q(j\omega)$ が通る。ここで，この安定余裕 M を導入し，所望の安定余裕を確保した設計を考える。図 3.1 の Nyquist 線図上の関係により，設計者が定める安定余裕 M を確保する制約式は (3.9) 式と定式化できる。

$$r_{Sq}^{(i)}(\omega_k, \boldsymbol{\rho}) + \frac{1}{M} - |1 + L_{Sq}^{(i)}(j\omega_k, \boldsymbol{\rho})| < 0 \quad (3.9)$$

したがって，(3.9) 式の制約式により，安定性を保証して所望の安定余裕 M を確保する制御器の設計が可能となる。

3.4 設計問題

本節では，本手法の設計問題を定式化する。3.1 節にて説明したように，(3.3) 式の最小化により，十分なシステムの対角優勢化が期待できる。また，3.3 節で定式化した制約式 (3.9) 式を付加することで，開ループ伝達関数行列 $\mathbf{L}(j\omega)$ の固有値軌跡 $\lambda_q(j\omega)$ を

評価して MIMO システムにおける閉ループシステムの安定性を保証しつつ、所望の安定余裕 M を確保できる。設計者が定めた N 個の周波数点 ω_k ($k = 1, \dots, N$) に対して定式化した設計問題を以下に示す。

$$\min_{\boldsymbol{\rho}} \sum_{k=1}^N \sum_{p=1}^{n_o} W_f(\omega_k) W_{cp} \left[\sum_{q=1, q \neq p}^{n_o} |L_{pq}(j\omega_k, \boldsymbol{\rho})| - |L_{pp}(j\omega_k, \boldsymbol{\rho})| \right] \quad (3.10)$$

subject to

$$r_{Sq}^{(i)}(\omega_k, \boldsymbol{\rho}) + \frac{1}{M} - \left| 1 + L_{Sq}^{(i)}(j\omega_k, \boldsymbol{\rho}) \right| < 0 \quad (3.11)$$

for $k = 1, \dots, N$ and $q = 1, \dots, n_o$

評価関数は、対角優勢の評価である (3.3) 式の離散周波数点 ω_k に対する値の総和である。この際、本手法の設計問題 (3.10) 式は非凸な問題となり、求解が困難となる。ここで、本手法では、文献 [22][23] で紹介されている最適化アルゴリズム CCCP を用いる。CCCP を用いることにより、非凸な設計問題 (3.10) 式の準最適解を凸最適化計算の反復により簡易に求解できる。

3.5 Concave-Convex procedure^{[22][23]}

3.4 節にて説明したように、本手法の設計問題 (3.10) 式は、 $\boldsymbol{\rho}$ に対する凸関数の差で構成された非凸な関数となっている。そのため、求解が困難となり、局所的最適解に陥る可能性が増加してしまう。そこで、本手法では、文献 [22][23] で紹介されている最適化アルゴリズムである CCCP を用いる。本節では、CCCP のアルゴリズムについて述べ、(3.10) 式に対して凸近似を導入する。

CCCP は、2 つの異なる凸関数の差で記述された評価関数および制約式を含む最適化問題に対する計算アルゴリズムである。CCCP を用いることにより、凸関数の差で表現される非凸な問題を凸最適化計算の繰り返しで求解することができる。(3.12) 式に示すような最適化問題に対して CCCP は適用される。

$$\min_{\boldsymbol{x}} f_0(\boldsymbol{x}) - g_0(\boldsymbol{x}) \quad (3.12)$$

subject to

$$f_l(\boldsymbol{x}) - g_l(\boldsymbol{x}) \leq 0 \quad (3.13)$$

for $l = 1, \dots, N_l$

ここで、 $f_l(\mathbf{x})$ および $g_l(\mathbf{x})$ ($l = 0, \dots, N_l$) はパラメータ \mathbf{x} に対する凸関数である。また、(3.12) 式の問題は、 $-g_l(\mathbf{x})$ が凹関数となるため、 \mathbf{x} に対して非凸な $N_l + 1$ 個の関数で構成された問題である。この際、CCCP では、問題内のすべての凹関数を現在の解 \mathbf{x}_{i-1} 近傍で線形近似する。これにより、凸関数の差で構成された関数 $f_l(\mathbf{x}) - g_l(\mathbf{x})$ は、(3.14) 式に表される \mathbf{x} に対する凸関数 $\hat{f}_l^{(i)}(\mathbf{x})$ ($l = 0, \dots, N_l$) に近似される。

$$\hat{f}_l^{(i)}(\mathbf{x}) = f_l(\mathbf{x}) - g_l(\mathbf{x}_{i-1}) - \nabla g_l(\mathbf{x}_{i-1})^T(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{i-1}) \quad (3.14)$$

ここで、 i は繰り返し回数を示す。(3.14) 式の近似関数 $\hat{f}_l^{(i)}(\mathbf{x})$ は元の関数の上界となることが知られており、この近似を行った問題の解集合は、元の問題の解集合の凸部分集合となる。そのため、近似関数による制約下で導出される解 \mathbf{x}_i は、元の問題の制約を満たす。また、評価関数においても上界の関係が成り立つため、導出される解 \mathbf{x}_i の評価値は解 \mathbf{x}_{i-1} の評価値より良い値となる。ゆえに、最適化問題の近似関数の更新と凸最適化計算の繰り返しに対して、評価関数の単調収束は保証される。CCCP では、大域的最適解に収束する保証はなく、局所的最適解あるいは鞍点に収束する危険性がある。しかし、(3.12) 式のような非凸の問題に対して、単調収束を保証して凸最適化による求解が可能である。そのため、非線形最適化のような最適化手法と比べ、簡易かつ安定して準最適解を導出できる。

上記のアルゴリズムに従い、本手法の設計問題 (3.10) 式を現在の解 $\boldsymbol{\rho}_{i-1}$ 近傍で凸近似した i 回目の設計問題は以下となる。

$$\min_{\boldsymbol{\rho}_i} \sum_{k=1}^N \sum_{p=1}^{n_o} W_f(\omega_k) W_{cp} \left[\sum_{q=1, q \neq p}^{n_o} |L_{pq}(j\omega_k, \boldsymbol{\rho}_i)| - \text{Re} \left\{ \frac{L_{pp}^*(j\omega_k, \boldsymbol{\rho}_{i-1})}{|L_{pp}(j\omega_k, \boldsymbol{\rho}_{i-1})|} L_{pp}(j\omega_k, \boldsymbol{\rho}_i) \right\} \right] \quad (3.15)$$

subject to

$$r_{Sq}^{(i)}(\omega_k, \boldsymbol{\rho}_i) + \frac{1}{M} - \text{Re} \left\{ \frac{(1 + L_{Sq}^{(i)*}(j\omega_k, \boldsymbol{\rho}_{i-1}))}{|1 + L_{Sq}^{(i)}(j\omega_k, \boldsymbol{\rho}_{i-1})|} (1 + L_{Sq}^{(i)}(j\omega_k, \boldsymbol{\rho}_i)) \right\} < 0 \quad (3.16)$$

for $k = 1, \dots, N$ and $q = 1, \dots, n_o$

(3.15) 式は、 $\boldsymbol{\rho}_i$ に対して凸な問題であり、凸最適化計算により求解することができる。そして、(3.15) 式の最適化問題の更新と凸最適化計算を繰り返し、制御器を設計する。

3.6 設計アルゴリズム

本節では、本手法の設計アルゴリズムについて説明する。

step 1 設計準備

制御対象の入出力データより，設計者が定める N 個の周波数 ω_k に対する周波数応答を推定する。この際，複数の入出力データに対して周波数応答を取得し，設計に用いることでロバスト性の高い制御器設計が可能となる。そして，設計問題 (3.10) 式の重み $W_f(\omega)$ ， W_{cp} および安定余裕 M を設定し，初期制御器パラメータ ρ_0 を決定する。この際， ρ_0 は閉ループシステムを安定化する範囲で定める。また，繰り返し回数 i を $i = 1$ ，終了条件判定回数 i_e を $i_e = 0$ とする。

step 2 対角化変換行列 $V_i(j\omega_k)$ の導出

現在得られている制御器パラメータ ρ_{i-1} からなる開ループ伝達関数行列 $L(j\omega_k, \rho_{i-1})$ に対して，(3.5) 式の相似変換を考え， $L_S^{(i)}(j\omega_k, \rho_{i-1})$ を対角行列にする変換行列 $V_i(j\omega_k)$ を導出する。ここで， $L(j\omega_k, \rho_{i-1})$ は複素定数行列となるため，対角化変換行列 $V_i(j\omega_k)$ は解析的に導出される。この際，複数周波数応答を取得した場合には変動モデルに対してもそれぞれ同様に対角化変換行列 $V_i(j\omega_k)$ を導出する。

step 3 凸最適化計算

現在の制御器パラメータ ρ_{i-1} を用いて凸最適化問題 (3.15) 式を解き，新たな解 ρ_i を得る。この際，導出された ρ_i を用いて，全取得周波数に対する元の問題 (3.10) 式の評価値より定義した (3.17) 式の J_i を算出する。

$$J_i = \sum_{k=1}^N \sum_{p=1}^{n_o} W_f(\omega_k) W_{cp} \left[\sum_{q=1, q \neq p}^{n_o} |L_{pq}(j\omega_k, \rho_i)| - |L_{pp}(j\omega_k, \rho_i)| \right] \quad (3.17)$$

step 4 繰り返し終了判定

step 2, step 3 を (3.18) 式で定義される評価値 J_i の相対誤差 $\varepsilon(J_i)$ が，終了判定 ($\varepsilon < \delta$) を設定した回数 δ_e だけ連続して満たすまで繰り返す。

$$\varepsilon(J_i) = \frac{|J_{i-1} - J_i|}{|J_i|} \times 100 [\%] \quad (3.18)$$

終了判定を満たした際， $i_e = i_e + 1$ とし，満たさない場合には $i_e = 0$ とする。そして，繰り返しを終了した時点 ($i_e = \delta_e$) の制御器パラメータ ρ_i が，この制御器設計法における設計結果となる。

本手法を用いることにより，安定性を保証した十分な対角優勢を達成する制御器の設計が可能となる。

3.7 実機実験

本節では、本章で提案した手法の有効性を実機実験を通して検証する。本実験は2つの項目について行い、各実験の内容および目的は以下の通りである。

実験 1: 他手法との比較

文献 [7] の設計手法との比較を行う。この際、3.2 節で説明した本章の手法における対角化を用いた固有値の存在範囲の縮小を行うことによる有効性も評価する。また、本章の手法におけるチャンネルに対する重み W_{cp} の設計結果への影響を確認する。

実験 2: ロバスト性の検証

本章の手法を用いて複数取得した周波数応答から制御器設計を行い、ロバストな制御器が設計可能であることを示す。

また、本実験において、比較する各手法を以下のように呼称する。

Method 1 : 本章にて提案した開ループの対角優勢を評価する制御器設計手法

Method 2 : 2 章の Galdos らにより提案された文献 [7] の手法

実験には安定な対象である張力・速度制御装置を制御対象として使用する。張力・速度制御装置の模式図を Fig. 3.2 に示す。この制御対象は、入力にモータ 1, 2 への入力トルク τ_1, τ_2 、出力にプーリ速度 v とアーム角 θ を持つ 2 入力 2 出力システムであり、弾性ベルトにより連結されている。弾性ベルトの張力は、アーム角 θ を通して取得される線形バネの変位より計算できる。そして、アーム角 θ はモータ 1, 2 の速度差により制御される。この際、プーリ速度 v とアーム角 θ の間に干渉が生じる。この制御対象に対して、振幅 0.8 で周波数が 10^{-3} – 10^3 rad/s の区間で変化する正弦波 Sweep 信号 (図 3.3) を各モータに入力し、出力信号 (図 3.4, 3.5) より周波数応答を推定した (図 3.6)。周波数応答の推定には、Matlab の System Identification Toolbox を用いた。

3.7.1 実験 1

Method 1 と Method 2 の比較を行う。設計周波数点は、 10^{-3} – 10^3 rad/s の区間で対数的に等間隔な 500 点とした。Method 2 における望みの開ループ伝達関数行列 $\mathbf{L}_D(s)$

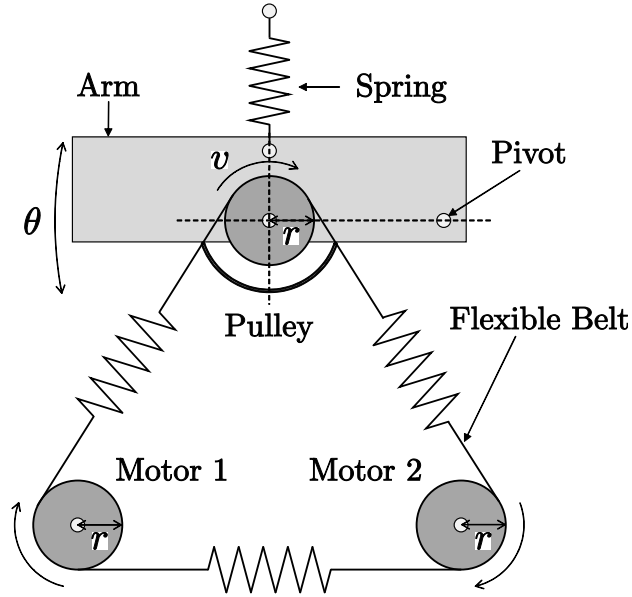


図 3.2: 張力速度制御装置の模式図

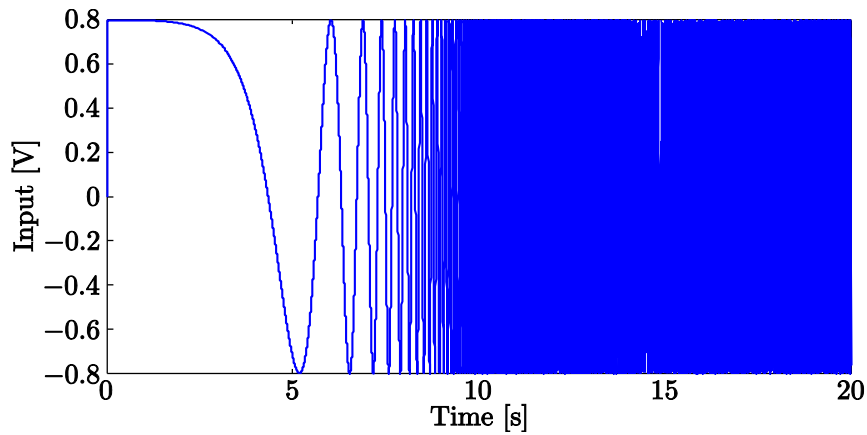


図 3.3: 周波数応答推定の入力信号

の対角要素 $L_{D1}(s)$, $L_{D2}(s)$ は, 制御器のハイゲイン化を達成できるように試行錯誤的に (3.19) 式とした。

$$L_{D1}(s) = \frac{30}{s}, \quad L_{D2}(s) = \frac{400}{s(s+40)} \quad (3.19)$$

ここで, $L_{D1}(s)$, $L_{D2}(s)$ は設計者が与える必要があるため, 複雑な特性を選択することは煩雑であり, 実用的ではない。そのため, 一般的に開ループ上で要求される低周波数域の積分特性や高周波数域のゲインの抑制に基づき, それらを実現する特性の一例として, 閉ループ特性が一次遅れ系および二次遅れ系となる $L_{D1}(s)$, $L_{D2}(s)$ を与えた。また, Method 1 と Method 2 に対して, 安定性を保証した状態における対角優勢の観

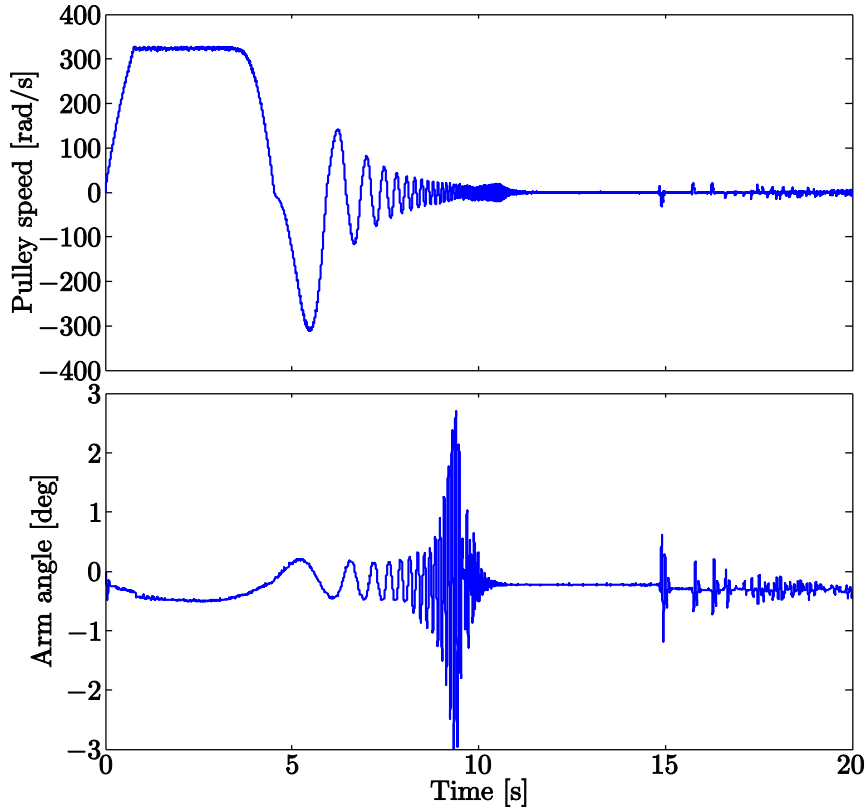


図 3.4: 周波数応答推定の出力信号（モータ 1 入力時）

点のみで比較をするため，Method 2 のロバスト性能条件 (2.5) 式は付加しない。そして，Method 1 と Method 2 の制御器構造は (3.20) 式に示す PID 制御器を用いた。

$$\mathbf{C}(s) = \begin{bmatrix} \rho_1 & \rho_2 & \rho_3 & \rho_4 & \rho_5 & \rho_6 \\ \rho_7 & \rho_8 & \rho_9 & \rho_{10} & \rho_{11} & \rho_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 \\ \frac{1}{s} \mathbf{I}_2 \\ \frac{s}{1+0.03s} \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

この際，制御対象の制御帯域およびシステムに入る観測雑音の影響を考慮し，微分器には試行錯誤的に決定した時定数が 0.03 s のローパスフィルタを付加している。Method 1 の設計問題 (3.10) 式における重み $W_f(\omega)$ ， W_{cp} および，安定余裕 M は (3.21) 式と設定した。

$$W_f(\omega) = \omega, \quad W_{c1} = 1, \quad W_{c2} = \alpha, \quad M = 2 \quad (3.21)$$

ここで， $W_f(\omega)$ は，開ループ伝達関数行列 $\mathbf{L}(j\omega)$ のゲイン特性より，(3.3) 式の対角優勢の評価がすべての設計周波数点に対して概ね均等となるように決定した。また， α は $\{3, 5, 10, 15\}$ と変化させ，それぞれ設計する。Method 1 における繰り返し終了判定

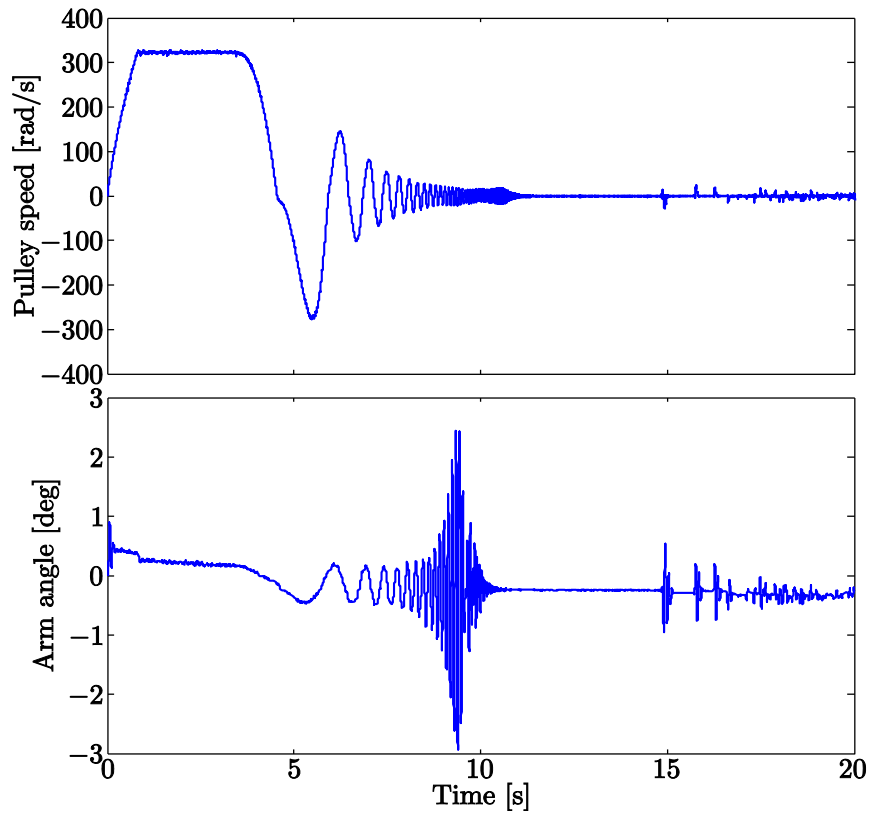


図 3.5: 周波数応答推定の出力信号（モータ 2 入力時）

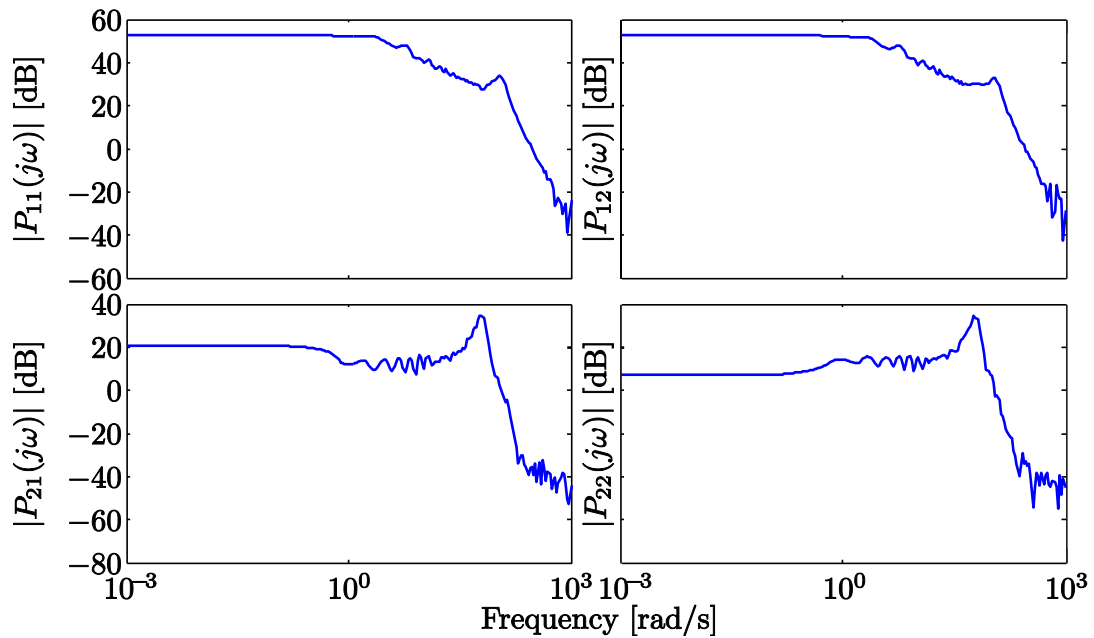
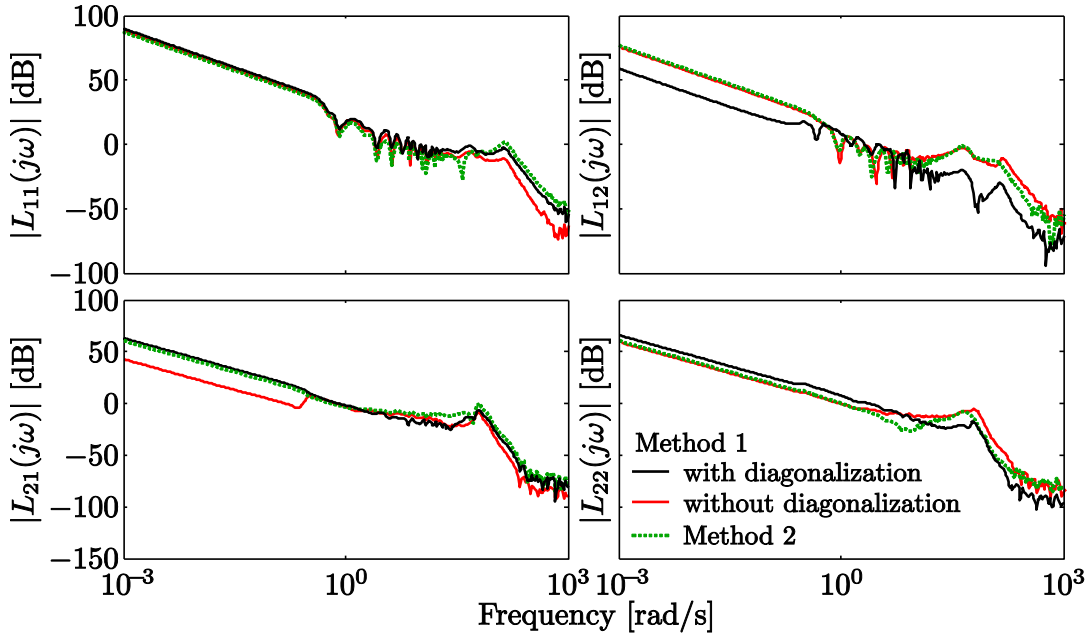


図 3.6: 推定した周波数応答（ゲイン線図）


 図 3.7: Method 1 ($\alpha = 10$) と Method 2 の開ループ伝達関数行列 $\mathbf{L}(j\omega)$ のゲイン線図

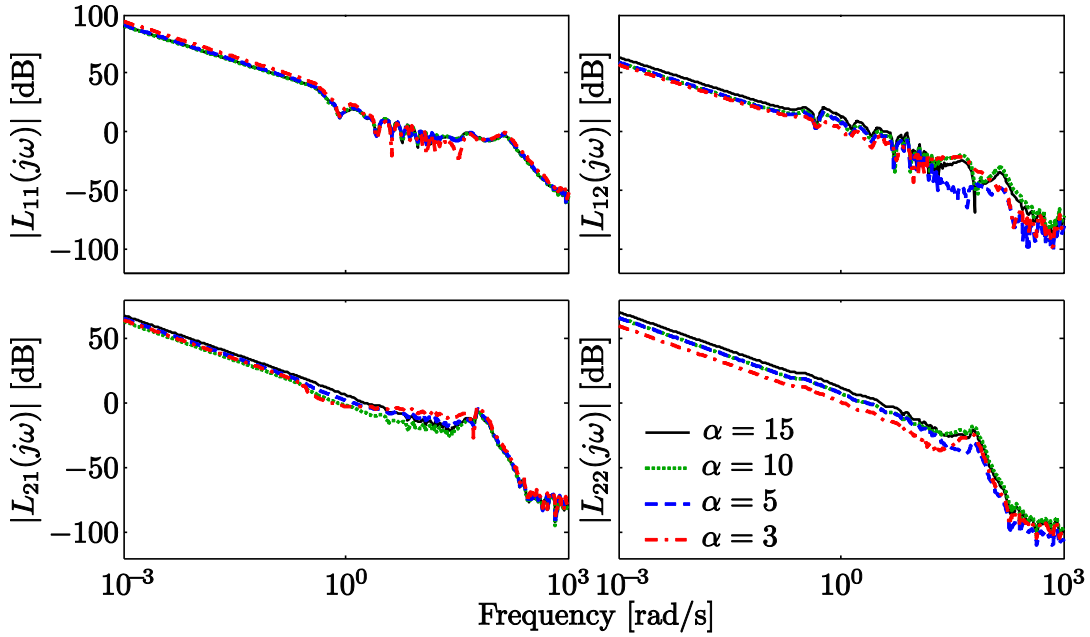
は、制御器設計後に (3.18) 式で定義される相対誤差 ε が $\delta_e = 3$ 回連続して $\delta = 0.1\%$ を下回ることとする。そして、初期解 ρ_0 は、閉ループシステムを安定化できる解として Method 2 による設計結果を用いた。

Method 1 ($\alpha = 10$, 対角化有り) と Method 2 により設計をした際の開ループ伝達関数行列 $\mathbf{L}(j\omega)$ のゲイン線図を図 3.7 に示す。Method 2 の結果と比べて Method 1 では、非対角要素 $L_{12}(j\omega)$ では中周波数域を除いてゲインが下がり、 $L_{21}(j\omega)$ では大きく差異はないが中周波数域で 10 dB 程度ゲインが抑制されている。また、対角要素 $L_{11}(j\omega)$ では高周波数域を除いてゲインが増大し、 $L_{22}(j\omega)$ でも高周波数域を除いて 5 dB 程度ゲインが増加している。高周波数域においてゲインが増大しないことは、約 10^2 rad/s にある制御対象が有する共振特性および、センサ等による雑音の影響に対して (3.3) 式の評価値を下げられず、制御器のゲインを増大できないことに起因する。実用上、ロバスト性の観点からも高周波数域のゲインを上げる必要はないため、これに対する大きな問題はない。また、高周波域における評価の重みを意図的に下げたい場合は、 $W_f(\omega)$ を高周波域で下げることで実現できる。したがって、Method 1 により設計されたシステムは、対角優勢化を達成していることが確認できた。これは、Method 2 が望みの特性との差を評価するのに対して、Method 1 が対角優勢を直接的に評価するためであると考えられる。Method 2 では制御対象や制御器の構造的に実現できる望みの特性を決定できれば完全に非干渉化されるが、できない場合は相互干渉が抑制される保証はない。

ここで、(3.19) 式とした望みの開ループ伝達関数行列 $\mathbf{L}_D(j\omega)$ を変更し、実現可能な望みの特性に設定できれば今回の結果以上の制御性能の達成を望める。しかし、本実験のように共振特性などを制御対象が有している場合に、実現可能な望みの特性が複雑となる可能性がある。この際、 $\mathbf{L}_D(j\omega)$ の決定には試行錯誤が必要となるため、複雑な望みの特性を設定することは非常に困難であり実用的でないと考えられる。それに対して、Method 1 では $\mathbf{L}_D(j\omega)$ を用いずに $\mathbf{L}(j\omega)$ の特性を直接評価をするため、 $\mathbf{L}_D(j\omega)$ の設定に対する試行錯誤が不要となり、より高い対角優勢化を期待できる。

さらに、Method 1 の安定制約における相似変換による対角化を用いた固有値の存在範囲の縮小を行わず、すべての変換行列 $\mathbf{V}_i(j\omega_k)$ を常に \mathbf{I}_{n_o} として設計した際の開ループ伝達関数行列のゲイン線図を図 3.7 に示す。ここで、設計条件は対角化有りの Method 1 と同様に設定し、 $\alpha = 10$ とする。Method 2 と対角化無しの結果を比較すると、非対角要素ではゲインの抑制が見られ、対角要素ではゲインの増大を達成している。この結果は、Method 1 における (3.3) 式の対角優勢に対する直接的な評価に起因していると考えられる。この際、対角要素 $L_{11}(j\omega)$ の高周波数域でゲインが増大しないことは、対角化有りの場合と同様の理由付けがされる。しかしながら、対角化有りの場合と比較すると変化は小さく、十分な対角優勢化を達成しているとは言い難い。これは、3.2 節で述べたように、対角化を行った場合に固有値の存在範囲を示す円盤の半径の大きさは $r_{S_q}^{(i)}(\omega_k) \leq r_q(\omega_k)$ となり、(3.10) 式の最適化問題の解範囲が拡大されるためである。したがって、対角化を行うことで、今回示したように固有値の推定により生じる保守的な設計を回避することが可能となる。

次に、各 α に対する開ループ伝達関数行列 $\mathbf{L}(j\omega)$ のゲイン線図を図 3.8 に示す。張力・速度制御装置では、アーム角度に比べプーリ速度側でゲインを高くできるため、入力チャンネル 1（システム行列における 1 列目）でゲインが高くなる。各入力チャンネルのゲインが大きく異なると、対角優勢に対する評価である (3.3) 式において高いゲインに自動的に重みがかかってしまう。ゆえに、システム全体で均等な評価を行うためには、ゲインの低い入力チャンネルに対して重みをかけ、各チャンネル間で釣合いを取ることが必要となる。今回実験の場合、ゲインの低い入力チャンネル 2 側に重みをかける。Fig. 3.8 より、 $L_{11}(j\omega)$ および $L_{21}(j\omega)$ では、 α の値の減少に対して $L_{11}(j\omega)$ のゲインが増大し、 $L_{21}(j\omega)$ のゲインが抑制され、対角優勢化が促されている。これは、入力チャンネル 1 側で重みがかかるためと考えられる。したがって、 $L_{22}(j\omega)$ および $L_{12}(j\omega)$ では、 α の値の減少に対して十分なシステムの対角優勢化は行われない。この際、各要素のゲインを比較して $\alpha = 10$ のときに、良好な設計結果を示している。これは、初期


 図 3.8: 複数の α に対する開ループ伝達関数行列 $L(j\omega)$ のゲイン線図

解 ρ_0 に対する開ループ伝達関数行列 $L(j\omega)$ において，入力チャンネル 1, 2 のゲインの比率が約 10 倍であるためと考えられる。したがって，チャンネルに対する重み W_{cp} は，初期解 ρ_0 の特性から定めれば良い。

結果として，本章の手法により，対角優勢を実現する制御器が設計されることを確認した。また，設計者が定める重みに関して，設計の基準となる初期解 ρ_0 による特性より定めればよいことを示した。

3.7.2 実験 2

次に，Method 1 においてもロバストな制御器が設計可能であることを示す。2.4 節にて述べたように，Method 2 におけるロバスト性能条件 (2.5) 式はシステムが非干渉化されることを前提としており，十分な非干渉化を達成できないとロバスト性の観点で良好な設計が行われない可能性がある。これに対して，Method 1 では複数取得した周波数応答をすべて評価し，想定される変動に対する性能の保証が可能である。

制御対象に対して正弦波 Sweep 信号を入力する際，アーム部に重りを載せて 4 組の異なる入出力データを取得し，それぞれ周波数応答を推定する。推定された周波数応答のゲイン線図を図 3.9 に示す。4 つの周波数応答の差は制御対象の不確かさと捉えることができる。そのため，これらすべての周波数応答に対する (3.15) 式の評価関数の

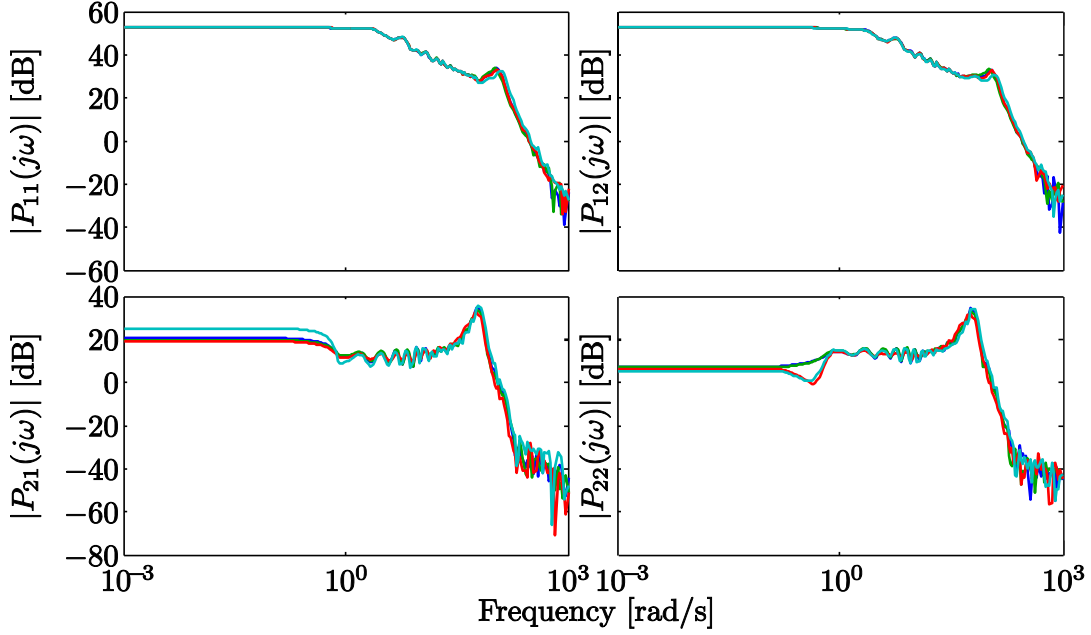


図 3.9: 複数取得した制御対象の周波数応答のゲイン線図

和および制約式の連立により構成される最適化問題 (3.23) 式を解くことで想定される変動に対してロバストな制御器が設計される。

$$\min_{\boldsymbol{\rho}_i} \sum_{\kappa=1}^m \sum_{k=1}^N \sum_{p=1}^{n_o} W_f(\omega_k) W_{cp} \left[\sum_{q=1, q \neq p}^{n_o} |L_{pq, \kappa}(j\omega_k, \boldsymbol{\rho}_i)| - \operatorname{Re} \left\{ \frac{L_{pp, \kappa}^*(j\omega_k, \boldsymbol{\rho}_{i-1})}{|L_{pp, \kappa}(j\omega_k, \boldsymbol{\rho}_{i-1})|} L_{pp, \kappa}(j\omega_k, \boldsymbol{\rho}_i) \right\} \right] \quad (3.22)$$

subject to

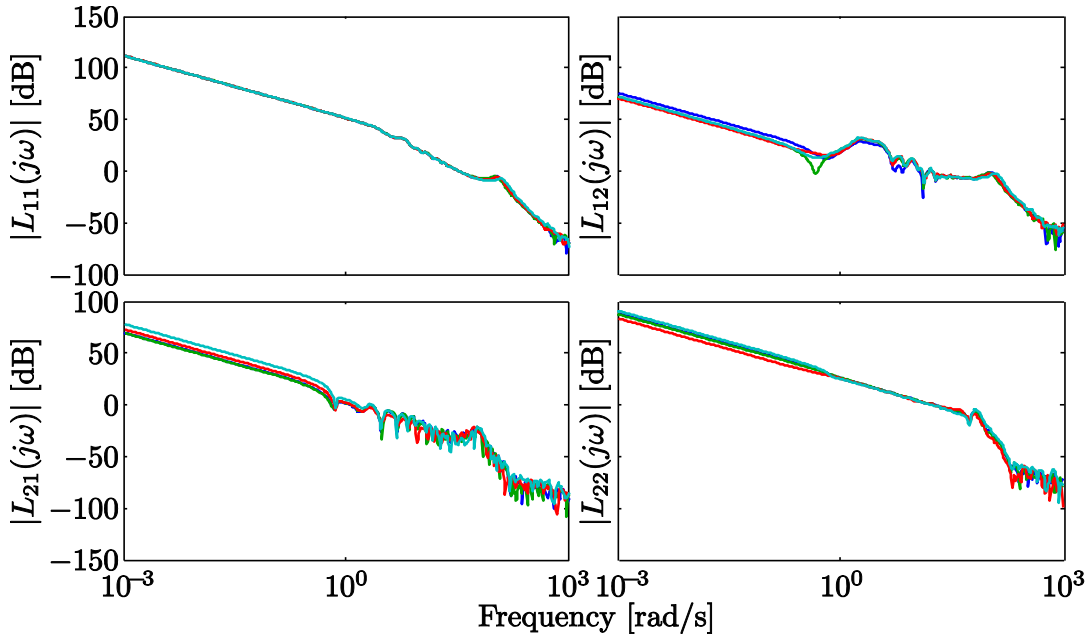
$$r_{Sq, \kappa}^{(i)}(\omega_k, \boldsymbol{\rho}_i) + \frac{1}{M} - \operatorname{Re} \left\{ \frac{(1 + L_{Sq, \kappa}^{(i)*}(j\omega_k, \boldsymbol{\rho}_{i-1}))}{|1 + L_{Sq, \kappa}^{(i)}(j\omega_k, \boldsymbol{\rho}_{i-1})|} (1 + L_{Sq, \kappa}^{(i)}(j\omega_k, \boldsymbol{\rho}_i)) \right\} < 0 \quad (3.23)$$

for $k = 1, \dots, N$, $q = 1, \dots, n_o$, and $\kappa = 1, \dots, m$

ここで、 \bullet_{κ} ($\kappa = 1, \dots, m$) は取得した κ 個目の制御対象の周波数応答に対する特性を示す。本実験では、4つの周波数応答を使用しているため $m = 4$ となる。設計する制御器は、(3.20) 式の PID 制御器とし、設計問題 (3.10) 式における重み $W_f(\omega)$, W_{cp} および、安定余裕 M は (3.24) 式と設定した。

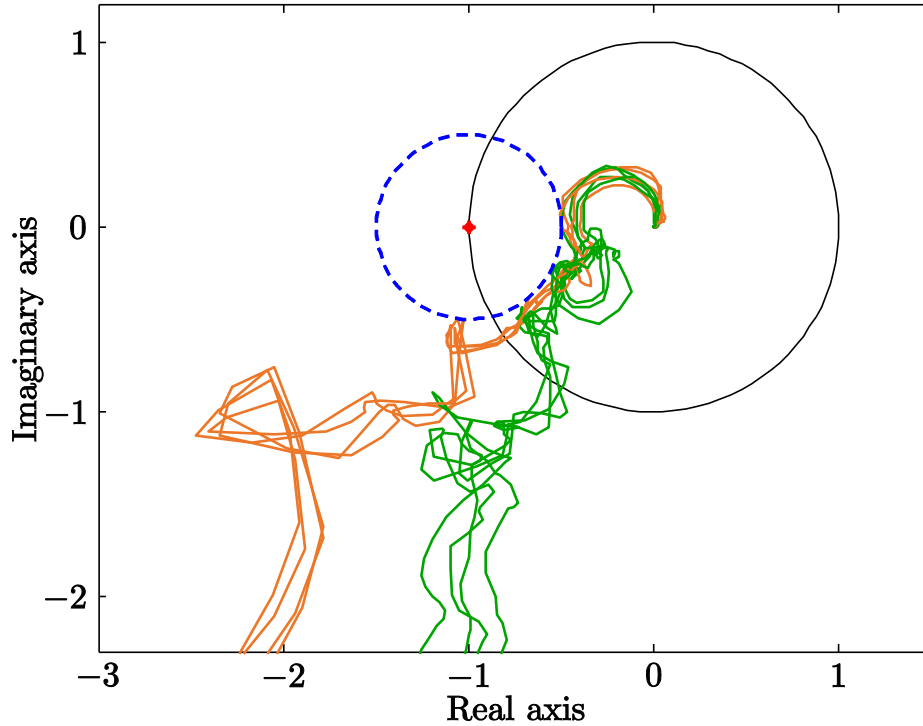
$$W_f(\omega) = \omega, W_{c1} = 1, W_{c2} = 20, M = 2 \quad (3.24)$$

繰り返し終了判定は、3.7.1 節の実験 1 と同じとする。


 図 3.10: 複数の周波数応答より設計した開ループ伝達関数行列 $\mathbf{L}(j\omega)$ のゲイン線図

開ループ伝達関数行列 $\mathbf{L}(j\omega)$ のゲイン線図を図 3.10 に示す。Method 1 により、すべての周波数応答に対して非対角要素のゲインを抑制しつつ、対角要素のゲインを増大し、システムの対角優勢化を行う制御器設計がされていることが確認できる。また、設計されたシステムの固有値軌跡 $\lambda_q(j\omega)$ を図 3.11 に示す。図 3.11 中の破線で示された円盤は中心が臨界点 $(-1, j0)$ 、半径が $1/M = 0.5$ の安定余裕を表す。したがって、すべての固有値軌跡 $\lambda_q(j\omega)$ は安定余裕 M を確保しつつ、臨界点を回らず、MIMO システムにおける閉ループシステムの安定条件を満たしている。

また、3.7.1 節の実験 1 における図 3.7 の $L_{11}(j\omega)$ の中周波数域に見られるように、周波数応答上に雑音の影響が生じる可能性がある。この場合、雑音の影響で結果としてゲインを上げることができず、保守的なゲイン調整となる恐れは存在する。しかし、周波数応答上に現れた雑音の影響はシステムで実際に生じる雑音を表すものであり、この状況下で設計されたシステムの周波数応答はその雑音の影響を含んだ特性を示す。したがって、制御対象のノミナル値に対する設計としては保守的となる可能性があるが、雑音を含む周波数応答を用いることで暗に雑音が入った状況を考慮した設計ができる。この際、雑音の影響で正確なノミナル値が推定できず、雑音が入らないあるいは異なる雑音が入る場合に、システムの特性が変化して制御性能が劣化する可能性がある。これに対しては、本節に示すように複数取得した周波数応答を用いることにより、複数の雑音の影響に対してロバストな設計が可能となる。


 図 3.11: 複数の周波数応答より設計した開ループ伝達関数行列の固有値軌跡 $\lambda_q(j\omega)$

このように、本章の手法では複数の入出力データより推定された異なる周波数応答を用いることで、想定される変動を考慮した設計ができることを確認した。この際、複数の周波数応答に対して、(3.23) 式の最適化問題を解くだけであるため、簡易にロバストな制御器を設計することが可能である。

本実験を通して、文献 [7] の手法との比較により開ループの対角優勢化を評価する本手法の有効性を確認した。本手法では、CCCP により、凸最適化を用いた簡易な制御器設計を実現した。また、相似変換を利用して過度な見積もりなく開ループ伝達関数行列の固有値軌跡の存在範囲を表現し、安定性の評価における保守性を低減した。結果として、本手法は MIMO システムの安定性を保証し、かつ、十分な対角優勢化を達成する制御器の簡易な設計を可能とした。しかし、本章の手法として、以下の課題点が挙げられる。第一に、設計者が定める重み $W_f(\omega)$ および W_{cp} を必要としない設計問題の定式化である。重みにより設計に対して自由度を持たせることができる反面、システム全体において均等な評価が望まれる場合に、重みの調整が必要となる。この問題は、具体的な望みの特性を与えるのに比べ、初期解などからある程度の評価の偏りがわかるため、設定は行い易い。しかし、入出力数の多い大規模なシステムに対しては、この問題はより顕著となり、重みの調整が複雑かつ煩雑となる。ゆえに、これらの

重みを必要としない形式で，対角優勢を評価できる設計問題の方が好ましいと考えられる。また，本手法では，開ループシステムに対する評価しか行っておらず，閉ループシステムに対する直接的な評価はない。開ループ整形などをはじめとして，開ループシステムと閉ループシステムの特性の間に存在する密接な関係を利用し，考慮しやすい開ループを評価する設計手法は多々存在する。本手法もその 1 つであり，開ループ上で完全に非干渉化されれば，閉ループシステムにおいても非干渉化が実現される。しかしながら，完全に非干渉化されない場合，相互干渉に関しては開ループの評価と閉ループの評価の間に差異が生じてしまう。ゆえに，開ループの評価のみでは，実際に運用される閉ループシステムの直接的な評価が行えず，高い制御性能の実現が困難となる可能性がある。以上の点から，次章において閉ループの相互干渉に関する性能指標を導入し，閉ループシステムに対する制御性能の向上を図る。

第4章 閉ループの相互干渉を評価する 制御器設計

3章にて述べたように、開ループシステムにおける評価では、実際に運用する閉ループシステムの評価と直結しないという点が問題となり得た。本章では、文献[19]で提案されている閉ループシステムの相互干渉に関する性能指標を制御器設計に導入する。この際、(2.1)式に示すようにパラメータに対して線形に定義された制御器の設計を考える。そして、文献[11]で提案されている求解アルゴリズムである、反復LMI制約を適用して設計を行う。

4.1 閉ループの相互干渉に対する性能指標

本節では、設計に導入する閉ループシステムの相互干渉に関する性能指標^[19]について説明する。そして、提案する設計手法における問題設定を行う。

相互干渉を評価する際、(4.1)式に示されるような開ループ伝達関数行列 $\mathbf{L}(s)$ と対角要素を抽出したシステム $\mathbf{L}_d(s)$ の誤差システム $\mathbf{E}_L(s)$ に基づいた評価がされる場合がある^{[28][29]}。

$$\mathbf{E}_L(s) = \mathbf{L}(s) - \mathbf{L}_d(s) \quad (4.1)$$

$$\mathbf{L}_d(s) = \text{diag}\{L_{11}(s), \dots, L_{nn}(s)\} \quad (4.2)$$

しかし、 $\mathbf{E}_L(s)$ を評価して設計した結果、完全に非干渉化 ($\mathbf{E}_L(s) = 0$) できない場合に、開ループの評価が実際に運用する閉ループの直接的な評価とはならない。これに対して、文献[19]では(4.3)、(4.4)式で定義される感度関数 $\mathbf{S}(s)$ および相補感度関数 $\mathbf{T}(s)$ における誤差システム $\mathbf{E}_S(s)$ 、 $\mathbf{E}_T(s)$ を評価に用いている。

$$\mathbf{E}_S(s) = \mathbf{S}(s) - \mathbf{S}_d(s) \quad (4.3)$$

$$\mathbf{E}_T(s) = \mathbf{T}(s) - \mathbf{T}_d(s) \quad (4.4)$$

$$\mathbf{S}_d(s) = (\mathbf{I}_{n_o} + \mathbf{L}_d(s))^{-1} \quad (4.5)$$

$$\mathbf{T}_d(s) = \mathbf{L}_d(s) (\mathbf{I}_{n_o} + \mathbf{L}_d(s))^{-1} \quad (4.6)$$

この際、 $\mathbf{E}_L(s)$ 、 $\mathbf{E}_S(s)$ および $\mathbf{E}_T(s)$ の伝達関数行列には (4.7) 式の関係が成り立つ。

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_T(s) &= -\mathbf{E}_S(s) \\ &= (\mathbf{I}_{n_o} + \mathbf{L}(s))^{-1} (\mathbf{L}(s) - \mathbf{L}_d(s)) (\mathbf{I}_{n_o} + \mathbf{L}_d(s))^{-1} \\ &= \mathbf{S}(s) \mathbf{E}_L(s) \mathbf{S}_d(s)\end{aligned}\quad (4.7)$$

(4.7) 式より、 $\mathbf{E}_T(s)$ ($\mathbf{E}_S(s)$) は開ループの誤差システム $\mathbf{E}_L(s)$ を $\mathbf{S}(s)$ および $\mathbf{S}_d(s)$ により重み付けしたものと解釈できる。ここで、一般に閉ループシステムにおける相互干渉の影響はゲイン交差周波数付近の中周波数域で顕著に現れることが知られており^[30]、これは (4.7) 式を用いて以下のように説明できる。高周波数域では、開ループ伝達関数 $\mathbf{L}(s)$ が厳密にプロパーであれば、 $\mathbf{E}_L(s)$ のゲインが低くなるため、 $\mathbf{E}_T(s)$ のゲインが低下する。また、低周波数域では、低感度化を目的として $\mathbf{L}(s)$ が積分特性を有するのであれば、 $\mathbf{S}(s)$ および $\mathbf{S}_d(s)$ のゲインが低くなるので、 $\mathbf{E}_T(s)$ のゲインも低くなる。したがって、誤差システム $\mathbf{E}_T(s)$ は、中周波数域でゲインが高くなる傾向にあり、閉ループにおける相互干渉の考え方に対応している。また、(4.7) 式は、開ループの誤差システム $\mathbf{E}_L(s)$ の最小化が閉ループの意味の非干渉化と直結しないことを表している。文献 [19] では閉ループにおける相互干渉に対する性能指標として、 $\mathbf{E}_T(s)$ 、 $\mathbf{E}_S(s)$ の H_∞ ノルムである (4.8) 式の γ_∞ を導入している。

$$\gamma_\infty = \|\mathbf{E}_T(s)\|_\infty = \|\mathbf{E}_S(s)\|_\infty = \|\mathbf{S}(s) \mathbf{E}_L(s) \mathbf{S}_d(s)\|_\infty \quad (4.8)$$

(4.8) 式の性能指標 γ_∞ により、閉ループの相互干渉に対する直接的な評価が可能である。一方で、 γ_∞ を用いる設計では $\mathbf{E}_L(s)$ だけでなく、制御器パラメータの関数となる $\mathbf{S}(s)$ 、 $\mathbf{S}_d(s)$ を考慮した設計が必要となる。

本研究では、周波数応答を用いて (4.8) 式の γ_∞ を抑える制御器設計を行う。上述の通り、開ループシステムに対する評価ではなく、 γ_∞ の評価を導入することにより、実際に動作させる閉ループにおける相互干渉を評価できる。

4.2 設計問題

本節では、4.1 にて説明した閉ループシステムの相互干渉に関する性能指標 γ_∞ を用いて設計問題を定式化する。この際、最適化問題の求解に関して、著者らが提案した評価に近似の導入の有無による 2 つの手法についてそれぞれ説明する。

性能指標 γ_∞ を抑制を考え、システムの特異値に関する制約を課した設計問題を (4.9) 式に示す。

$$\min_{\boldsymbol{\rho}, \gamma} \gamma \quad (4.9)$$

subject to

$$\bar{\sigma}(\mathbf{E}_T(j\omega_k, \boldsymbol{\rho})) \leq \gamma \quad (4.10)$$

$$\bar{\sigma}(\mathbf{S}(j\omega_k, \boldsymbol{\rho})) \leq S_{\max}(\omega_k) \quad (4.11)$$

$$\bar{\sigma}(\mathbf{T}(j\omega_k, \boldsymbol{\rho})) \leq T_{\max}(\omega_k) \quad (4.12)$$

$$\bar{\sigma}(\mathbf{Q}(j\omega_k, \boldsymbol{\rho})) \leq Q_{\max}(\omega_k) \quad (4.13)$$

$$\text{for } k = 1, \dots, N$$

(4.10)–(4.13) 式の制約式は、設計者があらかじめ定義した N 個の周波数点 ω_k ($k = 1, \dots, N$) に対して連立して付加される。この際、取得周波数点 ω_k を十分に細かく設けることにより、(4.10)–(4.13) 式の制約群は H_∞ ノルムと同等の評価を行うことが可能である。ゆえに、(4.10) 式における γ は、十分な周波数点で評価されれば γ_∞ と等価となる。また、(4.11)–(4.13) 式の制約式は、閉ループ特性の最大特異値に関する制約であり、 $\mathbf{S}(j\omega_k)$, $\mathbf{T}(j\omega_k)$, $\mathbf{Q}(j\omega_k)$ は (4.14)–(4.16) 式に示す伝達関数行列の周波数点 ω_k における周波数応答の値である。

$$\mathbf{S}(j\omega, \boldsymbol{\rho}) = (\mathbf{I}_{n_o} + \mathbf{L}(j\omega, \boldsymbol{\rho}))^{-1} \quad (4.14)$$

$$\mathbf{T}(j\omega, \boldsymbol{\rho}) = \mathbf{L}(j\omega, \boldsymbol{\rho}) (\mathbf{I}_{n_o} + \mathbf{L}(j\omega, \boldsymbol{\rho}))^{-1} \quad (4.15)$$

$$\mathbf{Q}(j\omega, \boldsymbol{\rho}) = \mathbf{C}(j\omega, \boldsymbol{\rho}) (\mathbf{I}_{n_o} + \mathbf{L}(j\omega, \boldsymbol{\rho}))^{-1} \quad (4.16)$$

$\mathbf{S}(j\omega)$ は感度関数、 $\mathbf{T}(j\omega)$ は相補感度関数、そして $\mathbf{Q}(j\omega)$ は指令値から操作量までの伝達関数行列を示す。また、(4.11)–(4.13) 式の $S_{\max}(\omega)$, $T_{\max}(\omega)$, そして $Q_{\max}(\omega)$ は $\mathbf{S}(j\omega)$, $\mathbf{T}(j\omega)$, $\mathbf{Q}(j\omega)$ の最大特異値に対する上界を表す実数値である。したがって、(4.9) 式の最適化問題を解くことにより、閉ループ特性を整形し、閉ループの相互干渉を抑制する制御器設計が可能となる。しかしながら、(4.10)–(4.13) 式の制約式は制御器パラメータ $\boldsymbol{\rho}$ に対して非凸な関数である。そのため、設計問題 (4.9) 式の求解は非常に困難であり、局所的最適解に陥る可能性が高くなる。これに対して、本手法では文献 [11] で提案されている最適化アルゴリズムである反復 LMI 制約を応用して求解を行う。この最適化アルゴリズムでは、ある種の非凸な問題を LMI 最適化計算の繰り返しにより解くことができる。この際、(4.11)–(4.13) 式に関しては、文献 [11] に倣って反

復 LMI 制約に適用することができる。しかし、(4.10) 式だけは $\mathbf{E}_T(j\omega)$ にパラメータ依存関数同士の積が多数存在するため、直接的に反復 LMI 制約を適用することができない。これに対して、これまで著者らの取り組みとして、 $\mathbf{E}_T(j\omega)$ を反復 LMI 制約に適用できる形に近似する手法、近似を行わずに反復 LMI 制約に基づいて線形化を行う手法を提案してきた。以下、4.2.1 節では近似を導入した手法、4.2.2 節では近似を行わない手法の設計問題について説明する。そして、反復 LMI 制約の適用については、近似の有無に対してそれぞれ 4.3.1, 4.3.2 節で述べる。

4.2.1 近似あり

本節では、設計問題における $\mathbf{E}_T(j\omega)$ を反復 LMI 制約に適用できる形式に近似を行う手法について説明する。(4.7) 式に示すように、 $\mathbf{E}_T(j\omega)$ は 3 つの伝達関数行列の積で表すことができる。また、設計問題として感度関数 $\mathbf{S}(j\omega)$ の最大特異値には (4.11) 式の制約が課される。以上のことから、上界 $S_{\max}(\omega)$ に対して各周波数点で (4.17) 式の不等式が成り立つ。

$$\begin{aligned}
 \bar{\sigma}(\mathbf{E}_T(j\omega_k, \boldsymbol{\rho})) &= \bar{\sigma}(\mathbf{S}(j\omega_k, \boldsymbol{\rho})\mathbf{E}_L(j\omega_k, \boldsymbol{\rho})\mathbf{S}_d(j\omega_k, \boldsymbol{\rho})) \\
 &\leq \bar{\sigma}(\mathbf{S}(j\omega_k, \boldsymbol{\rho}))\bar{\sigma}(\mathbf{E}_L(j\omega_k, \boldsymbol{\rho})\mathbf{S}_d(j\omega_k, \boldsymbol{\rho})) \\
 &\leq S_{\max}(\omega_k)\bar{\sigma}(\mathbf{E}_L(j\omega_k, \boldsymbol{\rho})\mathbf{S}_d(j\omega_k, \boldsymbol{\rho}))
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

この際、(4.17) 式の上界を $\hat{\gamma}$ として新たに定義し、本手法では $\hat{\gamma}$ を最小化する制御器設計を考える。ここで、 $\hat{\gamma}$ は本来評価すべき γ の上界を示す。したがって、 γ の抑制を厳密に保証することはできないが、上界値である $\hat{\gamma}$ の最小化により γ に関して性能の向上が期待できる。 $\hat{\gamma}$ を最小化する問題に記述しなおした設計問題を (4.18) 式に示す。

$$\min_{\boldsymbol{\rho}, \hat{\gamma}} \hat{\gamma} \tag{4.18}$$

subject to

$$\bar{\sigma}(\mathbf{E}_L(j\omega_k, \boldsymbol{\rho})\mathbf{S}_d(j\omega_k, \boldsymbol{\rho})) \leq \hat{\gamma}S_{\max}(\omega_k)^{-1} \tag{4.19}$$

$$\bar{\sigma}(\mathbf{S}(j\omega_k, \boldsymbol{\rho})) \leq S_{\max}(\omega_k) \tag{4.20}$$

$$\bar{\sigma}(\mathbf{T}(j\omega_k, \boldsymbol{\rho})) \leq T_{\max}(\omega_k) \tag{4.21}$$

$$\bar{\sigma}(\mathbf{Q}(j\omega_k, \boldsymbol{\rho})) \leq Q_{\max}(\omega_k) \tag{4.22}$$

for $k = 1, \dots, N$

$\mathbf{E}_T(j\omega_k)$ に対して (4.17) 式の近似を導入し、設計問題を (4.18) 式と記述することにより反復 LMI 制約を適用することができる。反復 LMI 制約による求解については 4.3.1 節にて説明する。

4.2.2 近似なし

前節の手法と異なり、この手法では $\mathbf{E}_T(j\omega)$ に対する (4.17) 式の近似を行わずに (4.9) 式の設計問題をそのまま考え、次節にて説明する反復 LMI 制約に基づいて LMI で問題を記述する。本節では反復 LMI 制約に適用する導入として、 $\mathbf{E}_T(j\omega)$ の制約式 (4.10) 式を等価な行列不等式に変換する。(4.7) 式より、(4.10) 式では以下の関係が成り立つ。

$$\begin{aligned}
 \bar{\sigma}(\mathbf{E}_T(j\omega_k, \boldsymbol{\rho})) &= \bar{\sigma}(\mathbf{S}(j\omega_k, \boldsymbol{\rho})\mathbf{E}_L(j\omega_k, \boldsymbol{\rho})\mathbf{S}_d(j\omega_k, \boldsymbol{\rho})) \leq \gamma \\
 &\Leftrightarrow \mathbf{S}_d^*(j\omega_k, \boldsymbol{\rho})\mathbf{E}_L^*(j\omega_k, \boldsymbol{\rho})\mathbf{S}^*(j\omega_k, \boldsymbol{\rho})\mathbf{S}(j\omega_k, \boldsymbol{\rho})\mathbf{E}_L(j\omega_k, \boldsymbol{\rho})\mathbf{S}_d(j\omega_k, \boldsymbol{\rho}) \leq \gamma^2 \mathbf{I}_{n_o} \\
 &\Leftrightarrow \mathbf{S}_d^{-*}(j\omega_k, \boldsymbol{\rho})\mathbf{S}_d^{-1}(j\omega_k, \boldsymbol{\rho}) \geq \mathbf{E}_L^*(j\omega_k, \boldsymbol{\rho}) \left[\mathbf{S}^*(j\omega_k, \boldsymbol{\rho}) \frac{1}{\gamma^2} \mathbf{S}(j\omega_k, \boldsymbol{\rho}) \right] \mathbf{E}_L(j\omega_k, \boldsymbol{\rho}) \\
 &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{S}_d^{-*}(j\omega_k, \boldsymbol{\rho})\mathbf{S}_d^{-1}(j\omega_k, \boldsymbol{\rho}) & \mathbf{E}_L^*(j\omega_k, \boldsymbol{\rho}) \\ \mathbf{E}_L(j\omega_k, \boldsymbol{\rho}) & \mathbf{S}^{-1}(j\omega_k, \boldsymbol{\rho})\gamma^2\mathbf{S}^{-*}(j\omega_k, \boldsymbol{\rho}) \end{bmatrix} \geq 0 \quad (4.23)
 \end{aligned}$$

ここで、(4.23) 式の最後の変換は $\mathbf{S}^{-1}(j\omega_k)\gamma^2\mathbf{S}^{-*}(j\omega_k) > 0$ より Schur complement を適用した。(4.23) 式は、(4.10) 式と等価な行列不等式である。ここで、(4.23) 式の行列不等式は各対角要素がパラメータ依存関数の積となり、LMI 制約とはならない。反復 LMI 制約に基づいた LMI への定式化は、4.3.2 節にて説明する。

4.3 反復 LMI 制約^[11]の適用

文献 [11] では、伝達関数行列の最大特異値に制約を課し、定常偏差を最小化する PID 制御器の設計法が提案されている。ここで、文献 [11] の手法においても $\mathbf{S}(j\omega)$ 、 $\mathbf{T}(j\omega)$ および $\mathbf{Q}(j\omega)$ の最大特異値に対して (4.11)–(4.13) 式と同様の制約式が付加されている。ゆえに、構成される設計問題はパラメータに対して非凸であり、求解が困難な問題となる。これに対して、文献 [11] では、LMI 最適化計算の繰り返しによって求解する最適化アルゴリズムである反復 LMI 制約を提案している。この最適化アルゴリズムでは、ある種の非凸な制約式の下界となる関数を LMI で記述し、制約式の更新と最適化計算を繰り返すことで準最適解を導出することが可能である。問題が LMI で記述されるた

め、求解が簡易な LMI 最適化を用いて非凸な問題を解くことができる。本節では、反復 LMI 制約のアルゴリズムについて説明し、本手法への適用を考える。

非特異な $n \times n$ の任意の複素行列 \mathbf{Y} , \mathbf{Z} , $\tilde{\mathbf{Z}}$ を考える。行列 \mathbf{Y} と \mathbf{Z}^{-1} の積の最大特異値に関して以下の (4.24) 式の関係が成り立つ。

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}(\mathbf{Y}\mathbf{Z}^{-1}) \leq 1 &\Leftrightarrow \mathbf{Z}^{-*}\mathbf{Y}^*\mathbf{Y}\mathbf{Z}^{-1} \leq \mathbf{I}_n \\ &\Leftrightarrow \mathbf{Z}^*\mathbf{Z} \geq \mathbf{Y}^*\mathbf{Y} \\ &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{Z}^*\mathbf{Z} & \mathbf{Y}^* \\ \mathbf{Y} & \mathbf{I}_n \end{bmatrix} \geq 0 \end{aligned} \quad (4.24)$$

ここで、最後の変換は Schur complement を適用した。また、行列 \mathbf{Z} および $\tilde{\mathbf{Z}}$ において (4.25) 式の不等式が成り立つ。

$$\begin{aligned} (\mathbf{Z} - \tilde{\mathbf{Z}})^*(\mathbf{Z} - \tilde{\mathbf{Z}}) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \mathbf{Z}^*\mathbf{Z} &\geq \mathbf{Z}^*\tilde{\mathbf{Z}} + \tilde{\mathbf{Z}}^*\mathbf{Z} - \tilde{\mathbf{Z}}^*\tilde{\mathbf{Z}} \end{aligned} \quad (4.25)$$

(4.25) 式より、(4.24) 式の十分条件 (4.26) 式を導出できる。

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}^*\tilde{\mathbf{Z}} + \tilde{\mathbf{Z}}^*\mathbf{Z} - \tilde{\mathbf{Z}}^*\tilde{\mathbf{Z}} &\geq \mathbf{Y}^*\mathbf{Y} \\ \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{Z}^*\tilde{\mathbf{Z}} + \tilde{\mathbf{Z}}^*\mathbf{Z} - \tilde{\mathbf{Z}}^*\tilde{\mathbf{Z}} & \mathbf{Y}^* \\ \mathbf{Y} & \mathbf{I}_n \end{bmatrix} &\geq 0 \end{aligned} \quad (4.26)$$

(4.26) 式は、元の行列関数 (4.24) 式の下界を示す関数となる。この際、(4.24) 式と (4.26) 式は、 \mathbf{Z} と $\tilde{\mathbf{Z}}$ が等しいときに等価な不等式となる。文献 [11] では、上記の (4.24)–(4.26) 式の関係を用いてパラメータに対して線形に定義された \mathbf{Z} , \mathbf{Y} に関する最適化問題をパラメータに依存しない $\tilde{\mathbf{Z}}$ を用いて LMI で記述する。ここで、 $\tilde{\mathbf{Z}}$ は現在のパラメータに対する \mathbf{Z} の値としている。上述の通り、(4.26) 式に示される LMI は、元の問題 (4.24) 式の十分条件であるが、最適化計算と現在の解に対する $\tilde{\mathbf{Z}}$ の更新の繰り返しにより解が収束して $\mathbf{Z} = \tilde{\mathbf{Z}}$ となれば (4.25) 式の等号が成り立ち、元の問題と等価となる。また、(4.26) 式は常に元の問題の下界を示すため、導出される解は元の制約を満たす。それに伴い、十分条件を用いて導かれる評価値より、元の問題に対する評価値は良好な値を示す。ゆえに、最適化計算と問題の更新繰り返しに対して評価値の単調収束が保証される。

以下では、上記の反復 LMI 制約のアルゴリズムに基づいて設計問題の LMI への定式化を行う。本手法の (4.11)–(4.13) 式の制約式に関しては、文献 [11] においても同様の制

約が付加されており，これに従って LMI に定式化する。(4.11)–(4.13) 式より，(4.27)–(4.29) 式に示すパラメータ ρ に対して線形な行列を定義する。

$$\mathbf{Y}_{Sk} = S_{\max}^{-1}(\omega_k) \mathbf{I}_{n_o} \quad (4.27)$$

$$\mathbf{Z}_{Sk}(\rho) = \mathbf{I}_{n_o} + \mathbf{L}(j\omega_k, \rho)$$

$$\mathbf{Y}_{Tk}(\rho) = T_{\max}^{-1}(\omega_k) \mathbf{L}(j\omega_k, \rho) \quad (4.28)$$

$$\mathbf{Z}_{Tk}(\rho) = \mathbf{I}_{n_o} + \mathbf{L}(j\omega_k, \rho)$$

$$\mathbf{Y}_{Qk}(\rho) = Q_{\max}^{-1}(\omega_k) \mathbf{C}(j\omega_k, \rho) \quad (4.29)$$

$$\mathbf{Z}_{Qk}(\rho) = \mathbf{I}_{n_o} + \mathbf{L}(j\omega_k, \rho)$$

$$\text{for } k = 1, \dots, N$$

この際，現在の解 ρ_{i-1} に対する関数の値として (4.30)–(4.32) 式を定義する。

$$\tilde{\mathbf{Z}}_{Sk}^{(i)} = \mathbf{Z}_{Sk}(\rho_{i-1}) \quad (4.30)$$

$$\tilde{\mathbf{Z}}_{Tk}^{(i)} = \mathbf{Z}_{Tk}(\rho_{i-1}) \quad (4.31)$$

$$\tilde{\mathbf{Z}}_{Qk}^{(i)} = \mathbf{Z}_{Qk}(\rho_{i-1}) \quad (4.32)$$

ここで， i は繰り返し回数を示す。これにより，制約式 (4.11)–(4.13) 式の十分条件は (4.24)–(4.26) 式の関係から，(4.33)–(4.35) 式と表せる。

$$\mathbf{Z}_{Sk}^*(\rho) \tilde{\mathbf{Z}}_{Sk}^{(i)} + \tilde{\mathbf{Z}}_{Sk}^{(i)*} \mathbf{Z}_{Sk}(\rho) - \tilde{\mathbf{Z}}_{Sk}^{(i)*} \tilde{\mathbf{Z}}_{Sk}^{(i)} \geq \mathbf{Y}_{Sk}^* \mathbf{Y}_{Sk} \quad (4.33)$$

$$\mathbf{Z}_{Tk}^*(\rho) \tilde{\mathbf{Z}}_{Tk}^{(i)} + \tilde{\mathbf{Z}}_{Tk}^{(i)*} \mathbf{Z}_{Tk}(\rho) - \tilde{\mathbf{Z}}_{Tk}^{(i)*} \tilde{\mathbf{Z}}_{Tk}^{(i)} \geq \mathbf{Y}_{Tk}^*(\rho) \mathbf{Y}_{Tk}(\rho) \quad (4.34)$$

$$\mathbf{Z}_{Qk}^*(\rho) \tilde{\mathbf{Z}}_{Qk}^{(i)} + \tilde{\mathbf{Z}}_{Qk}^{(i)*} \mathbf{Z}_{Qk}(\rho) - \tilde{\mathbf{Z}}_{Qk}^{(i)*} \tilde{\mathbf{Z}}_{Qk}^{(i)} \geq \mathbf{Y}_{Qk}^*(\rho) \mathbf{Y}_{Qk}(\rho) \quad (4.35)$$

そして，Schur complement の適用により，(4.33)–(4.35) 式は (4.36)–(4.38) 式に示す LMI で記述できる。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{Sk}^*(\rho) \tilde{\mathbf{Z}}_{Sk}^{(i)} + \tilde{\mathbf{Z}}_{Sk}^{(i)*} \mathbf{Z}_{Sk}(\rho) - \tilde{\mathbf{Z}}_{Sk}^{(i)*} \tilde{\mathbf{Z}}_{Sk}^{(i)} & \mathbf{Y}_{Sk}^* \\ \mathbf{Y}_{Sk} & \mathbf{I}_{n_o} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (4.36)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{Tk}^*(\rho) \tilde{\mathbf{Z}}_{Tk}^{(i)} + \tilde{\mathbf{Z}}_{Tk}^{(i)*} \mathbf{Z}_{Tk}(\rho) - \tilde{\mathbf{Z}}_{Tk}^{(i)*} \tilde{\mathbf{Z}}_{Tk}^{(i)} & \mathbf{Y}_{Tk}^*(\rho) \\ \mathbf{Y}_{Tk}(\rho) & \mathbf{I}_{n_o} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (4.37)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{Qk}^*(\rho) \tilde{\mathbf{Z}}_{Qk}^{(i)} + \tilde{\mathbf{Z}}_{Qk}^{(i)*} \mathbf{Z}_{Qk}(\rho) - \tilde{\mathbf{Z}}_{Qk}^{(i)*} \tilde{\mathbf{Z}}_{Qk}^{(i)} & \mathbf{Y}_{Qk}^*(\rho) \\ \mathbf{Y}_{Qk}(\rho) & \mathbf{I}_{n_o} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (4.38)$$

(4.36)–(4.38) 式の LMI 制約は、元の問題の (4.11)–(4.13) 式の制約式にそれぞれ対応する。ここで、4.2 節にて述べたように、(4.11)–(4.13) 式に対して $\mathbf{E}_T(j\omega)$ の制約式 (4.10) 式はパラメータ依存関数同士の積が多く存在するため、反復 LMI 制約をそのまま適用することができない。4.2 節同様、4.3.1, 4.3.2 節のそれぞれで近似を導入した手法、近似を行わない手法の反復 LMI 制約の適用について説明する。そして、LMI で記述された設計問題を示す。

4.3.1 近似あり

4.2.1 節にて述べたように、この手法では $\mathbf{E}_T(j\omega)$ に対する制約式 (4.10) 式を (4.19) 式のように近似する。この近似により、問題となっていたパラメータ依存関数同士の積が減り、反復 LMI 制約を適用することができる。近似された $\mathbf{E}_T(j\omega_k)$ に関する制約式 (4.19) 式より、(4.39) 式のパラメータ $\boldsymbol{\rho}$ に対して線形な行列を定義する。

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_{Dk}(\boldsymbol{\rho}) &= S_{\max}(\omega_k)[\mathbf{L}(j\omega_k, \boldsymbol{\rho}) - \mathbf{L}_d(j\omega_k, \boldsymbol{\rho})] \\ \mathbf{Z}_{Dk}(\boldsymbol{\rho}) &= \mathbf{I}_{n_o} + \mathbf{L}_d(j\omega_k, \boldsymbol{\rho}) \\ \text{for } k &= 1, \dots, N \end{aligned} \quad (4.39)$$

この際、現在の解 $\boldsymbol{\rho}_{i-1}$ に対する関数の値として、(4.40) 式を定義する。

$$\tilde{\mathbf{Z}}_{Dk}^{(i)} = \mathbf{Z}_{Dk}(\boldsymbol{\rho}_{i-1}) \quad (4.40)$$

これにより、制約式 (4.19) 式の十分条件は (4.24)–(4.26) 式の関係に基づき、(4.41) 式と表すことができる。

$$\mathbf{Z}_{Dk}^*(\boldsymbol{\rho})\tilde{\mathbf{Z}}_{Dk}^{(i)} + \tilde{\mathbf{Z}}_{Dk}^{(i)*}\mathbf{Z}_{Dk}(\boldsymbol{\rho}) - \tilde{\mathbf{Z}}_{Dk}^{(i)*}\tilde{\mathbf{Z}}_{Dk}^{(i)} \geq \mathbf{Y}_{Dk}^*(\boldsymbol{\rho})\left(\frac{1}{\hat{\gamma}}\right)^2\mathbf{Y}_{Dk}(\boldsymbol{\rho}) \quad (4.41)$$

そして、 $\hat{\gamma}^2 > 0$ より Schur complement を適用し、(4.41) 式は (4.42) 式に示す LMI で記述できる。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{Dk}^*(\boldsymbol{\rho})\tilde{\mathbf{Z}}_{Dk}^{(i)} + \tilde{\mathbf{Z}}_{Dk}^{(i)*}\mathbf{Z}_{Dk}(\boldsymbol{\rho}) - \tilde{\mathbf{Z}}_{Dk}^{(i)*}\tilde{\mathbf{Z}}_{Dk}^{(i)} & \mathbf{Y}_{Dk}^*(\boldsymbol{\rho}) \\ \mathbf{Y}_{Dk}(\boldsymbol{\rho}) & \hat{\gamma}^2\mathbf{I}_{n_o} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (4.42)$$

(4.42) 式は、反復 LMI 制約に基づいて LMI で記述された制約式であり、(4.19) 式に対応する。したがって、(4.36)–(4.38) 式の閉ループ特性の最大特異値に対する制約と併せ、

近似した問題 (4.18) 式を反復 LMI 制約に基づいて LMI に記述した設計問題は (4.43) 式となる。

$$\min_{\boldsymbol{\rho}, \hat{\gamma}^2} \hat{\gamma}^2 \quad (4.43)$$

subject to

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{Dk}^*(\boldsymbol{\rho}) \tilde{\mathbf{Z}}_{Dk}^{(i)} + \tilde{\mathbf{Z}}_{Dk}^{(i)*} \mathbf{Z}_{Dk}(\boldsymbol{\rho}) - \tilde{\mathbf{Z}}_{Dk}^{(i)*} \tilde{\mathbf{Z}}_{Dk}^{(i)} & \mathbf{Y}_{Dk}^*(\boldsymbol{\rho}) \\ \mathbf{Y}_{Dk}(\boldsymbol{\rho}) & \hat{\gamma}^2 \mathbf{I}_{n_o} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (4.44)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{Sk}^*(\boldsymbol{\rho}) \tilde{\mathbf{Z}}_{Sk}^{(i)} + \tilde{\mathbf{Z}}_{Sk}^{(i)*} \mathbf{Z}_{Sk}(\boldsymbol{\rho}) - \tilde{\mathbf{Z}}_{Sk}^{(i)*} \tilde{\mathbf{Z}}_{Sk}^{(i)} & \mathbf{Y}_{Sk}^* \\ \mathbf{Y}_{Sk} & \mathbf{I}_{n_o} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (4.45)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{Tk}^*(\boldsymbol{\rho}) \tilde{\mathbf{Z}}_{Tk}^{(i)} + \tilde{\mathbf{Z}}_{Tk}^{(i)*} \mathbf{Z}_{Tk}(\boldsymbol{\rho}) - \tilde{\mathbf{Z}}_{Tk}^{(i)*} \tilde{\mathbf{Z}}_{Tk}^{(i)} & \mathbf{Y}_{Tk}^*(\boldsymbol{\rho}) \\ \mathbf{Y}_{Tk}(\boldsymbol{\rho}) & \mathbf{I}_{n_o} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (4.46)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{Qk}^*(\boldsymbol{\rho}) \tilde{\mathbf{Z}}_{Qk}^{(i)} + \tilde{\mathbf{Z}}_{Qk}^{(i)*} \mathbf{Z}_{Qk}(\boldsymbol{\rho}) - \tilde{\mathbf{Z}}_{Qk}^{(i)*} \tilde{\mathbf{Z}}_{Qk}^{(i)} & \mathbf{Y}_{Qk}^*(\boldsymbol{\rho}) \\ \mathbf{Y}_{Qk}(\boldsymbol{\rho}) & \mathbf{I}_{n_o} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (4.47)$$

for $k = 1, \dots, N$

(4.44)–(4.47) 式の各制約式が、元の問題の (4.19)–(4.22) 式に対応している。そして、各行列不等式のすべての要素がパラメータに対して線形であるため、(4.43) 式の問題は LMI 最適化により求解できる。4.3 節にて述べたように、下界の関数で記述された設計問題 (4.43) 式を解くことにより、元の設計問題 (4.18) 式の制約式を満たす解を得ることができる。このように、(4.43) 式の問題の解集合は、元の問題 (4.18) 式の解集合における現在の解 $\boldsymbol{\rho}_{i-1}$ を含む凸部分集合となる。ゆえに、(4.43) 式で導出される新たな解は元の制約を満たし、現在の解の評価値より小さい評価値 $\hat{\gamma}$ を達成する。したがって、制約を満たす初期解 $\boldsymbol{\rho}_0$ を与えることにより、現在の解 $\boldsymbol{\rho}_{i-1}$ における最適化問題の更新と (4.43) 式の最適化計算の繰り返しに対して評価値の単調収束が保証される。そして、繰り返しによる解の収束に伴って (4.44)–(4.47) 式が (4.19)–(4.22) 式と一致するため、LMI を用いた最適化問題 (4.43) 式が元の問題 (4.18) 式と等価な評価となる。したがって、(4.43) 式より、近似的ではあるが、LMI 最適化を用いて γ を小さくする制御器設計を行うことができる。

4.3.2 近似なし

4.2.2 節にて述べたように、この手法では 4.2.1 節の $\mathbf{E}_T(j\omega)$ に対する近似を導入せず、設計問題 (4.9) 式を求解する。(4.23) 式に示すように、 $\mathbf{E}_T(j\omega)$ の制約式 (4.10) 式は等価な行列不等式で表現できる。しかし、パラメータ依存関数同士の積が多く存在するため LMI とならず、加えて、そのまま反復 LMI 制約を適用できない。そこで、この手法では反復 LMI 制約のアルゴリズムに基づいて制約式の LMI への定式化を行う。

$\mathbf{E}_T(j\omega_k)$ に関する制約式 (4.23) 式より、(4.48) 式の制御器パラメータ $\boldsymbol{\rho}$ に対して線形な以下の行列を定義する。

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{Dk}(\boldsymbol{\rho}) &= \mathbf{I}_{n_o} + \mathbf{L}(j\omega_k, \boldsymbol{\rho}) \\ \mathbf{Y}_{Dk}(\boldsymbol{\rho}) &= \mathbf{L}(j\omega_k, \boldsymbol{\rho}) - \mathbf{L}_d(j\omega_k, \boldsymbol{\rho}) \\ \mathbf{Z}_{Dk}(\boldsymbol{\rho}) &= \mathbf{I}_{n_o} + \mathbf{L}_d(j\omega_k, \boldsymbol{\rho}) \\ &\text{for } k = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (4.48)$$

また、評価値 γ に対して (4.49) 式の変数変換を行う。

$$\Gamma = \gamma^{-2} (> 0) \quad (4.49)$$

この際、現在の解 $\boldsymbol{\rho}_{i-1}$ に対する関数の値として、(4.50)–(4.51) 式を定義する。

$$\tilde{\mathbf{X}}_{Dk}^{(i)} = \mathbf{X}_{Dk}(\boldsymbol{\rho}_{i-1}) \quad (4.50)$$

$$\tilde{\mathbf{Z}}_{Dk}^{(i)} = \mathbf{Z}_{Dk}(\boldsymbol{\rho}_{i-1}) \quad (4.51)$$

さらに、現在の解に対する Γ の値を $\tilde{\Gamma}^{(i)}$ とする。そして、等価な行列不等式 (4.23) 式を反復 LMI 制約に基づいて LMI に定式化するため、(1, 1) 要素に加えて (2, 2) 要素も線形化を行い、下界となる関数を導出する。(1, 1) 要素に関しては、(4.24)–(4.26) 式の関係に基づいて線形化できる。これに対して、(2, 2) 要素では、 \mathbf{X}_{Dk} 、 $\tilde{\mathbf{X}}_{Dk}^{(i)}$ および Γ 、 $\tilde{\Gamma}^{(i)}$ により表現される (4.52) 式の関係を考える。

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{\Gamma} \mathbf{X}_{Dk}(\boldsymbol{\rho}) - \frac{1}{\tilde{\Gamma}^{(i)}} \tilde{\mathbf{X}}_{Dk}^{(i)} \right) \left(\frac{1}{\Gamma} \mathbf{X}_{Dk}(\boldsymbol{\rho}) - \frac{1}{\tilde{\Gamma}^{(i)}} \tilde{\mathbf{X}}_{Dk}^{(i)} \right)^* \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{\Gamma} \mathbf{X}_{Dk}(\boldsymbol{\rho}) \mathbf{X}_{Dk}^*(\boldsymbol{\rho}) \\ &\geq \frac{1}{\tilde{\Gamma}^{(i)}} \left(\mathbf{X}_{Dk}(\boldsymbol{\rho}) \tilde{\mathbf{X}}_{Dk}^{(i)*} + \tilde{\mathbf{X}}_{Dk}^{(i)} \mathbf{X}_{Dk}^*(\boldsymbol{\rho}) \right) - \frac{\Gamma}{\tilde{\Gamma}^{(i)2}} \tilde{\mathbf{X}}_{Dk}^{(i)} \tilde{\mathbf{X}}_{Dk}^{(i)*} \end{aligned} \quad (4.52)$$

(4.52) 式の関係は常に成り立ち、(4.52) 式の右辺はパラメータに対して線形で (2, 2) 要素の下界の関数となる。そして、 $\mathbf{X}_{Dk} = \tilde{\mathbf{X}}_{Dk}^{(i)}$ および $\Gamma = \tilde{\Gamma}^{(i)}$ となった際に等号が成立

する。ゆえに、(4.52) 式の下界関数を用いた場合においても、反復 LMI 制約のアルゴリズムに則り、元の制約を満たしつつ評価値の単調収束を保証し、収束に伴って元の問題と等価となる。

以上より、LMI で記述された設計問題を (4.53) 式に示す。

$$\max_{\boldsymbol{\rho}, \Gamma} \Gamma \quad (4.53)$$

subject to

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{Dk}^*(\boldsymbol{\rho})\tilde{\mathbf{Z}}_{Dk}^{(i)} + \tilde{\mathbf{Z}}_{Dk}^{(i)*}\mathbf{Z}_{Dk}(\boldsymbol{\rho}) - \tilde{\mathbf{Z}}_{Dk}^{(i)*}\tilde{\mathbf{Z}}_{Dk}^{(i)} & \mathbf{Y}_{Dk}^*(\boldsymbol{\rho}) \\ \mathbf{Y}_{Dk}(\boldsymbol{\rho}) & \frac{1}{\Gamma^{(i)}} \left(\mathbf{X}_{Dk}(\boldsymbol{\rho})\tilde{\mathbf{X}}_{Dk}^{(i)*} + \tilde{\mathbf{X}}_{Dk}^{(i)}\mathbf{X}_{Dk}^*(\boldsymbol{\rho}) \right) - \frac{\Gamma}{\Gamma^{(i)2}} \tilde{\mathbf{X}}_{Dk}^{(i)}\tilde{\mathbf{X}}_{Dk}^{(i)*} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (4.54)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{Sk}^*(\boldsymbol{\rho})\tilde{\mathbf{Z}}_{Sk}^{(i)} + \tilde{\mathbf{Z}}_{Sk}^{(i)*}\mathbf{Z}_{Sk}(\boldsymbol{\rho}) - \tilde{\mathbf{Z}}_{Sk}^{(i)*}\tilde{\mathbf{Z}}_{Sk}^{(i)} & \mathbf{Y}_{Sk}^* \\ \mathbf{Y}_{Sk} & \mathbf{I}_{n_o} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (4.55)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{Tk}^*(\boldsymbol{\rho})\tilde{\mathbf{Z}}_{Tk}^{(i)} + \tilde{\mathbf{Z}}_{Tk}^{(i)*}\mathbf{Z}_{Tk}(\boldsymbol{\rho}) - \tilde{\mathbf{Z}}_{Tk}^{(i)*}\tilde{\mathbf{Z}}_{Tk}^{(i)} & \mathbf{Y}_{Tk}^*(\boldsymbol{\rho}) \\ \mathbf{Y}_{Tk}(\boldsymbol{\rho}) & \mathbf{I}_{n_o} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (4.56)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{Qk}^*(\boldsymbol{\rho})\tilde{\mathbf{Z}}_{Qk}^{(i)} + \tilde{\mathbf{Z}}_{Qk}^{(i)*}\mathbf{Z}_{Qk}(\boldsymbol{\rho}) - \tilde{\mathbf{Z}}_{Qk}^{(i)*}\tilde{\mathbf{Z}}_{Qk}^{(i)} & \mathbf{Y}_{Qk}^*(\boldsymbol{\rho}) \\ \mathbf{Y}_{Qk}(\boldsymbol{\rho}) & \mathbf{I}_{n_o} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (4.57)$$

for $k = 1, \dots, N$

ここで、(4.49) 式の変数変換により、評価関数は等価的に $\max \Gamma$ と表現できる。そして、(4.54)–(4.57) 式の各制約式が、元の問題の (4.19)–(4.22) 式に対応する。各行列不等式のすべての要素がパラメータ $\boldsymbol{\rho}$ および Γ に対して線形であるため、(4.53) 式の問題は LMI 最適化計算で求解できる。4.3 節において述べたように、設計問題 (4.53) 式により、元の設計問題 (4.18) 式の制約式を満足する解が得られる。また、制約を満たす初期解 $\boldsymbol{\rho}_0$ を与えることにより、現在の解 $\boldsymbol{\rho}_{i-1}$ における最適化問題の更新と (4.53) 式の最適化計算の繰り返しに対して評価値の単調収束が保証される。そして、繰り返しによる解の収束に伴って (4.54)–(4.57) 式が (4.19)–(4.22) 式と一致するため、LMI を用いた最適化問題 (4.43) 式が元の問題 (4.9) 式と等価な評価となる。

4.2.1 および 4.3.1 節にて述べた手法では、(4.17) 式に示す近似により $\mathbf{E}_T(j\omega)$ に対して直接的な評価が行うことができない。ゆえに、直接的な評価を行う場合と比べ、保守的になることは明らかである。これに対して、4.2.2 および本節の近似を行わない手法では、下界となる関数の導入は増すが、 $\mathbf{E}_T(j\omega)$ の直接的な評価が可能であり、より

良好な評価値 γ の達成が期待できる。また、これらの手法で用いる反復 LMI 制約では、大域的最適解に収束する保証はなく、局所的最適解あるいは鞍点に収束する可能性がある。しかしながら、上述の通り (4.9) 式のような非凸な関数を含む最適化問題に対して、評価値の単調収束を保証して LMI 最適化により簡易に準最適解を導出することが可能である。

4.4 閉ループシステムの安定性

2.3 節にて述べたように、MIMO システムにおける閉ループシステムの安定性は、開ループ伝達関数行列 $\mathbf{L}(j\omega)$ の固有値軌跡 $\lambda_q(j\omega)$ により評価することができる。本節では、固有値軌跡による安定性評価に基づいて、本章で提案した手法により設計される閉ループシステムの安定性について議論する。

本手法では、(4.9) 式の設計問題を考え、文献 [11] の反復 LMI 制約を用いて制御器を設計する。4.3 節にて述べたように、反復 LMI 制約では、LMI 最適化計算と最適化問題の繰り返しにより求解を行う。そして、初期解が制約を満たすのであれば、アルゴリズムの繰り返しに対して、制約式を満たした上で評価値の単調収束が保証される。この性質は、LMI で記述された最適化問題の解集合が、元の問題の解集合の部分集合となることに起因する。この際、感度関数 $\mathbf{S}(j\omega)$ に対する制約式 (4.11) 式により、常に以下の関係が成り立つ。

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}(\mathbf{S}(j\omega_k, \boldsymbol{\rho})) &\leq S_{\max}(\omega_k) \\ \Leftrightarrow S_{\max}^{-1}(\omega_k) &\leq \frac{1}{\bar{\sigma}(\mathbf{S}(j\omega_k, \boldsymbol{\rho}))} = \underline{\sigma}(\mathbf{S}^{-1}(j\omega_k, \boldsymbol{\rho})) = \underline{\sigma}(\mathbf{I}_{n_o} + \mathbf{L}(j\omega_k, \boldsymbol{\rho})) \end{aligned} \quad (4.58)$$

$$\Rightarrow S_{\max}^{-1}(\omega_k) \leq |1 + \lambda_q(j\omega_k, \boldsymbol{\rho})|, \quad q = 1, \dots, n_o \quad (4.59)$$

ここで、最後の (4.59) 式は、固有値と特異値の関係より導出される。(4.11) 式の制約式が課されることにより、固有値軌跡 $\lambda_q(j\omega_k)$ は常に臨界点 $(-1, j0)$ との間に $S_{\max}^{-1}(\omega_k)$ (> 0) 以上の余裕をとる設計がなされる (図 4.1)。そして、反復 LMI 制約のアルゴリズムより、(4.59) 式が満足される部分集合が常に解範囲となるため、初期解からの調整で固有値軌跡が臨界点を回ることはない。ゆえに、初期解がシステムを安定化するならば、本手法で設計される閉ループシステムは安定となる。

周波数応答を用いた制御器設計では、あらかじめ定義した有限の離散周波数点 ω_k に対して最適化計算を行う。そのため、設計されたシステムが連続な全周波数で制約を満たしている保証はなく、上述の安定性に関しても厳密性があると言えない。しかし

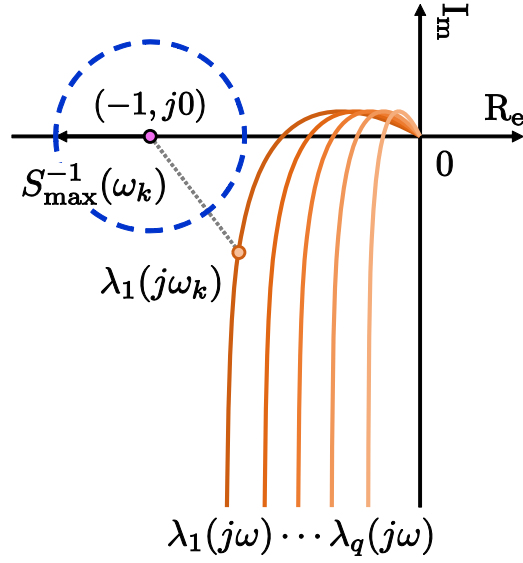


図 4.1: 安定性の評価

ながら、周波数点 ω_k を細かく且つ、広い範囲で設定することにより、実用上で十分な性能を確保することは可能である。さらに、この設計手法では、複数の周波数応答で構成される制約式を並列して最適化計算を行うことが容易にできる。制御対象より複数周波数応答を取得し、データのバラつきを不確かさと捉えると、不確かさに対しても指定した制御性能を保証する設計がなされる。ゆえに、簡易にロバストなシステムを設計することが可能である。

4.5 シミュレーション

本節では、本章で説明した手法のシミュレーションを行い、他手法との比較を通して有効性を検証する。本シミュレーションにおいて、各手法を以下のように呼称する。

Method 1 : 本章の近似を導入して閉ループの相互干渉を抑制する制御器設計手法

Method 2 : 本章の近似を行わずに閉ループの相互干渉を抑制する制御器設計手法

Method 3 : 3 章にて提案した開ループの対角優勢を評価する手法

Method 4 : 2 章の Galdos らにより提案された文献 [7] の手法

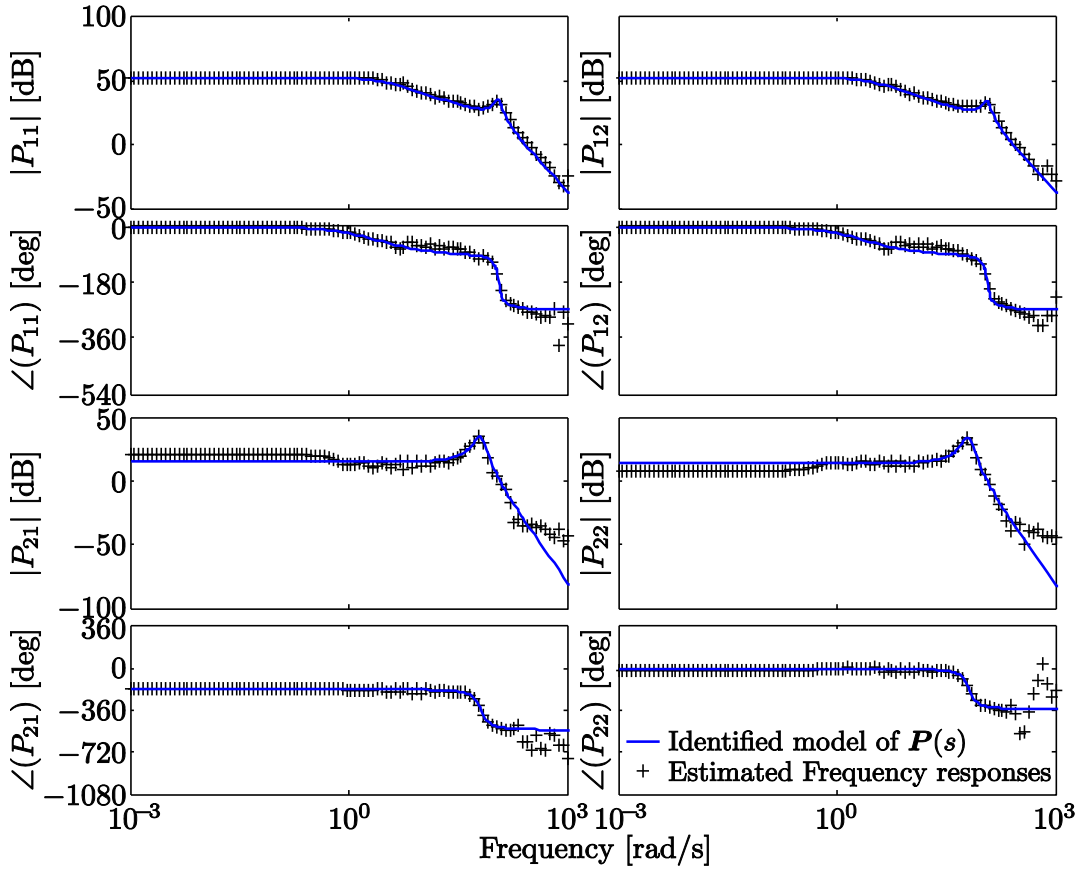


図 4.2: 制御対象の同定したモデルの周波数応答

制御対象は、3.7 節にて用いた張力速度制御装置の数式モデルを用いる。取得した周波数応答より、試行錯誤的に数式モデルを (4.60) 式と同定した (図 4.2)。

$$P(s) = \begin{bmatrix} \frac{1.4838 \times 10^7}{(s+2.556)(s^2+20.58s+1.298 \times 10^4)} & \frac{1.4368 \times 10^7}{(s+2.484)(s^2+21.14s+1.315 \times 10^4)} \\ \frac{-1.0550 \times 10^8}{(s^2+16.77s+3818)(s^2+26.17s+4721)} & \frac{8.7290 \times 10^7}{(s^2+16.66s+3589)(s^2+21.66s+4754)} \end{bmatrix} \quad (4.60)$$

設計周波数点は、 10^{-3} – 10^3 rad/s の区間で対数的に等間隔な 300 点とした。設計する制御器は、すべての手法において (4.61) 式に示す擬似微分器を含む PID 制御器とした。

$$C(s, \rho) = \begin{bmatrix} \rho_1 & \rho_2 & \rho_3 & \rho_4 & \rho_5 & \rho_6 \\ \rho_7 & \rho_8 & \rho_9 & \rho_{10} & \rho_{11} & \rho_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_2 \\ \frac{1}{s} I_2 \\ \frac{s}{1+0.03s} I_2 \end{bmatrix} \quad (4.61)$$

そして, Method 1, 2, 3 の手法における初期解 ρ_0 は閉ループシステムを安定化する (4.62) 式とした。

$$\rho_0 = \begin{bmatrix} -1.561 \times 10^{-2} & 3.500 \times 10^{-2} & 6.238 \times 10^{-1} & -1.358 & 7.119 \times 10^{-4} & -1.545 \times 10^{-3} \\ 2.088 \times 10^{-2} & -3.646 \times 10^{-2} & -5.996 \times 10^{-1} & 1.396 & -7.712 \times 10^{-4} & 1.397 \times 10^{-3} \end{bmatrix} \quad (4.62)$$

また, Method 1, 2 の制約における上界値 S_{\max} , T_{\max} , Q_{\max} は (4.63) 式と設定した。

$$S_{\max}(\omega) = \left| \frac{1.6(j\omega + 0.001)}{j\omega + 8} \right|, \quad T_{\max} = 1.6, \quad Q_{\max} = 0.3870 \quad (4.63)$$

ここで, (4.63) 式の設定パラメータは文献 [11] を参考に定めた値である。Method 3 における重み $W_f(\omega)$, W_{cp} および, 安定余裕 M は (4.64) 式と設定した。

$$W_f = \omega, \quad W_{c1} = W_{c2} = 1, \quad M = 1.6 \quad (4.64)$$

ここで, $W_f(\omega)$ および W_{cp} は, 初期解 ρ_0 に対する開ループ伝達関数行列 $\mathbf{L}(j\omega)$ のゲイン特性より, (3.3) 式の対角優勢の評価がすべての設計周波数点に対して概ね均等となるように決定した。安定余裕 M は, 各手法の設計条件を近くするため, (4.63) 式の S_{\max} の上界値となる 1.6 とした。そして, Method 4 における望みの開ループ伝達関数行列 $\mathbf{L}_D(s)$ の対角要素 $L_{D1}(s)$, $L_{D2}(s)$ は, 制御器のハイゲイン化を達成できるように試行錯誤的に (4.65) 式とした。

$$L_{D1}(s) = \frac{30}{s}, \quad L_{D2}(s) = \frac{400}{s(s+40)} \quad (4.65)$$

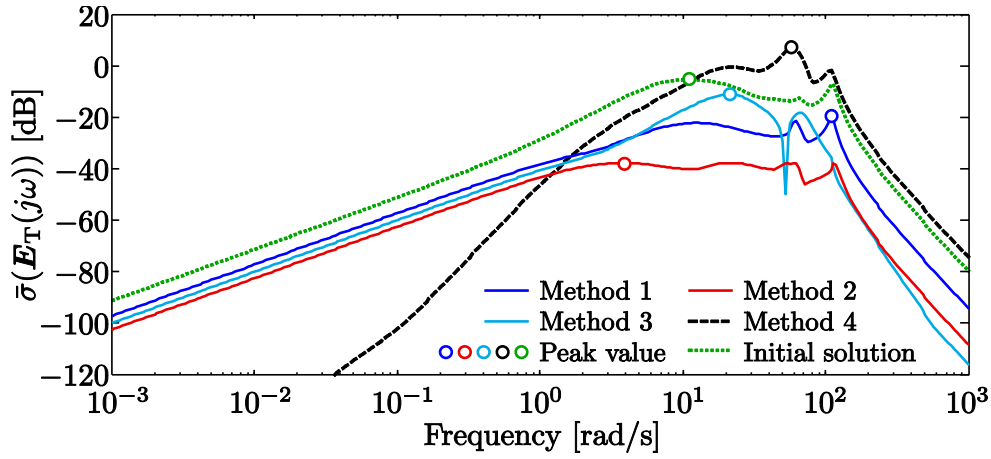
また, Method 4 においても最低限の感度整形を行ため, (2.5) 式に示したロバスト性能条件におけるノミナル性能のみを評価し, 感度を指定する重み $W_{1q}(j\omega)$ は (4.66) 式の定数で与えた。

$$W_{1q} = \frac{1}{1.6}, \quad q = 1, 2 \quad (4.66)$$

そして, Method 1, 2, 3 の求解アルゴリズムの収束条件は, 繰り返しに対する評価値の相対誤差が 3 回連続して $10^{-3} \%$ を下回ることとする。

表 4.1: 評価値の比較

	Evaluation value γ [dB]	Frequency [rad/s]
Method 1	-19.8	109
Method 2	-37.7	3.91
Method 3	-11.0	20.6
Method 4	7.47	57.0
Initial solution	-5.31	11.3


 図 4.3: 評価値 γ

Method 1–4 により，調整されたパラメータを (4.67)–(4.70) 式に示す。

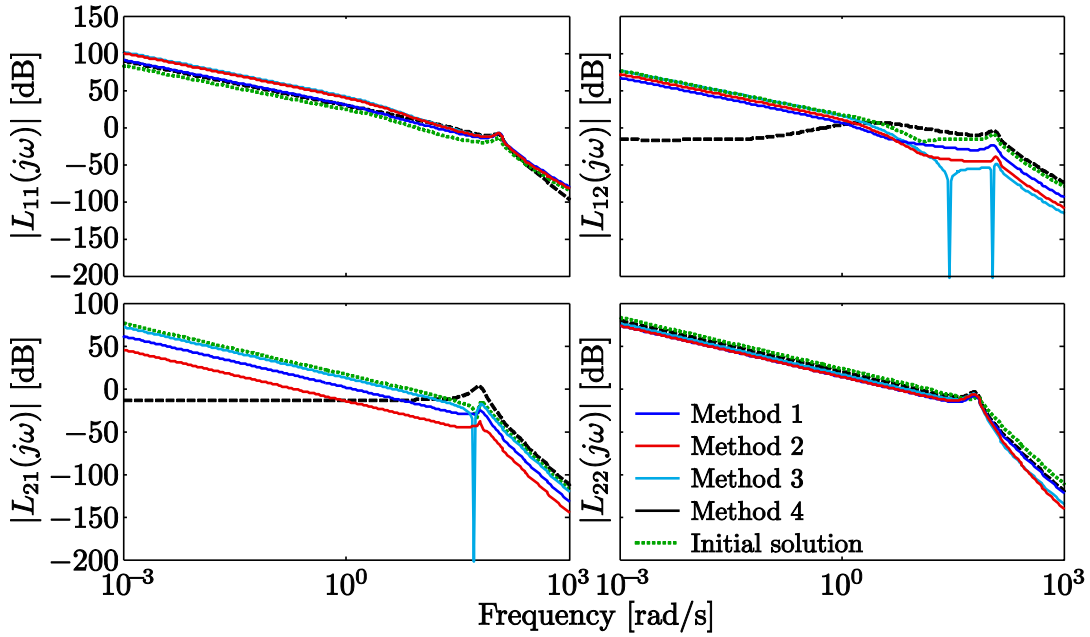
$$\rho_{M1} = \begin{bmatrix} 3.865 \times 10^{-3} & 5.919 \times 10^{-3} & 1.451 \times 10^{-1} & -4.447 \times 10^{-1} & 7.8670 \times 10^{-6} & -3.101 \times 10^{-4} \\ 8.513 \times 10^{-3} & -4.877 \times 10^{-3} & -6.784 \times 10^{-2} & 4.574 \times 10^{-1} & -1.897 \times 10^{-4} & 2.440 \times 10^{-4} \end{bmatrix} \quad (4.67)$$

$$\rho_{M2} = \begin{bmatrix} 7.584 \times 10^{-3} & 7.757 \times 10^{-3} & 9.437 \times 10^{-2} & -4.490 \times 10^{-1} & -1.689 \times 10^{-4} & -2.245 \times 10^{-4} \\ 6.3340 \times 10^{-3} & -7.714 \times 10^{-3} & 1.456 \times 10^{-1} & 4.654 \times 10^{-1} & -1.011 \times 10^{-4} & 2.153 \times 10^{-4} \end{bmatrix} \quad (4.68)$$

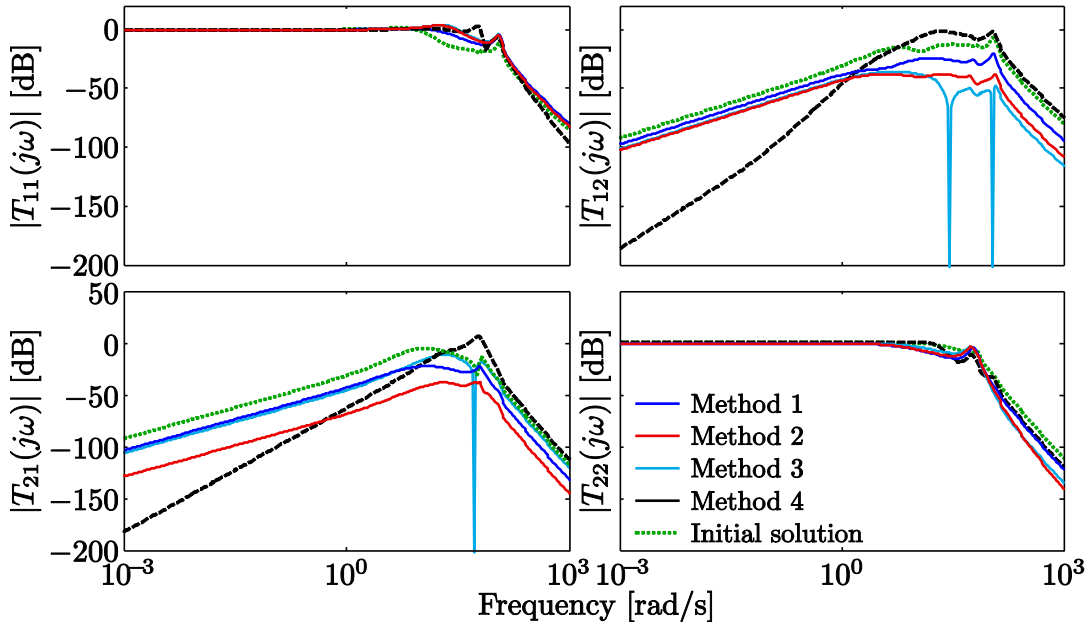
$$\rho_{M3} = \begin{bmatrix} 1.873 \times 10^{-2} & 1.364 \times 10^{-2} & -2.496 \times 10^{-1} & -6.242 \times 10^{-1} & -6.329 \times 10^{-4} & -4.377 \times 10^{-4} \\ -4.735 \times 10^{-3} & -1.411 \times 10^{-2} & 5.384 \times 10^{-1} & 6.501 \times 10^{-1} & 3.672 \times 10^{-4} & 4.495 \times 10^{-4} \end{bmatrix} \quad (4.69)$$

$$\rho_{M4} = \begin{bmatrix} -8.410 \times 10^{-3} & 4.223 \times 10^{-2} & 3.157 \times 10^{-2} & -9.046 \times 10^{-1} & -8.928 \times 10^{-5} & -1.589 \times 10^{-3} \\ 3.421 \times 10^{-2} & -3.272 \times 10^{-2} & 3.612 \times 10^{-2} & 9.195 \times 10^{-1} & -6.801 \times 10^{-4} & 9.330 \times 10^{-4} \end{bmatrix} \quad (4.70)$$

Method 1 は 33 回，Method 2 は 21 回，そして Method 3 は 11 回で設定した収束条件を満足した。表 4.1 に各手法の閉ループの相互干渉に対する評価値を示し，取得周波数における評価した $\bar{\sigma}(E_T(j\omega))$ の値を図 4.3 に示す。本章にて提案した Method 1, 2 の


 図 4.4: 開ループ伝達関数行列 $L(j\omega)$ のゲイン線図

結果を初期解と比較すると、それぞれ 15 dB, 30 dB 程度評価値を抑制できている。また、Method 1, 2 と同じ初期解から設計した開ループの評価を行う Method 3 についても、Method 1, 2 程の性能の向上は見られないが、初期解より閉ループに対する評価値を下げることはできている。一方で、Method 4 では、 10^0 を切る低周波数域では $\bar{\sigma}(\mathbf{E}_T(j\omega))$ を下げているが、評価値となるピーク値は最も大きく、7.47 dB となってしまった。これらの結果は、3 章の最後にて述べた開ループと閉ループの間で生じる相互干渉に対する評価の差異によるもの大きいと考えられる。4.1 節にて述べたように、閉ループシステムにおける相互干渉の影響はゲイン交差周波数付近で顕著となり、逆に、低周波数域および高周波数域では影響は少なくなる。Method 1, 2 が直接的にこの閉ループの評価をできるのに対し、Method 3, 4 の開ループの評価では閉ループの評価に基本的には直結せず、重要な周波数域が重点的に評価されることはない。実際に、図 4.4 に示す開ループ伝達関数行列 $L(j\omega)$ のゲイン線図を見ると、特に Method 4 が非対角要素のゲインを抑制し、非干渉化を達成できているように見える。これに対して、図 4.5 の閉ループシステム（相補感度関数）のゲイン線図では、低周波数域において非対角要素のゲインを抑制できてはいるが、ピーク値は Method 4 が最も大きくなってしまっている。低周波数域における非対角要素のゲインは、他手法の結果においても -40 dB 程度まで抑制されており、相互干渉が定常ゲインの $1/100$ 倍以下となれば影響の違いは大差ない。しかし、ピーク値は、無視できる大きさではなく、相互干渉の影


 図 4.5: 相補感度関数 $T(j\omega)$ のゲイン線図

響が生じて応答が劣化してしまう。このように、相互干渉に関する開ループと閉ループの評価の間には明確に差異が存在し、設計結果に大きく影響を及ぼす。この点から、閉ループの相互干渉を評価できる Method 1 および Method 2 の有用性がわかる。

本シミュレーションにおいて、Method 3 は Method 1, 2 より対角要素で制御帯域を上げ、初期解より閉ループの相互干渉を抑制できている。そのため、今回の結果から優劣をつけることはできないが、Method 3 も開ループの評価のみを行っており、閉ループの相互干渉が必ずしも抑制される保証はない。一方で、重み $W_f(\omega)$ によりゲイン交差周波数付近の評価を重み付けすることで、閉ループシステムの相互干渉を意識した調整はできると考えられる。しかしながら、設計時に交差周波数を推定することは困難であり、設定には煩雑さを伴う。これに対して、Method 1, 2 では簡易に閉ループの相互干渉に対する直接的な評価が可能である。また、制御帯域に関しても、Method 1, 2 では閉ループ特性に対する制約 S_{\max} , T_{\max} , Q_{\max} を調整することにより、改善を図ることができ、その上で閉ループの相互干渉を抑制できる。

最後に、Method 1 と Method 2 を比較すると、Method 2 の方が評価値を 20 dB 近く下げることができている。これは、(4.17) 式の近似により、Method 1 において本来の γ を評価できずに保守性が生じることに起因する。これに対して、Method 2 では、 γ に対する近似を行わず、直接的な評価が可能であるため、より相互干渉を抑制することができたと考えられる。

本シミュレーションでは，開ループと閉ループの評価の間に存在する差異を示し，閉ループの相互干渉を評価する意義を明確にした。そして，本章で提案した手法を用いることにより，閉ループシステムにおける相互干渉を抑制する制御器設計が可能であることを確認した。また，本章の手法における近似を導入する手法の保守性について述べ，近似を導入しない手法の優位性を示した。

第5章 相互干渉を評価する極調整可能な制御器設計

前章までの手法および文献 [7][11] の従来手法では，制御器は (2.1) 式のようにパラメータに対して線形に定義しなければならなかった。このパラメータ化では，制御器の次数や構造は指定できるが，調整パラメータは線形に表現できる範囲に限定される。ゆえに，制御器の極調整はできず，指定された次数で実現できる特性のすべてが最適化問題の解領域に含まれないため，達成される制御性能に限界が生じてしまう。本章では，4.2 節にて示した設計問題と同じ問題を考えた上で，制御器の分子多項式だけでなく分母多項式（極）も調整する制御器設計手法を提案し，制御性能の向上を図る。

5.1 制御器のパラメータ化

本節では，設計する制御器のパラメータ化について説明する。文献 [7] の手法をはじめとした従来手法，そして，前章までで説明した手法では，設計する制御器を 2.1 節に示した (2.1) 式のように定義していた。(2.1) 式の制御器は，制御器パラメータ ρ に対して線形に表現されており，基底関数である $\phi(s)$ によって次数や構造を指定できる。しかし，線形にパラメータ化しなければならないため，制御器の極を調整することができない。したがって，指定された次数制御器の次数に対して，達成される制御性能が限界付けられてしまう。これに対して，本章で提案する手法では (5.1) 式に示す制御器のパラメータ化を用いる。

$$\begin{aligned} C(s, \eta, \rho) &= C_C(sI_\vartheta - A_C)^{-1}B_C + D_C \\ &= \frac{1}{\det(sI_\vartheta - A_C)}[C_C \text{adj}(sI_\vartheta - A_C)B_C + \det(sI_\vartheta - A_C)D_C] \\ &= \frac{1}{\eta^T \phi_D(s)} \rho^T \phi_N(s) =: \frac{1}{\mathcal{D}(s, \eta)} \mathcal{N}(s, \rho) \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$\phi_D(s) = [s^\vartheta \quad s^{\vartheta-1} \quad \dots \quad 1]^T \quad (5.2)$$

$$\phi_N(s) = [s^\vartheta I_{n_o} \quad s^{\vartheta-1} I_{n_o} \quad \dots \quad I_{n_o}]^T \quad (5.3)$$

ここで、 \mathbf{A}_C , \mathbf{B}_C , \mathbf{C}_C および \mathbf{D}_C は制御器の状態空間モデルを表す。(5.1) 式の伝達関数表現に基づき、制御器を分母多項式 $\mathcal{D}(s)$ と分子行列多項式 $\mathcal{N}(s)$ に分解して考える。そして、 $\phi_D(s)$, $\phi_N(s)$ は制御器の分母多項式 $\mathcal{D}(s)$ および分子行列多項式 $\mathcal{N}(s)$ における基底関数ベクトルであり、パラメータ行列 $\boldsymbol{\eta}$, $\boldsymbol{\rho}$ を用いて $\mathcal{D}(s)$, $\mathcal{N}(s)$ をそれぞれパラメータ化する。ここで、分母多項式 $\mathcal{D}(s)$ の最高次数の係数は 1 とする。また、 ϑ は制御器の次数を表し、設計者が任意に指定する。したがって、(5.1) 式のパラメータ化により、極の調整も含めた固定次数制御器の設計が可能となる。

5.2 設計問題

4.1 節にて述べたように、(4.8) 式の γ_∞ を小さくすることにより、閉ループシステムにおける相互干渉を抑制することができる。本章の手法においても、この相互干渉に対する性能指標 γ_∞ に基づいて制御器の設計を行う。 γ_∞ を抑制し、閉ループ特性の特異値に関する制約を課した設計問題を (5.4) 式に示す。

$$\min_{\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\rho}, \gamma} \gamma \quad (5.4)$$

subject to

$$\bar{\sigma}(\mathbf{E}_T(j\omega_k, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\rho})) \leq \gamma \quad (5.5)$$

$$\bar{\sigma}(\mathbf{S}(j\omega_k, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\rho})) \leq S_{\max}(\omega_k) \quad (5.6)$$

$$\bar{\sigma}(\mathbf{T}(j\omega_k, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\rho})) \leq T_{\max}(\omega_k) \quad (5.7)$$

$$\bar{\sigma}(\mathbf{Q}(j\omega_k, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\rho})) \leq Q_{\max}(\omega_k) \quad (5.8)$$

for $k = 1, \dots, N$

ここで、設計問題 (5.4) 式は、4 章の手法の設計問題 (4.9) 式と同様の評価を表す。ただし、本章の手法においては、5.1 節にて定義した (5.1) 式のパラメータ化を採り入れ、制御器の極も併せた調整を行う。そして、(5.5)–(5.8) 式の制約式は、あらかじめ定義した N 個の周波数点 ω_k ($k = 1, \dots, N$) に対して連立して付加される。4.2 節にて述べたように、取得離散周波数点 ω_k を十分に細かく設定することにより、(5.5)–(5.8) 式の制約群は H_∞ ノルムと同等の評価となる。したがって、(5.5) 式における γ は、十分な周波数点で評価されれば γ_∞ と等価となる。(5.6)–(5.8) 式の制約式は、閉ループ特性の最大特異値に関する制約であり、 $\mathbf{S}(j\omega)$, $\mathbf{T}(j\omega)$, $\mathbf{Q}(j\omega)$ を制御器パラメータ $\boldsymbol{\eta}$, $\boldsymbol{\rho}$ に

対して (5.9)–(5.11) 式と再定義する。

$$\mathbf{S}(j\omega, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\rho}) = (\mathbf{I}_{n_o} + \mathbf{L}(j\omega, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\rho}))^{-1} \quad (5.9)$$

$$\mathbf{T}(j\omega, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\rho}) = \mathbf{L}(j\omega, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\rho}) (\mathbf{I}_{n_o} + \mathbf{L}(j\omega, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\rho}))^{-1} \quad (5.10)$$

$$\mathbf{Q}(j\omega, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\rho}) = \mathbf{C}(j\omega, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\rho}) (\mathbf{I}_{n_o} + \mathbf{L}(j\omega, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\rho}))^{-1} \quad (5.11)$$

$\mathbf{S}(j\omega)$ は感度関数, $\mathbf{T}(j\omega)$ は相補感度関数, そして $\mathbf{Q}(j\omega)$ は指令値から操作量までの伝達関数行列を示す。そして, (5.6)–(5.8) 式の $S_{\max}(\omega)$, $T_{\max}(\omega)$, $Q_{\max}(\omega)$ は $\mathbf{S}(j\omega)$, $\mathbf{T}(j\omega)$, $\mathbf{Q}(j\omega)$ の最大特異値に対する上界値を表す。ゆえに, (5.4) 式の最適化問題により, 閉ループ特性を整形し, 閉ループの相互干渉を抑制する極調整可能な制御器設計ができる。しかし, (5.5)–(5.8) 式の制約式は制御器パラメータ $\boldsymbol{\eta}$, $\boldsymbol{\rho}$ に対して非凸な関数となる。そのため, 設計問題 (5.4) 式の求解は非常に困難であり, 局所的最適解に陥る可能性が高くなる。これに対して, 本手法では, 4.3 節にて説明した文献 [11] の反復 LMI 制約を応用して求解を行う。この最適化アルゴリズムでは, ある種の非凸な問題を LMI 最適化計算の繰り返しにより解くことができる。アルゴリズムについては, 本論文 4.3 節を参照されたい。次節では, 反復 LMI 制約の本手法への適用を考える。

5.3 反復 LMI 制約の適用

本節では, ある種の非凸な関数に対する最適化アルゴリズムである反復 LMI 制約^[11]を本手法に適用する。この最適化アルゴリズムでは, 非凸な制約式の下界となる関数を LMI で記述し, 制約式の更新と LMI 最適化計算を繰り返すことで準最適解を導出することが可能である。問題が LMI で記述されるため, 求解が簡易な LMI 最適化を用いて非凸な問題を解くことができる。アルゴリズムの詳細は, 本論文 4.3 節および文献 [11] を参照されたい。

設計問題 (5.4) 式に対して, (5.12)–(5.17) 式に示す行列を定義する。

$$\mathcal{L}(j\omega, \boldsymbol{\rho}) = \mathbf{P}(j\omega) \mathcal{N}(j\omega, \boldsymbol{\rho}) \quad (5.12)$$

$$\mathcal{L}_d(j\omega, \boldsymbol{\rho}) = \text{diag} \{ \mathcal{L}_{11}(j\omega, \boldsymbol{\rho}), \dots, \mathcal{L}_{nn}(j\omega, \boldsymbol{\rho}) \} \quad (5.13)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{Dk}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\rho}) &= \mathcal{D}(j\omega_k, \boldsymbol{\eta}) \mathbf{I}_{n_o} + \mathcal{L}(j\omega_k, \boldsymbol{\rho}) \\ \mathbf{Y}_{Dk}(\boldsymbol{\rho}) &= \mathcal{L}(j\omega_k, \boldsymbol{\rho}) - \mathcal{L}_d(j\omega_k, \boldsymbol{\rho}) \end{aligned} \quad (5.14)$$

$$\mathbf{Z}_{Dk}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\rho}) = \mathcal{D}(j\omega_k, \boldsymbol{\eta}) \mathbf{I}_{n_o} + \mathcal{L}_d(j\omega_k, \boldsymbol{\rho})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_{Sk}(\boldsymbol{\eta}) &= S_{\max}(\omega_k)^{-1} \mathcal{D}(j\omega_k, \boldsymbol{\eta}) \mathbf{I}_{n_o} \\ \mathbf{Z}_{Sk}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\rho}) &= \mathcal{D}(j\omega_k, \boldsymbol{\eta}) \mathbf{I}_{n_o} + \mathcal{L}(j\omega_k, \boldsymbol{\rho}) \end{aligned} \quad (5.15)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_{Tk}(\boldsymbol{\rho}) &= T_{\max}(\omega_k)^{-1} \mathcal{L}(j\omega_k, \boldsymbol{\rho}) \\ \mathbf{Z}_{Tk}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\rho}) &= \mathcal{D}(j\omega_k, \boldsymbol{\eta}) \mathbf{I}_{n_o} + \mathcal{L}(j\omega_k, \boldsymbol{\rho}) \end{aligned} \quad (5.16)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_{Qk}(\boldsymbol{\rho}) &= Q_{\max}(\omega_k)^{-1} \mathcal{N}(j\omega_k, \boldsymbol{\rho}) \\ \mathbf{Z}_{Qk}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\rho}) &= \mathcal{D}(j\omega_k, \boldsymbol{\eta}) \mathbf{I}_{n_o} + \mathcal{L}(j\omega_k, \boldsymbol{\rho}) \end{aligned} \quad (5.17)$$

for $k = 1, \dots, N$

また, 4.3.2 節と同様に, 評価値 γ に対して (5.18) 式の変数変換を行う。

$$\Gamma = \gamma^{-2} (> 0) \quad (5.18)$$

上記の定義より, 設計問題 (5.4) 式は, (5.19) 式の等価な行列不等式で構成された問題で表現される。

$$\max_{\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\rho}, \Gamma} \Gamma \quad (5.19)$$

subject to

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\mathcal{D}^*(j\omega_k)\mathcal{D}(j\omega_k)} \mathbf{Z}_{Dk}^* \mathbf{Z}_{Dk} & \mathbf{Y}_{Dk}^* \\ \mathbf{Y}_{Dk} & \Gamma^{-1} \mathbf{X}_{Dk} \mathbf{X}_{Dk}^* \end{bmatrix} \geq 0 \quad (5.20)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{Sk}^* \mathbf{Z}_{Sk} & \mathbf{Y}_{Sk}^* \\ \mathbf{Y}_{Sk} & \mathbf{I}_{n_o} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (5.21)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{Tk}^* \mathbf{Z}_{Tk} & \mathbf{Y}_{Tk}^* \\ \mathbf{Y}_{Tk} & \mathbf{I}_{n_o} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (5.22)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{Qk}^* \mathbf{Z}_{Qk} & \mathbf{Y}_{Qk}^* \\ \mathbf{Y}_{Qk} & \mathbf{I}_{n_o} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (5.23)$$

for $k = 1, \dots, N$

ここで, (5.20) 式は (5.24) 式の式変形により導出される。

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}(\mathbf{E}_T(j\omega_k, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\rho})) &= \bar{\sigma}(\mathbf{S}(j\omega_k, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\rho})\mathbf{E}_L(j\omega_k, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\rho})\mathbf{S}_d(j\omega_k, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\rho})) \leq \gamma \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{\mathcal{D}^*(j\omega_k, \boldsymbol{\eta})\mathcal{D}(j\omega_k, \boldsymbol{\eta})}\mathbf{Z}_{Dk}^*(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\rho})\mathbf{Z}_{Dk}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\rho}) \\ &\geq \mathbf{Y}_{Dk}^*(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\rho})[\mathbf{X}_{Dk}^{-*}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\rho})\Gamma\mathbf{X}_{Dk}^{-1}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\rho})]\mathbf{Y}_{Dk}(\boldsymbol{\rho})\end{aligned}\quad (5.24)$$

そして, (5.20)–(5.23) 式は, それぞれ (5.5)–(5.8) 式の制約式に対応し, Schur complement の適用により等価な行列不等式で表現されている。この際, 現在の解 $\boldsymbol{\eta}_{i-1}$, $\boldsymbol{\rho}_{i-1}$ に対する関数の値として (5.25)–(5.29) 式を定義する。 i は, 繰り返し回数を示す。

$$\tilde{\mathbf{X}}_{Dk}^{(i)} = \mathbf{X}_{Dk}(\boldsymbol{\eta}_{i-1}, \boldsymbol{\rho}_{i-1}) \quad (5.25)$$

$$\tilde{\mathbf{Z}}_{Dk}^{(i)} = \mathbf{Z}_{Dk}(\boldsymbol{\eta}_{i-1}, \boldsymbol{\rho}_{i-1}) \quad (5.26)$$

$$\tilde{\mathbf{Z}}_{Sk}^{(i)} = \mathbf{Z}_{Sk}(\boldsymbol{\eta}_{i-1}, \boldsymbol{\rho}_{i-1}) \quad (5.27)$$

$$\tilde{\mathbf{Z}}_{Tk}^{(i)} = \mathbf{Z}_{Tk}(\boldsymbol{\eta}_{i-1}, \boldsymbol{\rho}_{i-1}) \quad (5.28)$$

$$\tilde{\mathbf{Z}}_{Qk}^{(i)} = \mathbf{Z}_{Qk}(\boldsymbol{\eta}_{i-1}, \boldsymbol{\rho}_{i-1}) \quad (5.29)$$

ここで, $\mathbf{S}(j\omega)$, $\mathbf{T}(j\omega)$ および $\mathbf{Q}(j\omega)$ に関する制約式 (5.21)–(5.23) 式は反復 LMI 制約のアルゴリズムを適用することにより, LMI 最適化の繰り返しによる求解が可能である。しかしながら, $\mathbf{E}_T(j\omega)$ に関する制約式 (5.20) 式は, 行列の (1, 1) および (2, 2) 要素にパラメータ依存関数の積が存在し, 現状のままでは LMI とはならない。そのため, (5.20) 式のみは, 以下の方法により下界となる LMI 制約を導出する。

各周波数点 ω_k で (5.30) 式を満たす実数 $\Phi_k (> 0)$ を導入し, Schur complement により等価な (5.31) 式に変換する。

$$\Phi_k \geq \mathcal{D}^*(j\omega_k)\mathcal{D}(j\omega_k) \quad (5.30)$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \Phi_k & \mathcal{D}^*(j\omega_k) \\ \mathcal{D}(j\omega_k) & 1 \end{bmatrix} \geq 0 \quad (5.31)$$

そして, Φ_k を用いて $\mathbf{E}_T(j\omega)$ の制約式 (5.20) 式の十分条件である (5.32) 式を導出する。

$$\begin{bmatrix} \Phi_k^{-1}\mathbf{Z}_{Dk}^*\mathbf{Z}_{Dk} & \mathbf{Y}_{Dk}^* \\ \mathbf{Y}_{Dk} & \lambda^{-1}\mathbf{X}_{Dk}\mathbf{X}_{Dk}^* \end{bmatrix} \geq 0 \quad (5.32)$$

未だ (5.32) 式は (1, 1) および (2, 2) 要素にパラメータ依存関数の積が存在し, LMI とはならない。そこで, 上記に示した反復 LMI 制約のアルゴリズムに基づいて (5.20) 式の

下界となる関数を導出する。まず, (5.32) 式の (1, 1) 要素に注目してパラメータに対して線形な下界となる関数を導く。 Φ_k , そして現在の解に対する Φ_k である $\tilde{\Phi}_k^{(i)}$, \mathbf{Z}_{Dk} および $\tilde{\mathbf{Z}}_{Dk}^{(i)}$ の間には, (5.33) 式の関係が成り立つ。

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\Phi_k} \mathbf{Z}_{Dk} - \frac{1}{\tilde{\Phi}_k^{(i)}} \tilde{\mathbf{Z}}_{Dk}^{(i)} \right)^* \left(\frac{1}{\Phi_k} \mathbf{Z}_{Dk} - \frac{1}{\tilde{\Phi}_k^{(i)}} \tilde{\mathbf{Z}}_{Dk}^{(i)} \right) \geq 0 \\ & \Leftrightarrow \frac{1}{\Phi_k} \mathbf{Z}_{Dk}^* \mathbf{Z}_{Dk} \geq \frac{1}{\tilde{\Phi}_k^{(i)}} \left(\mathbf{Z}_{Dk}^* \tilde{\mathbf{Z}}_{Dk}^{(i)} + \tilde{\mathbf{Z}}_{Dk}^{(i)*} \mathbf{Z}_{Dk} \right) - \frac{\Phi_k}{\tilde{\Phi}_k^{(i)2}} \tilde{\mathbf{Z}}_{Dk}^{(i)*} \tilde{\mathbf{Z}}_{Dk}^{(i)} \quad (5.33) \end{aligned}$$

そして, (5.33) 式の右辺は (1, 1) 要素の下界の関数となり, これはパラメータに対して線形に表現される。(2, 2) 要素においても同様の手順より, 下界となる関数を導出できる。

以上より, LMI で記述された本手法の設計問題は (5.34) 式となる。

$$\max_{\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\rho}, \Gamma} \Gamma \quad (5.34)$$

subject to

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\tilde{\Phi}_k^{(i)}} \left(\mathbf{Z}_{Dk}^*(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\rho}) \tilde{\mathbf{Z}}_{Dk}^{(i)} + \tilde{\mathbf{Z}}_{Dk}^{(i)*} \mathbf{Z}_{Dk}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\rho}) \right) - \frac{\Phi_k}{\tilde{\Phi}_k^{(i)2}} \tilde{\mathbf{Z}}_{Dk}^{(i)*} \tilde{\mathbf{Z}}_{Dk}^{(i)} & \star \\ \mathbf{Y}_{Dk}(\boldsymbol{\rho}) & \mathbf{Y}_{Dk}^*(\boldsymbol{\rho}) \end{bmatrix} \geq 0 \quad (5.35)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\tilde{\Gamma}^{(i)}} \left(\mathbf{X}_{Dk}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\rho}) \tilde{\mathbf{X}}_{Dk}^{(i)*} + \tilde{\mathbf{X}}_{Dk}^{(i)} \mathbf{X}_{Dk}^*(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\rho}) \right) - \frac{\Gamma}{\tilde{\Gamma}^{(i)2}} \tilde{\mathbf{X}}_{Dk}^{(i)} \tilde{\mathbf{X}}_{Dk}^{(i)*} & \star \\ \mathbf{Z}_{Sk}^*(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\rho}) \tilde{\mathbf{Z}}_{Sk}^{(i)} + \tilde{\mathbf{Z}}_{Sk}^{(i)*} \mathbf{Z}_{Sk}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\rho}) - \tilde{\mathbf{Z}}_{Sk}^{(i)*} \tilde{\mathbf{Z}}_{Sk}^{(i)} & \mathbf{Y}_{Sk}^*(\boldsymbol{\eta}) \\ \mathbf{Y}_{Sk}(\boldsymbol{\eta}) & \mathbf{I}_{n_o} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (5.36)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{Tk}^*(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\rho}) \tilde{\mathbf{Z}}_{Tk}^{(i)} + \tilde{\mathbf{Z}}_{Tk}^{(i)*} \mathbf{Z}_{Tk}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\rho}) - \tilde{\mathbf{Z}}_{Tk}^{(i)*} \tilde{\mathbf{Z}}_{Tk}^{(i)} & \mathbf{Y}_{Tk}^*(\boldsymbol{\rho}) \\ \mathbf{Y}_{Tk}(\boldsymbol{\rho}) & \mathbf{I}_{n_o} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (5.37)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{Qk}^*(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\rho}) \tilde{\mathbf{Z}}_{Qk}^{(i)} + \tilde{\mathbf{Z}}_{Qk}^{(i)*} \mathbf{Z}_{Qk}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\rho}) - \tilde{\mathbf{Z}}_{Qk}^{(i)*} \tilde{\mathbf{Z}}_{Qk}^{(i)} & \mathbf{Y}_{Qk}^*(\boldsymbol{\rho}) \\ \mathbf{Y}_{Qk}(\boldsymbol{\rho}) & \mathbf{I}_{n_o} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (5.38)$$

$$\begin{bmatrix} \Phi_k & \mathcal{D}^*(j\omega_k, \boldsymbol{\eta}) \\ \mathcal{D}(j\omega_k, \boldsymbol{\eta}) & 1 \end{bmatrix} \geq 0 \quad (5.39)$$

for $k = 1, \dots, N$

ここで, $\tilde{\Gamma}^{(i)}$ は現在の解に対する Γ の値を示す。下界の関数により記述した LMI(5.34) 式を解くことにより, 元の設計問題 (5.4) 式の制約式を満たす解を得ることができる。

このように、(5.34) 式の問題の解集合は、元の問題 (5.4) 式の解集合における現在の解 η_{i-1} , ρ_{i-1} を含む凸部分集合となる。したがって、反復 LMI 制約のアルゴリズム同様、現在の解に対する最適化問題の更新と (5.34) 式の最適化計算の繰り返しに対して評価値の単調収束が保証される。そして、繰り返しによる解の収束に伴って (5.35)–(5.38) 式が (5.5)–(5.8) 式と一致するため、LMI を用いた最適化問題 (5.34) 式が元の問題 (5.4) 式と等価な評価となる。4.3.2 節においても述べたが、この最適化アルゴリズムでは、大域的最適解に収束する保証はなく、局所的最適解あるいは鞍点に収束する可能性がある。しかしながら、(5.4) 式のような非凸な関数を含む最適化問題に対して、評価値の単調収束を保証して LMI 最適化により簡易に準最適解を導出することができる。

5.4 閉ループシステムと制御器の安定性

本節では、設計される閉ループシステムおよび制御器自体の安定性について述べる。4.4 節にて述べたように、制御器をパラメータに対して線形に定義した場合、反復 LMI 制約の性質により固有値軌跡 $\lambda_q(s)$ の臨界点に対する回転数は変化せず、閉ループシステムの安定性を確保できた。しかし、本章の手法では制御器の極もパラメータ化されるため、調整中に開ループ伝達関数行列 $\mathbf{L}(s)$ の不安定極の数が増加し、安定化させるのに必要な臨界点に対する回転数が変わる可能性がある。ゆえに、現状のままでは、安定性の条件を必ずしも満足できず、4.4 節の考えは適用されない。一方で、制御器が不安定極を持つことは、閉ループシステムを安定化させることが可能であっても、耐故障性の観点からは好ましくない。これは、機器の故障等によりループが切れた際に制御器が不安定であると、そのままシステム全体が不安定となり、さらなる故障に繋がるためである。この点から、本手法において制御器自体が不安定極を持たないための制約を定式化する。これにより、不安定な極零相殺が存在しなければ、開ループ伝達関数行列 $\mathbf{L}(s)$ の不安定極の数は変化せず、固有値軌跡 $\lambda_q(s)$ に必要とされる回転数も変わらない。したがって、制御器が不安定極を持たなければ、4.4 節と同様の考え方により設計される閉ループシステムの安定性も確保される。ただし、制御器が安定でかつ、システムを安定化する初期解が存在することを前提とする。

本手法では、 $\det(s\mathbf{I}_\theta - \mathbf{A}_C)$ ($= \mathcal{D}(s)$) のベクトル軌跡を評価し、初期解の軌跡における原点に対する回転数を制御器調整後も維持することを考える。Nyquist 安定判別の考えに基づき、軌跡の回転数が変化しなければ $\mathcal{D}(s)$ の不安定零点の数は変わらず、制御器 $\mathbf{C}(s)$ の不安定極の数も変化しない。ゆえに、初期解により安定な制御器が構成される場合、制御器自体の安定性は常に維持される。この際、現在の解 η_{i-1} により定義

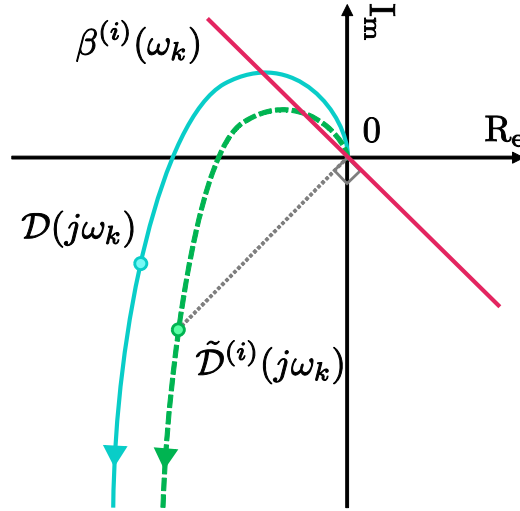


図 5.1: 制御器の安定制約

される $\tilde{\mathcal{D}}^{(i)}(s)$ の軌跡上の周波数点 ω_k の $\tilde{\mathcal{D}}^{(i)}(j\omega_k)$ から原点に引かれた直線と直交し、原点を通る (5.40) 式の直線 $\beta^{(i)}(\omega_k)$ を定義する (図 5.1)。

$$\beta^{(i)}(\omega_k) : \text{Re} \left\{ \tilde{\mathcal{D}}^{(i)}(j\omega_k) \right\} x + \text{Im} \left\{ \tilde{\mathcal{D}}^{(i)}(j\omega_k) \right\} y = 0 \quad (5.40)$$

ここで、 x は実軸、 y は虚軸を表す。そして、全周波数点で $\mathcal{D}(j\omega_k)$ が直線 $\beta^{(i)}(\omega_k)$ に対して点 $\tilde{\mathcal{D}}^{(i)}(j\omega_k)$ が存在する側にあれば、 $\mathcal{D}(s)$ 軌跡の回転数は現在の解から変化しない、すなわち、初期解から変わらない。この条件は、(5.41) 式に示すパラメータ η に対する線形制約で記述できる。

$$\begin{aligned} & \text{Re} \left\{ \tilde{\mathcal{D}}^{(i)}(j\omega_k) \right\} \text{Re} \left\{ \mathcal{D}(j\omega_k) \right\} + \text{Im} \left\{ \tilde{\mathcal{D}}^{(i)}(j\omega_k) \right\} \text{Im} \left\{ \mathcal{D}(j\omega_k) \right\} \\ &= \text{Re} \left\{ \tilde{\mathcal{D}}^{(i)*}(j\omega_k) \mathcal{D}(j\omega_k, \eta) \right\} \geq 0 \end{aligned} \quad (5.41)$$

したがって、(5.41) 式の制約式により、設計する制御器の安定性を確保することができる。(5.41) 式はパラメータに対して線形であるため、反復 LMI 制約のアルゴリズム内で LMI で記述された設計問題 (5.34) 式に付加しても、凸最適化計算による求解を可能とする。さらに、(5.41) 式により制御器が不安定極を持たないため、制御器 $\mathbf{C}(s)$ 内での不安定な極零相殺は起こり得ない。したがって、上述のように、4.4 節と同様の考えから、閉ループシステムの安定性も保証される。この詳細については、本論文 4.4 節を参照されたい。

結果として、本章の手法を用いることで、LMI 最適化により閉ループの相互干渉を抑制する制御器の設計が極の調整を含めて可能となる。この際、制御器およびシステ

ムを安定にする初期解が存在すれば，閉ループシステムの安定性を保証した安定な制御器が設計される。本手法に必要な初期解 η_0 , ρ_0 や制約における上界値の設定は，現状動作が確認されている制御器や制御性能を基準にすればよい。また，複数取得した周波数応答で構成される制約式を並列することにより，制御対象の変動に対しても指定した制御性能を保証するロバストなシステムを容易に設計できる。

5.5 シミュレーション

本節では，本章で説明した手法のシミュレーションを行い，有効性を検証する。各小節の内容および目的は以下の通りである。

シミュレーション 1: 他手法との比較

文献 [31] に記載されているプラズマ・イオン・エッチングの数式モデルを用いてシミュレーションを行う。相互干渉の観点から，本章で提案した手法の有効性を他手法との比較を通して検証する。

シミュレーション 2: 不安定な制御対象

文献 [12] に記載されている遠隔操縦飛行機 (RPV) の数式モデルを用いてシミュレーションを行う。不安定な制御対象に対して，本手法によりシステムを安定化する制御器調整が可能であることを示す。

また，本シミュレーションにおいて，各手法を以下のように呼称する。

Method 1 : 本章にて提案した相互干渉を抑制する極調整可能な制御器設計手法

Method 2 : 4 章の近似を行わずに閉ループの相互干渉を抑制する制御器設計手法

Method 3 : 2 章の Galdos らにより提案された文献 [7] の手法

5.5.1 シミュレーション 1

本節では，複数の手法との比較を通して Method 1 の有効性を検証する。シミュレーションは，プラズマ・イオン・エッチングの制御^[31]を例にとった。制御対象となるモ

デルは, (5.42) 式に示すように, むだ時間と不安定零点を持つ安定な 2 入力 2 出力システムである。

$$\mathbf{P}(s) = \begin{bmatrix} \frac{-7.242(s-2.768)e^{-0.4s}}{(s+1.958)(s+0.1165)} & \frac{-394.5(s-5.118)}{(s^2+5.84s+18.81)} \\ \frac{0.0799(s-7.41)e^{-0.4s}}{(s+1.04)(s+0.130)} & \frac{-2.71(s-0.359)}{(s+1.43)(s+0.198)} \end{bmatrix} \quad (5.42)$$

設計周波数点は, 10^{-3} – 10^3 rad/s の区間で対数的に等間隔な 300 点とした。そして, 取得した周波数応答を用いて, それぞれ以下の条件で制御器設計を行う。設計する制御器は, 線形にパラメータ化を行う Method 2, 3 では (5.43) 式, 極もパラメータ化する Method 1 では (5.44) 式とし, いずれも擬似微分器を含む PID 制御器を表す。

$$\mathbf{C}_{\text{pre}}(s, \boldsymbol{\rho}) = \begin{bmatrix} \rho_1 & \rho_2 & \rho_3 & \rho_4 & \rho_5 & \rho_6 \\ \rho_7 & \rho_8 & \rho_9 & \rho_{10} & \rho_{11} & \rho_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 \\ \frac{1}{s}\mathbf{I}_2 \\ \frac{s}{1+0.03s}\mathbf{I}_2 \end{bmatrix} \quad (5.43)$$

$$\mathbf{C}_{\text{pro}}(s, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\rho}) = \frac{1}{\mathcal{D}(s, \boldsymbol{\eta})} \begin{bmatrix} \rho_1 & \rho_2 & \rho_3 & \rho_4 & \rho_5 & \rho_6 \\ \rho_7 & \rho_8 & \rho_9 & \rho_{10} & \rho_{11} & \rho_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s^2\mathbf{I}_2 \\ s^1\mathbf{I}_2 \\ s^0\mathbf{I}_2 \end{bmatrix} \quad (5.44)$$

$$\mathcal{D}(s, \boldsymbol{\eta}) = [1 \ \eta_1 \ 0] \begin{bmatrix} s^2 & s^1 & s^0 \end{bmatrix}^T \quad (5.45)$$

ここで, (5.43) 式の擬似微分器のカットオフ周波数は -33.3 rad/s で固定されており, (5.45) 式では制御器の構造を (5.43) 式に合わせて擬似微分器を含む PID 制御器とするために分母多項式における s^0 の係数は 0 としている。また, Method 1, 2 の制約における上界値 S_{max} , T_{max} , Q_{max} は (5.46) 式と設定した。

$$S_{\text{max}}(\omega) = \left| \frac{1.4(j\omega + 0.001)}{j\omega + 0.08} \right|, \quad T_{\text{max}} = 1.4, \quad Q_{\text{max}} = 0.539 \quad (5.46)$$

ここで, (5.46) 式の設計パラメータは文献 [11] を参考に定めた値である。Method 3 における望みの開ループ伝達関数行列 $\mathbf{L}_D(s)$ は, Method 1, 2 の設計結果を確認し, 各対角要素のゲイン交差周波数が近い特性を与える。 $\mathbf{L}_D(s)$ の調整により, 広帯域を図ることは可能であると考えられるが, 本シミュレーションでは相互干渉に対する結果の評価を重視し, 近い帯域を持つ状態における相互干渉の影響を比較する。これに従い, 望みの開ループ伝達関数行列 $\mathbf{L}_D(s)$ の対角要素 $L_{D1}(s)$, $L_{D2}(s)$ は (5.47) 式と設定した。

$$L_{D1}(s) = \frac{1}{s}, \quad L_{D2}(s) = \frac{0.06}{s} \quad (5.47)$$

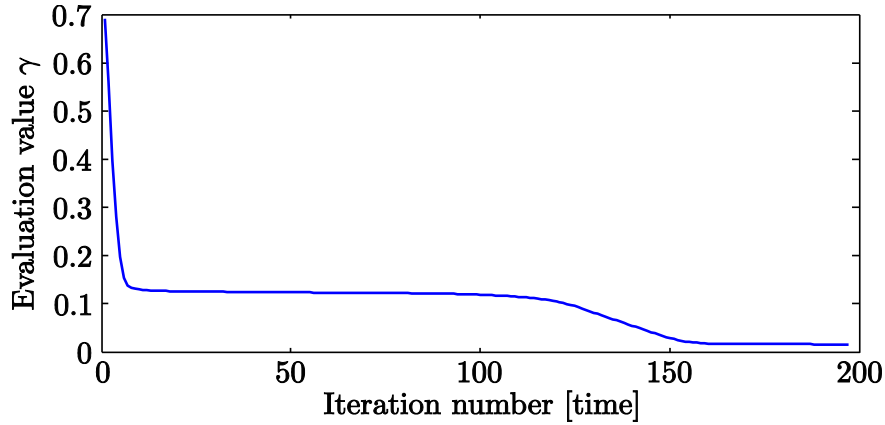


図 5.2: 繰り返しに対する評価値の推移

また、安定性を保証した上での対角優勢の観点のみで評価を行うため、Method 3 における (2.5) 式に示したロバスト性能条件は付加しない。そして、Method 1 における初期解は閉ループシステムが安定となる値 (5.48) 式を与える。

$$\begin{aligned} \rho_0 &= \begin{bmatrix} -6.903 \times 10^{-2} & -5.341 \times 10^{-1} & -1.381 \times 10^{-2} & -8.493 & -1.337 \times 10^{-1} & -9.736 \times 10^{-1} \\ 1.679 \times 10^{-2} & 2.194 \times 10^{-2} & 9.878 \times 10^{-2} & -2.903 \times 10^{-1} & 2.296 \times 10^{-1} & 7.855 \times 10^{-1} \end{bmatrix} \\ \eta_0 &= \begin{bmatrix} 1 & 33.33 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.48)$$

この際、Method 2 についても、(5.48) 式のパラメータで構成される制御器と同じパラメータを用いる。そして、Method 1, 2 の求解アルゴリズムの収束条件は、反復に対する評価値の相対誤差が 3 回連続して $10^{-4} \%$ を下回ることにする。

Method 1 によりパラメータは (5.49) 式と調整され、安定な制御器が設計された。

$$\begin{aligned} \rho_{M1} &= \begin{bmatrix} -2.008 \times 10^{-2} & -2.444 \times 10^{-2} & -9.336 \times 10^{-3} & -5.678 \times 10^{-2} & 6.768 \times 10^{-3} & -5.785 \times 10^{-3} \\ 1.873 \times 10^{-3} & -6.445 \times 10^{-5} & 8.776 \times 10^{-3} & -1.301 \times 10^{-3} & 1.220 \times 10^{-2} & 4.997 \times 10^{-3} \end{bmatrix} \\ \eta_{M1} &= \begin{bmatrix} 1 & 6.638 \times 10^{-1} & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.49)$$

そして、相互干渉に対する評価値 γ の値は 196 回の反復の後、 $1.631 \times 10^{-2} = -35.8 \text{ dB}$ に収束した (図 5.2)。また、Method 2, 3 により調整されたパラメータはそれぞれ (5.50), (5.51) 式となった。

$$\rho_{M2} = \begin{bmatrix} -3.229 \times 10^{-2} & -6.673 \times 10^{-2} & -3.041 \times 10^{-4} & -7.969 \times 10^{-3} & -1.191 \times 10^{-2} & -7.616 \times 10^{-3} \\ 2.499 \times 10^{-3} & -1.914 \times 10^{-3} & 1.370 \times 10^{-2} & 5.296 \times 10^{-3} & 2.906 \times 10^{-4} & 1.167 \times 10^{-4} \end{bmatrix} \quad (5.50)$$

$$\rho_{M3} = \begin{bmatrix} 3.990 \times 10^{-2} & -7.510 \times 10^{-2} & 4.450 \times 10^{-3} & -8.342 \times 10^{-3} & 6.499 \times 10^{-3} & -2.227 \times 10^{-2} \\ 5.963 \times 10^{-3} & -2.510 \times 10^{-3} & 5.673 \times 10^{-3} & 6.8230 \times 10^{-3} & 1.201 \times 10^{-4} & 1.506 \times 10^{-4} \end{bmatrix} \quad (5.51)$$

表 5.1: 評価値の比較

	Evaluation value γ [dB]	Frequency [rad/s]
Method 1	-35.8	0.129
Method 2	-18.7	18.8
Method 3	-12.7	17.1
Initial solution	-3.19	1.28

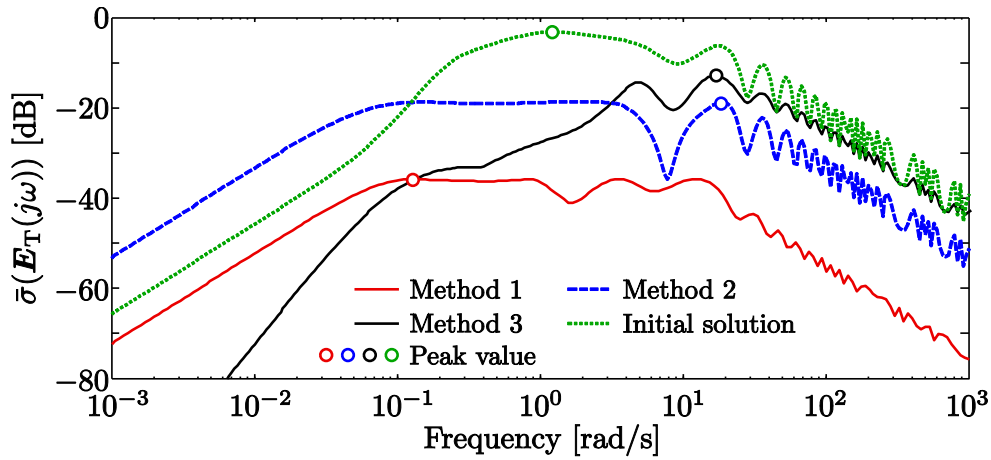
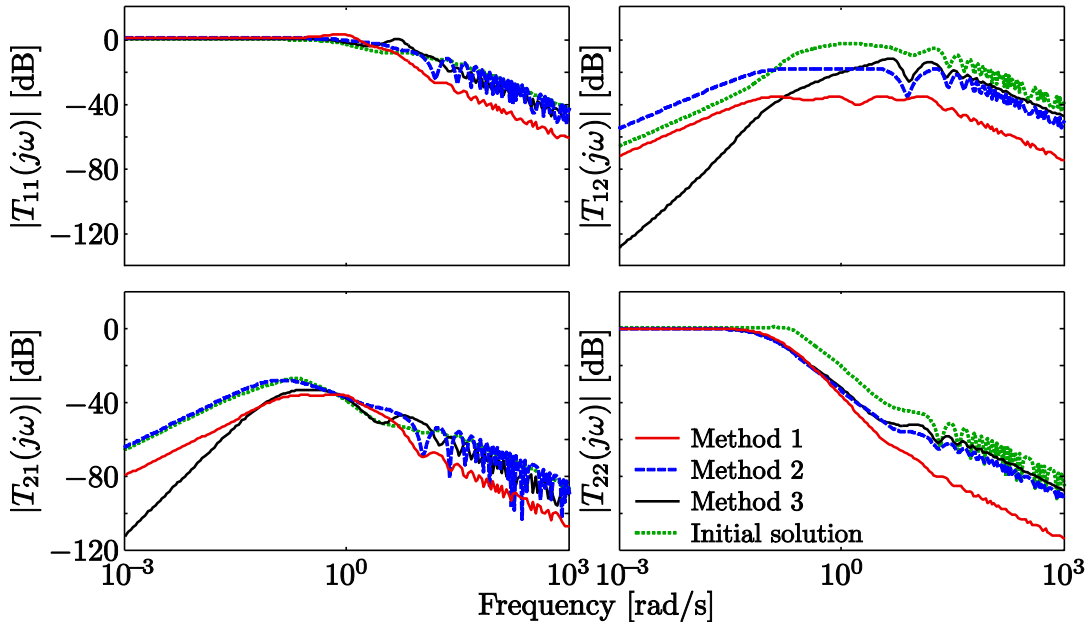
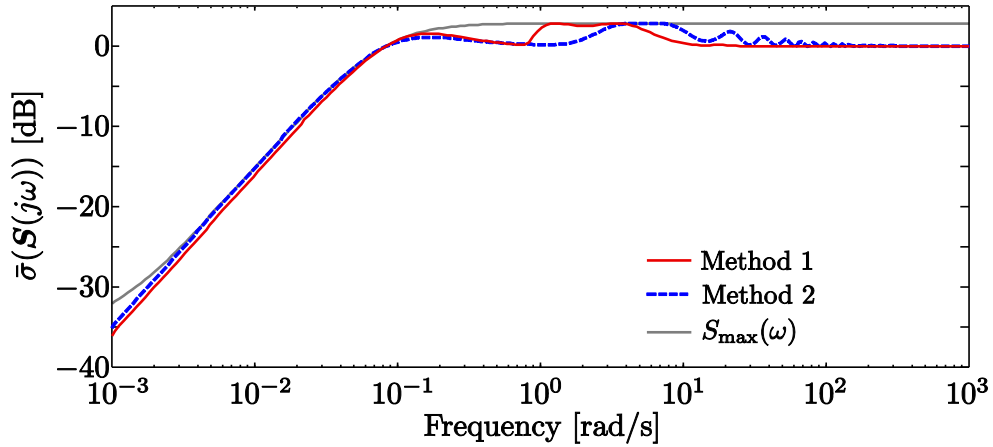
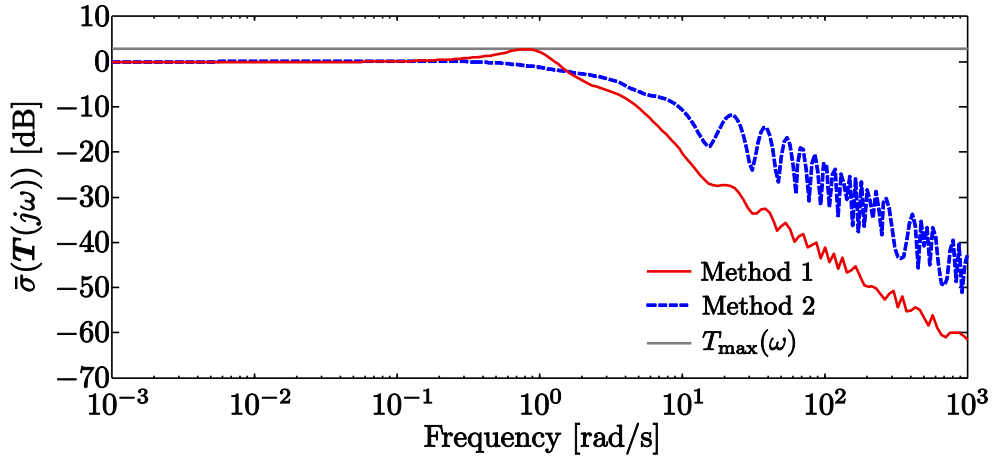

 図 5.3: 評価値 γ

表 5.1 に各手法の評価値の値を示し，取得周波数における評価した $\bar{\sigma}(E_T(j\omega))$ の値を図 5.3 に示す。Method 1 の結果を初期解の値と比較すると，30 dB 以上評価値が抑制されており，閉ループの相互干渉の観点で大幅な性能向上が見られる。また，Method 2 による評価値 γ の値は -18.7 dB となり，Method 1 ほどの性能の向上はないが，初期解より評価値を抑制できている。これに対して，Method 3 では， 10^{-1} rad/s 以下の低周波では他の手法より $\bar{\sigma}(E_T(j\omega))$ を抑制できているが，性能指標 γ_∞ となるピーク値は -12.3 dB と Method 1，2 と比べて大きくなった。この結果は，Method 1 および Method 2 が閉ループの相互干渉の観点で制御器を調整できていることを示している。その上で，Method 1 では制御器の極の調整もできるため，設計の自由度が増して一層評価値を下げる制御器の特性が実現されたと考えられる。実際に，制御器の極を比較すると，固定されている Method 2 の制御器の極 $(0, -33.3)$ に対して，Method 1 では極が $(0, -0.664)$ と調整され，大きく変化していることが確認できる。一方で，上述の通り，Method 3 の設計により低周波数では $\bar{\sigma}(E_T(j\omega))$ を最も小さくできており，相互干渉に対する高い抑制効果が得られる。しかし，4.1 節にて述べたように，相互干渉の


 図 5.4: 相補感度関数 $\mathbf{T}(j\omega)$ のゲイン線図

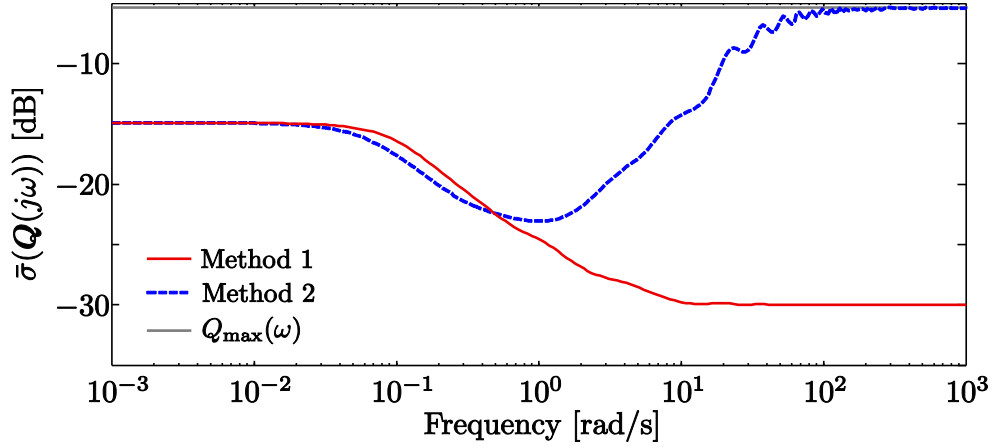
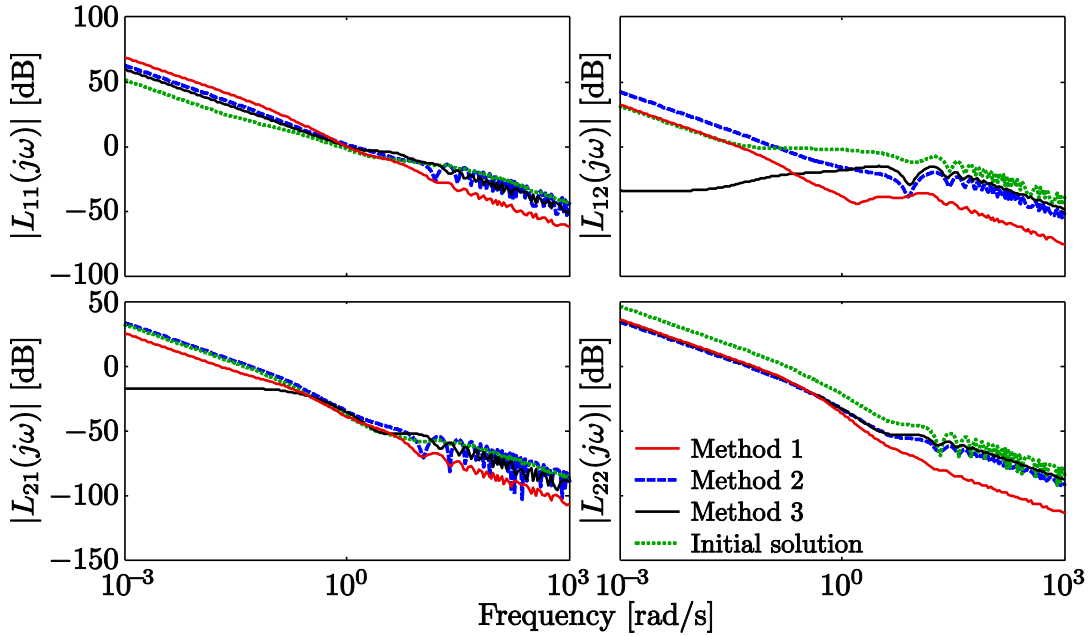
影響はゲイン交差周波数付近の中周波数域で顕著となり、それに対して、低周波数域では積分特性によっておのずと相互干渉は抑制されるために影響は小さい。現に図 5.3 において、低周波数ではどの結果も評価値がおおよそ -40 dB を下回っており、定常ゲインの $1/100$ 倍以下となることを示すため、実用上ではほぼ相互干渉の影響はないと考えてもよい。この点からも、(4.8) 式に示す性能指標 γ_∞ が H_∞ ノルムの評価を行っている意味が見て取れ、Method 1 がより相互干渉の抑制に関して有効であるとわかる。

次に、各手法により設計を行った際の相補感度関数 $\mathbf{T}(j\omega)$ のゲイン線図を図 5.4 に示す。Method 1 と Method 3 の設計結果を比較すると、Method 1 は $T_{11}(j\omega)$ において制御帯域が低い。しかし、(5.6)–(5.8) 式に示した閉ループ特性 $\mathbf{S}(j\omega)$ 、 $\mathbf{T}(j\omega)$ および $\mathbf{Q}(j\omega)$ の最大特異値に関する制約は満たされており（図 5.5–5.7）、要求したゲインの特性を達成した制御器調整はできている。その状況下で、Method 1 では相互干渉を表す非対角要素 $T_{12}(j\omega)$ 、 $T_{21}(j\omega)$ でゲインのピーク値を抑制できており、両要素で約 -40 dB 近くまで抑えられている。このように、導入した閉ループの相互干渉に対する性能指標が最大特異値により定義されているため、最悪値が評価されて非対角要素で偏りなくゲインを抑制できている。また、他の結果における非対角要素のピークゲインと比較すると、特に $T_{21}(j\omega)$ において初期解からは約 30 dB、Method 2 からは 20 dB 程度、そして Method 3 からは 25 dB 程度の抑制が見られる。これは、表 5.1 に示した評価値 γ の結果が反映されているといえる。また、各設計による開ループ伝達関数行列


 図 5.5: 感度関数 $S(j\omega)$ の最大特異値

 図 5.6: 相補感度関数 $T(j\omega)$ の最大特異値

$L(j\omega)$ のゲイン線図を図 5.8 に示す。図 5.8 より、明らかに開ループ伝達関数上では、Method 3 が最も非対角要素のゲインを抑制できている。しかし、図 5.4 に示すように、閉ループ特性上では十分に相互干渉を抑制できているとはいえず、3 章の最後にて述べた開ループの評価と閉ループの評価の間における差異が現れている。

Method 2, 3 との比較を通して、本章で提案した手法により、一層閉ループの相互干の抑制が可能であることを示した。結果として、制御器の極調整を可能とする本章の手法の有効性を確認できた。


 図 5.7: 制御入力 $Q(j\omega)$ の最大特異値

 図 5.8: 開ループ伝達関数行列 $L(j\omega)$ のゲイン線図

5.5.2 シミュレーション 2

本節では、不安定な制御対象に対しても、本論文で提案した Method 1 および Method 2 がシステムを安定化する制御器を設計できることを示す。なお、システムを安定化させる制御器を有することを前提とする。

シミュレーションには、文献 [12] にて記載されている遠隔操縦飛行機 (RPV) の数

式モデル (5.52) 式を用いる。

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} -0.02567 & -36.62 & -18.90 & -32.09 & 3.251 & -0.7626 \\ 9.257 \times 10^{-5} & -1.900 & 0.9831 & -7.256 \times 10^{-4} & -0.1708 & -0.004965 \\ 0.01234 & 11.72 & -2.632 & 8.758 \times 10^{-5} & -31.60 & 22.40 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -30 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -30 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 30 & 0 \\ 0 & 30 \end{bmatrix} \\ \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.52)$$

この制御対象は、 $(-30, -30, -5.67, -0.26, 0.69 \pm j0.25)$ に極を持つ不安定な 2 入力 2 出力システムである。設計周波数点は、 10^{-3} – 10^3 rad/s の区間で対数的に等間隔な 300 点とした。そして、周波数応答を用いて、以下の条件で設計を行う。設計する制御器は、擬似微分器を含む PID 制御器とし、構造は (5.43), (5.44) 式と同じとする。ただし、Method 2 における (5.43) 式および初期の制御器の擬似微分器のカットオフ周波数は、 -200 rad/s とする。また、制約における上界値 S_{\max} , T_{\max} および Q_{\max} は (5.53) 式と設定した。

$$S_{\max}(\omega) = \left| \frac{3(j\omega + 0.01)^2}{(j\omega + 15)^2} \right|, \quad T_{\max} = 2.6, \quad Q_{\max} = 6.022 \times 10^4 \quad (5.53)$$

そして、Method 1 における初期解は、閉ループシステムを安定化する (5.54) 式を与える。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\rho}_0 &= \begin{bmatrix} -1.337 \times 10^4 & 3.304 \times 10^3 & -1.567 \times 10^6 & 1.574 \times 10^6 & 5.365 \times 10^6 & 2.123 \times 10^7 \\ -2.238 \times 10^4 & 9.075 \times 10^3 & -2.090 \times 10^6 & 2.237 \times 10^6 & 8.361 \times 10^6 & 2.814 \times 10^7 \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{\eta}_0 &= \begin{bmatrix} 1 & 200 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.54)$$

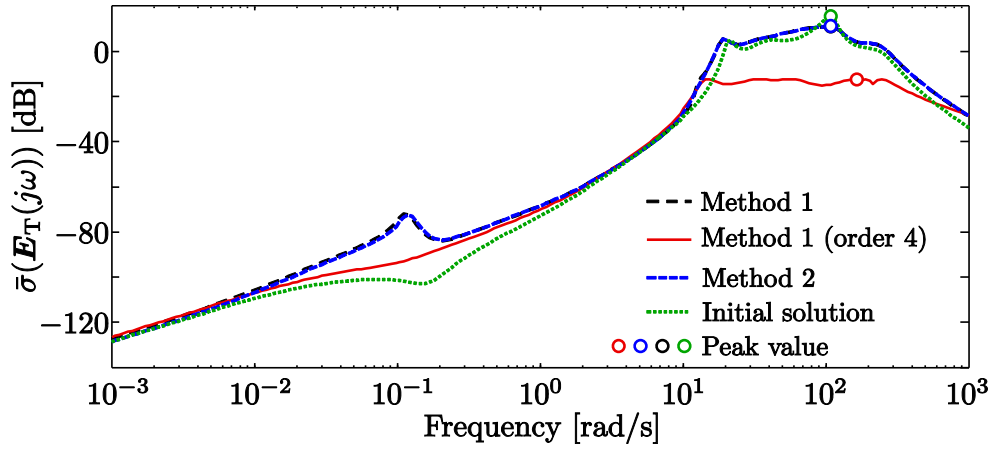
この際、Method 2 についても、(5.54) 式のパラメータで構成される制御器と同じパラメータを用いる。Method 1, 2 の求解アルゴリズムの収束条件は、反復に対する評価値の相対誤差が 3 回連続して 10^{-4} % を下回ることとする。

Method 1 により、パラメータは (5.55) 式と調整され、安定な制御器が設計された。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\rho}_{M1} &= \begin{bmatrix} -1.228 \times 10^4 & 6.262 \times 10^3 & -1.399 \times 10^6 & 1.1429 \times 10^6 & -5.000 \times 10^6 & 1.097 \times 10^7 \\ -2.315 \times 10^4 & 1.373 \times 10^4 & -2.036 \times 10^6 & 1.717 \times 10^6 & -6.190 \times 10^6 & 1.518 \times 10^7 \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{\eta}_{M1} &= \begin{bmatrix} 1 & 1.910 \times 10^2 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.55)$$

表 5.2: 評価値の比較

	Evaluation value γ [dB]	Frequency [rad/s]
Method 1	11.1	108
Method 1 (order 4)	-12.2	164
Method 2	11.1	108
Initial solution	15.5	108


 図 5.9: 評価値 γ

そして、相互干渉に対する評価値 γ の値は 1779 回の反復の後、 $3.601 = 11.13$ dB に収束した。また、Method 2 により調整されたパラメータは (5.56) 式となった。

$$\boldsymbol{\rho}_{M2} = \begin{bmatrix} -7.243 \times 10^3 & 5.869 \times 10^3 & -2.914 \times 10^4 & 5.595 \times 10^4 & -2.621 \times 10^1 & 2.337 \\ -1.069 \times 10^4 & 8.912 \times 10^3 & -3.649 \times 10^4 & 7.758 \times 10^4 & -6.392 \times 10^1 & 2.532 \times 10^1 \end{bmatrix} \quad (5.56)$$

表 5.2 に各手法の評価値を示し、取得周波数における評価した $\bar{\sigma}(\mathbf{E}_T(j\omega))$ の値を図 5.9 に示す。表 5.2 および図 5.9 の結果から、明らかに Method 1, 2 の両手法ともあまり大きなパラメータ調整は行われず、ほぼ同じ近傍の解を取っている。パラメータの変化がないため、初期解と比較しても相互干渉を十分に抑制できているとはいえない。この結果となる理由としては、更新回数の多さから問題自体の複雑さも存在すると推察できるが、制御器の次数が (5.52) 式の制御対象を制御するに当たって十分でないことが大きいと考えられる。実際に、6 つの状態量を有する制御対象に対して、2 次の PID 制御器で十分な制御が行うことができるとは考えづらい。そこで、PID 制御器ではなく、設計する制御器を 4 次に指定して Method 1 により再度調整を行う。ここで、4 次の制御器に対する初期解は、(5.54) 式のパラメータによる制御器の分母分子に対して、

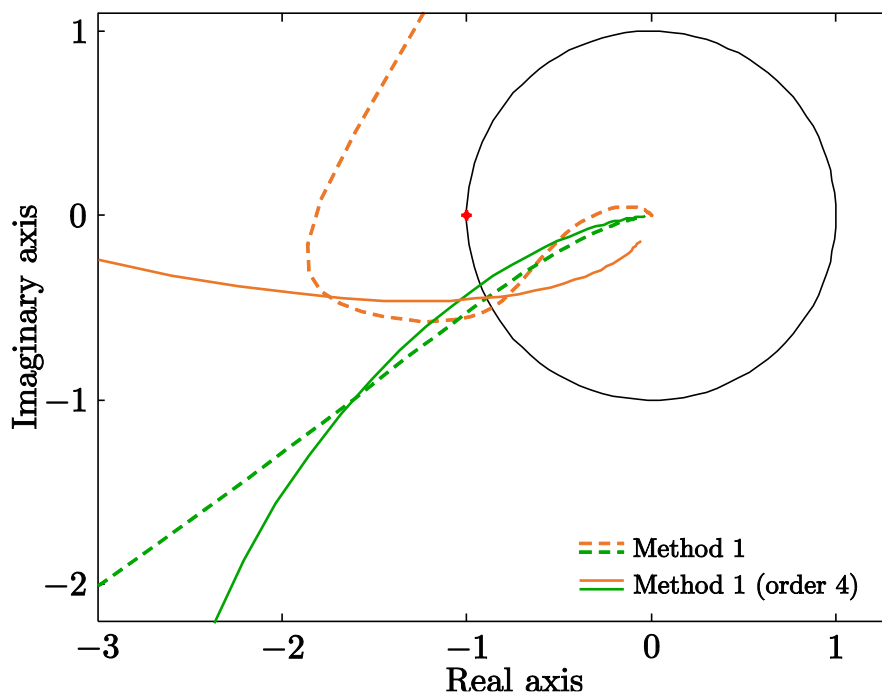
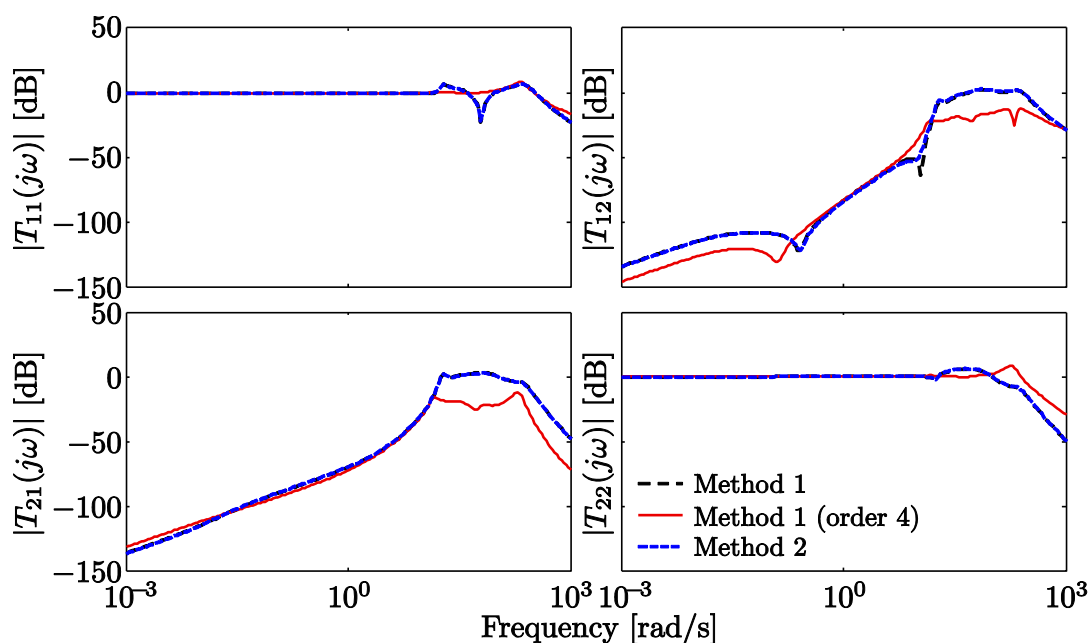
$(s + 200)^2$ を掛けた値とする。これにより構成される制御器は非既約の伝達関数となるが (5.54) 式のパラメータに対する制御器と全く同じ特性を有する 4 次の制御器に必要なパラメータが算出できる。この際、分母分子で相殺されるといっても初期解としての依存性は出てくる。この点を考慮し、(5.54) 式のパラメータの制御器により形成されるシステムの中周波数に当たる 200 rad/s の因数をかける。中周波数付近とすることで、制御器の極および零点の高い周波数、低い周波数の両方への調整を可能とする狙いがある。また、求解アルゴリズムの収束条件は、計算量の関係上、反復に対する評価値の相対誤差が 3 回連続して 3 % を下回ることとする。

4 次の制御として Method 1 を用いて再度設計したパラメータを (5.57) 式に示す。

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\rho}_{M1,4} = & \begin{bmatrix} -4.957 \times 10^5 & -1.569 \times 10^5 & -2.071 \times 10^8 & 1.262 \times 10^8 & -1.686 \times 10^{10} \\ -7.029 \times 10^5 & 7.244 \times 10^5 & -2.985 \times 10^8 & 1.604 \times 10^8 & -2.498 \times 10^{10} \\ -7.594 \times 10^9 & -1.043 \times 10^{12} & 6.740 \times 10^{11} & 8.230 \times 10^{11} & 2.502 \times 10^{12} \\ -7.892 \times 10^9 & -1.398 \times 10^{12} & 9.384 \times 10^{11} & 1.796 \times 10^{12} & 3.167 \times 10^{12} \end{bmatrix} \\
 \boldsymbol{\eta}_{M1,4} = & \begin{bmatrix} 1 & 1.927 \times 10^4 & 3.186 \times 10^5 & 5.875 \times 10^7 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{5.57}$$

設計された 4 次の制御器の極は、 $(0, -1.926 \times 10^4, -8.193 \pm j54.62)$ と調整され、安定な制御器が設計された。そして、表 5.2 および図 5.9 において比較を行うと、PID 制御器の場合と比べて初期解からより評価値を小さくできている。制御器の次数が増加したため、高い制御性能を達成できることは当然であるが、Method 2 で制御器の次数を増やすことを考えると、基底関数の設定が非常に難しい。その点、本章の手法では、簡易に極調整可能な任意の固定次数制御器を設計できるといえる。また、Method 1 の PID 制御器、4 次の制御器の両場合における固有値軌跡を図 5.10 に示す。図より、両場合とも臨界点に対する回転数を変えずに、調整を行っている。したがって、不安定な対象に対しても、本手法は閉ループシステムを安定化する制御器設計が可能であることを確認した。

次に、各手法により設計を行った際の相補感度関数 $\boldsymbol{T}(j\omega)$ のゲイン線図を図 5.11 に示す。PID 制御器の場合は Method 1, 2 の両手法ともほぼ変わらないが、4 次の制御器の場合は、非対角要素のゲインを抑制できている。そして、図 5.12 にステップ応答を示す。1 s 後に入力 1 に、5 s 後に入力 2 にステップ指令を印加する。図より、明らかに 4 次の制御器では相互干渉が抑制できていることが、時間応答からも確認できる。しかしながら、ステップ指令に対して、大きくオーバーシュートが生じてしまっている。これは、図 5.13, 5.14 に示すように感度関数と相補感度関数の最大特異値の上界


 図 5.10: 開ループ伝達関数行列の固有値軌跡 $\lambda_q(j\omega)$ (Method 4)

 図 5.11: 相補感度関数 $T(j\omega)$ のゲイン線図

に課せられた制約が緩いためであると考えられる。相互干渉に対する評価により設計を行う本手法では、(5.6)–(5.8) 式の閉ループ特性に対する制約式が応答性を指定する

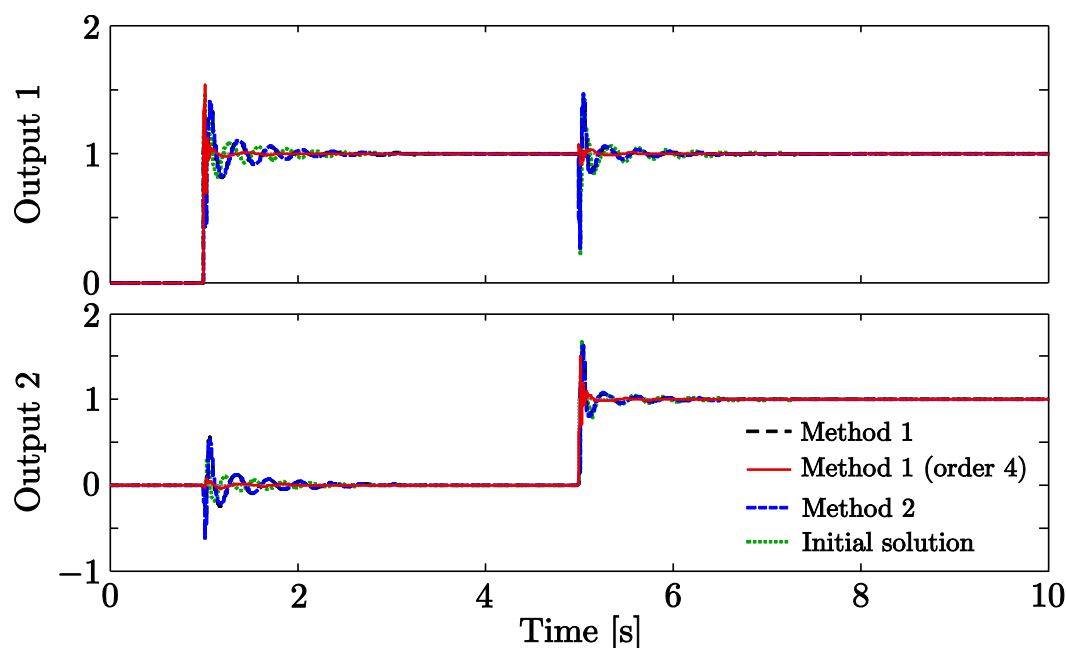
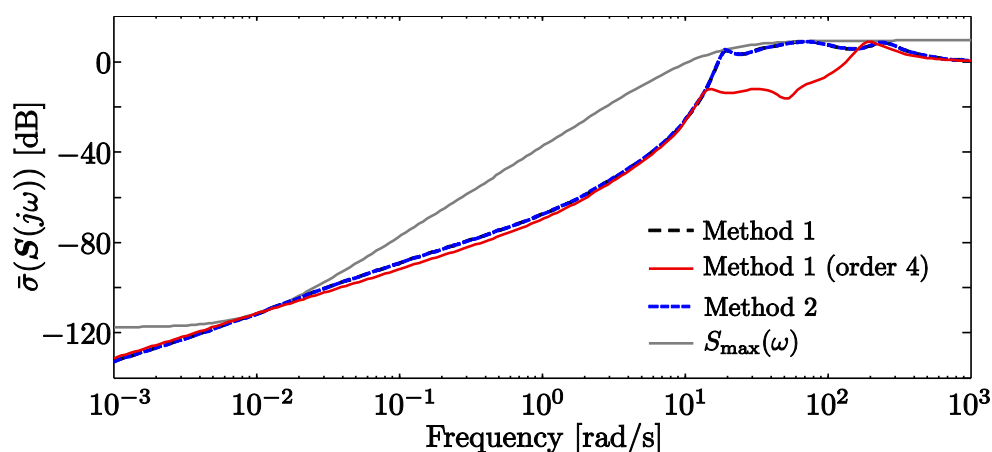
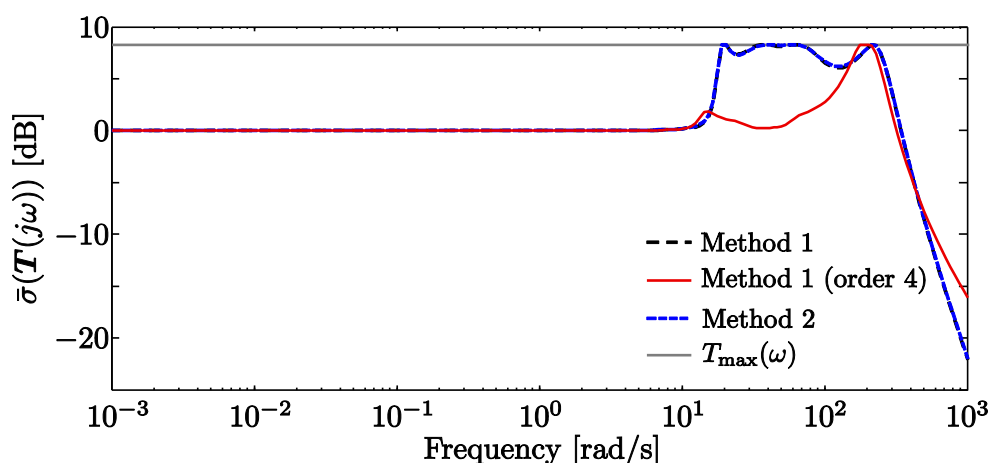


図 5.12: ステップ応答


 図 5.13: 感度関数 $S(j\omega)$ の最大特異値

こととなる。今回、PID 制御器と 4 次の制御器の設計で条件を同じとするため、(5.53) 式のように上界の値を定めたが、 S_{\max} や T_{\max} を必要に応じて調整することにより応答性の改善は望める。

本シミュレーションを通して、本章の手法および 4 章の手法により、不安定な制御対象に対しても安定化制御器が設計できることを確認した。また、本章の手法においては、制御器の次数を上げた設計を容易に考えることができ、極調整によって大幅な性能向上が可能であることを示した。


 図 5.14: 相補感度関数 $T(j\omega)$ の最大特異値

5.6 実機実験

本節では、本章で提案した手法の有効性を実機実験を通して検証する。本実験は2つの項目について行い、各実験の内容および目的は以下の通りである。

実験 1: 他手法との比較

文献 [7] の設計手法および 4 章の手法との比較を行う。そして、相互干渉の観点で本章の手法の有効性を検証する。

実験 2: ロバスト性の検証

本章の手法を用いて複数取得した周波数応答から制御器設計を行い、ロバストな制御器が設計可能であることを示す。

また、本実験において、各手法を以下のように呼称する。

Method 1 : 本章にて提案した相互干渉を抑制する極調整可能な制御器設計手法

Method 2 : 4 章の近似を行わずに閉ループの相互干渉を抑制する制御器設計手法

Method 3 : 2 章の Galdos らにより提案された文献 [7] の手法

実験には、3.7 節と同じく、安定な対象である張力・速度制御装置を制御対象として使用する。詳細は 3.7 節を参照されたい。この制御対象に対して、振幅 0.8 で周波数が 10^{-3} – 10^3 rad/s の区間で変化する正弦波 Sweep 信号を入力し、周波数応答を推定した。

5.6.1 実験 1

Method 1 と Method 2, 3 の比較を行う。設計周波数点は、 10^{-3} – 10^3 rad/s の区間で対数的に等間隔な 300 点とした。Method 3 における望みの開ループ伝達関数行列 $L_D(s)$ の対角要素 $L_{D1}(s)$, $L_{D2}(s)$ は、5.5.2 節と同様の考えから、(5.58) 式と設定した。

$$L_{D1}(s) = \frac{30}{s}, \quad L_{D2}(s) = \frac{400}{s(s+40)} \quad (5.58)$$

そして、線形にパラメータ化を行う Method 2, 3 では (5.59) 式、極もパラメータ化する Method 1 では (5.60) 式とし、いずれも擬似微分器を含む PID 制御器を表す。

$$C_{\text{pre}}(s, \rho) = \begin{bmatrix} \rho_1 & \rho_2 & \rho_3 & \rho_4 & \rho_5 & \rho_6 \\ \rho_7 & \rho_8 & \rho_9 & \rho_{10} & \rho_{11} & \rho_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_2 \\ \frac{1}{s} I_2 \\ \frac{s}{1+0.005s} I_2 \end{bmatrix} \quad (5.59)$$

$$C_{\text{pro}}(s, \eta, \rho) = \frac{1}{\mathcal{D}(s, \eta)} \begin{bmatrix} \rho_1 & \rho_2 & \rho_3 & \rho_4 & \rho_5 & \rho_6 \\ \rho_7 & \rho_8 & \rho_9 & \rho_{10} & \rho_{11} & \rho_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s^2 I_2 \\ s^1 I_2 \\ s^0 I_2 \end{bmatrix} \quad (5.60)$$

$$\mathcal{D}(s, \eta) = [1 \ \eta_1 \ 0] [s^2 \ s^1 \ s^0]^T \quad (5.61)$$

ここで、(5.59) 式の擬似微分器のカットオフ周波数は -200 rad/s で固定されており、(5.61) 式では制御器の構造を (5.59) 式に合わせて擬似微分器を含む PID 制御器とするために分母多項式における s^0 の係数は 0 としている。また、Method 1, 2 の制約における上界値 S_{\max} , T_{\max} , Q_{\max} は (5.62) 式と設定した。

$$S_{\max}(\omega) = \left| \frac{1.6(j\omega + 0.001)}{j\omega + 10} \right|, \quad T_{\max} = 1.6, \quad Q_{\max} = 0.326 \quad (5.62)$$

ここで、(5.62) 式の設定パラメータは文献 [11] を参考に定めた値である。また、Method 3 において感度の整形を行うため、(2.5) 式に示したロバスト性能条件におけるノミナル性能のみ評価し、感度を指定する重み $W_{1q}(j\omega)$ は (5.63) 式とする。

$$W_{1q}(\omega) = \frac{j\omega + 10}{1.6(j\omega + 0.001)}, \quad q = 1, 2 \quad (5.63)$$

Method 1, 2 における初期解は閉ループシステムが安定となる同じ値を与える。そして、Method 1, 2 の求解アルゴリズムの収束条件は、反復に対する評価値の相対誤差が 3 回連続して 10^{-4} % を下回ることとする。

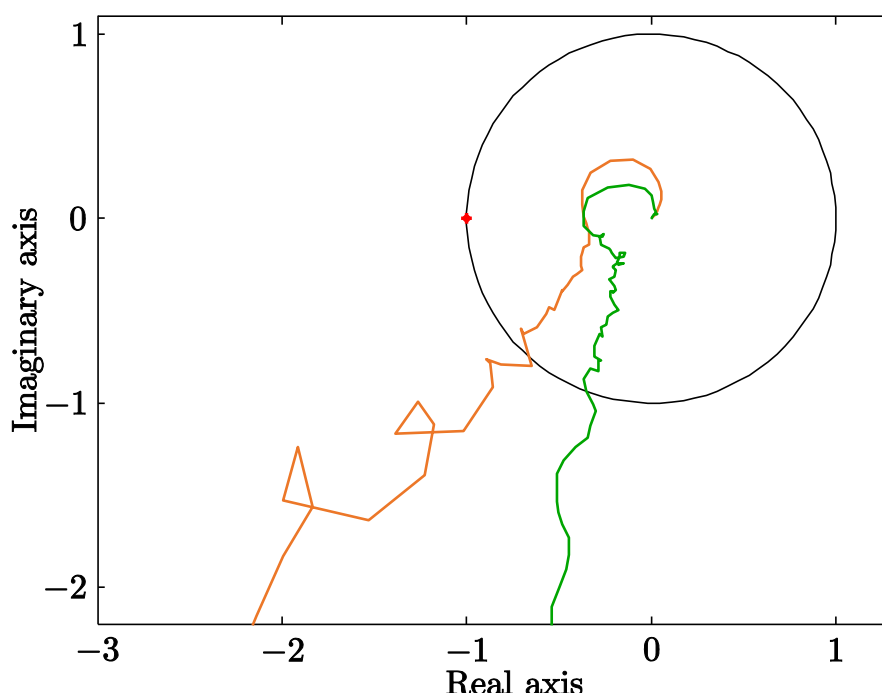
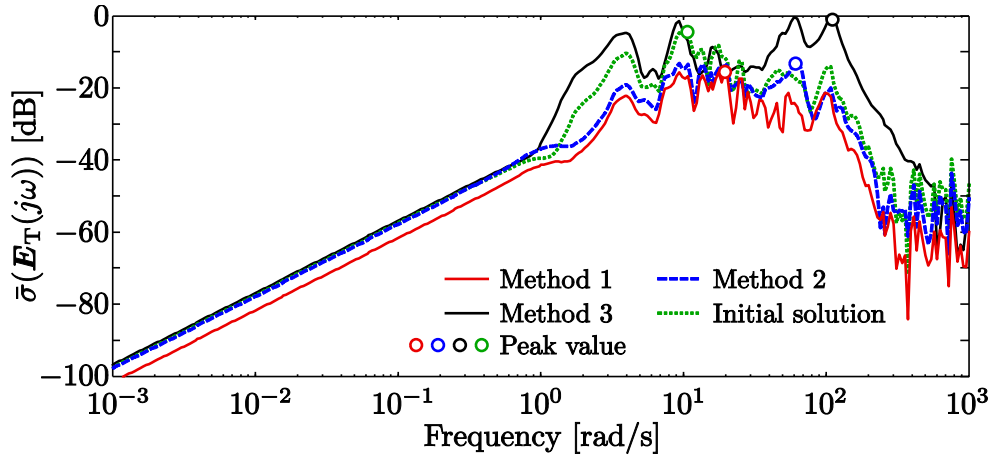
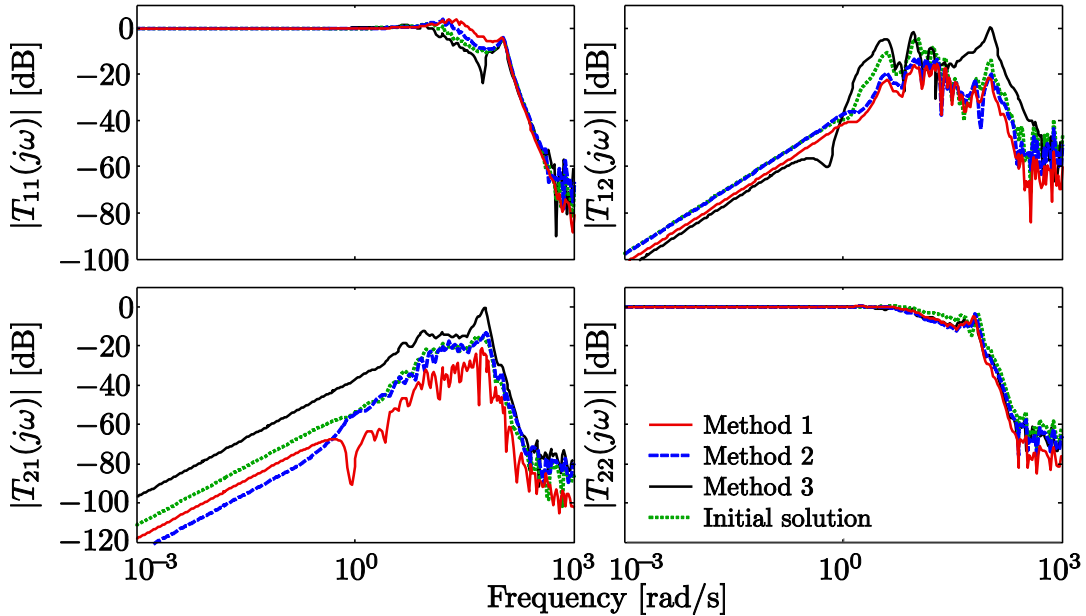

 図 5.15: 開ループ伝達関数行列の固有値軌跡 $\lambda_q(j\omega)$

表 5.3: 評価値の比較

	Evaluation value γ [dB]	Frequency [rad/s]
Method 1	-15.6	19.7
Method 2	-13.1	59.7
Method 3	-6.85×10^{-2}	109
Initial solution	-4.53	10.8

Method 1 により, 119 回の反復の後, 安定な制御器が設計された。図 5.15 の固有値軌跡 $\lambda_q(j\omega)$ が臨界点 $(-1, j0)$ を回っていないことより, 設計された閉ループシステムは安定化されている。そして, 評価値 γ は, $0.1650 = -15.65$ dB に収束した。表 5.3 に各手法の評価値の値を示し, 取得周波数における評価した $\bar{\sigma}(\mathbf{E}_T(j\omega))$ の値を図 5.16 に示す。Method 1 の結果を初期解の値と比較すると, 10 dB 以上抑制されており, 閉ループの相互干渉の観点で性能向上が見られる。また, Method 2 による評価値 γ の値は -13.1 dB となり, Method 1 ほど性能の向上はないが, 初期解より評価値を抑制できている。これに対して, Method 3 では, ピーク値が -6.85×10^{-2} dB となり, Method 1, 2 に与えた初期解の値よりも大きくなってしまっている。これは, Method 3 が開


 図 5.16: 評価値 γ

 図 5.17: 相補感度関数 $T(j\omega)$ のゲイン線図

ループに対する評価のみしか行っていないことに起因していると考えられる。この結果より，Method 1 では制御器の極の調整により，実機に対する設計に関しても，評価値を一層抑制できることを確認できた。現に，制御器の極を比較すると，固定されている Method 2 の制御器の極 $(0, -200)$ に対して，Method 1 では極が $(0, -64.1)$ と調整され，大きく変化していることがわかる。

次に，各手法により設計を行った際の相補感度関数 $T(j\omega)$ のゲイン線図を図 5.17 に示す。Method 1 では，相互干渉を表す非対角要素 $T_{12}(j\omega)$ ， $T_{21}(j\omega)$ でゲインのピーク値を抑制できており，両要素で約 -15 dB 近くまで抑えられている。これは，表 5.3 に

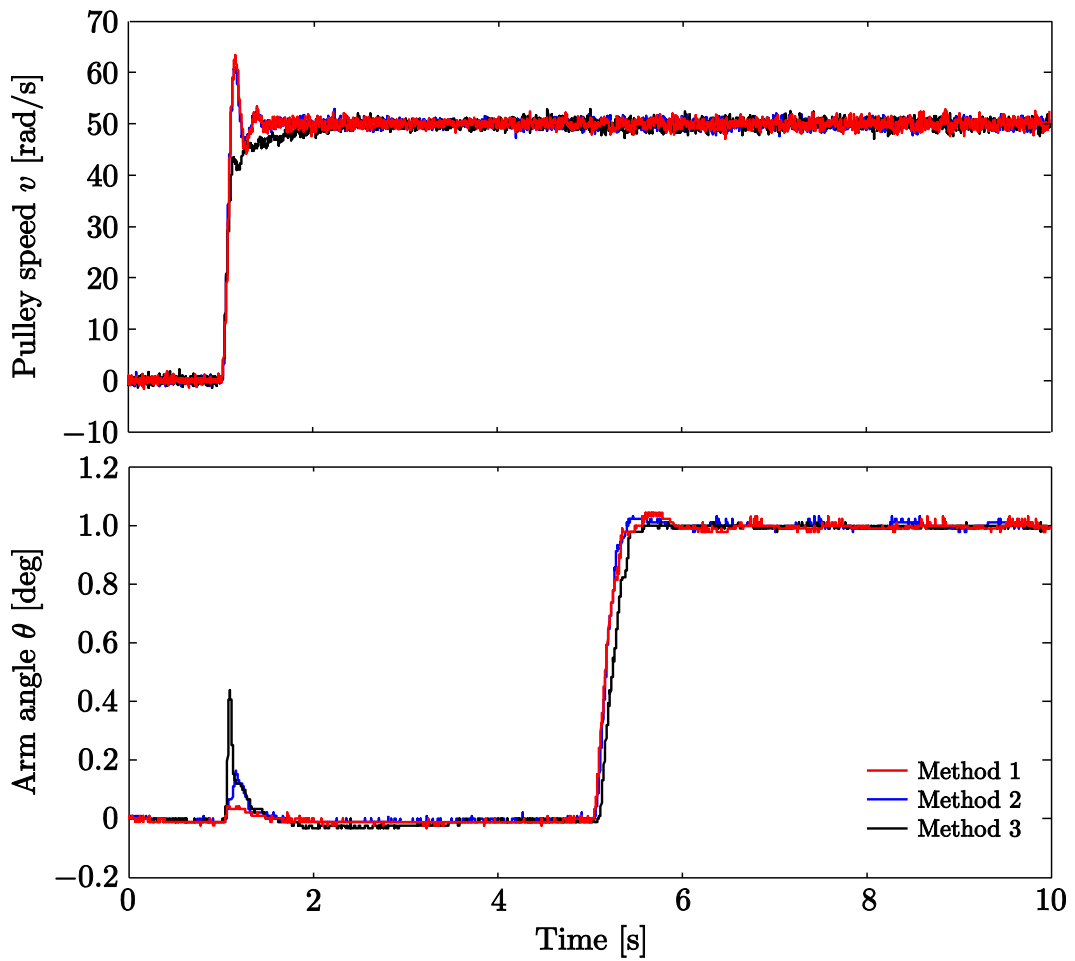


図 5.18: ステップ応答

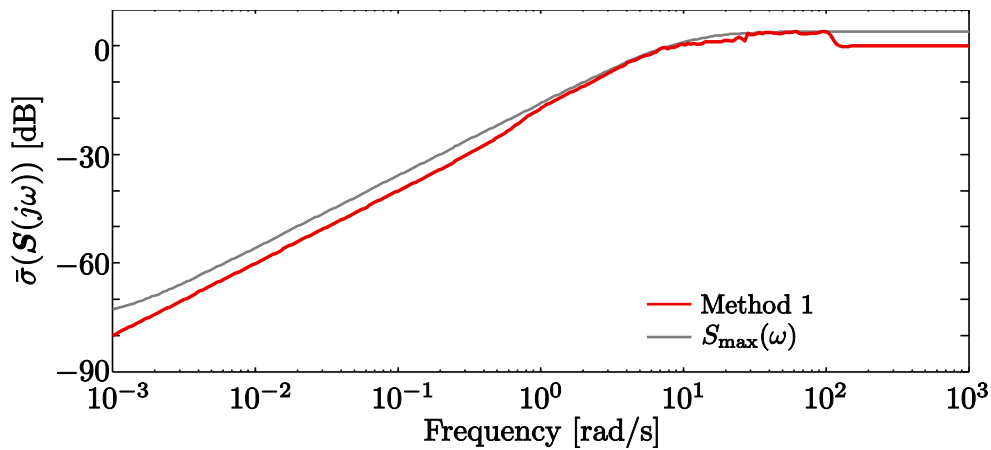
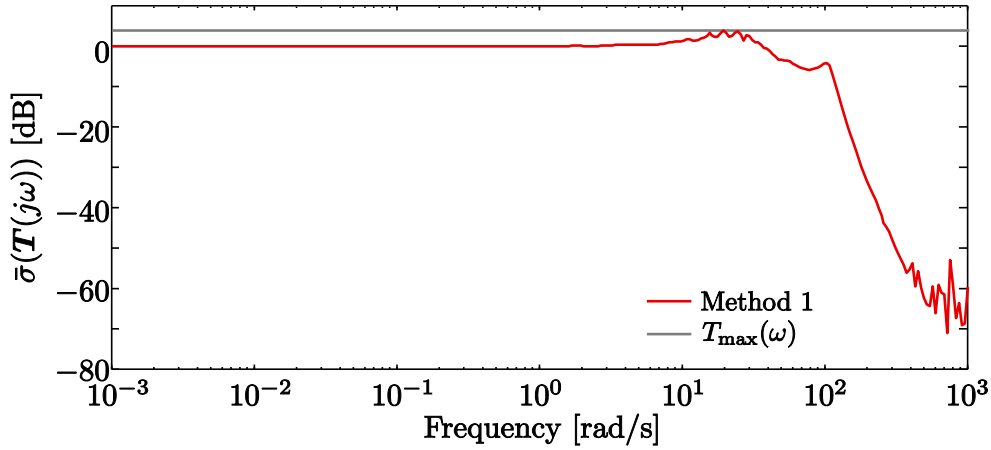


図 5.19: 感度関数 $S(j\omega)$ の最大特異値

示した評価値 γ の結果が反映されているといえる。そして、図 5.18 にそれぞれの設計におけるステップ応答を示す。1 s でプーリ速度に 50 rad/s, 5 s でアーム角度に 1 deg


 図 5.20: 相補感度関数 $T(j\omega)$ の最大特異値

のステップ指令を与えた。図 5.18 より，生じた相互干渉を比較すると，プーリ速度にはどの結果もほぼ影響はないが，アーム角度では Method 1 の結果が明らかに振幅を抑えることができている。影響を最も小さくできている。アーム角度に生じる相互干渉は， $T_{21}(j\omega)$ がその特性を表し，図 5.17 に示した設計通りの結果が時間応答に現れている。一方で，応答の立ち上がりでは，速応性に関しては問題ないが，Method 1, 2 ではオーバーシュートが Method 3 と比べて大きく生じてしまっている。これは，図 5.17 の対角要素において，ピークの値が大きくなり，減衰特性が悪いことに起因している。これに関しては，設計されたシステムの感度および相補感度の結果（図 5.19, 5.20）から， S_{\max} および T_{\max} を調整することにより，改善されることが考えられる。

Method 2, 3 との比較を通して，本章で提案した手法により，一層閉ループの相互干渉の抑制が可能であることを示した。結果として，実システムに対しても，制御器の極が調整可能な本章の手法の有効性を確認できた。

5.6.2 実験 2

次に，Method 1 においてもロバストな制御器が設計可能であることを示す。複数取得した周波数応答をすべて評価し，取得したデータにおける不確かさに対する性能の保証を考える。

制御対象に対して正弦波 Sweep 信号を入力する際，アーム部に重りを載せて 3 組の異なる入出力データを取得し，それぞれ周波数応答を推定する。3 つの周波数応答の差は制御対象の不確かさと捉えることができる。そのため，これらすべての周波数応答に対する制約式の連立により構成される最適化問題 (5.64) 式を解くことで，想定され

る変動に対してロバストな制御器が設計される。

$$\max_{\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\rho}, \Gamma} \Gamma \quad (5.64)$$

subject to

$$\left[\begin{array}{c} \frac{1}{\Phi_k^{(i)}} \left(\mathbf{Z}_{Dk,\kappa}^* (\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\rho}) \tilde{\mathbf{Z}}_{Dk,\kappa}^{(i)} + \tilde{\mathbf{Z}}_{Dk,\kappa}^{(i)*} \mathbf{Z}_{Dk,\kappa} (\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\rho}) \right) - \frac{\Phi_k}{\Phi_k^{(i)2}} \tilde{\mathbf{Z}}_{Dk,\kappa}^{(i)*} \tilde{\mathbf{Z}}_{Dk,\kappa}^{(i)} \\ \mathbf{Y}_{Dk,\kappa} (\boldsymbol{\rho}) \\ \mathbf{Y}_{Dk,\kappa}^* (\boldsymbol{\rho}) \\ \frac{1}{\Gamma^{(i)}} \left(\mathbf{X}_{Dk,\kappa} (\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\rho}) \tilde{\mathbf{X}}_{Dk,\kappa}^{(i)*} + \tilde{\mathbf{X}}_{Dk,\kappa}^{(i)} \mathbf{X}_{Dk,\kappa}^* (\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\rho}) \right) - \frac{\Gamma}{\Gamma^{(i)2}} \tilde{\mathbf{X}}_{Dk,\kappa}^{(i)} \tilde{\mathbf{X}}_{Dk,\kappa}^{(i)*} \end{array} \right] \geq 0 \quad (5.65)$$

$$\left[\begin{array}{cc} \mathbf{Z}_{Sk,\kappa}^* (\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\rho}) \tilde{\mathbf{Z}}_{Sk,\kappa}^{(i)} + \tilde{\mathbf{Z}}_{Sk,\kappa}^{(i)*} \mathbf{Z}_{Sk,\kappa} (\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\rho}) - \tilde{\mathbf{Z}}_{Sk,\kappa}^{(i)*} \tilde{\mathbf{Z}}_{Sk,\kappa}^{(i)} & \mathbf{Y}_{Sk,\kappa}^* (\boldsymbol{\eta}) \\ \mathbf{Y}_{Sk,\kappa} (\boldsymbol{\eta}) & \mathbf{I}_{n_o} \end{array} \right] \geq 0 \quad (5.66)$$

$$\left[\begin{array}{cc} \mathbf{Z}_{Tk,\kappa}^* (\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\rho}) \tilde{\mathbf{Z}}_{Tk,\kappa}^{(i)} + \tilde{\mathbf{Z}}_{Tk,\kappa}^{(i)*} \mathbf{Z}_{Tk,\kappa} (\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\rho}) - \tilde{\mathbf{Z}}_{Tk,\kappa}^{(i)*} \tilde{\mathbf{Z}}_{Tk,\kappa}^{(i)} & \mathbf{Y}_{Tk,\kappa}^* (\boldsymbol{\rho}) \\ \mathbf{Y}_{Tk,\kappa} (\boldsymbol{\rho}) & \mathbf{I}_{n_o} \end{array} \right] \geq 0 \quad (5.67)$$

$$\left[\begin{array}{cc} \mathbf{Z}_{Qk,\kappa}^* (\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\rho}) \tilde{\mathbf{Z}}_{Qk,\kappa}^{(i)} + \tilde{\mathbf{Z}}_{Qk,\kappa}^{(i)*} \mathbf{Z}_{Qk,\kappa} (\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\rho}) - \tilde{\mathbf{Z}}_{Qk,\kappa}^{(i)*} \tilde{\mathbf{Z}}_{Qk,\kappa}^{(i)} & \mathbf{Y}_{Qk,\kappa}^* (\boldsymbol{\rho}) \\ \mathbf{Y}_{Qk,\kappa} (\boldsymbol{\rho}) & \mathbf{I}_{n_o} \end{array} \right] \geq 0 \quad (5.68)$$

$$\left[\begin{array}{cc} \Phi_k & \mathcal{D}^*(j\omega_k, \boldsymbol{\eta}) \\ \mathcal{D}(j\omega_k, \boldsymbol{\eta}) & 1 \end{array} \right] \geq 0 \quad (5.69)$$

for $k = 1, \dots, N$, and $\kappa = 1, \dots, m$

ここで、 \bullet_κ ($\kappa = 1, \dots, m$) は取得した κ 個目の制御対象の周波数応答に対する特性を示す。本実験では、3つの周波数応答を使用しているため $m = 3$ となる。設計周波数点は 10^{-3} – 10^3 rad/s の区間で対数的等間隔な 150 点とした。設計する制御器は、(5.60) 式の PID 制御器とし、制約式における上界値 S_{\max} , T_{\max} , Q_{\max} は (5.70) 式と設定した。

$$S_{\max}(\omega) = \left| \frac{1.6(j\omega + 0.01)}{(j\omega + 8)} \right|, \quad T_{\max} = 1.6, \quad Q_{\max} = 0.326 \quad (5.70)$$

繰り返し終了判定は、反復に対する評価値の相対誤差が 3 回連続して 1 % を下回ることとする。

86 回の繰り返しの後、評価値 γ は $0.130 = -17.7$ dB に収束し、安定な制御器が設計された。初期解に対する評価値は、 -1.95 dB であり、評価値は大きく抑制されていることがわかる。そして、取得周波数にける評価した $\bar{\sigma}(\mathbf{E}_T(j\omega))$ の値を図 5.21 に示す。

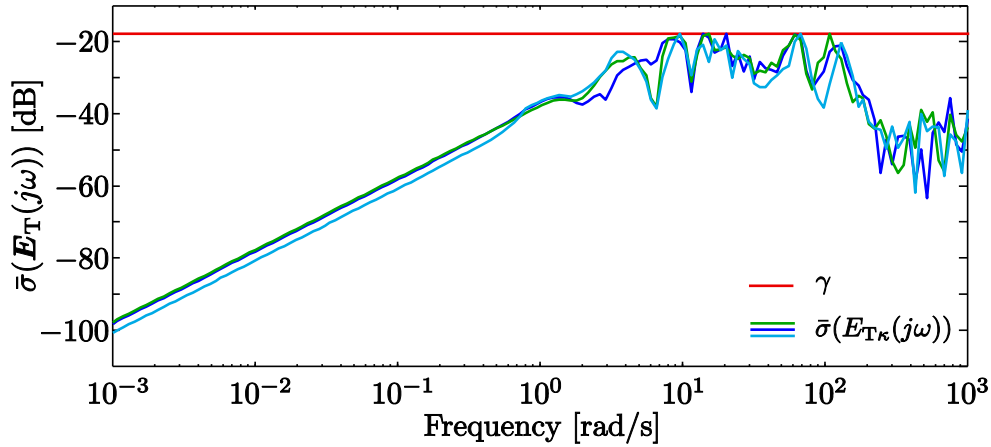
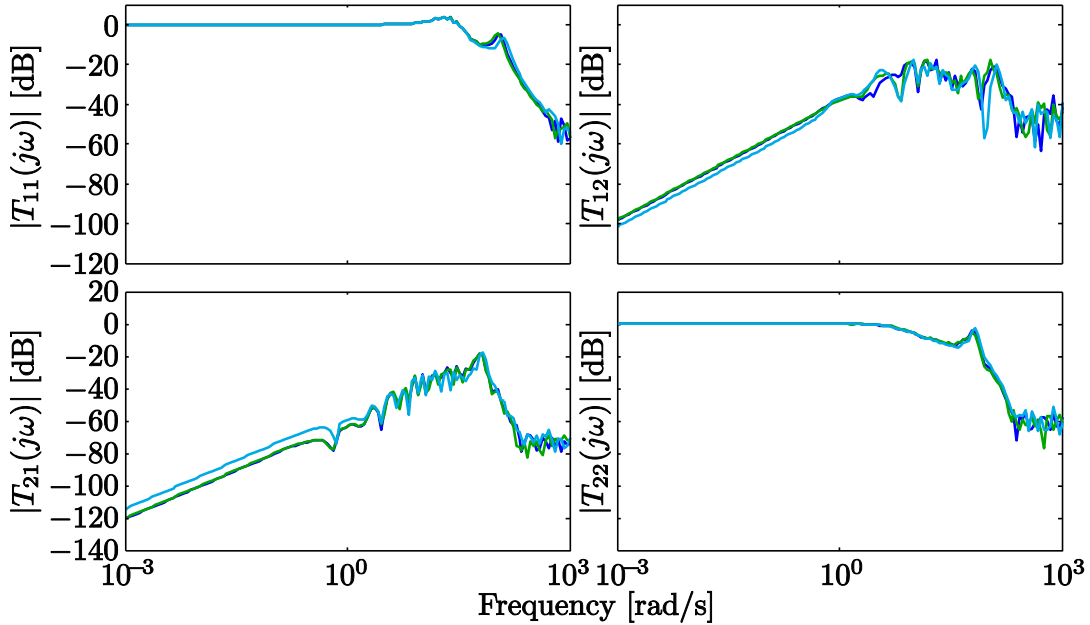
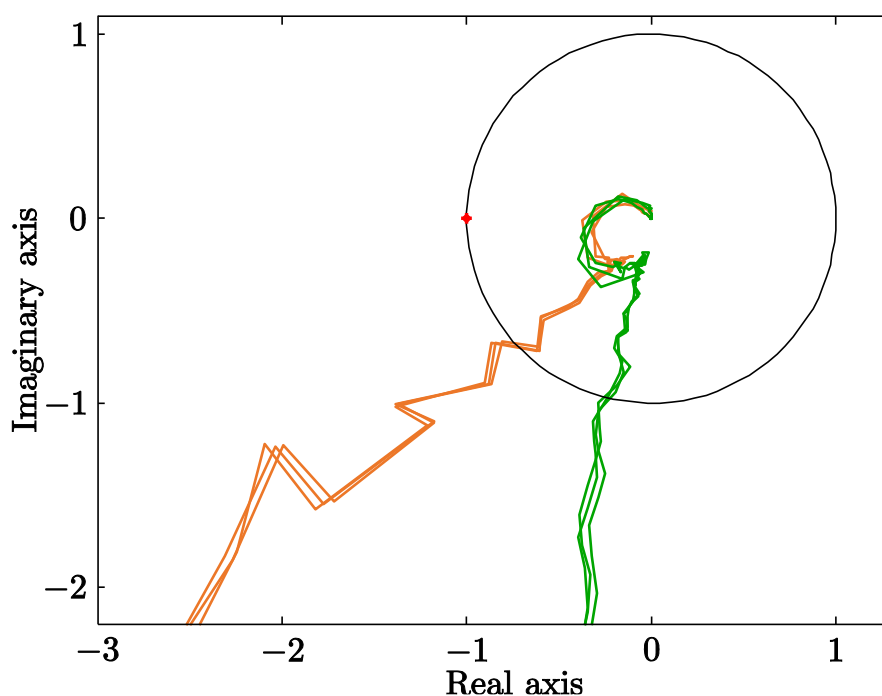

 図 5.21: 評価値 γ

 図 5.22: 相補感度関数 $T(j\omega)$ のゲイン線図

図 5.21 より， γ がすべての周波数応答に対する上界となっており，変動に対しても評価値が γ 以下となることを保証している。

次に，相補感度関数 $T(j\omega)$ のゲイン線図を図 5.22 に示す。Method 1 により，すべての周波数応答において，非対角要素のゲインは対角要素と比べ，抑制されていることが確認できる。また，設計されたシステムの固有値軌跡 $\lambda_q(j\omega)$ を図 5.23 に示す。図 5.23 より，すべての固有値軌跡 $\lambda_q(j\omega)$ は，臨界点 $(-1, j0)$ を回らず，MIMO システムにおける閉ループシステムの安定条件を満たしている。一方で，設計周波数点のとり方が粗いため，軌跡が滑らかとならない。4.4 節にて述べたように，周波数応答を用い


 図 5.23: 開ループ伝達関数行列の固有値軌跡 $\lambda_q(j\omega)$

た設計では周波数点間における性能の保証はなく、多くの周波数点で設計を行うことが望まれる。しかし、設計周波数点が多いほど計算量は増加し、特に本節の (5.64) 式のように複数の周波数応答を用いる場合は一層計算負荷は増える。そのため、本章の手法においては、計算負荷と保証される制御性能でトレードオフをとる必要がある。

以上ように、本章の手法では複数の入出力データより推定された異なる周波数応答を用いることで、取得したデータにおける変動を考慮した設計ができることを確認した。この際、複数の周波数応答に対して、(5.64) 式の最適化問題を解くだけであるため、簡易にロバストな制御器を設計することが可能である。

第6章 結言

6.1 まとめ

多くの場面で用いられるモデルベース制御器設計法は、モデル化誤差による制御性能の劣化や制御器の高次数化といった問題を抱えていた。本研究では、上記の問題に対する一つの解決策として広く研究がなされている、周波数応答を用いた制御器設計法の提案を目的として取り組みを進め、制御がより煩雑となる MIMO システムを扱ってきた。同様に、周波数応答を用いた多変数制御器設計に関する研究はされているが [7]–[11]、このいずれもシステムの応答を劣化させる相互干渉を直接的に評価するものはない。そこで、従来までの研究に対して、本研究では相互干渉を抑制し、対角優勢化を実現することを設計の軸に据えていた。また、MIMO システムを扱うにあたって、安定性や制御性能の評価で SISO システムとは異なる点が多々あり、設計において生じる保守性や複雑となる最適化問題の求解が課題となる。本研究では、システムの対角優勢化の達成を目標とし、これらの問題解決を試みた。

本論文では、上記の問題点に対して、大きく 3 つの手法を提案した。1 つ目は、開ループ伝達関数の対角優勢を評価する制御器設計手法である。この手法では、CCCP に基づいて対角優勢の評価を直接的に凸最適化問題へと記述し、文献 [7] で問題となっていた望みの特性の設定に伴う試行錯誤を削減した。また、相似変換の性質を利用して Gershgorin bands による固有値の存在範囲を縮小し、過度な見積もりから生じる保守性の低減を可能とした。結果として、開ループにおいて高い対角優勢化を達成する制御器設計が実現された。しかし、この手法において、各周波数およびチャンネルに対する重みの設定が必要である点や、閉ループシステムを直接評価できない点が課題として存在した。これに対して、2 つ目の手法では、閉ループシステムの相互干渉に関する性能指標^[19]を設計に導入した。これにより、閉ループシステムの相互干渉を直接的に抑制する制御器の設計が可能となった。加えて、求解に反復 LMI 制約を用いることで、LMI 最適化計算の繰り返しによる簡易な制御器設計が実現された。そして、3 つ目として、従来困難とされてきた制御器の極調整を可能とする手法を提案した。この手法では、制御器の分母多項式もパラメータ化した上で、2 つ目の手法と同じ設計問題を反

復 LMI 制約に基づいて LMI に定式化した。さらに、制御器の分母多項式のベクトル軌跡を考え、設計する制御器自体が安定となる制約式を提案した。結果として、LMI 最適化を用いた閉ループの相互干渉を抑制する極調整可能な制御器設計を実現した。そして、以上の提案手法により対角優勢化を達成する制御器設計が可能となり、複数のシミュレーション、実機実験を通して有効性を確認した。

6.2 今後の課題と展望

最後に、本節では本研究の今後の課題について述べる。同時に、本論文の主題である周波数応答を用いた制御器設計における今後の展望について言及する。

6.2.1 制御器の極調整

本論文 5 章において、閉ループの相互干渉を評価する極調整可能な制御器設計法を提案した。従来より、定式化される最適化問題が複雑となり求解が困難となるため、制御器の極調整は課題とされていた。この手法では、状態空間モデルに即して制御器の分母多項式と分子行列多項式のそれぞれをパラメータ化し、反復 LMI 制約に基づいて非凸となる問題を LMI で記述した。これにより、反復計算による準最適解となるが、求解の簡易な LMI 最適化計算によって制御器を設計することができた。

近年、周波数応答を用いた極調整を可能とする制御器の設計は、他の研究者によっても取り組まれている。その例として、文献 [10], [32] 挙げられる。文献 [10] は、制御器の伝達関数を状態空間表現のパラメータを用いて表現して制御器設計を行う。状態空間表現のパラメータ行列のサイズに制限はなく、自由に決めることができるため、本研究と同じく任意の固定次数多変数制御器を設計することができる。一方で、設計問題が H_∞ 標準問題に限定されることおよび、制御器の構造中の非正方行列における最適化計算への影響が明確でないことが課題点として考えられる。文献 [32] の手法は、SISO システムに対する制御器設計であるが、本研究のパラメータ化と同じく制御器の分母分子で別々のパラメータ化を行っている。さらに、複素平面上における図的解釈に基づいて、ロバスト性能条件に関する制約式を定式化している。そして、この手法では、感度に対する重み関数の定常ゲインを評価し、感度の最小化を図っている。

以上の手法のように、今後も新たな試みがなされることが予想される。現状、本研究を含めたここに挙げた手法は共通して、最適化問題が複雑となることに対して、問題の近似と反復計算を条件に簡易な求解を実現している。しかし、当然、反復計算と

引き換えに解の最適性を失い、大域的最適解に収束する保証がなくなる。この点から、大域的最適解を導出できる問題か、少なくとも解領域を可能な限り狭めない問題への定式化が課題のひとつとなることは明らかである。本研究で使用している反復 LMI 制約は、文献 [11] 中で良好な解が得られることを述べているが、この文献内では厳密に解の最適性についての議論はされていない。本研究においても解の最適性に関する評価は行っておらず、もとより本設計問題への反復 LMI 制約の適用の良し悪しも判断できていない。

また、制御器の極をパラメータ化するため、設計の結果、好ましくない値に極調整される可能性がある。好ましくない値としては、不安定な値、そして、ナイキスト周波数を超えるような値がまず考えられる。不安定な極は、耐故障性の観点から極力避きたい。そして、ナイキスト周波数を超えるような高い周波数に極がある場合、雑音が印加された際に性能に大きく影響が生じてしまう可能性がある。このように、制御対象や実験環境などで設計者がある程度制御器の極の範囲を指定したい場合がある。不安定な極に対しては、本研究において (5.1) 式に示す制御器の分母多項式 $D(s)$ のベクトル軌跡を考え、調整される極が不安定とならない制約式を 5.4 節にて定式化した。これにより、極を安定な範囲（負値）に維持し、安定な制御器を設計することが可能となった。しかし、周波数の範囲を指定するような細かい制約はつけることができず、今後の課題点として挙げられる。この課題点に対しては、安定制約の定式化時に用いた $D(s)$ のベクトル軌跡を用いることにより解決される見込みがある。 $D(s)$ は、ラプラス演算子 s の多項式であり、不安定零点がなければ、ベクトル軌跡は $\omega \rightarrow \infty$ において位相進みしか生じない。したがって、極を配置したい周波数に応じてベクトル軌跡の位相を変化させれば、所望の範囲における極調整が期待される。上記で挙げたナイキスト周波数に関する項目も、指定した制御器の次数に対する位相の総変化量を算出し、有限周波数のベクトル軌跡がその範囲に収まるように制約を付加すればよい。この際、位相進みしか生じないため、評価に必要な周波数点は 1 点ないしは 2 点でよく、計算量も非常に少なく済むことも利点となり得る。

また、類似研究であるデータ駆動型の制御器設計では、部分空間同定法に基づいた設計の研究がなされている。データ駆動型の制御器設計においても、従来、非線形最適化の利用なしでは制御器の極調整は困難であった。これに対して、部分空間同定法は、入出力データより状態空間モデルベースで同定を行うため、ひとつの解答となることが期待されている。ここで、部分空間同定法自体も広く研究が行われており、多くの種類が存在する。本論文では、文献 [33] の周波数応答を用いた部分空間ベースの

MIMO システム同定に着目したい。この手法を応用することより、周波数応答を用いた制御器設計においても部分空間同定法に基づいたアプローチから極調整可能な制御器設計の実現が望める。

6.2.2 システムの広帯域化

周波数応答を用いた制御器設計法に関する研究の歴史の中で、文献 [34] や [35] では、Nyquist 線図上で表現される SISO システムに対する性能条件から制約式の定式化が行われている。本論文では、これらの手法における制御帯域（ゲイン交差周波数）に対する制約式に注目したい。本研究では、MIMO システムにおける対角優勢化を主目的として試みを続けてきた。ここで、相互干渉の抑制だけでは、システムの速応性向上には繋がらず、かえって、システム全体としてのゲインを落とすことになりかねない。そのため、システムの広帯域化が望まれる。また、本研究に関わらず、制御帯域は制御において応答性を決定付ける重要な指標であり、広帯域化は多くの場面で要求される。本節では、周波数応答を用いた設計におけるシステムの広帯域化について述べる。

上記の文献 [34], [35] において提案されている制約式は、設計者があらかじめ要求する制御帯域を指定し、それを確保することを保証している。これは、指定された制御帯域以下の周波数応答に対して、ゲインの制約を課すことで達成されている。これらの手法は、制御器設計時に、目標としている値、あるいは達成できる制御帯域の情報を有している場合には、有効な手法となり得る。しかしながら、実際には上記のような場面は多くなく、特に、周波数応答のみを用いて設計を行うこれらの手法では、概して設計段階で制御帯域に対する明確な指標はない。したがって、設計者の試行錯誤により確保する制御帯域を指定することとなり、最適な制御帯域を達成することは困難となる。このような問題が存在する原因は、制御帯域を変数で定義した設計問題の記述が困難であることが大きいと考えられる。周波数応答を用いた手法では、有限個の周波数点に対する制約式が連立された最適化問題を求解することで制御器が設計される。ゆえに、文献 [34], [35] と同様の考え方で制御帯域を変数とすると、設計の最中に課すべき制約式の数が変化することとなり、この問題の求解は非常に困難であると考えられる。これに対して、制御帯域 ω_{bw} に依存した図 6.1 のようなステップ関数 $f(\omega_{bw}, \omega)$ を用い、制約式を記述することに容易に考えが至る。(6.1) 式のようにステップ関数 $f(\omega_{bw}, \omega)$ を

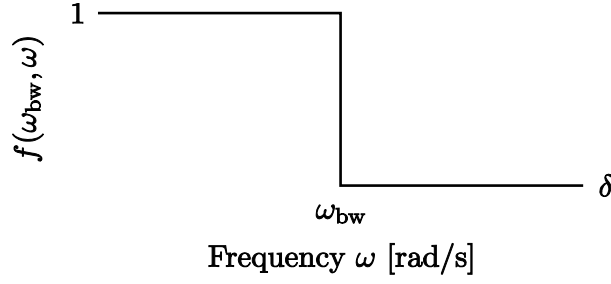


図 6.1: ステップ関数

定義すると, ω_{bw} の変化に応じて周波数 ω における評価が切り替わることとなる。

$$f(\omega_{bw}, \omega) = \begin{cases} 1 & \omega_{bw} \geq \omega \\ \delta (\leq 0) & \omega_{bw} \leq \omega \end{cases} \quad (6.1)$$

このステップ関数の特性を利用し, 制御帯域 ω_{bw} 以下の周波数応答に対してはゲインの制約を課し, その他の周波数では制約がかからないような制約式を記述すればよい。具体的には, SISO システムに対して (6.2) 式のような条件が考えられる。

$$\begin{aligned} r_{bw} f(\omega_{bw}, \omega) - |L(j\omega) - c_{bw}| &\leq 0 \\ r_{bw} &= \left| \frac{M_{bw}}{M_{bw}^2 - 1} \right| = \sqrt{2}, \quad c_{bw} = -\frac{M_{bw}^2}{M_{bw}^2 - 1} = 1 \end{aligned} \quad (6.2)$$

ここで, r_{bw} および c_{bw} は, Nyquist 線図上の $|T(j\omega)| = 1/\sqrt{2} =: M_{bw}$ に対する M-circle [36] の半径及び中心座標の実部を示す。これにより, 制御帯域 ω_{bw} 以上の周波数では $|T(j\omega)| \geq 1/\sqrt{2}$ とする制約が課され, 逆に, 制御帯域 ω_{bw} 以下の周波数では常に成立する条件式となる。ゆえに, (6.2) 式を付加して $\max \omega_{bw}$ とする設計問題を解くことができれば, 最適な制御帯域の達成が望める。しかしながら, どのようなステップ関数を用いても上記の問題は関数の不連続性などから複雑となり, 求解が困難となる。従来, 適応制御などをはじめとして, ステップ関数を考える際には微分可能で扱いやすい図 6.2 のようなシグモイド関数が広く用いられている。しかし, シグモイド関数を用いて, (6.2) 式を (6.3) 式のように記述しても, パラメータに対して求解が簡易な形式で表現することはできない。

$$r_{bw} \frac{1}{1 + e^{-a(\omega_{bw} - \omega)}} - |L(j\omega) - c_{bw}| \leq 0 \quad (6.3)$$

ここで, $a (> 0)$ はシグモイド関数のステップ関数への近似度を定める値である。

以上の点から, 制御帯域を直接最大化するような制御器設計の達成は難しいとされている。これに対して, 本研究で扱った最適化アルゴリズム [11][22][23] の適用により, 簡

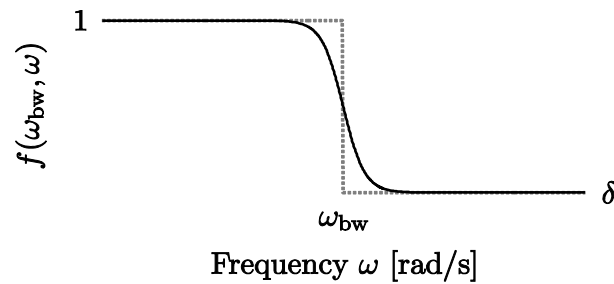


図 6.2: シグモイド関数

易な制御器設計の実現が期待される。これらのアルゴリズムは、問題を線形化によって凸最適化問題へと記述することで、凸最適化計算を用いた簡易な求解を可能としている。ここで、(6.3) 式において、シグモイド関数の分母が ω_{bw} に対する凸関数であることに着目すれば、凸最適化問題で記述することはことは難しくない。このように、最適化に関する研究は、昔から盛んにされており、未だに多くの手法が提案されている。そのため、本節における広帯域化のような今まで求解が困難であった問題が、容易に解くことが可能となる場合がある。本研究と数値最適化には密接な関係が存在し、今後、新たに提案された最適化手法の導入により、さらなる高性能な制御の実現が期待される。

参考文献

- [1] K. Zhou, J. C. Doyle: *Essentials of robust control*, Upper Saddle River, NJ: Prentice hall (1998)
- [2] J. C. Doyle, G. Stein: “Multivariable feedback design: Concepts for a classical/modern synthesis”, *IEEE Trans. on Auto. Control*, Vol. AC-26, No. 1, pp. 4–16 (1981)
- [3] O. H. Bosgra, H. Kwakernaak, G. Meinsma: *Design methods for control systems*, Notes for a Course of Dutch Institute of Systems and Control, Winter term (2002)
- [4] Q. Xiong, W. J. Cai, M. J. He: “Equivalent transfer function method for PI/PID controller design of MIMO process”, *Journal of Process Control*, Vol. 17, No. 8, pp. 665–673 (2007)
- [5] A. Karimi, G. Galdos, R. Longchamp: “Robust fixed-order H_∞ Controller Design for Spectral Models by Convex Optimization”, *Proc. of 47th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 921–926 (2008)
- [6] M. Hast, K.J. Åström, B. Bernhardsson, S. Boyd: “PID Design by Convex-Concave Optimization”, *Proc. of 2013 European Control Conference*, pp. 4460–4465 (2013)
- [7] G. Galdos, A. Karimi, R. Longchamp: “ H_∞ Controller Design for Spectral MIMO Models by Convex Optimization”, *Journal of Process Control* 20, No. 10, pp. 1175–1182 (2010)
- [8] M. Saeki, K. Kashiwagi, N. Wada: “Design of Multivariable H_∞ PID Controller Using Frequency Response”, *Proc. of IEEE International Conference on Control Applications, 2007 (CCA 2007)*, pp. 1565–1570 (2007)

- [9] M. Saeki, M. Ogawa, N. Wada: “Low-order H_∞ controller design on the frequency domain by partial optimization”, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Vol. 20, No. 3, pp. 323–333 (2010)
- [10] 佐伯正美, U. Wasiwitono: 「周波数依存 LMI を用いた次数固定 H_∞ 制御器の数値最適化」, 計測自動制御学会論文集, Vol. 46, No. 3, pp. 170–177 (2010)
- [11] S. Boyd, M. Hast, K. J. Åström: “MIMO PID Tuning via Iterated LMI Restriction”, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, early view (2015)
- [12] J. Maciejowski: *Multivariable feedback design*, Addison-Wesley publishing company (1989)
- [13] 李義頡, 長町政宗, 崔元奎, 宋正永, 宮崎道雄, 秋月影雄: 「前置補償器の直並列接続による多段階非干渉化 PID 制御」, 電気学会論文誌 C, Vol. 123, No. 1, pp. 43–49 (2003)
- [14] P. Nordfeldt, T. Hägglund: “Decoupler and PID controller design of TITO systems”, *Journal of Process Control*, Vol. 16, No. 9, pp. 923–936 (2006)
- [15] P. Chen, W. Zhang: “Improvement on an inverted decoupling technique for a class of stable linear multivariable processes”, *ISA Transaction*, Vol. 46, No. 2, pp. 199–210 (2007)
- [16] S. Skogestad, I. Postlethwaite: *Multivariable Feedback Control Analysis and design*, John Wiley & Sons, 2nd Edition (2001)
- [17] 篠田翔吾, 弓場井一裕, 矢代大祐, 平井淳之: 「周波数応答を用いた固有値軌跡を評価する多変数制御器設計」, 第 57 回自動制御連合講演会講演論文集, pp. 679–684, 1B08-6 (2014)
- [18] S. Shinoda, K. Yubai, D. Yashiro and J. Hirai: “Multivariable Controller Tuning Based on Closed-Loop Interaction Using Frequency Responses”, *Proc. of International Automatic Control Conference*, pp. 516–521 (2015)
- [19] J. Lee, T. F. Edgar: “Dynamic interaction measures for decentralized control of multivariable processes”, *Industrial & engineering chemistry research*, Vol. 43, No. 2, pp. 283–287 (2004)

- [20] H. H. Rosenbrock: “Design of multivariable control systems using the inverse Nyquist array”, *Proc. of IEE*, Vol. 116, No. 11, pp. 1929–1936 (1969)
- [21] B. Porter, N. Munro, A. Nobakhti: “Evolutionary Dominance-Based Design of Linear Multivariable Controllers”, *Proc. of European Control Conference*, pp. 2887–2892 (2003)
- [22] A. L. Yuille, A. Rangarajan: “The concave-convex procedure”, *Neural Computation*, Vol. 15, No. 4, pp. 915–936 (2003)
- [23] A. J. Smola, S. V. N. Vishwanathan, T. Hofmann: “Kernel Methods for Missing Variables”, *Proc. of International Workshop on Artificial Intelligence and Statistics*, pp. 325–332, (2005)
- [24] H. H. Rosenbrock: *State-space and multivariable theory*, London Nelson (1970)
- [25] 太田快人：システム制御のための数学（1）線形代数編，コロナ社（2000）
- [26] 千賀一輝，弓場井一裕，平井淳之：「周波数応答を利用したロバスト性能条件を満たす多変数固定構造制御器の設計」，平成 24 年電気学会産業応用部門大会論文集，Vol. 2, pp. 33–38 (2012)
- [27] O. Gasparian: *Linear and Nonlinear Multivariable Feedback Control: A Classical Approach*, John Wiley & Sons (2008)
- [28] P. Grosdidier, M. Morari: “Interaction Measures for Systems Under Decentralized Control”, *Automatica*, Vol. 22, No. 3, pp. 309–319 (1986)
- [29] 瀬部昇，北森俊行：「対角優勢と正実性」，計測自動制御学会論文集，Vol. 31, No. 12, pp. 1930–1935 (1995)
- [30] A. G. Macfarlane, J. J. Belletrutti: “The characteristic locus design method”, *Automatica*, Vol. 9, No. 5, pp. 575–588 (1973)
- [31] 伊豆田義人，我妻敏正，渡部慶二：「入力にむだ時間をもつ多変数系に対する一般化安定化器の設計」，計測自動制御学会論文集，Vol. 34, No. 9, pp. 1214–1222 (1998)

- [32] A. Karimi, Y. Zhu: “Robust H_∞ Controller Design Using Frequency-Domain Data”, *Proc. of 19th IFAC World Congress* (2014)
- [33] T. McKelvey, H. Akcay, L. Ljung: “Subspace-Based Multivariable System Identification from Frequency Response Data”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 41, No. 7, pp. 960–979 (1996)
- [34] A. Karimi, M. Kunze, R. Longchamp: “Robust controller design by linear programming with application to a double axis positioning system”, *Control Engineering Practice*, Vol. 15, No. 2, pp. 197–208 (2007)
- [35] 長坂太郎, 弓場井一裕, 平井淳之: 「凸最適化を用いた Nyquist 線図上の性能制約を満たすフォロイング制御器の設計」, 産業計測制御研究会資料, IIC-11-161, pp. 31–36 (2011)
- [36] F. Golnaraghi, B. C. Kuo: *Automatic control systems*, John Wiley & Sons, 9th Edition (2009)

謝辞

本研究の遂行ならびに修士論文作成にあたり、ご指導、ご鞭撻を賜りました三重大学大学院工学研究科教授 平井 淳之 先生に深く感謝致します。また、先生には、技術者として、社会人の先輩として、日常生活においても大変貴重な御意見を頂き、私たち学生を常に支えてくださいました。この場を借り、重ねて感謝致します。

本研究の遂行ならびに修士論文作成にあたり、我々と向き合い、日頃より検討会や学会発表等で常に丁寧にご指導して頂き、私自身の成長に大きく寄与して下さいました同大学准教授 弓場井 一裕 先生に深く感謝致します。先生の下で多くのことを学び、研究に打ち込めたことを非常に嬉しく思います。重ねて心より感謝致します。

本研究の遂行ならびに修士論文作成にあたり、日々の検討会で、そして副査として貴重なご意見を頂きました同大学教授 石田 宗秋 先生に深く感謝致します。

本研究の遂行にあたり、日々の検討会および学生生活において、貴重な御意見を頂きました同大学准教授 駒田 諭 先生、同大学准教授 山村 直紀 先生、同大学助教授 矢代 大祐 先生に心から感謝致します。また、日頃より、技術面および研究室生活で私たちを支えてくださいました術職員 中村 勝 氏に心から感謝致します。

本研究の遂行にあたり、制御理論部門モデルベースグループの先輩として、制御の基礎・基本を教え、資料作成やプレゼンテーションの技術を鍛え上げて下さいました 千賀 一輝 氏、土井 章弘 氏、久保 貴之 氏に深く感謝致します。また、同部門の先輩として、親身にご指導頂きました 榊原 健 氏、松尾 亮太 氏、毛利 太一 氏、同部門の同期として苦楽を共にし、切磋琢磨し合った 松本 治樹 氏、磯部 良太 氏に心から感謝致します。そして、同部門として共に研究した 中村 和樹 君、宇佐美 朋大 君、青木 翔吾 君、岩本 直也 君、竹若 恵太 君、川戸 裕貴 君、堀 智貴 君、山本 直輝 君に感謝し、今後のご活躍を心より期待しております。

同期として、日々の研究生活を送り、鼓舞し合った 伊藤 大悟 君、豊田 寛将 君、能勢 公貴 君、二村 洋輔 君、ならびに、充実した生活を送らせて頂いた電機システム研究室の皆様へ感謝致します。

最後に、大学・大学院への進学を認め、不自由なく学生生活を送らせて頂いた両親をはじめとする家族に深く感謝致します。

論文目録

- (1) 篠田翔吾, 弓場井一裕, 矢代大祐, 平井淳之:「周波数応答のみを用いた多変数制御器設計における保守性低減」, 平成 26 年度電気関係学会東海支部連合大会講演論文集, F2-3 (2014.9)
- (2) 篠田翔吾, 弓場井一裕, 矢代大祐, 平井淳之:「周波数応答を用いた固有値軌跡を評価する多変数制御器設計」, 第 57 回自動制御連合講演会講演論文集, 1B08-6, pp. 679–684 (2014.11)
- (3) S. Shinoda, K. Yubai, D. Yashiro and J.Hirai: “Multivariable Controller Design Achieving Diagonal Dominance Using Frequency Response Data”, *Proc. of International Symposium for Sustainability by Engineering at MIU 2014*, EP-16 (2014.12)
- (4) S. Shinoda, K. Yubai, D.Yashiro and J.Hirai: “Design of Multivariable Controller Attaining Diagonal Dominance Using Frequency Responses”, *Proc. of The 1st International Workshop on Sensing, Actuation, and Motion Control*, V-4, pp. 1–2 (2015.3)
- (5) 篠田翔吾, 弓場井一裕, 矢代大祐, 平井淳之:「LMI を用いた対角優勢を実現する多変数制御器設計」, 第 59 回システム制御情報学会研究発表講演会 (SCT'15), 124-2 (2015.5)
- (6) S. Shinoda, K. Yubai, D.Yashiro and J.Hirai: “Multivariable Controller Design Evaluating Closed-Loop Interaction by Iterative LMI Optimization Using Frequency Response Data”, *Proc. of 2015 International Conference on Advanced Mechatronic Systems*, SunM01-02, pp. 429–434 (2015.8)
- (7) S. Shinoda, K. Yubai, D.Yashiro and J.Hirai: “Multivariable Controller Tuning Based on Closed-Loop Interaction Using Frequency Responses”, *Proc. of 2015 International Automatic Control Conference*, pp. 516–521 (2015.11)

- (8) S. Shinoda, K. Yubai, D. Yashiro and J.Hirai: “Design of Fully parameterized Multivariable Controller Suppressing Closed-Loop Interaction via Iterative LMI Optimization Using Frequency Responses”, *Proc. of International Symposium for Sustainability by Engineering at MIU 2015*, EO-6 (2015.12)
- (9) 篠田翔吾, 弓場井一裕, 矢代大祐, 平井淳之: 「周波数応答を用いた閉ループの相互干渉を評価する多変数制御器調整」, 電気学会メカトロニクス制御研究会, MEC-15-45, pp. 97–102 (2015.12)
- (10) 篠田翔吾, 弓場井一裕, 矢代大祐, 平井淳之: 「周波数応答を用いた対角優勢を実現する多変数制御器設計」, 電気学会論文誌 電子・情報・システム部門誌, Vol. 136, No. 5 (2016.5 掲載決定)
- (11) S. Shinoda, K. Yubai, D.Yashiro and J.Hirai: “Fully Parameterized Multivariable Controller Design Minimizing Closed-Loop Interaction by Iterative LMI Optimization”, *Proc. of The 2nd International Workshop on Sensing, Actuation, Motion Control, and Optimization*, TT3-6 (2016.3) (Best presentation in session 受賞)