

# Kripke真理論とその数学的構造

山 岡 悦 郎

## は じ め に

論理学的真理論研究における最近の最も大きな話題は、1975年に出された Kripke のエレガントな論文およびそれに続く、哲学者や数学者達の一連の諸研究であろう。周知のように、その出現以来、それを肯定するにせよ批判するにせよ、真理論研究において決定的影響を与えてきたのは Tarski 真理論であった。満足概念や真理概念を定義する彼の方法や、モデル論的な基本的技術は、現在では、論理学を学ぶ場合の標準的道具となっているといつてよい。哲学に対する彼の影響も、特に意味論や認識論において大きなものであるが、その評価は論理学におけるほど一致しているわけではない。好意的評価が支配的である(たとえば Popper [31]では熱狂的に支持された)とはいえ、彼自身によって列挙された初期の批判や、比較的最近では、Field [11]や Putnam [33]による辛らつな批判もある(Etchemendy [9])。確かに、Tarski 真理論を正当に評価することは容易でないと思われるが、その核心をなすのは、自分自身を含む文に適用可能な(つまり、自己言及的な)真理述語は存在しえないことを示したことであると考えられる。形式化された言語の場合、Gödel の不完全性定理が示されるや、Tarski の主張は決定的なものとなった。

Russell のパラドックスを避けんとして、一方において、タイプ理論が生まれたように、真理述語の定義可能性を求めんとすれば、Tarski 的な言語階層説へと導かれるのも、ある意味では必然的であったのかもしれない。しかし、形式化された言語はともかくとして、日常言語の場合、そこに階層を持ち込むのは何としても不自然さを感じざるをえない。そのようなことから、パラドックスを避ける方向で自己言及的な真理述語の可能性を追求してみようとの流れが生じ、そのような風潮の中で現われてきたのが Kripke 真理論なのである。Kripke は、Tarski とは異なる視点からアプローチし(もちろん、影響は受けているが)、Tarski 的アプローチでは射程外であったことがらに光をあてようとしたといつてよい。現在における活発な真理論研究は、Kripke 的思考のわく組の中で問題を提起し、また、Kripke 的思考の道具を用いて問題を解決しようとしているの観がある。

だが、Kripke 以前に先行者が全然いなかったわけではない。(たとえば、van Fraassen や Martin [26]をあげることができる。) Tarski 真理論を越えようとする傾向も1960年代後半から次第に顕著になってくるが、Kripke によれば、それらは本物の理論を提供してはおらず、ただ、そのような理論の展開方法についてのヒントを与えてくれるだけであった。Tarski 真理論はそれなりに一貫しており、また、真理の数学的定義を与えている。Kripke の先行者達は、Tarski を越えようとの意気込みはともかくとして、真理の数学的定義の試みは断念しているように思われる。Kripke はその両者を試みているのである。

このように、「この領域における最近の研究の礎石」[Friedman & sheard]とも目される Kripke 真理論ではあるが、それがどのような理論であるかを正確に把握するとなると、それ程容易ではない。これは、論理学(数学)的真理論であるにもかかわらず、形式的記述が必ずしも詳細に展開されていないということや、哲学的議論と論理学(数学)的議論の両方が含まれながらも、それらの関連が十分に説明されていないということに基づく。<sup>(1)</sup>

そこで、本小論では、Kripke 真理論の哲学的主張を吟味するということよりはむしろ、論理学(数学)的記述を通して彼の真理論を理解するということを目ざしてみたい。そのために、まず、彼の真理論のわく組をその本質的部分について展開し、次に、論理学(数学)的記述を原論文におけるよりも一そういいに解説すると同時に、Kripke とは幾分異なる Fitting の数学的解説を紹介する。

## 1. 問 題

1.1 Kripke 真理論の背後にあるのはどのような問題意識であろうか。述語  $P(x)$ ,  $Q(x)$  に対して、文  $\forall x[P(x) \rightarrow Q(x)]$  を考えてみる。<sup>(2)</sup> 構文論的観点からは特に問題はない文のように思われる。しかし、ある場合には、この文が述語  $P(x)$  を満足する唯一の対象であるということが知られている。この場合、この文を  $S$  とすると、 $S$  のみが  $P(x)$  をみたすのであるから、 $S$  は「 $S$  は  $Q$  である」を意味することになる。すなわち、さきの文は自己自身について「それは  $Q(x)$  を満足する」と主張するのである。ここで、 $Q(x)$  を「 $x$  は真でない」と読むことにすれば、liar パラドックスが生ずる。 $\forall x[P(x) \rightarrow Q(x)]$  そのものは何らパラドックスを生じさせるものではなく、経験的条件がそろえばパラドックスを生じさせるのである。パラドックスは、われわれの思考における人をまごつかせる困りものであって、避けるべきものであるとすれば、liar パラドックスの出現は、われわれに対して、真理概念の注意深い取扱いを要求することになる。

ところで、さきの  $P(x)$  を満足するのは文  $\forall x[P(x) \rightarrow Q(x)]$  のみである、といったような自己言及的文の存在は全く経験的なことがらであるかといえ、必ずしもそうではない。Gödel は、そのような経験的性質は、純粋に構文論的述語を用いるならば、なくてはすませることができることを示したのである。Tarski の画期的な真理論が発表されたのとはほぼ同じ頃、Gödel は第1(および、第2)不完全性定理を証明したが、その証明中に、「任意の1変数の論理式  $P(x)$  に対して、 $S \leftrightarrow P(S)$  が証明できるような閉論理式  $S$  が存在する」ということを示した( $S$  は  $S$  の Gödel 数に対応するところの、形式的体系における項である)。これが Gödel の対角化定理といわれるものである。これは、さきの表現形式を用いれば、「任意の述語  $Q(x)$  に対して、文  $\forall x[P(x) \rightarrow Q(x)]$  が  $P(x)$  を満足する唯一の対象である、といったような述語  $P(x)$  をうみ出すことができる」と述べることができよう。つまり、構文論的観点から自己言及を論ずることは何の不都合もないのである。パラドックスとみなされる liar 文が人々を悩ませるのは、それが自己言及文であるからなのではない。そこに真偽という意味論的概念が付加されるからである。

また、Gödel の対角化定理を用いるならば、形式的体系  $P$  が無矛盾の場合、「任意の閉論理式  $S$  に対して、 $S \leftrightarrow T(S)$  が証明できるような、1変数の論理式  $T(x)$  は存在しない」ということが容易に示される。 $T$  を真理述語と解するならば、真理述語の定義不可能性を主張

する Tarski の定理となる。ここでは、 $S$ ,  $T(S)$  は共に  $P$  に属する論理式である。つまり、 $T$  を真理述語と解した場合、それは自己自身を含む言語体系に対する真理述語と解される。Tarski は、そのような真理述語は形式的体系(これは、もちろん無矛盾であるのみならず、対角化定理の証明されるもの)の中には存在しえないといっているものであり、ここから、有名な、対象言語とメタ言語を区別する言語階層理論が導かれる。その理論に基づいて、彼は、いわば新しい立場から、真理の定義可能性を問題とした。liar 文のパラドックス解決もその理論に基づく。すなわち、真や偽にレベルの差(たとえば、「雪は白い」はレベル 1 での真であるとすると、「雪は白い」はレベル 1 での真である」はレベル 2 での真である、といった具合)をもうけることによって、「 $S$  は真でない」なる文を  $S$  としたとき、「 $S$  は真でない」は真でない」といった代入を現出させないようにするのである。

1.2 2 値論理を採用し、しかも、liar 文も文として真理値をもたねばならないとすると、まさしく liar 文はその占める場がなく、こまったことになる。しかし、たとえば、日常言語の場合、「 $S$  は真でない」なる文を  $S$  と同一視することはありえることに思われる。すると、liar 文の存在は否定できず、2 値論理の方に修正をせまり、liar 文に占めるべき場を与えてくれるような論理の可能性をさぐってみようというのも 1 つの考え方であろう。たとえば、真と偽を 2 つの真理値としたとき、第 3、第 4 の値として「真でもなければ偽でもない」という truth-valve gap, 「真であると同時に偽でもある」という truth-valve glut を認める非古典論理、あるいは多値論理などの可能性が考えられる。

さらに、真理概念についても、日常言語では、通常の平叙文に対して、真であるとか偽であるとか述べられる。これは事実そうであるといっているのであって、それでもって、真理の定義が可能であると断定するのは、もちろん危険であろう。他方において、truth-valve gap を許容しない論理に限定する限り、Tarski の定理により、形式化された言語には、その言語の文に適用される真理述語が存在しないことも明らかである。日常言語では文に適用される真理述語が存在しているように思われる、というわれわれの言語感覚を大切に、それに添う方向で形式化された言語の真理述語も考えたいというのであれば、まず、truth-valve gap を許容しない論理に限定することをやめ、パラドックスからわれわれを解放してくれる論理体系の前提の下に、それと首尾一貫する仕方でもって、自己自身を含む言語体系に対する真理述語の可能性、したがってまた、Tarski とは異なる真理述語の定義可能性の方向をさぐってみようというのも 1 つの考え方であろう。Kripke の動機の 1 つもそこにあると思われる。

1.3 ところで、意味論的な liar パラドックスは昔から知られており、それが知性を刺激して真理論研究を深めさせることになったが、他方において、論理的な Russell のパラドックスに触発されて、公理的集合論が構築されるようになったこともよく知られている。Kripke に限らず、パラドックスから自由な真理の理論を建設しようと試みるのであれば、すでにかかなりの成果をあげている集合論の側での考え方、あるいは方法を参考にして、両者を平行的に論じ、解決の糸口をみつめてみようというのも確かに有力な考え方である。

Goddard & Johnston [14], および西脇 [30] の研究によれば、liar パラドックスと Russell のパラドックスの間には (Ramsey による相違点の指摘にもかかわらず),  $\sim \exists x \forall y [A(y, x) \leftrightarrow \sim A(y, y)]$  の否定、という共通の表現形式が存在している。のみならず、Feferman [10] のいうところによれば、両者のパラドックスには、それをうみ出す要因に関してもまた、共通

性が存在しているのである。Feferman にしたがうならば、次のようである(ただし、ここでの  $S$  は論理体系、 $L$  は  $S$  に対する言語)：

(I) Russell のパラドックスの場合

1) 構文論

(クラスの命名)  $L$  の任意の論理式  $\phi(x)$  に対して、項  $\{x \mid \phi(x)\}$  を作ることができる。

2) 論理

通常の述語論理

3) 基本原理

$y$  がクラス  $z$  の元であることを表現するとみなされる 1 項関係  $y \in z$  が  $L$  の中に存在し、次の内包性公理図式が、 $L$  の任意の  $\phi(x)$  に対して、 $S$  において成立する：

$$\forall y[y \in \{x \mid \phi(x)\} \leftrightarrow \phi(y)]$$

(II) liar パラドックスの場合

1°) 構文論

(命名)  $L$  のあらゆる言明  $\phi$  は  $L$  の中に名前をもつ。すなわち、 $L$  の項「 $\phi$ 」が存在する。

(自己言及) あらゆる論理式  $\psi(x)$  に対して、 $S$  において、 $\psi(\ulcorner \phi \urcorner) \leftrightarrow \phi$  なる  $\phi$  を作ることができる。

2°) 論理

通常の命題論理

3°) 基本原理

「 $x$  は真である」と解釈される述語  $T(x)$  に対して、次の公理が成立する：

$L$  の任意の言明  $\phi$  に対して、 $T(\ulcorner \phi \urcorner) \leftrightarrow \phi$ 。

以上 3 つの項目、つまり、構文論、論理、基本原理がそれぞれの場合においてみたされるような体系では、容易に矛盾が生ずる。Russell のパラドックスの場合： $\phi(x) = \sim(x \in x)$  とすると、内包性公理図式により、集合  $\{x \mid \sim(x \in x)\}$  が存在する。この集合を  $r$  とすると、述語論理の規則より、 $S$  において、 $r \in r \leftrightarrow \sim(r \in r)$  をうる。 $\theta = r \in r$  とすると、 $S$  において、 $\theta \leftrightarrow \sim \theta$ 、つまり、 $\theta \rightarrow \sim \theta$  と  $\sim \theta \rightarrow \theta$  の両方が証明可能となる。一方、 $(\theta \rightarrow \sim \theta) \rightarrow \sim \theta$  が成立する。よって、分離則より、 $\sim \theta$  が成立し、したがってまた、 $\theta$  が成立する。これは矛盾である。次に、liar パラドックスの場合： $S$  において、 $\phi \leftrightarrow \sim T(\ulcorner \phi \urcorner)$  なる liar 文  $\phi$  をとる。よって、基本原理より、 $T(\ulcorner \phi \urcorner) \leftrightarrow \sim T(\ulcorner \phi \urcorner)$  が成立する。ここで、 $\theta = T(\ulcorner \phi \urcorner)$  とすると、 $\theta \leftrightarrow \sim \theta$  が証明可能となり、Russell のパラドックスの場合と同様の議論により、矛盾が生ずる。

パラドックスの生ずる要因を上記 3 つの項目であるとする、それを防ぐには、3 つの項目のうちの少なくとも 1 つを制限すればよいということになる。集合論の場合、1) を制限するのが Russell のタイプ理論であり、2) の制限と思われるのが Gilmore の体系、3) の制限としてえられるのが ZF 集合論である。それに対して、真理論の場合、1°) を制限したのが Tarski である。2°), 3°) の制限を通して真理論建設を試みようというのが Kripke、およびその線上にある人々ということになろう。Kripke 自身については、通常の古典 2 値論理を制限し、truth-value gap をもつ論理に基づいて理論を展開しているので、その基本的立場に関しては、2°) の制限といえるであろう。

1.4 Kripke の真理論の比重は、その形式的理論におかれている。そこで、その形式的構造および数学的性質において豊富な領域を提供してくれると同時に、真理述語についてのわれわれの日常的直観を完全ではないにせよ、ほどよい程度において表現してくれるような言語モデルを、論理の制限という立場から、いかにして構築することができるか、また、そこではパラドックス、あるいはそれに類することがらにどのような形式的表現を与えることができるか、というのが Kripke の第一義的な課題であるといつてよい。

## 2. 基 底 性

2.1 さて、われわれは文の真偽をどのようにして確認できるのであろうか、その確認の仕方を、Kripke は、基底性 (groundedness) の概念と関連づけて、次のように説明している。「一般的にいて、(1)のような文が<sup>(3)</sup>あるクラスCの文の(全て、若干、大ていのもの)は真である」と主張するのであれば、その文の真理値は、もしそのクラスCの中の諸々の文の真理値が確認されるなら、確認することができる。もしそれらの文自身のうちの若干が真理概念を含むものなら、それらの文の真理値は順ぐりに他の文をみることによって確認されねばならない。もし究極的にこのプロセスが真理概念に言及しない文でおわり、かくして、もとの言明の真理値が確認できるというのであれば、われわれは、そのもとの文を「基底的 (grounded)」とよび、そうでなければ「無基底的 (ungrounded)」とよぶ。」(Kripke [24], pp.693-4) この説明からわかるように、要するに、基底的文とは、その真理値が最終的にはある種の実事に訴えることによって確認できるような文のことである。そのような非意味論的「事実」に訴えることのできない文が無基底的な文である。逆にいうならば、非意味論的事実として、たとえば「 $2 + 2 = 4$ 」を承認するならば、それに基づいて「 $2 + 2 = 4$ は真である」と主張できるし、さらに「『 $2 + 2 = 4$ は真である』は真である」と主張することができる。この操作は限りなく続けることができるが、そのそれぞれの段階での真理概念を含んでいる文はいずれも基底的文ということになる。真理概念を含んでいる文の全てがこのような仕方では真理値をうるのかどうかについては断定できない。そのことは Kripke も注意している。一般に、文が基底文であるかどうかは、文の構文論的、意味論的性質に依存するものではなく、全く経験的事実に依存する。ここで、次のような liar 文(1)と, truth-teller 文(2)を考えてみよう：

(1) (1)は真でない。

(2) (2)は真である。

これらは共に、真理概念を含まないような事実(あるいは、それを表わす文)に関係づけることのできないのは明らかである。つまり、それらは共に無基底的である。

2.2 ところで、Kripke は、真理値をうる(全てではないにせよ)大ていの文は基底文であるとする。このような真理観は明らかに意味論(対応説)的真理観である。真理概念を含む文の連鎖は、最終的には、真理概念を含まない文でおわらねばならない。そのような文は事実を表わす文であって、それが出発点をなす。このような考え方は、 $\in$ の無限下降列を認めず、最小元の存在を認めるところの、公理的集合論における「基礎の公理(axiom of foundation)」に対応するものである。そして、この公理は、Russell のパラドックスの出現を防止する意図をもって公理的集合論において打ちたてられたものであることはよく知られ

ている。

Kripke は、真理概念を含む文の真理値がいかにして確認されるかを、「真」の意味を理解していない人に対して「真」の用法を教えるその仕方を例にあげて説明している。そして、その説明に先立って次のように述べている。「われわれは、どのような文であれ、その文自体を主張(あるいは、否定, assert, deny)することができるというまさしくその場合に、その文は真であるということを主張(あるいは、否定)することができる。」(Kripke [24], p.701) このような考え方を、以下においては、Kremer [22]にならい、「不動点的考え方」とよぶことにする。ここでは、真理概念を含まない文と含む文が同一の内容をもつということが含意されている。不動点的考え方が彼の基底性概念の背後にあるのは確かである。ここで、前述の liar 文(1)と truth-teller 文(2)をそれに適用してみる。(1)では、(1)を主張(あるいは、否定)することは、意味内容からいって、(1)の真であることを否定(あるいは、主張)することであり、それはまた、不動点的考え方より、(1)を否定(あるいは、主張)することである。すなわち、liar 文(1)の場合、(1)を主張(あるいは、否定)できるとき、そのときに限って(1)を否定(あるいは、主張)できるのである。これは、同一の文を主張すると同時に否定するということであり、不可能である。われわれは、(1)を主張することも否定することもできず、したがってまた、それが真であることを主張することも否定することもできない。これは、liar 文には真理値を与えることができないということであり、これをパラドックスとよぶのである。他方、(2)の場合、(2)を主張(あるいは、否定)できるとき、そのときに限って(2)を主張(あるいは、否定)できることになろう。これはパラドックスではなく、いわば同一律的なことを主張しているのであって、(2)自体については真、偽いずれの可能性も否定してはいない。(1)は無基底の、かつパラドクシカルであるが、(2)は無基底のではあるが、パラドクシカルではない。基底性、パラドックスといった概念は Kripke 真理論における重要な概念である。

### 3. 不動点の存在

3.1 上述のアイデアを実行するには、まず、部分的に定義されるような述語を取扱うことが可能でなければならない。空ならざる領域  $D$  が与えられたとき、単項述語  $P(x)$  は、 $D$  の互いに素なる部分集合の対  $(S_1, S_2)$  によって解釈される。 $S_1$  は  $P(x)$  の外延、 $S_2$  は  $P(x)$  の反外延である。つまり、 $P(x)$  は  $S_1$  の対象について真、 $S_2$  の対象について偽となる。それ以外の場合(すなわち、 $x \notin S_1 \cup S_2$  なる  $x$  に対しては)は、定義されない。このような部分述語と関連づけられる評価図式として、Kripke は、Kleene の強 3 値論理と van Fraassen の super-valuation をあげている。ここでは、Kleene の図式だけを取りあげるが、Kripke 理解では重要であるので、あらためて説明しておく。

[Kleene の強 3 値論理の許価図式]  $\sim P$  は、 $P$  が真(あるいは、偽)のときは偽(あるいは、真)であり、 $P$  が定義されないときは定義されない； $P \vee Q$  は、 $P$  と  $Q$  の少なくとも一方が真であれば真であり、 $P$  と  $Q$  が共に偽のときは偽となる。それ以外の場合は定義されない； $P \wedge Q$  は、 $P$  と  $Q$  が共に真ならば真であり、 $P$  と  $Q$  の少なくとも一方が偽であれば偽となる。それ以外の場合は定義されない； $\forall x A(x)$  は、 $A(x)$  が  $x$  に対する全ての付値に対して真であれば真であり、少なくとも 1 つの付値に対して  $A(x)$  が偽となれば偽である。それ

以外の場合は定義されない； $\exists x A(x)$  は、 $x$  に対する 1 つの付値に対して  $A(x)$  が真ならば真であり、 $x$  に対する全ての付値に対して  $A(x)$  が偽ならば偽となる。それ以外の場合は定義されない。(Kleene [21], § 64)

**3.2 Kripke 真理論の形式化**は次のようである。 $L$  は有限 (あるいは、可算) 個の原始的述語をもつところの解釈された第 1 階の言語であるとする。変項の領域は空ならざる領域  $D$  であり、 $n$  変項述語は全域的に定義された  $D$  上の  $n$  項関係として解釈される。便宜上、 $L$  の述語の解釈は固定されているものとする。また、 $L$  は、自分自身の構文論を  $L$  において表現することができ、 $D$  の元の有限列を  $D$  の元にコーディングすることができる程の豊かさはもっているものとする。ここで、ある単項の部分述語  $T(x)$  を考える。すなわち、 $T(x)$  の解釈は部分的に定義されるものであるが、ここでは、上述の  $(S_1, S_2)$  によって与えられるのである。この  $T(x)$  を  $L$  に付加して言語  $\mathcal{L}$  に拡大する。そこで、 $\mathcal{L}(S_1, S_2)$  を、 $L$  の他の述語の解釈は以前と同じままにしておいて (もともと、これは固定されていた)、 $T(x)$  を  $(S_1, S_2)$  で解釈することによってなされる  $\mathcal{L}$  の解釈であるとする。さらに、 $S'_1$  を  $\mathcal{L}(S_1, S_2)$  の真なる文 (のコード) の集合であるとし、 $S'_2$  を  $\mathcal{L}(S_1, S_2)$  の文 (のコード) でないか、偽なる文 (のコード) であるか、のいずれかであるような、 $D$  の全ての元の集合であるとする。

ここで、 $T(x)$  が、 $T(x)$  自身を含む言語  $L$  に対する真理述語として解釈されるとする。 $T(x)$  自身を含む言語  $L$  とは  $\mathcal{L}$  のことである。 $\mathcal{L}$  における命題関数「 $x$  は真である」をみたすのは  $\mathcal{L}$  の真なる文であり、 $\mathcal{L}$  の偽なる文および  $\mathcal{L}$  において文でない対象はそれをみたさない。よって、 $S_1, S_2, S'_1, S'_2$  の定義より、この場合、 $S_1 = S'_1, S_2 = S'_2$  が成立する。このような条件をみたす  $(S_1, S_2)$  を Kripke は不動点 (fixed point) とよぶ。 $T(x)$  を解釈するための  $(S_1, S_2)$  に対して、 $\phi((S_1, S_2)) = (S'_1, S'_2)$  とする。このとき、 $\phi$  は、 $S_1 \subseteq D$  かつ  $S_2 \subseteq D$  で、しかも  $S_1 \cap S_2 = \emptyset$  となるような全ての  $(S_1, S_2)$  上で定義された 1 変数関数である (ここ、および以下において、 $\emptyset$  は空集合を表わす)。不動点  $(S_1, S_2)$  は  $\phi((S_1, S_2)) = (S_1, S_2)$  となるような  $\phi$  の不動点である。 $(S_1, S_2)$  を不動点とよぶときは、 $\mathcal{L}(S_1, S_2)$  をもまた不動点とよんでよい。Kripke によれば、「われわれの仕事は不動点の存在を証明すること、およびその性質を調べることである。」(Kripke [24], p.703)

**3.3 不動点構築**について補足的説明を加えながら論述すれば次のようになろう。まず指摘すべきは、Kripke の形式的言語観は Tarski のそれと似ており、一種の言語階層理論と性格づけてよい、ということである。所与の言語  $\mathcal{L}_\alpha$  に真理述語  $T(x)$  を加えて新しい言語  $\mathcal{L}_{\alpha+1}$  を作り出す操作が Kripke 言語階層理論の中心をなす。すでに述べたところによれば、 $\mathcal{L}$  は  $L$  に  $T(x)$  を加えてえられる言語であった。そして、この場合、 $\mathcal{L}$  は  $T(x)$  を含むが、この  $T(x)$  は、 $T(x)$  自身を含む  $\mathcal{L}$  に対しては適用できず、 $L$  に対してのみ適用可能であった。そして、 $\mathcal{L}$  を解釈したとき、それは、 $L$  の任意の文  $a$  に対して、「 $a$  は真である」、「 $a$  は真でない」等々の表現を含む。それが  $\mathcal{L}$  の解釈  $\mathcal{L}(S_1, S_2)$  で表わされる。ここで、 $L = \mathcal{L}_0$  とすれば、 $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + T(x)$  であり、 $\mathcal{L}_2$  は  $\mathcal{L}_1$  に  $T(x)$  を付加してえられる。もちろん、 $\mathcal{L}_2$  における  $T(x)$  は  $\mathcal{L}_1$  に対する真理述語となり、 $\mathcal{L}_1$  における真 (あるいは、偽) なる文は  $\mathcal{L}_2$  においてはじめて理解される。すなわち、 $T(x)$  は、 $\mathcal{L}_{\alpha+1}$  においては、 $\mathcal{L}_\alpha$  に対する真理述語と解されるのである。

さて、 $S_1 \subseteq S_1^+$  かつ  $S_2 \subseteq S_2^+$  であるとき、そのときに限って、「 $(S_1^+, S_2^+)$  は  $(S_1, S_2)$  を拡大する」といわれる。記号で表わせば、 $(S_1, S_2) \leq (S_1^+, S_2^+)$ 。これは次を意味する

:  $T(x)$ が  $(S_1^+, S_2^+)$ として解釈されたとき, これは,  $(S_1, S_2)$ としての解釈を,  $T(x)$ の外延, 反外延の両方において完全に包含する. のみならず,  $T(x)$ が  $(S_1, S_2)$ として解釈されたときには定義されなかったようなケースに対して真理値を与える.

そこで,  $(S_1, S_2) \leq (S_1^+, S_2^+)$ と仮定してみよう. 定義より,  $S_1 \subseteq S_1^+$ かつ  $S_2 \subseteq S_2^+$ であるから, 明らかに,  $\mathcal{L}(S_1, S_2)$ における真(あるいは, 偽)なる文の集合(これは,  $\mathcal{L}(S_1, S_2)$ の次のレベルでわかる)は, それぞれ,  $\mathcal{L}(S_1^+, S_2^+)$ における真(あるいは, 偽)なる文の集合(これも  $\mathcal{L}(S_1^+, S_2^+)$ の次のレベルでわかる)の部分集合である. すなわち,  $\mathcal{L}(S_1, S_2)$ における真(あるいは, 偽)なる文は,  $\mathcal{L}(S_1^+, S_2^+)$ においてもその真理値を変えず, せいぜい  $\mathcal{L}(S_1, S_2)$ では定義されなかったケースが真理値を付与されるようになるだけである. また,  $\phi((S_1, S_2)) = (S'_1, S'_2)$ であった. もちろん,  $S'_1, S'_2$ は以前に定義したものである.  $(S_1^+, S_2^+)$ に対しても同様のことがいえる. すなわち,  $(S_1, S_2)$ が  $\mathcal{L}_1$ における  $T(x)$ の解釈であれば,  $\phi((S_1, S_2)) = (S'_1, S'_2)$ なる  $(S'_1, S'_2)$ は  $\mathcal{L}_2$ における  $T(x)$ の解釈となり,  $(S_1^+, S_2^+)$ が  $\mathcal{L}_\alpha$ に対する  $T(x)$ の解釈であれば,  $\phi((S_1^+, S_2^+))$ は  $\mathcal{L}_{\alpha+1}$ における  $T(x)$ の解釈となる. よって, 上記の仮定の下では,  $\phi((S_1, S_2)) \leq \phi((S_1^+, S_2^+))$ となる. このように, 任意の  $S_1, S_2, S_1^+, S_2^+$ に対して, 「 $(S_1, S_2) \leq (S_1^+, S_2^+)$ であれば,  $\phi((S_1, S_2)) \leq \phi((S_1^+, S_2^+))$ 」が成立するとき,  $\phi$ は単調(順序保存, monotone, order-preserving)であるとよばれる. この  $\phi$ の単調性が, われわれの許価規則の基本性質なのであり, 不動点構築において極めて重要な役割を果たすのである.

3.4 さて, われわれはこの  $\phi$ の単調性に基づいて, 「あらゆる  $\alpha$ に対して,  $\mathcal{L}_{\alpha+1}$ における  $T(x)$ の解釈は  $\mathcal{L}_\alpha$ における  $T(x)$ の解釈を拡大する」ということを示すことができる. まず, 順序数  $\alpha$ に対して,  $\mathcal{L}_\alpha$ における  $T(x)$ の解釈を  $(S_1, \alpha, S_2, \alpha)$ とした上で, 言語階層を次のように定義する:

$$\begin{cases} \mathcal{L}_0 = \mathcal{L}(0, 0) \\ \mathcal{L}_\alpha = \mathcal{L}(S_1, \alpha, S_2, \alpha) \end{cases} \quad \text{[ただし, } \alpha \text{ が後者型順序数 } (\alpha = \beta + 1) \text{ のときは, } S_1, \alpha$$

は  $\mathcal{L}_\beta$ の真なる文(のコード)の集合であり,  $S_2, \alpha$ は  $\mathcal{L}_\beta$ の偽なる文(のコード)であるか,  $\mathcal{L}_\beta$ の文(のコード)でないか, のどちらかであるような  $D$ の全ての元の集合である.  $\alpha$ が極限順序数であるときは,  $S_1, \alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} S_1, \beta$ ,  $S_2, \alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} S_2, \beta$ である].

上記命題の証明は  $\alpha$ についての超限帰納法による.  $\alpha = 0$ のとき:  $\mathcal{L}_0$ においては,  $T(x)$ は全ての  $x$ に対して定義されていないので,  $T(x)$ のどのような解釈もそれを拡大する(つまり, 任意の集合  $x$ に対して,  $0 \leq x$ ).  $\alpha = \beta + 1$ のとき:  $\beta$ のとき成立すると仮定する. すなわち,  $\mathcal{L}_{\beta+1}$ における  $T(x)$ の解釈が  $\mathcal{L}_\beta$ における  $T(x)$ の解釈を拡大する. よって,  $(S_1, \beta, S_2, \beta) \leq (S_1, \beta+1, S_2, \beta+1)$ .  $\phi$ の単調性より,  $\phi((S_1, \beta, S_2, \beta)) \leq \phi((S_1, \beta+1, S_2, \beta+1))$ . しかるに,  $\phi((S_1, \beta, S_2, \beta)) = (S_1, \beta+1, S_2, \beta+1)$ であり,  $\phi((S_1, \beta+1, S_2, \beta+1)) = (S_1, \beta+2, S_2, \beta+2)$ であるから,  $(S_1, \beta+1, S_2, \beta+1) \leq (S_1, \beta+2, S_2, \beta+2)$ . すなわち,  $\mathcal{L}_{\beta+2}$ における  $T(x)$ の解釈は  $\mathcal{L}_{\beta+1}$ における  $T(x)$ の解釈を拡大する.  $\alpha$ が極限順序数のとき: あらゆる  $\beta < \alpha$ に対して,  $(S_1, \beta, S_2, \beta) \leq (S_1, \beta+1, S_2, \beta+1)$ とする. ある  $\beta < \alpha$ を選ぶ.  $(S_1, \alpha, S_2, \alpha)$ の定義, つまり,  $S_1, \alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} S_1, \beta$ ,  $S_2, \alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} S_2, \beta$ より,  $(S_1, \beta, S_2, \beta) \leq (S_1, \alpha, S_2, \alpha)$ . よって,  $\phi$ の単調性より,  $\phi((S_1, \beta, S_2, \beta)) \leq \phi((S_1, \alpha, S_2, \alpha))$ . すなわち,  $(S_1, \beta+1, S_2, \beta+1) \leq (S_1, \alpha+1, S_2, \alpha+1)$ . 帰納法の仮定より,  $(S_1, \beta, S_2, \beta) \leq (S_1, \alpha+1, S_2, \alpha+1)$ .  $\beta$ は任意であったから,  $\bigcup_{\beta < \alpha} S_1, \beta \subseteq S_1, \alpha+1$ かつ



$\cup_{\beta < \alpha} S_{2, \beta} \subseteq S_{2, \alpha+1}$ . すなわち,  $S_{1, \alpha} \subseteq S_{1, \alpha+1}$  かつ  $S_{2, \alpha} \subseteq S_{2, \alpha+1}$ . よって,  $(S_{1, \alpha}, S_{2, \alpha}) \leq (S_{1, \alpha+1}, S_{2, \alpha+1})$ .

**3.5** 上において,  $T(x)$  の外延と反外延は,  $\alpha$  が増大するにつれて増大するということを示された. これは,  $\alpha$  が増大するにつれて真とか偽とかいわれる文は増大し, しかも, 一たん真理値が与えられた文は, より高次のレベルの言語においてはその真理値を変化させない, ということを意味している. しかし, ここで注意すべきは, 「増加する」は「厳密に増加する」を意味するのではなく, 等しい(不変の)場合を許容するということである. つまり,  $S_{i, \alpha} \subseteq S_{i, \alpha+1}$  ( $i=1, 2$ )ではあるが, 等しい場合もありうるということである. この場合,  $S_{1, \alpha}, S_{2, \alpha}$  は, 共に増加列を形成するが, この増加のプロセスは永久に続くものであるか, という点が問題となる. これは次のように考えられる.  $\mathcal{L}$  の文は 1 つの集合を形成するのであって,  $D$  の部分集合であり, それは無限の増加列を許容することはできない. すなわち, 新しい文の真理値はそれぞれのレベルで決定されるが, しかし, やがてはつきてしまい, もはや真理値を付与することはできない, といったレベルが存在せねばならない. これは,  $(S_{1, \sigma}, S_{2, \sigma}) = (S_{1, \sigma+1}, S_{2, \sigma+2})$  となるような順序数  $\sigma$  が存在するということである. よって,  $(S_{1, \sigma}, S_{2, \sigma}) = \phi((S_{1, \sigma}, S_{2, \sigma}))$  なる不動点  $(S_{1, \sigma}, S_{2, \sigma}) (= \mathcal{L}_\sigma)$  の存在が示される.<sup>(4)</sup> また, 後述の如く, このようにしてえられる不動点は最小の不動点であることを示すことができる. つまり,  $\mathcal{L}_\sigma$  における真(あるいは, 偽)なる文は, 他のいかなる不動点においてもその真理値は変らないのである.

#### 4. 不動点の性質

**4.1** 不動点  $(S_{1, \sigma}, S_{2, \sigma})$  では,  $S_{1, \sigma} = S_{1, \sigma+1}$  かつ  $S_{2, \sigma} = S_{2, \sigma+1}$  が成立する. つまり, 次のレベルで真であるとか偽であるとかいわれるような新しい文は存在しない. よって,  $\mathcal{L}_\sigma$  において真(あるいは, 偽)であるといわれるべき文は  $\mathcal{L}_\sigma$  においていわねばならない. これは,  $\mathcal{L}_\sigma$  においては, ある文  $S$  と「 $S$  は真である」という文(あるいは, それらの否定)が共存しうるということである.  $\mathcal{L}_\sigma$  では, 真理述語  $T$  と文  $S$  に対して,  $S \leftrightarrow T(\ulcorner S \urcorner)$  なる同値関係が成立するのだといってもよい. これは, 前述の不動点的考え方として説明することもできよう. 不動点  $\mathcal{L}_\sigma$  における真理述語は, 自己自身を含む言語に対する真理述語であるから,  $\mathcal{L}_\sigma$  は, その意味では, Kripke の希望をみたしうる言語ということができる.

**4.2** 基底性については, 直観的には, 文の真理確認のプロセスが最終的には真理概念を含まない文でおわるというのであれば, その文は基底的といわれ, そうでなければ無基底的といわれるのであった. 不動点においては, 上述の  $S \leftrightarrow T(\ulcorner S \urcorner)$  の関係が成立することから, 基底性についての数学的定義は次のようになろう:  $\mathcal{L}$  の任意の文  $S$  に対して, それが最小の不動点  $\mathcal{L}_\sigma$  において真理値をもつならば,  $S$  は基底的であり, そうでなければ無基底的である.

$\mathcal{L}$  が自然数論あるいは構文論を含むのであれば, 容易に, 自己自身について真(あるいは, 偽)を主張する文を構成することができる. liar 文の Gödel 的形式化は  $\forall x [P(x) \rightarrow \sim T(x)]$  [ただし, この文(の Gödel 数)のみが  $P(x)$  を満足する]となろう. 同様に, truth-teller 文は  $\forall x [Q(x) \rightarrow T(x)]$  [この文(の Gödel 数)のみが  $Q(x)$  を満足する]となる. この両者は共に, いかなる言語  $\mathcal{L}_\sigma$  においても真理値をもたないが, それを  $\alpha$  に関する帰納法によって示すこ

とができる。つまり、この両者は共に無基底的呢である。

ところで、truth-teller 文は、直観的には、真(あるいは、偽)の可能性を排除するものではないが、そのことはこの文の形式的表現  $\forall x [Q(x) \rightarrow T(x)]$  を用いて説明することができる。まず指摘しておきたいのは、不動点は1つではない、ということである。構築が  $T(x)$  の最小の解釈  $(0, 0)$  から出発する不動点が最小の不動点  $\mathcal{L}_0$  である。そこで、 $(0, 0)$  から出発するかわりに、たとえば、truth-teller 文  $S$  に対して、 $(\{S\}, 0)$  となるような  $T(x)$  の解釈から出発するとする。このときも前と同様に言語階層を構築することができる。所与のレベルで  $S$  が真(あるいは、偽)であれば、次のレベルでも  $S$  は真(あるいは、偽)である。そして、それぞれのレベルでの  $T(x)$  の解釈は先行のレベルの全てを拡大する。よって、 $T(x)$  の任意の解釈  $(S_1, S_2)$  と前述の関数  $\phi$  に対して、 $(S_1, S_2) \leq \phi((S_1, S_2))$  が成立する。かくして、前述と同様の議論によって、この場合も1つの不動点をうみ出すのである。 $(0, 0)$  から出発した場合と異なるのは、この不動点では truth-teller 文  $S$  は真となる、ということである。全く同様にして、 $(0, \{S\})$  から出発するならば、そのときえられる不動点では  $S$  は偽となる。すなわち、truth-teller 文はどのような不動点でも真理値をもたない、というのではないのである。

truth-teller 文の真(あるいは、偽)となる不動点は存在しうる。liar 文  $S$  の場合はどうか。 $(\{S\}, 0)$  あるいは  $(0, \{S\})$  のどちらから出発しようと、それから到達される不動点では、 $S$  は真であると同時に真でない。つまり、liar 文はいかなる不動点においても明確な真理値をもたないのである。これらのことを念頭におくと、パラドクシカルな文について、次のような定義を与えることは自然であろう： $\mathcal{L}$  の任意の文  $S$  に対して、 $S$  がいかなる不動点においても真理値をもたなければ、 $S$  はパラドクシカルである。すなわち、文  $S$  がパラドクシカルであるとは、もし  $\phi((S_1, S_2)) = (S_1, S_2)$  であれば、 $S \notin S_1$  かつ  $S \notin S_2$  ということである。

4.3 ところで、われわれの真偽を認識する段階が、いわば全くの白紙状態から始まるというのであれば、形式的には、それは、 $T(x)$  の解釈が  $(0, 0)$  であるということに相当しよう。よって、直観的にいうならば、最小の不動点がわれわれの真理に関する直観の最も自然な言語モデルと考えられるかもしれない。しかし、truth-teller 文  $S$  に真理値を付与することは矛盾を生じさせるものではなく、 $S$  の真理値を許容する不動点も存在することは上に示したばかりである。そして、そのような不動点は最小の不動点を拡大してえられるものである。実際に、Zorn のレクマを用いると、あらゆる不動点は極大不動点に拡大することができる、ということが証明される。もちろん、極大不動点とは、その拡大的不動点をもはやもたないような不動点のことである。つまり、極大不動点とは、可能な限り多くの真理値を付与する不動点、かつ、無矛盾的にそれ以上の真理値を付与することはできない、といった不動点のことなのである。最小の不動点はあらゆる不動点に拡大される。また、truth-teller 文  $S$  に真理値を付与する不動点を構築することは可能であった。そのような文  $S$  に真理値を付与しない不動点を、付与する不動点に拡大することができる。よって、無基底的呢な truth-teller 文は、あらゆる極大不動点において真理値をもつことになる。

4.4 基底的呢文は、明らかに、全ての不動点において同じ真理値をもつ。だが、非パラドクシカルな無基底的呢文で、真理値をもつ全ての不動点では同じ真理値をもつ、といったようなものも存在する。たとえば、次のような自己言及文(3)を考えてみる：

(3) (3)かあるいはその否定のどちらか一方が真である。

このような(3)を真ならしめる不動点は存在するが、偽とする不動点は存在しない。よって、これはパラドシカルではない。また、この(3)は無基底である(つまり、最小の不動点  $\mathcal{L}$  において真理値をもたない)ということを帰納法を用いて証明することができる。このように、同一の文に真理値を付与する多くの不動点が存在しうる。そして、不動点  $(S_1, S_2)$  が文  $S$  に付与する真理値と矛盾する真理値を他の不動点が付与することはない、というのであれば、そのような  $(S_1, S_2)$  は内在的 (intrinsic) であるといわれる。すなわち、ある不動点  $(S_1, S_2)$  が内在的であるのは、 $S \in (S_1 \cap S_2^+) \cup (S_2 \cap S_1^+)$  となるような  $((S_1, S_2)$  以外の) 不動点  $(S_1^+, S_2^+)$  と文  $S$  が存在しないとき、かつそのときに限られる。また、ある内在的不動点が文  $S$  に真理値を付与するとき、つまり、 $S \in (S_1, S_2)$  なる内在的不動点が存在するならば、文  $S$  は内在的真理値をもつといわれる。明らかに、上述の(3)は内在的真理値をもつ。しかし、真理値をもつ全ての不動点において同じ真理値をもつが、内在的真理値はもたない、といったような非パラドシカルな文も存在するのである。ここで、任意の無基底かつ非パラドシカルな文  $S$  に対して、 $S \vee \sim S$  を考えてみる。 $S \vee \sim S$  は、 $S$  が真理値をもつ不動点では真であり、また決して偽となることはない。これは Kleene の評価図式より明らかである。だが、 $S$  として、たとえば truth-teller 文を考えるならば、 $S$  を真ならしめる不動点と  $S$  を偽ならしめる不動点が存在しうる。このときは、再び Kleene の評価図式より、 $S \vee \sim S$  は、どのような内在的不動点においても真理値をもつことはできないのである。

**4.5** 最小の不動点は、いわば最小元  $\mathcal{L}(0, 0)$  から出発して到達される不動点であって、その存在は保証されている。また、前述の如く、Zorn のレンマによって極大不動点の存在も保証される。しかし、最大の不動点は存在しないのである。最大の不動点は、字義上、あらゆる不動点の拡大である。だが、同一の文に異なる真理値を付与する不動点が存在しうる(たとえば、truth-teller 文)のであって、そのような不動点には共通の拡大は存在しえないから、最大の不動点は存在しえないのである。これに対して、最大の内在的不動点は存在する。内在的不動点の集合を  $M$  としたとき、 $M$  は順序集合であり、かつ、 $M$  の任意の空でない部分集合の上限および下限は  $M$  に属する、ということが証明できる。すなわち、 $M$  は完備束をなすのである。この最大の内在的不動点は、その構成上の性格からみて、真理概念に対してわれわれのもつ通常の観念に添うところの、 $T(x)$  についての最大の解釈、ともみなしうるのである。

## 5. Kripke 真理論の数学的構築

**5.1** Kripke 真理論のための数学理論は、Tarski 真理論のそれを含む程のものであるとはいえず、初等的なものであるといってよい。Kripke の論文では、不動点の構築に際しては、言語レベルの超限的な近似列 (transfinite sequences of approximations) の極限をとる方法が採用されている。しかし、そのほかに、文の集合を対象とする Hintikka-Smullyan の方法もある。そして、この後者については、すでに Fitting による研究がある。彼は近似列の方法のもつ2つの欠点を指摘している。第1に、それは必要以上の設備であって、Kripke 真理論の主題のもつ本来の単純性をおおいかくす傾向があるということ。第2に、Kripke 真理論

論では全ての不動点がはたすべき役割をもっているが、近似列の方法はある特殊な不動点のためにのみ役立つ構築であるということ。この両者を比較したとき、Kripkeの真理論の具体的内容を理解するという点からみれば、後者の方が秀れているように思われる。また、近似列の方法については、不十分ではあるにせよ、すでにその輪かくは与えてあるので、ここでは、少しばかりの補足的説明を加えながら、Fitting[12]の研究を紹介することにする。なお、以下における定理、系、命題などの証明についてはFittingにあり、また全て容易であるので省略する。

**5.2** 順序集合に関わる基本的概念については既知とする。ここでは、次の定義を付加しておく[ただし、 $\langle D, \leq \rangle$ は順序集合]。

**定義** (1)  $A, B \in D$ は、共通の上界をもつならば、すなわち、ある  $C \in D$  に対して、 $A \leq C$  かつ  $B \leq C$  であれば、両立可能 (compatible) である。(2)  $D$  上の単調な  $\Phi$  に対して、 $I$  が  $\Phi$  のあらゆる不動点と両立可能であるような不動点であれば、 $I$  は内在的不動点である。

次の諸定理が成立する。

**定理1.**  $\langle D, \leq \rangle$ は順序集合で、 $\Phi$ は単調であるとする。 $A \leq \Phi(A)$ 、 $A \leq B$  で  $\Phi(B) \leq B$  であるような  $A, B \in D$  が存在するとき、次が成立する：

- (1)  $D$  のあらゆる空ならざる部分集合が  $D$  において最大下界をもつならば、 $\Phi$  は  $A$  と  $B$  の間に最小の不動点をもつ。<sup>(5)</sup>
- (2)  $D$  のあらゆる空ならざる部分集合が  $D$  において最小上界をもつならば、 $\Phi$  は  $A$  と  $B$  の間に最大の不動点をもつ。

**定理2.**  $\langle D, \leq \rangle$ は順序集合[ただし、そこにおいては、(i)  $D$  は最小元をもつ。(ii) そこのあらゆる鎖は上界をもつ。(iii) 上界をもつそこでのあらゆる空ならざる部分集合は最小上界をもつ]であるとする。このとき、 $D$  上の単調な  $\Phi$  に対して次が成立する：

- (1)  $D$  のあらゆる空ならざる部分集合は、 $D$  の中に最大下界をもつ。
- (2)  $A \leq \Phi(A)$  であれば、 $A$  以上の  $\Phi$  の極大不動点が存在する。
- (3)  $\Phi$  は極大不動点をもつ。
- (4)  $A \leq \Phi(A)$  であれば、 $A$  以上の  $\Phi$  の最小不動点が存在する。
- (5)  $\Phi$  は最小の不動点をもつ。
- (6)  $\Phi(B) \leq B$  であれば、 $B$  以下の  $\Phi$  の最大不動点が存在する。
- (7)  $I$  は  $\Phi$  の不動点であるとする。 $\Phi$  の極大不動点の集合を  $M$  とするとき、 $I \leq \inf M$  であるとき、そのときに限って  $I$  は内在的である。
- (8)  $\Phi$  は最大の内在的不動点をもつ。
- (9)  $M$  は  $\Phi$  の極大不動点の集合であるとする。 $A \leq \Phi(A)$  かつ  $A \leq \inf M$  であれば、 $A$  以上の  $\Phi$  の最小不動点は内在的である。

**5.3** ここで、signed statement なる概念を導入する。すなわち、signed statement とは、言明  $X$  および付加的記号  $T, F$  に対して、 $TX$  あるいは  $FX$  なる表現のことである。signed statement の集合  $S$  と任意の言明  $X$  に対して、 $TX \in S$  であれば、「 $X$  は真である」を意味し、 $FX \in S$  であれば、「 $X$  は偽である」を意味する。よって、 $TX \notin S$  かつ  $FX \notin S$  であれば、 $X$  は真理値を欠く(すなわち、truth-value gap である)。

**定義.**  $S$  は signed statement の集合とする。

- (1)  $S$  は、以下が成立するとき、下方に飽和的 (downward saturated) である：

- (a)  $TX \wedge Y \in S \Rightarrow TX \in S$  かつ  $TY \in S$ .
  - (b)  $FX \wedge Y \in S \Rightarrow FX \in S$  あるいは  $FY \in S$ .
  - (c)  $T \sim X \in S \Rightarrow FX \in S$ .
  - (d)  $F \sim X \in S \Rightarrow TX \in S$ .
  - (e) あらゆる定項  $c$  に対して,  $TA(c) \in S \Rightarrow T \forall x A(x) \in S$ .
  - (f)  $F \forall x A(x) \in S \Rightarrow$  ある定項  $c$  に対して,  $FA(c) \in S$ .
- (2)  $S$  は, 以下が成立するとき, 上方に飽和的 (upward saturated) である:
- (a)  $TX \in S$  かつ  $TY \in S \Rightarrow TY \wedge Y \in S$
  - (b)  $FX \in S$  あるいは  $FY \in S \Rightarrow FX \wedge Y \in S$ .
  - (c)  $FX \in S \Rightarrow T \sim X \in S$ .
  - (d)  $TX \in S \Rightarrow F \sim X \in S$ .
  - (e) あらゆる定項  $c$  に対して,  $TA(c) \in S \Rightarrow T \forall x A(x) \in S$ .
  - (f) ある定項  $c$  に対して,  $FA(c) \in S \Rightarrow F \forall x A(x) \in S$ .
- (3)  $S$  は, 上方と下方の両方において飽和的であれば, 飽和的である.
- (4)  $S$  は, 任意の言明  $X$  に対して,  $TX$  と  $FX$  の両方が  $S$  の中に存在するというのであれば, 無矛盾である.
- (5)  $S$  は, 任意の原子的言明  $A$  に対して,  $TA$  と  $FA$  の両方が  $S$  の中に存在するというのであれば, 原子的に無矛盾である.
- (6)  $S$  は, あらゆる言明  $X$  に対して,  $TX$  と  $FX$  のどちらか1つが  $S$  の中に存在するならば, 完全である.
- (7)  $S$  は, あらゆる原子的言明  $A$  に対して,  $TA$  と  $FA$  のどちらか1つが  $S$  の中に存在するならば, 原子的に完全である.
- (8)  $S$  は, 飽和的, 無矛盾かつ完全であれば, モデル集合である.

$D$  を signed statement の集合の全てからなる集合 (族) であるとする.  $\langle D, \subseteq \rangle$  は最大下界 ( $\cap$ ) と最小上界 ( $\cup$ ) の下に閉じている順序集合である. ここで,  $A \in D$  なる  $A$  に対して, 写像  $\Phi_A: D \rightarrow D$  を次のように定義する:

$$\begin{aligned} \Phi_A(S) = & A \cup \{TX \wedge Y \mid TX \in S \text{ かつ } TY \in S\} \cup \\ & \{FX \wedge Y \mid FX \in S \text{ あるいは } FY \in S\} \cup \\ & \{T \sim X \mid FX \in S\} \cup \{F \sim X \mid TX \in S\} \cup \\ & \{T \forall x X(x) \mid \text{あらゆる } c \text{ に対して, } TX(c) \in S\} \cup \\ & \{F \forall x X(x) \mid \text{ある } c \text{ に対して, } FX(c) \in S\} \end{aligned}$$

このとき,  $\Phi_A$  は  $D$  上で単調であり,  $\Phi_A$  の不動点は,  $A$  を拡大する上方に飽和的な集合となる. また,  $M$  が全ての signed statement の集合であるとする,  $A \subseteq M$ ,  $\Phi_A(M) \subseteq M$ , かつ  $A \subseteq \Phi_A(A)$ . よって, 定理 1 の(1)によって,  $\Phi_A$  は,  $A$  を拡大する最小の不動点をもつ.

**定義** signed statement の集合  $A$  に対して,  $A$  を拡大する最小の上方に飽和的な集合が存在することは上に示された. それを, 上方に飽和的な  $A$  の閉包 (closure) とよび,  $A^U$  で表わす.

**命題 3.**  $A$  と  $B$  を signed statement の集合であるとする,  $A \subseteq B \Rightarrow A^U \subseteq B^U$ .

**命題 4.**  $A$  が下方に飽和的であれば,  $A^U$  も下方に飽和的である.

**系 5.**  $A$  が下方に飽和的であれば,  $A^U$  は飽和的である.

**命題 6.**  $A$  が下方に飽和的, かつ原子的に無矛盾であれば,  $A$  は無矛盾である.

**系 7.**  $A$  が下方に飽和的, かつ原子的に無矛盾であれば,  $A^U$  は無矛盾である.

**命題 8.**  $A$  が原子的に完全であれば,  $A^U$  は完全である.

**系 9.**  $A$  が下方に飽和的で原子的に無矛盾, かつ原子的に完全であれば,  $A^U$  は  $A$  を拡大するモデル集合である.

**系 10.**  $A$  が下方に飽和的で原子的に無矛盾であれば,  $A$  はモデル集合に拡大することができる.

さて, 部分的な評価関数  $v$  を次のように定義してみる:

$$v(X) = \begin{cases} T & (TX \in A^U \text{ のとき}) \\ F & (FX \in A^U \text{ のとき}) \\ \text{定義されない. (それ以外)} \end{cases}$$

このとき, この  $v$  は Kleene の強 3 値論理の条件をみたす. 次に, それを  $\sim, \wedge, \vee$  の場合について示してみる. 後の議論の必要上,  $A$  を原子的かつ無矛盾な signed statement の集合とする. すると,  $A$  は下方に飽和的であり, 系 5 より,  $A^U$  は飽和的となる. よって, 次の関係が成立する:

(a)  $TX \wedge Y \in A^U \Leftrightarrow TX \in A^U$  かつ  $TY \in A^U$ .

(b)  $FX \wedge Y \in A^U \Leftrightarrow FX \in A^U$  あるいは  $FY \in A^U$ .

(c)  $T \sim X \in A^U \Leftrightarrow FX \in A^U$ .

(d)  $F \sim X \in A^U \Leftrightarrow TX \in A^U$ .

(e)  $T \forall x X(x) \in A^U \Leftrightarrow$  あらゆる定項  $c$  に対して,  $TX(c) \in A^U$ .

(f)  $F \forall x X(x) \in A^U \Leftrightarrow$  ある定項  $c$  に対して,  $FX(c) \in A^U$ .

(i)  $\sim$  の場合. (d) より,  $TX \in A^U \Leftrightarrow F \sim X \in A^U$ . よって, これに  $v$  の定義を適用すると,  $v(X) = T \Leftrightarrow v(\sim X) = F$ . また, (c) より,  $v(X) = F \Leftrightarrow v(\sim X) = T$ . これは次を意味する:  $X$  = 真のときは,  $\sim X$  は偽,  $X$  = 偽のときは,  $\sim X$  は真, それ以外のときは定義されない.

(ii)  $\wedge$  の場合. (a) に  $v$  の定義を適用すると,  $v(X \wedge Y) = T \Leftrightarrow v(X) = T$  かつ  $v(Y) = T$ . また, (b) より,  $v(X \wedge Y) = F \Leftrightarrow v(X) = F$  あるいは  $v(Y) = F$ . これは次を意味する:  $X \wedge Y$  は,  $X$  と  $Y$  が共に真のときは真, 少なくとも一方が偽であれば偽, それ以外のときは定義されない.

(iii)  $\forall$  の場合. (e) より次が成立する:  $T \forall x X(x) \in A^U \Leftrightarrow$  あらゆる定項  $c$  に対して,  $TX(c) \in A^U \Leftrightarrow TX(c_1) \in A^U$  かつ  $TX(c_2) \in A^U$  かつ  $\dots$  [ただし, ここおよび次において,  $c = c_1, c_2, \dots$ ]. これに  $v$  の定義を適用すると,  $v(\forall x X(x)) = T \Leftrightarrow v(X(c_1)) = T$  かつ  $v(X(c_2)) = T$  かつ  $\dots$ . また, (f) より,  $F \forall x X(x) \in A^U \Leftrightarrow$  ある定項  $c$  に対して,  $FX(c) \in A^U \Leftrightarrow FX(c_1) \in A^U$  あるいは  $FX(c_2) \in A^U$  あるいは  $\dots$ . これに  $v$  の定義を適用すると,  $v(\forall x X(x)) = F \Leftrightarrow v(X(c_1)) = F$  あるいは  $v(X(c_2)) = F$  あるいは  $\dots$ . これは次を意味する:  $\forall x X(x)$  は,  $X(x)$  が  $x$  への付値の全てに対して真であれば真であり, 少なくとも 1 つの付値に対して  $X(x)$  が偽であれば偽であり, それ以外のときは定義されない.

**5.4** 以下において,  $L$  を, 定項記号として  $0, 1, 2, \dots$ , 関数記号として  $+$ ,  $\times$ , 関係記号として  $=$ , **T** (**T** は 1 項関係) をもった, 第 1 階の算術の言語とする. ここでは, **T** は真理述語の役割を果たすべく意図されている.  $L$  の言明  $X$  が **T** を含まないときは,  $X$  が算術の標準モデルで真 (あるいは, 偽) であれば,  $X$  は真 (あるいは, 偽) である, という.

また、 $L$ の言明  $X$  に対して、「 $X$ 」は  $X$  の Gödel 数を表わす。

Kripke は  $T(x)$  の解釈  $(S_1, S_2)$  を研究対象とするが、ここでは、signed statement の集合  $\{TX \mid X \in S_1\} \cup \{FX \mid X \in S_2\}$  を研究対象とする。なお、以下においては、 $A$  は原子的な算術的真理の集合であるとする。つまり、 $T$  を含まない  $L$  の原子的言明  $X$  に対して、 $X$  が真であれば  $TX \in A$ 、 $X$  が偽であれば  $FX \in A$  である。

さて、領域  $D$  は次が成立するような、 $L$  の原子的な signed statement の集合  $S$  の全てからなるものであるとする：

- 1)  $A \subseteq S$ .
- 2)  $S$  は (原子的に) 無矛盾である。

$\langle D, \subseteq \rangle$  は順序集合であり、 $\cap$  の下には閉じているが、 $\cup$  の下には閉じていない。しかし  $\langle D, \subseteq \rangle$  が定理 2 の条件をみたすことは容易にわかる。さらに、 $A$  は明らかに最小元である。

ここで、 $D$  上の関数  $\Phi_U$  を次のように定義する：

$S \in D$  に対して

$$\Phi_U(S) = A \cup \{T\mathbf{T}(\ulcorner X \urcorner) \mid TX \in S^U\} \cup \{F\mathbf{T}(\ulcorner X \urcorner) \mid FX \in S^U\}.$$

$S \in D$  であるとする。 $S$  は下方に飽和的で、しかも無矛盾である。よって、系 5、系 7 より、 $S^U$  は飽和的かつ無矛盾である。 $S^U$  は無矛盾であるから、 $\{T\mathbf{T}(\ulcorner X \urcorner) \mid TX \in S^U\} \cup \{F\mathbf{T}(\ulcorner X \urcorner) \mid FX \in S^U\}$  は原子的に無矛盾である。また、 $A$  も原子的に無矛盾である。 $A$  の元は  $T$  を含まないので、 $A$ 、 $\{T\mathbf{T}(\ulcorner X \urcorner) \mid TX \in S^U\}$ 、 $\{F\mathbf{T}(\ulcorner X \urcorner) \mid FX \in S^U\}$  は共通の元を含まない。よって  $\Phi_U(S)$  は原子的に無矛盾である。命題 3 より、 $M \subseteq N \Rightarrow M^U \subseteq N^U$ 。よって、 $\Phi_U(S)$  の定義より、 $M \subseteq N \Rightarrow \Phi_U(M) \subseteq \Phi_U(N)$ 。すなわち、 $\Phi_U$  は単調である。また、 $\Phi_U(S)$  は  $A$  を拡大し、 $\Phi_U(S)$  は  $D$  の元である。よって、 $\Phi_U : D \rightarrow D$ 。さらに、定理 2 より、 $\Phi_U$  は不動点をもつことが示される。

**5.5** ここにおいて、上述のことに基づいて、Kripke 真理論の基本概念 (基底性、自己言及的真理述語、パラドクシカルな文、最小 (大) の不動点、最大の内在的不動点 など) について改めて述べるならば、以下のようなう。

(i)  $\Phi_U$  の任意の不動点  $S$  に対する  $S^U$  について、 $TX \in S^U \Leftrightarrow T\mathbf{T}(\ulcorner X \urcorner) \in S^U$  を示すことができる。 $TX \in S^U$  とは「 $S^U$  においては、 $X$  は真である」ということである。よって、 $S^U$  においては、 $X$  が真であるとき、そのときに限って、「 $X$  は真である」は真である。すなわち、 $\Phi_U$  の不動点  $S$  に対する  $S^U$  は、自己自身の真理述語を含む。

(ii)  $\Phi_U$  は最小の不動点をもつ。このことは、定理 2 の (5) によって保証される。

(iii)  $\Phi_U$  の最小の不動点  $S$  に対する  $S^U$  において、言明が真理値をもてば、その言明は基底的とよばれる。truth-teller 文  $X$  に対しては、 $TX \in S \Leftrightarrow T\mathbf{T}(\ulcorner X \urcorner) \in S$  [ただし、 $S \in D$ ] が成立するが、最小元  $A$  の中には  $TX$ 、したがって、 $T\mathbf{T}(\ulcorner X \urcorner)$  は存在しえないということや、 $A^U$  や  $S^U$  の構成の手続きを分析することによって、 $X$  は  $S^U$  においては真理値をもちえない、ということが示される。つまり、自己の真を主張する言明は基底的でない。

(iv) 言明が、 $\Phi_U$  の任意の不動点  $S$  に対する  $S^U$  の中に真理値をもたないならば、その言明はパラドクシカルである、とよばれる。truth-teller 文  $X$  については、上に述べたように、 $TX \in S \Leftrightarrow T\mathbf{T}(\ulcorner X \urcorner) \in S$  が成立する。 $\Phi_U(S)$  は  $A$  を拡大するものであるが、 $A$  のかわりに、 $A$  に原子的な signed statement たる  $T\mathbf{T}(\ulcorner X \urcorner)$  を付け加えたものを拡大して到達される不動

点  $B$  を考えると,  $TT(\ulcorner X \urcorner) \in B$  であり, また,  $B \subseteq B^U$  であるから,  $TT(\ulcorner X \urcorner) \in B^U$  でもある.  $FX \in S \Leftrightarrow FT(\ulcorner X \urcorner) \in S$  [ただし,  $S \in D$ ] の場合も同様である. すなわち, 自己自身の真を主張する言明はパラドクシカルではない. liar 文  $X$  はどうか.  $S \in D$  なる  $S$  は全て下方に飽和的であるから,  $\Phi_U$  の不動点は全て下方に飽和的である. よって, 系 5 より,  $\Phi_U$  の不動点  $S$  に対する  $S^U$  は飽和的である. よって,  $T \sim X \in S^U \Leftrightarrow FX \in S^U$ ,  $F \sim X \in S^U \Leftrightarrow TX \in S^U$  が成立する. また,  $S^U$  は自己自身の真理述語を含むから,  $TX \in S^U \Leftrightarrow TT(\ulcorner X \urcorner) \in S^U$  が成立する. 以上より, liar 文  $X$  (これについては,  $S \in D$  に対して,  $TX \in S \Leftrightarrow T \sim T(\ulcorner X \urcorner) \in S$ ,  $FX \in S \Leftrightarrow F \sim T(\ulcorner X \urcorner) \in S$  が成立する) に対しては,  $TX \in S^U$  と仮定しても,  $FX \in S^U$  と仮定しても矛盾が生ずることを示すことができる. すなわち,  $TX \notin S^U$  かつ  $FX \notin S^U$  であるから, 自己自身の偽を主張する言明はパラドクシカルであり, よってまた, 無基底的でもある. さらに, 定理 2 の(2)によって, あらゆる不動点は極大不動点に拡大することができる(ここでも, Zorn のレンマが用いられる). よって, パラドクシカルな言明とは,  $\Phi_U$  の任意の極大不動点  $M$  に対する  $M^U$  の中に真理値をもたない言明のことである, ともいうことができる.

(v) 任意の言明  $X \in L$  に対して,  $TX \in S_1$ ,  $FX \in S_2$  なる不動点  $S_1, S_2$  が存在するとき,  $S_1 \subseteq Y$ , かつ  $S_2 \subseteq Y$  となるような,  $S_1, S_2$  の共通の拡大  $Y$  は存在しえない. なぜなら,  $Y(\in D)$  は無矛盾であるから. よって,  $\Phi_U$  の最大の不動点は存在しえない.

(vi)  $\Phi_U$  の任意の不動点を  $S$  とし,  $\Phi_U$  の極大不動点の集合を  $N$  とする. このとき,  $S \subseteq \inf N$  であるとき, そのときに限って  $S$  は内在的である, とよばれる. また, 言明が,  $\Phi_U$  の内在的不動点  $S$  に対する  $S^U$  の中に真理値をもつならば, その言明は内在的とよばれる. 定理 2 の(8)によって,  $\Phi_U$  の最大の内在的不動点は存在する.

## お わ り に

以上においては, Kripke 真理論を, 主として数学的記述を通して理解する, というところに話は限定された. 最後に, 筆者の力量不足もあって, 一部の雰囲気しか伝えられないが, その後の展開について, 少しばかり触れておきたい.

Kripke 以降では, 彼と同時期に, かつ彼とは独立に, 弱 3 値 Kleene 図式を採用し, Zorn のレンマを用いて, 自己言及的真理述語の存在を示した Martin-Woodruff [27], パラドックスを避けるのではなく, パラドックスの生起する様を記述すべく, 古典論理的, 非単調的かつ半帰納的な「素朴意味論」を提唱する Herzberger [19], [20], Kripke 批判(よって, 真理述語の帰納的構築を拒否し, かつ古典論理の立場に立つ)に基づいて, 真理述語のより適切な外延をうるための「真理の修正規則の理論」を提唱する Gupta [16] などあげられよう. ほかに, Herzberger と Gupta の構築を一般化した Belnap [2], Gentzen の Sequenz 方式を用いて Kripke 真理論を論ずる Kremer [22], [23] がある. 以上は哲学的研究である. 数学的研究としては, Cantini [7] もあるが, ここでは次の 2 つをあげておきたい. Feferman [10] は, Russell のパラドックスと liar パラドックスを平行的に論じた上で, まず, 種々の truth-value gap アプローチを包括しうるような, 部分的述語の type-free な理論を提示するが, それを数学的・哲学的観点から批判し, 改めて, 古典論理[ただし, 等号をもつ第 1 階述語論理を, 双条件の新しい解釈で拡大したもの]の内部で, 部分的述語の type-free な理論を定式



化している。<sup>(6)</sup> 自己言及的真理述語の公理的取り扱いについては、Friedman & Sheard [13] の研究がある。彼らは、まず、Peano Arithmetic の言語を一項述語  $T$  を付加して拡大する[ただし、 $T(x)$  は ‘その拡大された言語の真なる文の Gödel 数である’ を意味する]。そして、 $T$  についての 8 個の公理と 4 個の推論規則をリストアップし、それらの公理と推論規則を元とする集合の部分集合のうち、極大無矛盾となる全てのケースと、矛盾的な全てのケースをあげ、モデル論的手法を用いて証明している。しかし、独立性は示されていない。

現在の真理論的研究については、Kripke によって方向が示され、多くの秀れた研究が現われたというのは事実である。だが、新しい真理論が提示されるたびに、1つの意味論のパラドックスが解消されるけれども、それ以上やっかいなパラドックスがまた生じてしまう (Herzberger, Gupta), というのが実情であり、パラドックスが迷宮から脱出しえたとか、パラドックスから自由な真理論が完成されたというのには程遠い状況にある、といってよい。

### 注

- (1) Kripke 自身、「哲学的正当化については、十分に考え抜いてはいない」と述べている (Kripke [24], p.699)。
- (2) 以下においては、文 (sentence) と言明 (statement) は区別せずに用いる。
- (3) ここでの「(1)のような文」とは、「ウォーターゲートについての Nixon の主張の大ていなのは偽である」というものである。
- (4) このことについて、Fitting は、次のように説明している。全ての  $(S_1, a, S_2, a)$  の集合を  $A$  とするとき、 $x \in A$  なる  $x$  に対して、 $x \leq \phi(x)$  は示されるが、しかし、それは常に  $x < \phi(x)$  であるということとはできない。なぜなら、そのときは、 $(S_1, a, S_2, a)$  の増加列の全ての元は異なる、ということになるが、そのときは、順序数が存在するのと同じだけのものが存在することになる。他方において、全ての元は集合  $A$  の元なのであって、そのようなことは、明らかに不可能なのである。よって、ある  $a (\in A)$  に対しては、 $a = \phi(a)$  でなければならない。  
また、Fitting の説明とは別に、次のように述べることもできよう。 $(S_1, a, S_2, a)$  の全てからなる集合を  $A$  とする。このとき、 $A$  の任意の全順序部分集合は、 $A$  の中に上限を有する、ということを示すことができる。また、明らかに、 $\phi : A \rightarrow A$ 。さらに、すでに、超限帰納法を用いて、 $x \in A$  に対して  $x \leq \phi(x)$ 、となることが示された。よって、 $a = \phi(a)$  となるような  $a (\in A)$  がすくなくとも 1つは存在する。
- (5) 以下において、 $A \leq B$  であれば、「 $A$  は  $B$  以下である」とか「 $B$  は  $A$  以上である」とよばれる。また、 $A \leq M \leq B$  であれば、「 $M$  は、 $A$  と  $B$  の間に存在する」とよばれる。
- (6) 次のことは注意すべきである。type-free な理論の数学的研究は Feferman に始まるわけではなく、すでに、Ackermann (1950, 1957) その他の研究があった。その方面での Feferman の研究は、1974年以前に始まっている (Feferman [10] p.282 (Martin [25] におけるページづけ))。密接な関係があるとはいえ、Kripke とは独立に、彼の研究はなされている、と考えるべきである。

### 文 献

- [1] J.Barwise & J.Etchemendy, *The Liar : An Essay in Truth and Circularity*, Oxford Univ. Pr., 1987.
- [2] N.Belnap, Gupta's rule of revision theory of truth, *Journal of Philosophical Logic* 11 (1982) 103-116.
- [3] N.Belnap & A.Gupta, A note on extension, intention and truth, *The Journal of Philosophy* 84

- (1987) 168-174.
- [4] S.Blamey, Partial logic, *Handbook of Philosophical Logic* III (D.Gabbay & F.Guenthner, eds., Reidel, 1986) 1-70.
- [5] T.Burge, Semantical paradox, *The Journal of Philosophy* **76** (1979) 169-198. also in Martin[25]
- [6] J.P.Burgess, The truth is never simple, *Journal of Symbolic Logic* **51** (1986) 663-681.
- [7] A.Cantini, A note on three-valued logic and Tarski theorem on truth definitions, *Studia Logica* **39** (1980) 405-414.
- [8] L.Davis, A alternate formulation of Kripke's theory of truth, *Journal of Philosophical Logic* **8** (1979) 289-296.
- [9] J.Etchemendy, Tarski on truth and logical consequences, *Journal of Symbolic Logic* **53** (1988) 51-79.
- [10] S.Feferman, Toward useful type-free theories,I, *Journal of Symbolic Logic* **49** (1984) 75-111. also in Martin[25].
- [11] H.Field, Tarski's theory of truth, *The Journal of Philosophy* **69** (1972) 347-375.
- [12] M.Fitting, Notes on the mathematical aspects of Kripke's theory of truth, *Notre Dame Journal of Formal Logic* **27** (1986) 75-88.
- [13] H.Friedman & M.Sheard, An axiomatic approach to self-referential truth, *Annals of Pure and Applied Logic* **33** (1987) 1-21.
- [14] L.Goddard & M.Johnston, The nature of reflexive paradoxes : Part I, *Notre Dame Journal of Formal Logic* **24** (1983) 491-508.
- [15] K.Gödel, Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I, *Monatshefte für Mathematik und Physik* **38** (1931) 173-198.
- [16] A.Gupta, Truth and paradox, *Journal of Philosophical Logic* **11** (1982) 1-60. also in Martin[25]
- [17] A.Gupta & R.L.Martin, A fixed point theorem for the weak Kleene valuation scheme, *Journal of Philosophical Logic* **13** (1984) 131-135.
- [18] G.Hellman, Review of Martin & Woodruff, Kripke, Gupta and Herzberger, *Journal of Symbolic Logic* **50** (1985) 1068-1071.
- [19] H.G.Herzberger, Notes on naive semantics, *Journal of Philosophical Logic* **11** (1982) 61-102. also in Martin[25].
- [20] H.G.Herzberger, Naive semantics and the liar paradox, *The Journal of Philosophy* **79** (1982) 479-497.
- [21] S.C.Kleene, *Introduction to Metamathematics*, Van Nostrand, 1952.
- [22] M.Kremer, Kripke and the logic of truth, *Journal of Philosophical Logic* **17** (1988) 225-278.
- [23] M.Kremer, Logic and meaning : the philosophical significance of the sequent calculus, *Mind* **97** (1988) 50-72.
- [24] S.Kripke, Outline of a theory of truth, *The Journal of Philosophy* **72** (1975) 690-716. also in Martin[25].
- [25] R.L.Martin(ed.), *Recent Essays on Truth and the Liar Paradox*, Clarendon Press, 1984.
- [26] R.L.Martin(ed.), *The Paradox of the Liar*, Ridgeview Pub. Co., 1970.
- [27] R.L.Martin & P.W.Woodruff, On representing "True-in-L" in L, *Philosophia* **5**(1975) 213-217. also in Martin[25].
- [28] T.McCarthy, Ungroundedness in classical languages, *Journal of Philosophical Logic* **17** (1988)

61-74.

- [29] V.Mcgee, How truthlike can a predicate be? A negative result, *Journal of Philosophical Logic* **14** (1985) 399-410.
- [30] 西脇与作, パラドックスから真理の理論へ, 哲学 (慶應義塾大学・三田哲学会) **83** (1986) 1-31.
- [31] K.Popper, Some philosophical comments on Tarski's theory of truth, *Proceedings of Symposia in pure Mathematics* **25** (1974) 379-409.
- [32] G.Priest, Logic of paradox revisited, *Journal of Philosophical Logic* **13** (1984) 153-179.
- [33] H.Putnam, A comparison of something with something else, *New Literary History* **17** (1985) 61-79.
- [34] W.N.Reinhardt, Some remarks on extending and interpreting theories with a partial predicate for truth, *Journal of Philosophical Logic* **15** (1986) 219-251.
- [35] R.M.Smullyan, *First-Order Logic*, Springer, 1968.
- [36] A.Tarski, Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen, *Studia Philosophica* **1** (1935) 261-405. also in : *Alfred Tarski Collected Papers II* (S.R.Givant & R.N.Mckenzie, eds., Birkhäuser, 1986) 51-198.
- [37] B.C.van Fraassen, Singular terms, truth-valus gaps and free logic, *The Journal of Philosophy* **63** (1966) 481-495.
- [38] B.C.van Fraassen, Presupposition, implication and self-references, *The Journal of Philosophy* **65** (1968) 135-152.
- [39] A.Visser, Four valued semantics and the liar, *Journal of Philosophical Logic* **13** (1984) 181-212.
- [40] A.Visser, Semantics and the liar paradox, *Handbook of Philosophical Logic IV* (D.Gabbay & F.Guenthner, eds., Reidel, 1989) 617-706.
- [41] P.W.Woodruff, Paradox, truth and logic Part I : paradox and truth, *Journal of Philosophical Logic* **13** (1984) 213-232.
- [42] S.Yablo, Grounding, dependence and paradox, *Journal of Philosophical Logic* **11** (1982) 117-137.
- [43] S.Yablo, Truth and reflection, *Journal of Philosophical Logic* **14** (1985) 297-349.

## 要 旨

Gödel-Tarski の定理によって, 形式的言語における自己言及的な真理述語の存在は否定された。しかし, Kripke は, 真理述語を部分述語 (関数) と解し, 非古典論理 (たとえば, 強 3 値 Kleene 図式) を採用するならば, 自己言及的真理述語が, 一種の不動点として, 帰納的に構築できることを示した。

現在のところ, Kripke 真理論は, 我国で論じられることは極めて少ない。しかし, それは, その哲学的意味の重要性, および数学的内容の豊富さからいって, Tarski 以降, 最も注目に値する真理論であると考えられる。