

Gödel 集合論 II

山 岡 悦 郎

前回は Gödel 集合論の一般集合論ともいうべき基礎的部分が展開された。今回はそれを承けて、Gödel 自身の独創的部分、すなわちモデル Δ の構成から、選択公理と一般連続体仮説の無矛盾性証明までが扱われる。前回と同様、ここでの記述は1940年の講義録に依拠している。⁽¹⁾

5 モデル Δ

I 選択公理と一般連続体仮説の Σ の諸公理との無矛盾性を証明するには、それら3つが全て成立するモデルを提示することができればよい。Gödel はそのようなモデル (Δ と名づけられる) の存在することを示したが、まず課題となるのは、モデルでの集合およびクラスをいかにして構成するか、であろう。彼は Σ の公理のうち新しい集合ないしクラスをうみ出す演算とも解釈しうる公理 A4, B1-8 に注目した。そしてそれらの公理に基づいて、集合に適用されたら集合をうみ出す機能をもつ 8 個の演算を案出した。 Δ の集合たる構成可能 (constructible) 集合はこれら 8 個の演算をくり返し適用することによってえられ、またその産出過程のある段階ではそれまでにえられた集合の集合がそのつど新しい構成可能集合として付け加えられていくが、このことにより、産出過程が超限的レベルにまで続くことが可能となるのである。 Δ でのクラスは構成可能集合を用いて定義される。

公理 A4, B1-8 に対応する、基本演算とよばれる 8 個の演算は次のように定義される。

- 5.1 定義 $\mathcal{F}_1(X, Y) = \{X, Y\}$.
 $\mathcal{F}_2(X, Y) = E \cap X$.
 $\mathcal{F}_3(X, Y) = X - Y$.
 $\mathcal{F}_4(X, Y) = X \upharpoonright Y$.
 $\mathcal{F}_5(X, Y) = X \cap \text{Dom}(Y)$.
 $\mathcal{F}_6(X, Y) = X \cap Y^{-1}$.
 $\mathcal{F}_7(X, Y) = X \cap \text{Cnv}_2(Y)$.
 $\mathcal{F}_8(X, Y) = X \cap \text{Cnv}_3(Y)$.

$\mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_8$ における X は後述の定理 5.24 のために付加されている。 L の完全性 (推移性) を示すのに、 $\mathcal{F}_i(X, Y) \subseteq X$ ($i=2, \dots, 8$) が用いられるのである。また、B2 に対応する演算は、 $X \cap Y = X - (X - Y)$ であるので、除外されている。2.60-2.64 により、 $\mathcal{F}_4, \dots, \mathcal{F}_8$ は、次のように表現することもできる。

- 5.2 $\mathcal{F}_4(X, Y) = X \cap \check{P}_2 "Y$.
 $\mathcal{F}_5(X, Y) = X \cap P_2 "Y$.
 $\mathcal{F}_6(X, Y) = X \cap P_3 "Y$.

$$\mathcal{F}_7(X, Y) = X \cap P_4 " Y.$$

$$\mathcal{F}_8(X, Y) = X \cap P_5 " Y.$$

すなわち

$$5.3 \quad \mathcal{F}_i(X, Y) = X \cap Q_i " Y. \quad (i=4, \dots, 8)$$

ただし, Q_i は次によって定義される.

$$5.4 \quad Q_4 = \bar{P}_2, \quad Q_5 = P_2, \quad Q_6 = P_3, \quad Q_7 = P_4, \quad Q_8 = P_5.$$

定理2.66により, 基本演算は全て, 集合に適用されたときは集合を与えることは明らかである.

II ここで, クラス $9 \times On^2$ (つまり, $i < 9$ に対する順序 3-組 $\langle i, \alpha, \beta \rangle$ のクラス) を考察し, それに対する次のような整列関係 S を定義する.

$$5.5 \quad \text{定義} \quad \mu, \nu < 9 \rightarrow [\langle \mu, \alpha, \beta \rangle S \langle \nu, \gamma, \delta \rangle \equiv \{ \langle \alpha, \beta \rangle R \langle \gamma, \delta \rangle \vee (\langle \alpha, \beta \rangle = \langle \gamma, \delta \rangle \wedge \mu < \nu) \}] \wedge S \subseteq (9 \times On^2)^2.$$

ただし, R は3.53によって定義された関係である. また, S の存在は $M4$ に依存する.

この5.5より次が成立する.

$$\langle i, \alpha, \beta \rangle S \langle j, \gamma, \delta \rangle \rightarrow \{ \langle \alpha, \beta \rangle R \langle \gamma, \delta \rangle \vee \langle \alpha, \beta \rangle = \langle \gamma, \delta \rangle \}$$

よって, 3.54と2.75により, $9 \times On^2$ のどの固有 S -セクションも集合である. だが2.83により, $9 \times On^2$ は集合ではないので, 3.50により, $9 \times On^2$ は S と E に関して On と同型であることがわかる. つまり, 次の公準をみたす J が存在する.

$$5.6 \quad \text{定義} \quad J \text{Fn}(9 \times On^2) \wedge \text{Rng}(J) = On \wedge \mu, \nu < 9 \rightarrow [\langle \mu, \alpha, \beta \rangle S \langle \nu, \gamma, \delta \rangle \rightarrow J' \langle \mu, \alpha, \beta \rangle < J' \langle \nu, \gamma, \delta \rangle].$$

さて, 次により, On^2 上の9個の関数 J_0, \dots, J_8 を定義する.

$$5.7 \quad \text{定義} \quad J_0' \langle \alpha, \beta \rangle = J' \langle 0, \alpha, \beta \rangle, \quad J_0 \text{Fn} On^2, \\ \dots, \dots, \\ J_8' \langle \alpha, \beta \rangle = J' \langle 8, \alpha, \beta \rangle, \quad J_8 \text{Fn} On^2.$$

明らかに次が成立する.

$$5.8 \quad \text{Rng}(J_i) \text{ は互いに素であり } (i=0, \dots, 8), \text{ それらの和は } On \text{ である.}$$

J の定義から, 任意の γ に対して $\gamma = J' \langle i, \alpha, \beta \rangle$ となるような一義的な $\langle i, \alpha, \beta \rangle$ が存在する. よって, 任意の $i < 9$ に対して $K_1' J_i' \langle \alpha, \beta \rangle = \alpha$, $K_2' J_i' \langle \alpha, \beta \rangle = \beta$ となるような, On 上の2つの関数 K_1, K_2 が存在する. K_1, K_2 は次により定義される.

$$5.9 \quad \text{定義} \quad \langle \alpha, \gamma \rangle \in K_1 = \exists \mu, \beta [\mu < 9 \wedge \gamma = J' \langle \mu, \alpha, \beta \rangle] \wedge K_1 \subseteq On^2, \\ \langle \beta, \gamma \rangle \in K_2 = \exists \mu, \alpha [\mu < 9 \wedge \gamma = J' \langle \mu, \alpha, \beta \rangle] \wedge K_2 \subseteq On^2.$$

J_i と K_i に関する次の定理がえられる.

$$5.10 \quad \text{Max} \{ \alpha, \beta \} \leq J_i' \langle \alpha, \beta \rangle, \\ \text{Max} \{ \alpha, \beta \} < J_i' \langle \alpha, \beta \rangle, \quad (i \neq 0) \\ K_1' \alpha \leq \alpha, \quad K_2' \alpha \leq \alpha, \\ K_1' \alpha < \alpha, \quad K_2' \alpha < \alpha. \quad (\alpha \notin \text{Rng}(J_0))$$

[証明] $\text{Max} \{ \alpha, \beta \} = \gamma$ とおくと, 5.6により, $J_0' \langle \alpha, \beta \rangle \geq J_0' \langle \gamma, 0 \rangle$ であり, 3.48より, $\gamma \leq J_0' \langle \gamma, 0 \rangle$. さらに再び5.6により, $i \neq 0$ に対して $J_0' \langle \alpha, \beta \rangle < J_i' \langle \alpha, \beta \rangle$. 以上より, $i \neq 0$ に対しては次が成立する.

$$\gamma \leq J_0' \langle \gamma, 0 \rangle \leq J_0' \langle \alpha, \beta \rangle < J_i' \langle \alpha, \beta \rangle.$$

残り 2 つの不等式は、上に示されたことと K_1, K_2 の定義を用いて証明することができる。

***5.11** $\alpha, \beta < \omega_r \rightarrow J_i' \langle \alpha, \beta \rangle < \omega_r$.

【証明】 定義 5.6 により、 J は順序 S において $\langle i, \alpha, \beta \rangle$ に先行する順序 3-組の集合 m を $\langle J_i' \langle \alpha, \beta \rangle$ なるオーディナルの集合に写す。ゆえに $J' \langle \alpha, \beta \rangle \simeq m$ 。だが 5.5 と 3.53 より、 $m \leq 9 \times [\text{Max}\{\alpha, \beta\} + 1]^2$ である。そして、 $r=0$ のときは 4.30 により、 $r>0$ のときは 4.43 により定理がえられる。なお $r=0$ の場合は選択公理は用いられていない。

***5.12** $\omega_\alpha \in \text{Rng}(J_0)$.

【証明】 5.10 により $\omega_\alpha \leq J' \langle 0, \omega_\alpha, 0 \rangle$ を示すことができる。だが $\omega_\alpha < J' \langle 0, \omega_\alpha, 0 \rangle$ ではありえない。($\because \omega_\alpha < J' \langle 0, \omega_\alpha, 0 \rangle$ と仮定すると、 $\langle i, \gamma, \delta \rangle S \langle 0, \omega_\alpha, 0 \rangle$ かつ $\omega_\alpha = J' \langle i, \gamma, \delta \rangle$ なる $\langle i, \gamma, \delta \rangle$ が存在する。他方において、 $\langle i, \gamma, \delta \rangle S \langle 0, \omega_\alpha, 0 \rangle$ の場合は $\gamma, \delta < \omega_\alpha$ となる。ゆえに 5.11 より、 $J' \langle i, \gamma, \delta \rangle < \omega_\alpha$ 。これは不合理である) よって、 $\omega_\alpha = J' \langle 0, \omega_\alpha, 0 \rangle = J_0' \langle \omega_\alpha, 0 \rangle$ 。すなわち、 $\omega_\alpha \in \text{Rng}(J_0)$ 。なお、 $\alpha=0$ の場合は選択公理は用いられていない。

Ⅲ 以下の公準によって、 On 上の関数 F を超限帰納法を用いて定義する。

5.13 定義 $\alpha \in \text{Rng}(J_0) \rightarrow F' \alpha = \text{Rng}(F \upharpoonright \alpha)$,
 $\alpha \in \text{Rng}(J_1) \rightarrow F' \alpha = \mathcal{F}_1(F' K_1' \alpha, F' K_2' \alpha)$,

 $\alpha \in \text{Rng}(J_8) \rightarrow F' \alpha = \mathcal{F}_8(F' K_1' \alpha, F' K_2' \alpha)$,
 $FFnOn$.

このような F の存在を 3.45 を用いて証明するために、まず次の公準によって V 上の関数 G を定義する。

- i) $\text{Dom}(x) \in \text{Rng}(J_0)$ のときは、 $G' x = \text{Rng}(x)$,
- ii) $\text{Dom}(x) \in \text{Rng}(J_i)$, $i=1, \dots, 8$ のときは、 $G' x = \mathcal{F}_i[x' K_1' \text{Dom}(x), x' K_2' \text{Dom}(x)]$,
- iii) それ以外のときは、 $G' x = 0$ 。

ここで出てくる記号は全て正則的であるから、M6 により、 G は存在する。さて、3.45 により、 $F' \alpha = G'(F \upharpoonright \alpha)$ をみたす On 上の関数 F が存在する。しかるに $\alpha \in \text{Rng}(J_i) (i \neq 0)$ とすると、 $\text{Dom}(F \upharpoonright \alpha) = \alpha$ であるから $\text{Dom}(F \upharpoonright \alpha) \in \text{Rng}(J_i)$ 。よって

$$G'(F \upharpoonright \alpha) = \mathcal{F}_i[(F \upharpoonright \alpha)' K_1' \alpha, (F \upharpoonright \alpha)' K_2' \alpha]$$

5.10 により、 $K_1' \alpha < \alpha$, $K_2' \alpha < \alpha$ 。また、 $\beta < \alpha$ なら $(F \upharpoonright \alpha)' \beta = F' \beta$ 。ゆえに $F' \alpha = G'(F \upharpoonright \alpha) = \mathcal{F}_i[F' K_1' \alpha, F' K_2' \alpha]$ 。同様にして、 $\alpha \in \text{Rng}(J_0)$ のときは $\text{Dom}(F \upharpoonright \alpha) \in \text{Rng}(J_0)$ 。

よって

$$F' \alpha = G'(F \upharpoonright \alpha) = \text{Rng}(F \upharpoonright \alpha)$$

このことは、 F は 5.13 をみたすということであるので、5.13 で定義される F は一意的に存在することがわかる。次の諸結果は、5.13 の α のところ ($i \neq 0$) に $J_i' \langle \beta, \gamma \rangle$ を代入し、 $K_1' J_i' \langle \alpha, \beta \rangle = \alpha$, $K_2' J_i' \langle \alpha, \beta \rangle = \beta$ (5.9 による) を適用することによってえられる。

5.14 $F' J_1' \langle \beta, \gamma \rangle = \{F' \beta, F' \gamma\}$.

5.15 $F' J_2' \langle \beta, \gamma \rangle = E \cap F' \beta$.

5.16 $F' J_3' \langle \beta, \gamma \rangle = F' \beta - F' \gamma$.

5.17 $F' J_i' \langle \beta, \gamma \rangle = F' \beta \cap Q_i''(F' \gamma)$, $i=4, \dots, 8$.

5.18 $\alpha \in \text{Rng}(J_0) \rightarrow F' \alpha = F'' \alpha$.

これらの定理の集合は、 F が5.1の9個の基本演算をいかに反映しているかを示している。

集合 x は、 $x=F'\alpha$ なる α が存在するならば構成可能であるといわれる。⁽²⁾ 構成可能な集合のクラスは L で表される。すなわち

5.19 定義 $L=\text{Rng}(F)$.

ここで、構成可能集合のアイデアに基づいて具体的に構成される構成可能集合とはどのようなものであるか、について簡単に触れておきたい。

まず、5.5と5.6により、順序数の大小関係 \leq に対応して、 $9 \times On^2$ の元は小さいものから順に並べることができる。すなわち、同一の $\langle \alpha, \beta \rangle$ に対して $\langle i, \alpha, \beta \rangle$ は $i=0$ から $i=8$ まで並べられ、また、この $\langle \alpha, \beta \rangle$ も順序が決るので、全ての $\langle i, \alpha, \beta \rangle$ が並べられることになる。この $\langle \alpha, \beta \rangle$ は、 $\langle 0, 0 \rangle, \langle 1, 0 \rangle, \langle 0, 1 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 0 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 0, 2 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \dots$ と続いていく順序対である。よって、 $\langle i, \alpha, \beta \rangle$ を0番目から順に並べると、 $\langle 0, 0, 0 \rangle, \langle 1, 0, 0 \rangle, \dots, \langle 8, 0, 0 \rangle, \langle 0, 1, 0 \rangle, \langle 1, 1, 0 \rangle, \dots, \langle 8, 1, 0 \rangle, \langle 0, 0, 1 \rangle, \langle 1, 0, 1 \rangle, \dots, \langle 8, 0, 1 \rangle, \dots$ となる。そして、 α 番目が $\langle i, \beta, \gamma \rangle$ であるとする、5.14—5.18により、 α 番目にえられる構成可能集合は、 $i=0$ のときは $\alpha-1$ 番目までにえられた α 個の構成可能集合の集合であり、 $i \neq 0$ のときは β 番目と γ 番目にえられた2つの構成可能集合に演算 \mathcal{F}_i を適用してえられる集合である。最初の一部を0番目から順に示せば次のようになる。

$$\begin{aligned} F'0 &= F''0 = 0. \\ F'1 &= \mathcal{F}_1(F'0, F'0) = \{0\} = 1. \\ F'2 &= \mathcal{F}_2(F'0, F'0) = E \cap F'0 = 0. \\ F'3 &= \mathcal{F}_3(F'0, F'0) = F'0 - F'0 = 0. \\ F'4 &= \mathcal{F}_4(F'0, F'0) = F'0 \upharpoonright F'0 = 0. \\ F'5 &= \mathcal{F}_5(F'0, F'0) = F'0 \cap \text{Dom}(F'0) = 0. \\ F'6 &= \mathcal{F}_6(F'0, F'0) = F'0 \cap (F'0)^{-1} = 0. \\ F'7 &= \mathcal{F}_7(F'0, F'0) = F'0 \cap \text{Cnv}_2(F'0) = 0. \\ F'8 &= \mathcal{F}_8(F'0, F'0) = F'0 \cap \text{Cnv}_3(F'0) = 0. \\ F'9 &= F''9 = \{0, 1\} = 2. \end{aligned}$$

.....

これからわかるように、構成可能集合は順序数0つまり空集合から出発して、順次基本演算を施し、次々と新しい集合を作っていくてえられる集合である。したがって、 K_1, K_2 に加うるに、 N を

$$\langle \mu, \gamma \rangle \in N = \exists \alpha, \beta [\mu < 9 \wedge \gamma = J' \langle \mu, \alpha, \beta \rangle] \wedge N \subseteq On^2$$

と定義するならば、集合 $F'\alpha$ は超限帰納法により次のように定義することができる。

- i) $F'0 = 0$.
- ii) $N'\alpha = 0$ ならば、 $F'\alpha = \{F'\beta \mid \beta < \alpha\}$.
- iii) $N'\alpha = i > 0$, $K_1'\alpha = \beta$, $K_2'\alpha = \gamma$ ならば、 $F'\alpha = \mathcal{F}_i(F'\beta, F'\gamma)$.

IV 構成可能クラスについては、任意のクラス A に対して、 A の全ての元が構成可能集合であり、かつ A と任意の構成可能集合との共通部分もまた構成可能集合であるとき、 A は構成可能であるとよばれる。すなわち

5.20 定義 $\mathcal{L}(A) \equiv A \subseteq L \wedge (x \in L \rightarrow A \cap x \in L)$

5.21 定義 \bar{x}, \dots, \bar{z} は構成可能集合に対する変数として用いられ、 \bar{X}, \dots, \bar{Z} は構成可能クラスに対する変数として用いられる。

5.22 定義 $x = F'\alpha$ なる最小の α は x のオーダー (order) とよばれ、 $\text{Od}'x$ で表される。
すなわち

5.23 定義 $\langle y, x \rangle \in \text{Od} \equiv \langle x, y \rangle \in F \wedge \forall z [z \in y \rightarrow \sim \langle x, z \rangle \in F] \wedge \text{Od} \subseteq \text{On}^2$.

5.24 $\text{Comp}(F''\alpha)$.

【証明】 $F'\alpha \subseteq F''\alpha$, すなわち, 構成可能集合の全ての元は, その集合自体よりも前に現われるということを示せば十分である. α を $F'\alpha \subseteq F''\alpha$ が偽となる最初の順序数であるとせよ. $\alpha \in \text{Rng}(J_0)$ ならば $F'\alpha = F''\alpha$. よって $F'\alpha \subseteq F''\alpha$. $i \neq 0$ に対して $\alpha \in \text{Rng}(J_i)$ ならば, $\alpha = J_i' \langle \beta, \gamma \rangle$ なる β, γ が存在する. 定理 5.15, 5.16, 5.17 によって, $i > 1$ ならば, $F'\alpha \subseteq F'\beta$ (ここで, 5.1 の $\mathcal{F}_i(X, Y) \subseteq X (i=2, \dots, 8)$ なる要求が用いられる). しかし, 5.10 より, $\beta < \alpha$. よって, 定理は β に対して成立し, $F'\beta \subseteq F''\beta$. よって, $F'\alpha \subseteq F''\beta$. 再び $\beta < \alpha$ より, $F''\beta \subseteq F''\alpha$. ゆえに $F'\alpha \subseteq F''\alpha$. $i=1$ のときは 5.14 より, $F'\alpha = \{F'\beta, F'\gamma\}$. ただし, $\alpha = J_1' \langle \beta, \gamma \rangle$. 5.10 より, $\beta, \gamma < \alpha$. ゆえに $F'\beta \in F''\alpha$, かつ $F'\gamma \in F''\alpha$. よって, $\{F'\beta, F'\gamma\} \subseteq F''\alpha$. すなわち, $F'\alpha \subseteq F''\alpha$.

5.25 $\text{Comp}(L)$. すなわち, 構成可能集合のどの元も構成可能である (5.20 より, 同じことが構成可能クラスに対しても成立する).

【証明】 $x \in L$ をとり, $\alpha = \text{Od}'x$ とせよ. すると, $F'\alpha = x$. 5.24 より, $x \subseteq F''\alpha$. よって, $F''\alpha \subseteq L$ であるから, $x \subseteq L$.

定理 5.24 より次が導かれる.

5.26 $x \in y$, かつ, $x, y \in L$ であれば, $\text{Od}'x < \text{Od}'y$. すなわち, $x \in F'\alpha \rightarrow \text{Od}'x < \alpha$.

【証明】 $\alpha = \text{Od}'x$, $\beta = \text{Od}'y$ とする. すると, $x = F'\alpha$, $y = F'\beta$. $x \in y$ より, $F'\alpha \in F'\beta$. 5.24 より, $F'\beta \subseteq F''\beta$. よって, $F'\alpha \in F''\beta$. すなわち, $\alpha < \beta$.

構成可能集合に適用されるときは, $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_8$ は構成可能集合をうみ出す. すなわち

5.27 $\mathcal{F}_i(\bar{x}, \bar{y}) \in L$, $i=1, \dots, 8$.

【証明】 5.20 より, $\bar{x} = F'\beta$, $\bar{y} = F'\gamma$ なる β, γ が存在する. よって, 5.14—5.17 が定理を与える.

5.28 $\bar{x} \cap \bar{y} \in L$.

【証明】 $\bar{x} \cap \bar{y} = \bar{x} - (\bar{x} - \bar{y})$. よって, $i=3$ に対する 5.27 より, 定理がえられる.

5.29 $\text{Od}'\bar{x} < \omega_\alpha \wedge \text{Od}'\bar{y} < \omega_\alpha \rightarrow \text{Od}'(\bar{x} \cap \bar{y}) < \omega_\alpha$.

【証明】 5.11 による.

5.30 $x, y \in L \equiv \langle x, y \rangle \in L$, $x, y, z \in L \equiv \langle x, y, z \rangle \in L$.

【証明】 $\langle x, y \rangle$ を $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ で表し, 5.27 を適用すると, \rightarrow 方向の含意関係が成立する. \leftarrow 方向の含意関係は 5.25 による.

5.31 $\langle x, y \rangle \in L \equiv \langle y, x \rangle \in L, \langle x, y, z \rangle \in L \equiv \langle x, z, y \rangle \in L$.

【証明】 5.30 より直接に明らかである.

5.32 $Q_i \bar{x} \in L$. ($i=5, 6, 7, 8$)

【証明】 5.30, 5.31 からえられる.

5.33 $x \subseteq L \rightarrow \exists \bar{y} [x \subseteq \bar{y}]$.

【証明】 $x \subseteq L$ とすると, $\text{Od}'x$ は順序数から成る 1 つの集合であるから, $\alpha = \bigcup \{\text{Od}'y \mid y \in$

x なる順序数 α が定まる. $F'\alpha = \bar{y}$ とおけば, $y \in x \rightarrow y \in \bar{y}$. すなわち, $x \subseteq \bar{y}$.

これから, 集合である構成可能クラスは構成可能集合であることが導かれる. すなわち

5.34 $M(\bar{X}) \rightarrow \bar{X} \in L$.

[証明] 5.20と5.33により, \bar{X} はある \bar{y} の中に含まれる. よって, $\bar{X} \cap \bar{y} = \bar{X}$. だが再び 5.20により, $\bar{X} \cap \bar{y}$ は構成可能集合である.

5.35 $\mathcal{L}(\bar{x})$.

[証明] 5.25により, $\bar{x} \subseteq L$. また, 任意の \bar{y} に対して, 5.28により, $\bar{x} \cap \bar{y}$ は構成可能集合である.

5.36 $\bar{x} + \bar{y} \in L$.

[証明] 5.25と5.33により, $\bar{x} + \bar{y} \subseteq \bar{z}$ となるような \bar{z} が存在する. しかるに, $\bar{x} + \bar{y} = \bar{z} - [(\bar{z} - \bar{x}) - \bar{y}]$. よって, 5.27により, 定理が示される.

5.37 $0 \in L$.

[証明] $0 = \bar{x} - \bar{x}$. よって, 5.27により, 0 は構成可能である.

5.38 $\mathcal{L}(L)$.

[証明] $L \subseteq L$. 5.25により, $\bar{x} \cap L = \bar{x}$. よって, $\bar{x} \cap L \in L$. ゆえに, 5.20により, $\mathcal{L}(L)$.

5.39 $\mathcal{L}(E \cap L)$.

[証明] $E \cap L \subseteq L$. $X \cap E$ は基本演算であるから, 5.27により, $\bar{x} \cap E \in L$. だが, $\bar{x} \subseteq L$ であるから, $\bar{x} \cap E = \bar{x} \cap E \cap L$. よって, $\bar{x} \cap E \cap L \in L$. ゆえに, 5.20により, 求める結果がえられる.

5.40 $\mathcal{L}(\bar{A} - \bar{B})$.

[証明] $\bar{A} - \bar{B} \subseteq L$. また, 5.20と5.27により, $\bar{x} \cap \bar{A} - \bar{x} \cap \bar{B}$ は構成可能である. ところで, $\bar{x} \cap \bar{A} - \bar{x} \cap \bar{B} = \bar{x} \cap (\bar{A} - \bar{B})$. よって, $\bar{x} \cap (\bar{A} - \bar{B})$ は構成可能であるから, 5.20により, 定理がえられる.

5.41 $\mathcal{L}(\bar{A} \cap \bar{B})$.

[証明] 5.20と5.28による.

5.42 $\mathcal{L}(\bar{A} + \bar{B})$.

[証明] 5.20と5.36による.

5.43 $\mathcal{L}(Q_i \text{“}\bar{A}\text{”})$. ($i=5, \dots, 8$).

[証明] Q_5, \dots, Q_8 は5.32により, 構成可能集合を構成可能集合に対応づけるから, $Q_i \text{“}\bar{A}\text{”} \subseteq L$. ($i=5, \dots, 8$). $i=4, \dots, 8$ に対して, $\bar{x} \cap Q_i \text{“}\bar{A}\text{”} \in L$ を示すために, 任意の $y \in \bar{x} \cap Q_i \text{“}\bar{A}\text{”}$ ($i=4, \dots, 8$) を考える. y は \bar{A} のある元の Q_i による像である. y を像とする最低次のオーダーの \bar{A} の元 y' をとる. すると, $\bar{x} \cap Q_i \text{“}\bar{A}\text{”}$ の全ての元 y に対するこれらの y' の全体は構成可能集合の集合 u であり, かつ, $u \subseteq \bar{A}$. 5.33により, ある \bar{z} に対して, $u \subseteq \bar{z}$. \bar{z} は $\bar{z} \cap \bar{A}$ ととることによって, $\bar{z} \subseteq \bar{A}$ となるように決めることができるので, $u \subseteq \bar{z} \subseteq \bar{A}$ と仮定することができる. ゆえに, 2.54により, $\bar{x} \cap Q_i \text{“}\bar{z} \subseteq \bar{x} \cap Q_i \text{“}\bar{A}\text{”}$. しかし, $\bar{x} \cap Q_i \text{“}\bar{A}\text{”}$ のどの元も u の中に原像をもつから, $\bar{x} \cap Q_i \text{“}\bar{A}\text{”} \subseteq \bar{x} \cap Q_i \text{“}\bar{z}\text{”}$. よって, $\bar{x} \cap Q_i \text{“}\bar{A}\text{”} = \bar{x} \cap Q_i \text{“}\bar{z}\text{”}$. だが, 5.27より, $(\bar{x} \cap Q_i \text{“}\bar{z}\text{”}) \in L$.

5.44 $\mathcal{L}(L \cap Q_4 \text{“}\bar{A}\text{”})$.

[証明] $L \cap Q_4 \text{“}\bar{A}\text{”} \subseteq L$ と $\bar{x} \cap (L \cap Q_4 \text{“}\bar{A}\text{”}) = \bar{x} \cap Q_4 \text{“}\bar{A}\text{”}$ は, 5.43により, 構成可能であることによる.

定理2.60—2.64により, 定理5.43と5.44は次の3つの形をとる.

5.45 $\mathcal{L}[\text{Dom}(\bar{A})]$.

5.46 $\mathcal{L}[\text{Cnv}_i(\bar{A})]$, $i=1,2,3$.

5.47 $\mathcal{L}[L \cap (V \times \bar{A})]$.

5.48 $\mathcal{L}(\bar{A} \times \bar{B})$.

[証明] 5.30により, $\bar{A} \times \bar{B} \subseteq L$ であるから, 2.56により次が成立する.

$$\bar{A} \times \bar{B} = (V \times \bar{B}) \cap (\bar{A} \times V) = L \cap (V \times \bar{B}) \cap L \cap (\bar{A} \times V)$$

5.47と5.46により, $\mathcal{L}[L \cap (V \times \bar{B})]$ かつ $\mathcal{L}[L \cap (\bar{A} \times V)]$. よって, 5.41により, 定理がえられる.

5.49 $\mathcal{L}[\text{Rng}(\bar{A})]$.

[証明] 2.32, 2.29, 5.45, 5.46による.

5.50 $\mathcal{L}[\bar{A} \upharpoonright \bar{B}]$.

[証明] $\bar{A} \upharpoonright \bar{B} = \bar{A} \cap (V \times \bar{B}) = \bar{A} \cap L \cap (V \times \bar{B})$. よって, 5.47と5.41により, 定理がえられる.

5.51 $\mathcal{L}[\bar{A} \text{“} \bar{B}]$.

[証明] $\bar{A} \text{“} \bar{B} = \text{Rng}(\bar{A} \upharpoonright \bar{B})$ と5.49, 5.50による.

5.52 $\mathcal{L}[\{ \bar{X}, \bar{Y} \}]$.

[証明] 定義2.13により, $\{ \bar{X}, \bar{Y} \}$ は0か $\{ \bar{X} \}$ か $\{ \bar{Y} \}$ か $\{ \bar{X}, \bar{Y} \}$ のいずれかである. しかも, カッコの中には集合だけが現われる. よって, 5.20, 5.25, 5.27, 5.28, 5.37により, 定理がえられる.

構成可能クラスに対してなされる全ての演算が構成可能クラスをうみ出すとは限らない. たとえば, $\mathcal{L}[\emptyset(\bar{X})]$ は証明できない.

V ここで, 次のようにしてえられるモデル Δ について考えてみよう.

- (1) クラスは構成可能クラスとして解釈される.
- (2) 集合は構成可能集合として解釈される.
- (3) \in^L 関係は構成可能クラスに制限された \in 関係である, i.e, $\bar{X} \in^L \bar{Y} \equiv \bar{X} \in \bar{Y}$.

Δ におけるクラスと集合は Σ におけるそれらの一部分であることを考慮に入れると, Δ の原始的観念は Σ における原始的観念を Δ に制限したものにはかならない. その意味で, Δ は Σ の部分体系とみなすことができる. Σ において今までに定義された演算, 観念, 特殊クラスは, 以下のようにすることによってモデル Δ に対して相対化(relativization)することができる: それらの定義ないし定義公準において, 変数 X, Y, \dots を \bar{X}, \bar{Y}, \dots で, 変数 x, y, \dots を \bar{x}, \bar{y}, \dots で, \in を \in^L でおきかえ, さらに, 以前に定義された概念と変数をそれに対応する相対化されたものでおきかえる. ただし, 論理記号はそのままにしておく. 変数 x の相対化されたものは, x の変域を定義する観念を相対化することによってその変域がえられるような変数である.

なお, 相対化されたものの存在は必ずしも自明なこととは思われなくてもいい. しかし, 後に, Σ の諸公理が Δ に対して成立することが示される. それにより, 相対化されたものは常に存在するということがわかる.

特殊クラス A , 演算 \mathcal{A} , 観念 \mathcal{B} , 変域 x の相対化されたものが存在するときは, それらはそれぞれ, $A^L, \mathcal{A}^L, \mathcal{B}^L, x^L$, で表される. よって, x^L と X^L は \bar{x}, \bar{X} と同じ変域をもつこ

とになる.

\mathcal{A}^L と \mathcal{B}^L はアーギュメントとしての構成可能クラスに対してのみ定義される.

次が成立する.

5.53 A^L と \mathcal{A}^L が存在するならば, A^L は構成可能であり, $\mathcal{A}^L(\overline{X}_1, \dots, \overline{X}_n)$ は任意の $\overline{X}_1, \dots, \overline{X}_n$ に対して構成可能である.

ところで, 一般に, 体系 Σ のモデルとみなしうるモデル M については, 集合論上のある概念を M において扱う場合, その概念が Σ においても同じものとして成立しうるかどうかの問題となる. つまり, M では成立しても Σ では必ずしも成立しないという集合論的概念が存在しうるのである. ある概念が Σ と M において不変であるならば, その概念は M に関して (相対的ではないから) 絶対的なものと表現することができよう. Gödel はこの‘絶対性’を次のように定義している.

5.54 定義 特殊クラス A , 演算 \mathcal{A} あるいは観念 \mathcal{B} は次が成立するとき, 絶対的 (absolute) とよばれる: それぞれ, A^L , \mathcal{A}^L , \mathcal{B}^L が存在し, 任意の $\overline{X}_1, \dots, \overline{X}_n$ に対して, $A^L = A$, $\mathcal{A}^L(\overline{X}_1, \dots, \overline{X}_n) = \mathcal{A}(\overline{X}_1, \dots, \overline{X}_n)$, あるいは, $\mathcal{B}^L(\overline{X}_1, \dots, \overline{X}_n) \equiv \mathcal{B}(\overline{X}_1, \dots, \overline{X}_n)$. 変数 x は x^L の変域が x の変域と同じであれば, 絶対的とよばれる.

定理5.53により, 次がえられる.

5.55 A (演算 \mathcal{A}) が絶対的であれば, A は構成可能である ($\mathcal{A}(\overline{X}_1, \dots, \overline{X}_n)$ は任意の $\overline{X}_1, \dots, \overline{X}_n$ に対して構成可能である).

命題関数 ϕ あるいは命題 ψ の相対化されたものは, それぞれ ϕ^L あるいは ψ^L で表され, かつ, その中に現われる任意の概念と変数を相対化されたものでおきかえることによってうることができる.

以下の諸定理が成立する.

5.56 \in は絶対的である.

[証明] \in^L の定義からえられる.

5.57 ‘ \subseteq ’ は絶対的である.

[証明] $\overline{X} \subseteq^L \overline{Y} \equiv \overline{X} \subseteq \overline{Y}$ が示されればよい. $\overline{X} \subseteq^L \overline{Y} \equiv \forall \overline{u} [\overline{u} \in^L \overline{X} \rightarrow \overline{u} \in^L \overline{Y}] \equiv \forall \overline{u} [\overline{u} \in \overline{X} \rightarrow \overline{u} \in \overline{Y}]$. また, $\overline{X} \subseteq \overline{Y} \equiv \forall u [u \in \overline{X} \rightarrow u \in \overline{Y}]$. ところで, $\forall u [u \in \overline{X} \rightarrow u \in \overline{Y}]$ ならば, $\forall \overline{u} [\overline{u} \in \overline{X} \rightarrow \overline{u} \in \overline{Y}]$. 他方において, u が L の中に存在しないときは, $u \in \overline{X}$ という仮定は偽となるから, 逆の含意関係も成立する.

5.58 $\overline{X} \subseteq^L \overline{Y} \wedge \overline{Y} \subseteq^L \overline{X} \rightarrow \overline{X} = \overline{Y}$. すなわち, 相対化された外延性公理は成立する.

[証明] 5.57と外延性公理による.

5.59 ‘ \subset ’ は絶対的である.

[証明] 5.57より, $\overline{X} \subset^L \overline{Y} \equiv \overline{X} \subseteq^L \overline{Y} \wedge \overline{X} \neq \overline{Y} \equiv \overline{X} \subset \overline{Y}$.

同様の論法により, 次が成立する.

5.60 Ex は絶対的である, i.e., $\text{Ex}^L(\overline{X}, \overline{Y}) \equiv \text{Ex}(\overline{X}, \overline{Y})$.

5.61 Em は絶対的である, i.e., $\text{Em}^L(\overline{X}) \equiv \text{Em}(\overline{X})$.

5.62 演算 $\{X, Y\}$ は絶対的である.

[証明] 2.13 により, $\{\overline{X}, \overline{Y}\}^L$ は次のような構成可能クラス \overline{Z} である:

$$\forall \overline{u} [\overline{u} \in \overline{Z} \equiv \overline{u} = \overline{X} \vee \overline{u} = \overline{Y}]$$

同じく2.13の定義をみればわかるように, $\{\overline{X}, \overline{Y}\}$ は \overline{Z} についてのこの条件をみたす. さ

らに, 5.52より, $\{\bar{X}, \bar{Y}\}$ は構成可能であり, 5.58により, $\{\bar{X}, \bar{Y}\}$ は上の条件をみたす唯一の構成可能クラスであることもわかる. よって, 演算 $\{X, Y\}$ の相対化されたものは存在し, 任意の \bar{X}, \bar{Y} に対して, $\{\bar{X}, \bar{Y}\}^L = \{\bar{X}, \bar{Y}\}$.

5.63 \mathcal{C} が $\mathcal{C}(\bar{X}) = \mathcal{A}(\mathcal{B}(\bar{X}))$ で定義され, かつ, \mathcal{A} と \mathcal{B} が絶対的であれば, \mathcal{C} は絶対的である.

【証明】 $\mathcal{A}(\mathcal{B}(\bar{X})) = \mathcal{A}(\mathcal{B}^L(\bar{X}))$. しかし, $\mathcal{B}^L(\bar{X})$ は 5.53 により構成可能である. ゆえに, $\mathcal{A}(\mathcal{B}^L(\bar{X})) = \mathcal{A}^L(\mathcal{B}^L(\bar{X})) = \mathcal{C}^L(\bar{X})$.

この原理は 2 個以上のアーギュメントをもった演算に対してもまた成立する.

5.64 演算 $\langle X, Y \rangle$ は絶対的である.

【証明】 $\langle X, Y \rangle = \{\{X\}, \{X, Y\}\}$ である. 5.62 により, $\{X\}, \{X, Y\}$ は共に絶対的である. よって, 5.63 により, $\langle X, Y \rangle$ は絶対的である.

同様にして

5.65 演算 $\langle X, Y, Z \rangle$ は絶対的である.

5.66 Un は絶対的である.

【証明】 $\text{Un}^L(\bar{X}) \equiv \forall \bar{u}, \bar{v}, \bar{w} [\langle \bar{v}, \bar{u} \rangle^L \in^L \bar{X} \wedge \langle \bar{w}, \bar{u} \rangle^L \in^L \bar{X} \rightarrow \bar{v} = \bar{w}]$. 5.56 と 5.64 により, 文字 L は上の同値式の右側で現われるものは全て取り除くことができる. そして, そのようにしてえられる同値式の右側を A とすると, A 中の $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ をそれぞれ, u, v, w でおきかえてえられる式 B は A と同値であることを, 5.57 の証明と同じようにして示すことができる. $B \equiv \text{Un}(\bar{X})$ であるから, $\text{Un}^L(\bar{X}) \equiv \text{Un}(\bar{X})$.

5.67 M は絶対的であり, Pr も絶対的である.

【証明】 モデル Δ の定義より, $M^L(\bar{X}) \equiv \bar{X} \in L$. ゆえに, 5.34 と公理 A2 により, $M^L(\bar{X}) \equiv M(\bar{X})$. したがってまた, $\sim M^L(\bar{X}) \equiv \sim M(\bar{X})$.

5.68 $V^L = L$.

【証明】 V^L は公準 $\forall \bar{x} [\bar{x} \in V^L]$ によって定義される. ところで, L はその条件をみたす. ゆえに, 相対化された外延性公理と 5.38 により, $L = V^L$.

5.69 0 は絶対的である.

【証明】 定義 2.1 により, $\forall \bar{x} [\sim \bar{x} \in 0]$. しかも, 0 はこの公準をみたす唯一の構成可能クラスである.

以上により, かなりの概念が絶対的であることが示されたが, 全ての概念が絶対的なのではなく, 例えば, \mathcal{P} と V は絶対的であることは証明できない.

6 モデル Δ に対する公理群 A-D の証明

体系 Σ は公理 A-D 群によって定義されるものであるから, Σ においてそれらの公理群の成立することは当然である. だが, Δ は構成可能なクラスと集合をそこでのクラスと集合とし, \in^L は \in を Δ に制限したものとして定義された. よって, Δ に相対化された公理群が Δ において成立するかどうかは, 直ちには明らかでない. これは検討されるべき問題である.

ところで, 公理の中に現われるあらゆる観念と演算は絶対的であることがすでに示された. よって, 命題の相対化されたものを形成するに際しては, 絶対的観念と演算は全てそのまま

にして残すことができる。のみならず、相対化された観念と演算は、アーギュメントとしての構成可能クラスに対してのみ定義されるものであった。したがって、相対化された公理は X を \bar{X} で、 x を \bar{x} でおきかえることだけでうることができる。

相対化された形での公理を次にあげておく。

[A 群]

- 1^L $\mathcal{L}(\bar{x})$,
- 2^L $\bar{X} \in \bar{Y} \rightarrow M(\bar{X})$,
- 3^L $\forall \bar{u} [\bar{u} \in \bar{X} \equiv \bar{u} \in \bar{Y}] \rightarrow \bar{X} = \bar{Y}$,
- 4^L $\forall \bar{x}, \bar{y} \exists \bar{z} \forall \bar{u} [\bar{u} \in \bar{z} \equiv \bar{u} = \bar{y} \vee \bar{u} = \bar{x}]$;

[B 群]

- 1^L $\exists \bar{A} \forall \bar{x}, \bar{y} [\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle \in \bar{A} \equiv \bar{x} \in \bar{y}]$,
- 2^L $\forall \bar{A}, \bar{B} \exists \bar{C} \forall \bar{x} [\bar{x} \in \bar{C} \equiv \bar{x} \in \bar{A} \wedge \bar{x} \in \bar{B}]$,
- 3^L $\forall \bar{A} \exists \bar{B} \forall \bar{x} [\bar{x} \in \bar{B} \equiv \sim \bar{x} \in \bar{A}]$,
- 4^L $\forall \bar{A} \exists \bar{B} \forall \bar{x} [\bar{x} \in \bar{B} \equiv \exists \bar{y} [\langle \bar{y}, \bar{x} \rangle \in \bar{A}]]$,
- 5^L $\forall \bar{A} \exists \bar{B} \forall \bar{x}, \bar{y} [\langle \bar{y}, \bar{x} \rangle \in \bar{B} \equiv \bar{x} \in \bar{A}]$,
- 6^L $\forall \bar{A} \exists \bar{B} \forall \bar{x}, \bar{y} [\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle \in \bar{B} \equiv \langle \bar{y}, \bar{x} \rangle \in \bar{A}]$,
- 7^L $\forall \bar{A} \exists \bar{B} \forall \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} [\langle \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \rangle \in \bar{B} \equiv \langle \bar{y}, \bar{z}, \bar{x} \rangle \in \bar{A}]$,
- 8^L $\forall \bar{A} \exists \bar{B} \forall \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} [\langle \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \rangle \in \bar{B} \equiv \langle \bar{x}, \bar{z}, \bar{y} \rangle \in \bar{A}]$;

[C 群]

- 1^L $\exists \bar{a} [\sim \text{Em}(\bar{a}) \wedge \forall \bar{x} [\bar{x} \in \bar{a} \rightarrow \exists \bar{y} [\bar{y} \in \bar{a} \wedge \bar{x} \subset \bar{y}]]]$,
- 2^L $\forall \bar{x} \exists \bar{y} \forall \bar{u}, \bar{v} [\bar{u} \in \bar{v} \wedge \bar{v} \in \bar{x} \rightarrow \bar{u} \in \bar{y}]$,
- 3^L $\forall \bar{x} \exists \bar{y} \forall \bar{u} [\bar{u} \subseteq \bar{x} \rightarrow \bar{u} \in \bar{y}]$,
- 4^L $\forall \bar{x} \forall A [\text{Un}(\bar{A}) \rightarrow \exists \bar{y} \forall \bar{u} [\bar{u} \in \bar{y} \equiv \exists \bar{v} [\bar{v} \in \bar{x} \wedge \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle \in \bar{A}]]]$;

[公理 D]

- D^L $\sim \text{Em}(\bar{A}) \rightarrow \exists \bar{x} [\bar{x} \in \bar{A} \wedge \text{Ex}(\bar{x}, \bar{A})]$.

以下において、これらの相対化された公理群の成立することを証明していくが、まず A 群については、1^L, 2^L, 3^L はそれぞれ、5.35, 公理 A2, 5.58 によって成立する。4^L については、 $\bar{z} = \{\bar{x}, \bar{y}\}$ がこれをみたし、 \bar{z} は、5.27 により、構成可能である。

次に B 群については、それぞれの条件をみたす構成可能クラスを示すことによって証明することができる。以下それを示す。

1^L : $\bar{A} = E \cap L$ をとる。クラス $E \cap L$ は 5.39 により構成可能であり、 $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle \in E \equiv \bar{x} \in \bar{y}$ かつ $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle \in L$ であるから、 $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle \in E \cap L \equiv \bar{x} \in \bar{y}$ 。よって、 $E \cap L$ は条件をみたす構成可能クラスである。

2^L : $\bar{C} = \bar{A} \cap \bar{B}$ とすると、このクラスは 5.41 により構成可能であり、かつ条件をみたす。

3^L : \bar{B} として $L - \bar{A}$ をとる。すると、このクラスは 5.40, 5.38 により構成可能であり、かつ条件をみたす。

4^L : \bar{B} として $\text{Dom}(\bar{A})$ をとる。すると、このクラスは 5.45 により構成可能である。また、 $x \in \bar{B} \equiv \exists y [\langle y, x \rangle \in \bar{A}]$ 。よって、特に

$$\bar{x} \in \bar{B} \equiv \exists y [\langle y, \bar{x} \rangle \in \bar{A}] \equiv \exists \bar{y} [\langle \bar{y}, \bar{x} \rangle \in \bar{A}].$$

もし y が存在するとすれば、それは 5.30 により構成可能でなければならないから、最後の同値関係が成立する。

5^L : \bar{B} として $L \cap (V \times \bar{A})$ をとる。5.47 により、このクラスは構成可能である。 $\langle y, x \rangle \in \bar{B} \equiv \langle y, x \rangle \in L \wedge x \in \bar{A}$. よって、 $\langle \bar{y}, \bar{x} \rangle \in \bar{B} \equiv \langle \bar{y}, \bar{x} \rangle \in L \wedge \bar{x} \in \bar{A}$. ゆえに、5.30 により、 $\langle \bar{y}, \bar{x} \rangle \in L$ であるから、 $\langle \bar{y}, \bar{x} \rangle \in \bar{B} \equiv \bar{x} \in \bar{A}$.

6^L : \bar{B} として $\text{Cnv}(\bar{A})$ をとると、これは 5.46 により構成可能である。だが、 $\langle x, y \rangle \in \bar{B} \equiv \langle y, x \rangle \in \bar{A}$. よって、特に、 $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle \in \bar{B} \equiv \langle \bar{y}, \bar{x} \rangle \in \bar{A}$.

同様にして、 7^L , 8^L も証明できる。相対化された公理 C 群の証明は以下のようなものである。

1^L : \bar{a} として $F'\omega$ をとる。5.12 より $\omega \in \text{Rng}(J_0)$. よって、 $F'\omega = F''\omega$. $\bar{x} \in \bar{a}$ (i.e., $\bar{x} = F'\alpha$, $\alpha < \omega$) ならば、 $\beta \in \text{Rng}(J_0)$ かつ $\alpha < \beta$ なる順序数 β をとり (例えば、5.10 と 5.11 によって、 $\beta = J_0' \langle 0, \alpha + 1 \rangle$ とする)、 $\bar{y} = F'\beta$ とする。すると、 $F'\beta = F''\beta$ かつ $F'\alpha \leq F''\beta$. また、 $F'\alpha \in F''\beta = F'\beta$ であるが、 $\sim(F'\alpha \in F'\alpha)$ であるから、 $F'\alpha \in F'\beta$. 他方、 $F'\beta \in F''\omega$. よって、 $\bar{y} \in \bar{a}$ となり、 $F'\omega$ は条件をみたす。

2^L : $\cup(\bar{x})$ を考える。これは 2.69 と 5.25 により、構成可能集合の集合である。よって、5.33 により、 $\cup(\bar{x}) \subseteq \bar{y}$ なる \bar{y} が存在する。したがって、 $\forall u, v [u \in v \wedge v \in \bar{x} \rightarrow u \in \bar{y}]$. ゆえに

$$\forall \bar{u}, \bar{v} [\bar{u} \in \bar{v} \wedge \bar{v} \in \bar{x} \rightarrow \bar{u} \in \bar{y}].$$

すなわち、 \bar{y} は条件をみたす。

3^L : $L \cap \mathcal{P}(\bar{x})$ を考える。これは 2.68 により集合である。5.33 により、 $L \cap \mathcal{P}(\bar{x}) \subseteq \bar{y}$ なる \bar{y} が存在する。よって、 $u \in L \cap \mathcal{P}(\bar{x}) \rightarrow u \in \bar{y}$. したがって、 $\bar{u} \in L \cap \mathcal{P}(\bar{x}) \rightarrow \bar{u} \in \bar{y}$. ゆえに、 $\bar{u} \in \mathcal{P}(\bar{x}) \rightarrow \bar{u} \in \bar{y}$. よって、2.52 により、 $\bar{u} \subseteq \bar{x} \rightarrow \bar{u} \in \bar{y}$.

4^L : $\text{Un}(\bar{A})$ なる \bar{A} に対して、 $\bar{y} = \bar{A}''\bar{x}$ を考える。5.51 により、 \bar{y} は構成可能である。また

$$u \in \bar{y} \equiv \exists v [v \in \bar{x} \wedge \langle u, v \rangle \in \bar{A}].$$

よって、特に

$$\bar{u} \in \bar{y} \equiv \exists v [v \in \bar{x} \wedge \langle \bar{u}, v \rangle \in \bar{A}].$$

ところで、構成可能な v が存在すれば、条件をみたす v が存在する。他方、 v が存在すれば、 $v \in \bar{x}$ であるから、 v は構成可能である。よって

$$\bar{u} \in \bar{y} \equiv \exists \bar{v} [\bar{v} \in \bar{x} \wedge \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle \in \bar{A}].$$

最後に、公理 D の場合を示しておく。

D^L : $\sim \text{Em}(\bar{A})$ とすると、公理 D により、 $\exists x [x \in \bar{A} \wedge \text{Ex}(x, \bar{A})]$. しかし、 $x \in \bar{A}$ であるから、 x は構成可能である。よって、条件をみたす \bar{x} が存在する。

上において、 Σ の公理は全て Δ において成立することが示された。よって、恐らく選択公理に基づく定理を除けば、今までに証明された全ての定理は Δ においてもまた成立することになる。したがってまた、今までに導入された特殊クラスや演算を定義する際に必要な、一意的存在を示す定理は Δ においても成り立つことになる。そして、前にも触れたように、選択公理に依存するものを除けば、今までに導入されたあらゆる概念の相対化されたものは、公理群の証明により存在することがわかる。とりわけ、 \mathcal{L}^L と L^L もまた存在する。

7 $V=L$ がモデル Δ で成立することの証明

選択公理と一般連続体仮説がモデル Δ において成立することを示すには、次のことを証明すれば十分である：

1) 選択公理と一般連続体仮説は、 Σ の公理と付加的公理 $V=L$ (これは、あらゆる集合は構成可能であると述べている) から導出されるということ。

2) $V=L$ はモデル Δ において成立するという事。すなわち、 $V^L=L^L$ 。

ここでは、上記2つのうち2)が証明される。

ところで、5.68により、 $V^L=L$ であった。よって、 $L^L=L$ 、すなわち、‘構成可能集合のクラスは絶対的である’ということを示せば十分である。そのためには、 L の構成で用いられる演算などは全て絶対的であるということが示されればよい。

以下において L の絶対性が証明されるが、それに先立ち、一般的観点から次のことを注意しておきたい。

(1) 演算 $\mathcal{A}(X_1, \dots, X_n)$ が絶対的であるためには、次を示せば十分である：

(i) \mathcal{A} は、構成可能クラスに適用されるときには、構成可能クラスを与える。

(ii) \mathcal{A} は、相対化された定義公準を満足する。i.e., \mathcal{A} が $\phi(\mathcal{A}(X_1, \dots, X_n), X_1, \dots, X_n)$ で定義されるならば、 $\phi^L(\mathcal{A}(\overline{X}_1, \dots, \overline{X}_n), \overline{X}_1, \dots, \overline{X}_n)$ 。

これは次の理由による：モデル Δ は Σ の諸公理を満足するから、 \mathcal{A}^L は存在する。よって、全ての $\overline{X}_1, \dots, \overline{X}_n$ に対して、 $\phi^L(\overline{Y}, \overline{X}_1, \dots, \overline{X}_n)$ なる \overline{Y} の一意的存在を証明することができる。また、もちろん、 $\mathcal{A}^L(\overline{X}_1, \dots, \overline{X}_n)$ は構成可能である。ここで、(i)、(ii) が共に成立するとする。 \mathcal{A}^L の定義より、全ての $\overline{X}_1, \dots, \overline{X}_n$ に対して

$$\phi^L(\mathcal{A}^L(\overline{X}_1, \dots, \overline{X}_n), \overline{X}_1, \dots, \overline{X}_n).$$

また、(ii) より、全ての $\overline{X}_1, \dots, \overline{X}_n$ に対して

$$\phi^L(\mathcal{A}(\overline{X}_1, \dots, \overline{X}_n), \overline{X}_1, \dots, \overline{X}_n).$$

(i) より、 $\mathcal{A}(\overline{X}_1, \dots, \overline{X}_n)$ は構成可能である。それと \overline{Y} の一意的存在を考慮に入れると

$$\mathcal{A}^L(\overline{X}_1, \dots, \overline{X}_n) = \mathcal{A}(\overline{X}_1, \dots, \overline{X}_n)$$

すなわち、 \mathcal{A} は絶対的である。

(2) (1)と同様にして、特殊クラス A が絶対的であるためには、 A が構成可能であることと、相対化された定義公準をみたすことを示せば十分である。

(3) 5.63のように、絶対的演算を絶対的演算に代入することによって定義される演算は絶対的である。

次の諸定理が成立する。

7.1 ‘ \times ’は絶対的である。

[証明] 5.48により、 $\overline{A} \times \overline{B}$ は構成可能である。2.16により、 $u \in \overline{A} \times \overline{B} \equiv \exists v, w [v \in \overline{A} \wedge w \in \overline{B} \wedge u = \langle v, w \rangle]$ 。よって、 $u \in \overline{A} \times \overline{B} \equiv \exists v, w [v \in \overline{A} \wedge w \in \overline{B} \wedge \overline{u} = \langle v, w \rangle]$ 。ところで、上の同値式の右辺は、そこにおける v, w を、それぞれ $\overline{v}, \overline{w}$ でおきかえてえられるものと同値である。よって、 $\overline{A} \times \overline{B}$ は相対化された公準をみたす。したがって、上述の注(1)により、‘ \times ’は絶対的である。

7.2 演算 A^2, A^3, \dots は絶対的である。

[証明] 5.63と7.1による。

7.3 Rel と Rel₃ は絶対的である。

〔証明〕 2.20と5.68により, $\text{Rel}(\bar{X}) \equiv \bar{X} \subseteq V^2$ であり, $\text{Rel}^L(\bar{X}) \equiv \bar{X} \subseteq L^2$. だが, 5.30により, $\bar{X} \subseteq L^2 \equiv \bar{X} \subseteq V^2$. よって, $\text{Rel}(\bar{X}) \equiv \text{Rel}^L(\bar{X})$. Rel₃ の場合も同様にして示される。

7.4 Dom は絶対的である。

〔証明〕 5.45により, $\text{Dom}(\bar{A})$ は構成可能である。また, $x \in \text{Dom}(\bar{A}) \equiv \exists y[\langle y, x \rangle \in \bar{A}]$. したがって, $\bar{x} \in \text{Dom}(\bar{A}) \equiv \exists y[\langle y, \bar{x} \rangle \in \bar{A}]$. ところで, この同値式の右辺は, そこでの y を \bar{y} でおきかえてえられるものと同値となる。よって, $\text{Dom}(\bar{A})$ は相対化された公準をみたす。

7.5 ‘ \cap ’ は絶対的である。

〔証明〕 5.41により, $\bar{A} \cap \bar{B}$ は構成可能である。 $x \in \bar{A} \cap \bar{B} \equiv x \in \bar{A} \wedge x \in \bar{B}$. よって, $\bar{x} \in \bar{A} \cap \bar{B} \equiv \bar{x} \in \bar{A} \wedge \bar{x} \in \bar{B}$. すなわち, $\bar{A} \cap \bar{B}$ は相対化された公準をみたす。

7.6 Cnv_k は絶対的である。 $k=1, 2, 3$.

〔証明〕 5.46により, $\text{Cnv}_k(\bar{A})$ は構成可能である。 $k=1$ の場合を考えてみると, 2.26により, これは次の条件をみたす。

$$\text{Rel}[\text{Cnv}(\bar{A})] \wedge \forall x, y[\langle x, y \rangle \in \text{Cnv}(\bar{A}) \equiv \langle y, x \rangle \in \bar{A}].$$

7.3により, この条件は相対化された言明を含意する。すなわち, $\text{Cnv}(\bar{A})$ は相対化された公準をみたす。 $k=2, 3$ の場合も同様である。

7.7 ‘ \uparrow ’ は絶対的である。

〔証明〕 2.33により, $\bar{A} \uparrow \bar{B} = \bar{A} \cap (V \times \bar{B})$. かつ, $\bar{A} \uparrow^L \bar{B} = \bar{A} \cap (L \times \bar{B})$. 一方, 5.30より, $\bar{A} \cap (V \times \bar{B}) \subseteq L \times L$. よって, 2.55により, $\bar{A} \uparrow \bar{B} = \bar{A} \cap (V \times \bar{B}) \cap (L \times L) = \bar{A} \cap (L \times \bar{B})$. よって, $\bar{A} \uparrow \bar{B} = \bar{A} \uparrow^L \bar{B}$.

7.8 Rng は絶対的である。

〔証明〕 定義2.32により, $\text{Rng}(A) = \text{Dom}[\text{Cnv}(A)]$. よって, 5.63, 7.4, 7.6により, 定理が示される。

7.9 演算 $A \circ B$ は絶対的である。

〔証明〕 定義2.36により, $A \circ B = \text{Rng}(A \uparrow B)$. よって, 5.63, 7.7, 7.8により, 定理が成立する。

7.10 Complement の相対化された演算は $L - \bar{X}$ である。

〔証明〕 5.38と5.40により, $L - \bar{X}$ は構成可能である。また, $\bar{y} \in L - \bar{X} \equiv \sim \bar{y} \in \bar{X}$.

7.11 演算 $A - B$ は絶対的である。

〔証明〕 $\bar{A} -^L \bar{B} = \bar{A} \cap (L - \bar{B}) = \bar{A} \cap L \cap (-\bar{B}) = \bar{A} \cap (-\bar{B}) = \bar{A} - \bar{B}$.

7.12 ‘ $+$ ’ は絶対的である。

〔証明〕 $\bar{A} +^L \bar{B} = L - [(L - \bar{A}) \cap (L - \bar{B})] = L - [L - (\bar{A} + \bar{B})] = \bar{A} + \bar{B}$. ($\bar{A} + \bar{B} \subseteq L$ であるから)。

7.13 $E^L = E \cap L$.

〔証明〕 5.39により, $E \cap L$ は構成可能である。また, $\text{Rel}(E \cap L)$ であり, $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle \in L$, かつ, $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle \in E \equiv \bar{x} \in \bar{y}$ であるから, 次が成立する。

$$\text{Rel}^L(E \cap L) \wedge \forall \bar{x}, \bar{y}[\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle \in E \cap L \equiv \bar{x} \in \bar{y}].$$

よって, $E \cap L$ は相対化された公準をみたす。

7.14 \mathcal{P}_2 は絶対的である。

〔証明〕 7.5と7.13により, 次が成立する.

$$\mathcal{F}_2^L(\bar{X}, \bar{Y}) = \bar{X} \cap {}^L E^L = \bar{X} \cap L \cap E = \bar{X} \cap E = \mathcal{F}_2(\bar{X}, \bar{Y}).$$

7.15 全ての基本演算 $\mathcal{F}_i (i=1, 2, \dots, 8)$ は絶対的である.

〔証明〕 $i=1, \dots, 4$ の場合はそれぞれ, 5.62, 7.14, 7.11, 7.7による. $i=5, \dots, 8$ の場合は, 5.63と7.5を用いて, 7.4, 7.6からえられる.

7.16 2項演算 A^*X は絶対的である.

〔証明〕 $\langle y, \bar{X} \rangle \in \bar{A}$ をみたとすの y も, 5.25により構成可能である. よって, $\langle y, \bar{X} \rangle \in \bar{A}$ なる丁度1個の構成可能集合 y が存在すれば, $\langle y, \bar{X} \rangle \in \bar{A}$ をみたとす丁度1個の集合が存在し, その逆も成立する. ゆえにこの場合は, $(\bar{A}^*)^L \bar{X} = \bar{A}^* \bar{X}$. 上記条件をみたとす y や集合が存在しないか, 一意的存在でない場合は, 両者とも0である.

7.17 Comp は絶対的である.

$$\begin{aligned} \text{Comp}(\bar{X}) &\equiv \forall u [u \in \bar{X} \rightarrow u \subseteq \bar{X}] \\ &\equiv \forall \bar{u} [\bar{u} \in \bar{X} \rightarrow \bar{u} \subseteq \bar{X}] \equiv \text{Comp}^L(\bar{X}). \end{aligned}$$

7.18 Ord は絶対的である.

〔証明〕 Ord と Ord^L の定義により, 次が成立する.

$$\begin{aligned} \text{Ord}(\bar{X}) &\equiv \text{Comp}(\bar{X}) \wedge \forall u, v [u, v \in \bar{X} \rightarrow u = v \vee u \in v \vee v \in u] \\ &\equiv \text{Comp}^L(\bar{X}) \wedge \forall \bar{u}, \bar{v} [\bar{u}, \bar{v} \in \bar{X} \rightarrow \bar{u} = \bar{v} \vee \bar{u} \in \bar{v} \vee \bar{v} \in \bar{u}] \\ &\equiv \text{Ord}^L(\bar{X}). \end{aligned}$$

7.19 O は絶対的である.

〔証明〕 3.17, 5.67, 7.18により, 次が成立する.

$$O(\bar{X}) \equiv \text{Ord}(\bar{X}) \wedge M(\bar{X}) \equiv \text{Ord}^L(\bar{X}) \wedge M^L(\bar{X}) \equiv O^L(\bar{X}).$$

7.20 Fnc は絶対的である.

〔証明〕 2.39, 5.66, 7.3により, 次が成立する.

$$\begin{aligned} \text{Fnc}^L(\bar{X}) &\equiv \text{Rel}^L(\bar{X}) \wedge \text{Un}^L(\bar{X}) \equiv \text{Rel}(\bar{X}) \wedge \text{Un}(\bar{X}) \\ &\equiv \text{Fnc}(\bar{X}). \end{aligned}$$

7.21 Fn は絶対的である.

〔証明〕 2.40, 7.4, 7.20 により, 次が成立する.

$$\begin{aligned} \bar{Y} \text{Fn}^L(\bar{X}) &\equiv \text{Fnc}^L(\bar{Y}) \wedge \text{Dom}^L(\bar{Y}) = \bar{X} \\ &\equiv \text{Fnc}(\bar{Y}) \wedge \text{Dom}(\bar{Y}) = \bar{X}. \end{aligned}$$

7.22 On は絶対的である.

〔証明〕 3.30と3.32により, $\text{Ord}^L(\text{On}^L)$ かつ $\text{Pr}^L(\text{On}^L)$. 5.53により, On^L は構成可能である. さらに, 7.18と5.67により, Ord と Pr は絶対的である. よって, $\text{Ord}(\text{On}^L)$ かつ $\text{Pr}(\text{On}^L)$. よって, 3.33より, $\text{On}^L = \text{On}$.

5.55と7.22から, $\text{On} \subseteq L$ がえられる. これは, あらゆる順序数は構成可能であるということの意味している. さらに, 7.22から次がえられる.

7.23 変数 α, β, \dots は絶対的である.

7.24 不等号 ' $<$ ' は絶対的である.

〔証明〕 ' $<$ ' は字義上, ' \in ' と同じである.

7.25 ' \leq ' は絶対的である.

〔証明〕 $X \leq Y$ は字義上, $X \in Y \vee X = Y$ である.

7.26 ‘+1’は絶対的である。

[証明] 3.37, 5.62, 7.12および5.63による。

7.27 記号 0, 1, 2, 3, …, のそれぞれは絶対的である。

[証明] 5.69と7.26による。

7.28 \cup (したがって, Max と Lim も) は絶対的である。

[証明] $z \in \cup(\bar{X}) \equiv \exists v[z \in v \wedge v \in \bar{X}] \equiv \exists \bar{v}[z \in \bar{v} \wedge \bar{v} \in \bar{X}] \equiv z \in \cup^L(\bar{X})$. よって外延性公理より, $\cup(\bar{X}) = \cup^L(\bar{X})$.

今や残されたのは, 特殊クラス R, S, J, K_1, K_2, F, L が絶対的であることを示すことである。ただし, ここでの R は3.53で定義された, 順序対に対する順序づけであり, S は5.5によって定義された, 順序3-組 $\langle i, \alpha, \beta \rangle$ の順序づけである。また, F は5.13で導入された, L を定義する関数である。以下, これらの絶対性を示していくが, その証明は次の補題に依存するので, まず, この補題を証明しておく。

7.29 クラス A が公準 $\phi(A)$ で定義され, しかも, ϕ の中でてくる定義されたクラス, 演算, 観念, 変数の全てが絶対的であれば, A は絶対的である。

[証明] ϕ が上記の条件をみたすとすれば, $\phi^L(\bar{X}) \equiv \phi(\bar{X})$. また, A^L と A の定義より, $\phi^L(A^L)$ かつ $\phi(A)$. さらに, 5.53により, A^L は構成可能であるから, $\phi^L(A^L)$ は $\phi(A^L)$ を含意する。よって, $A^L = A$. なぜならば, $\phi(A^L)$ と $\phi(A)$ の両方が成立するから。

7.30 ‘ R ’は絶対的である。

[証明] 定義3.53により, 次がえられる。

$$R \subseteq (On^2)^2 \wedge \forall \alpha, \beta, \gamma, \delta [\langle \langle \alpha, \beta \rangle, \langle \gamma, \delta \rangle \rangle \in R \equiv \text{Max}\{\alpha, \beta\} < \text{Max}\{\gamma, \delta\} \vee \\ [\text{Max}\{\alpha, \beta\} = \text{Max}\{\gamma, \delta\} \wedge (\beta < \delta \vee (\beta = \delta \wedge \alpha < \gamma))]]].$$

この定義公準の中には次の諸概念がでてくる: $\subseteq, On, ()^2, \langle \dots \rangle, \text{Max}, \{ \dots \}, <, \in$, および変数 α, β, \dots . これらはそれぞれ, 5.57, 7.22, 7.2, 5.64, 7.28, 5.62, 7.24, 5.56, 7.23によって絶対的であることが証明されている。よって, 7.29により, R は絶対的である。

7.31 ‘ S ’は絶対的である。

[証明] 定義5.5により, 次がえられる。

$$S \subseteq (9 \times On^2)^2 \wedge \forall \alpha, \beta, \gamma, \delta, \mu, \nu [\mu < 9 \wedge \nu < 9 \rightarrow [\langle \langle \mu, \alpha, \beta \rangle, \langle \nu, \gamma, \delta \rangle \rangle \in S \equiv \\ \langle \langle \alpha, \beta \rangle, \langle \gamma, \delta \rangle \rangle \in R \vee (\langle \alpha, \beta \rangle = \langle \gamma, \delta \rangle \wedge \mu < \nu)]]].$$

S に対する公準の中には, すでに R に対する公準の中でてきたもの以外には, $\times, R, 9$ がでてくるだけである。これらはそれぞれ, 7.1, 7.30, 7.27により絶対的である。

7.32 ‘ J ’は絶対的である。

[証明] 定義5.6により, 次がえられる。

$$J\text{Fn}(9 \times On^2) \wedge \text{Rng}(J) = On \wedge \forall \alpha, \beta, \gamma, \delta, \mu, \nu [\mu, \nu < 9 \rightarrow \\ \langle \langle \mu, \alpha, \beta \rangle, \langle \nu, \gamma, \delta \rangle \rangle \rightarrow J' \langle \mu, \alpha, \beta \rangle < J' \langle \nu, \gamma, \delta \rangle]].$$

この公準において新たに加えられた記号は, Fn, Rng , および ‘ J ’ の3つだけである。そして, それらはそれぞれ, 7.21, 7.8, 7.16によって絶対的であることが証明されている。

7.33 ‘ J_i ’はそれぞれ, 絶対的である。 $i=0, 1, \dots, 8$ 。

[証明] $J_0' \langle \alpha, \beta \rangle = J' \langle 0, \alpha, \beta \rangle, J_0 \text{Fn} On^2$. ここにでてくる記号は全て, すでにでてきたものばかりである。 $i=1, \dots, 8$ に対しても同様。

7.34 K_1 と K_2 は絶対的である。

[証明] 定義公準5.9の中には、すでに言及された記号だけがでてくる。

7.35 'F' は絶対的である。

[証明] 定義公準5.13の中にでてくる、新たに加えられた記号は \uparrow と $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_8$ のみであり、これらはそれぞれ、7.7, 7.15 により絶対的である。

7.36 'L' は絶対的である。

[証明] $L = \text{Rng}(F)$ であり、 Rng と F は、7.35, 7.8により絶対的である。

この定理 7.36 の $L^L = L$ と、先に証明された定理 5.68 の $V^L = L$ より、 $V^L = L^L$ 、よって、 $(V=L)^L$ が示された。換言すると、 Σ の諸公理から、'命題 $V=L$ はモデル Δ において成立する'ということが証明された。そして、このことによって、' Σ の A, B, C, D の公理群に対するモデルが存在するならば、公理として命題 $V=L$ を付加することによって拡大された公理集合に対するモデルもまた存在する'ということが明らかとなる。したがって、'体系 Σ が無矛盾であれば、拡大された体系 $\Sigma + V=L$ もまた無矛盾である'ということがわかる。このことは次のように説明することもできる： Σ は無矛盾であると仮定する。もし、 $V=L$ と Σ の諸公理から矛盾が導出されるとすると、 Δ は $\Sigma + V=L$ のモデルであるから、その同じ矛盾が $V^L = L^L$ と相対化された諸公理 A^L, B^L, C^L, D^L から導出されうることになる。だが、すでに示したように、 $V^L = L^L$ と A^L, B^L, C^L, D^L は Σ において証明することができる。よって、その矛盾は Σ から導かれることになるが、これは仮定に反する。したがって、 $\Sigma + V=L$ は無矛盾である。

8 選択公理と一般連続体仮説が $V=L$ から導出されることの証明

I エレガントにしてかつ風格ある Gödel の無矛盾性証明も、いよいよ最後のところに到達した。ここでは、選択公理と一般連続体仮説が $V=L$ から導出されることが証明され、それでもって、全証明が完了する。

選択公理の場合は容易に示すことができる。なぜなら、次の 8.1 で定義される関係 As は空ならざるどの構成可能集合においても最小のオーダーの元を選び出すが、この As は明らかに、 $V=L$ のときは選択公理 E をみたすからである。

8.1 定義 $\langle y, x \rangle \in As \equiv y \in x \wedge \forall z [\text{Od}'z < \text{Od}'y \rightarrow \sim z \in x] \wedge \text{Rel}(As)$ 。

$As'x$ は x の '指定された' 元である。

8.2 定義 $C'\alpha = \text{Od}'[As'(F'\alpha)] \wedge CFnOn$ 。

$C'\alpha$ は、 $F'\alpha$ の '指定された' 元のオーダーである。よって、5.26により、 $C'\alpha \leq \alpha$ 。

II 上において、 $\Sigma + V=L$ から選択公理が導出された。したがって、 $\Sigma + V=L$ から一般連続体仮説を導出する場合は、選択公理に依存するところの、*印のついた定義ないし定理は自由に用いてよい。次に、無矛盾性証明の仕上げとして一般連続体仮説の導出が証明されるが、この証明は技術的に最も難解であり、Gödel の論文に接する数学者、論理学者の 'つまづきの石 (stumbling block)' となっている箇所であるといわれる。⁽³⁾ 確かに、ZF 体系での無矛盾性証明よりも理解しにくいものであるが、ここでは、以前と同様、なるべく Gödel 自身の記述を尊重しながら、その筋を追うことにしたい。まず、次が示される。

8.3 $\overline{F''\omega_\alpha} = \omega_\alpha$ 。

[証明] 4.16により、 $\overline{F''\omega_\alpha} \leq \overline{\omega_\alpha} = \omega_\alpha$ 。ところで、 ω_α の部分集合 $\omega_\alpha \cap \text{Rng}(J_0)$ 上の F

の値は全て異なる。なぜなら、 $\gamma, \delta \in \omega_\alpha \cap \text{Rng}(J_0)$ かつ $\gamma < \delta$ とすると、5.13より、 $F'\gamma \in F'\delta$ 、よって、 $F'\gamma \neq F'\delta$ となるからである。他方、5.11より、 $J_0''(\omega_\alpha^2) \subseteq \omega_\alpha \cap \text{Rng}(J_0)$ であり、かつ J_0 は 1 対 1 であるから、 $\overline{\omega_\alpha \cap \text{Rng}(J_0)} \geq \omega_\alpha$ 。よって、 $\overline{F''\omega_\alpha} \geq \omega_\alpha$ 。

この定理8.3と Cantor の定理4.17を考慮に入れると、一般連続体仮説は次の定理から直接にえられる。⁽⁴⁾

8.4 $\mathcal{P}(F''\omega_\alpha) \subseteq F''\omega_{\alpha+1}$

この定理は次の補題を用いて証明される。

8.5 $m \subseteq On$, かつ m は C, K_1, K_2 , および 3 項関係としての J_0, \dots, J_8 に関して閉じており、 G は E に関しての m からオーディナル θ への同型関係であるとする。このとき、 G は $\hat{\alpha}\hat{\beta}[F'\alpha \in F'\beta]$ に関する同型関係である。すなわち、 $\alpha, \beta \in m \rightarrow [F'\alpha \in F'\beta \equiv F'G'\alpha \in F'G'\beta]$ 。

まず、次が示される。

8.6 定理8.4は補題8.5から導出される。

[証明] $u \in \mathcal{P}(F''\omega_\alpha)$, i.e., $u \subseteq F''\omega_\alpha$ とする。 $V=L$ であるから、 $u = F'\delta$ なる δ が存在する。4.48にしたがい、 C, K_1, K_2 および 3 項関係としての J_i ($i=0, \dots, 8$) に関する集合 $\omega_\alpha + \{\delta\}$ の閉包を作り、それを m で表す。すなわち、 $\omega_\alpha + \{\delta\} \subseteq m$ 。さて、4.48により、 m は集合であり、 $\overline{m} = \omega_\alpha$ 。さらに、 m はオーディナルの集合であるから、3.31により、 E によって整列される。しかも、3.50により、 m はある順序数 θ に同型である。その同型関係を G で表すと、 $G''m = \theta$ 。簡単のために、 $G'\alpha$ を α' で表すことにする。仮定8.5により

$$\alpha, \beta \in m \rightarrow F'\alpha \in F'\beta \equiv F'\alpha' \in F'\beta'.$$

ここで、 G による δ の像たる δ' を考えてみる。すると、 $\delta' \in \theta$ 。すなわち、 $\delta' < \theta$ 。 G は 1 対 1 であるから、 $\theta = m = \omega_\alpha$ 。よって、 $\theta < \omega_{\alpha+1}$ 。したがって、 $\delta' < \omega_{\alpha+1}$ 。また、任意の $\beta \in m$ に対して

$$F'\beta \in F'\delta \equiv F'\beta' \in F'\delta'.$$

定義から、 $\omega_\alpha \subseteq m$ 。また、明らかに、 ω_α は m の E -セクションである。ゆえに、 ω_α は G によって θ の E -セクションに写される。すなわち、3.34により、ある順序数に写される。しかし、3.49により、これは、 G は ω_α の自己自身への恒等写像であることを意味する。ゆえに、 $\beta \in \omega_\alpha$ ならば $\beta' = \beta$ 。よって、 $\beta \in \omega_\alpha$ に対して、 $F'\beta \in F'\delta \equiv F'\beta \in F'\delta'$ 。他方、 $F'\beta \in F''\omega_\alpha$ 。よって、 $F'\delta \cap F''\omega_\alpha = F'\delta' \cap F''\omega_\alpha$ 。しかし、仮定より、 $F'\delta \subseteq F''\omega_\alpha$ 。したがって、 $F'\delta = F'\delta' \cap F''\omega_\alpha$ 。だが、5.12により、 $\omega_\alpha \in \text{Rng}(J_0)$ 。ゆえに、5.18により、 $F''\omega_\alpha = F'\omega_\alpha$ 。よって、 $u = F'\delta = F'\delta' \cap F'\omega_\alpha$ 。したがって、5.29により、 $\text{Od}'u < \omega_{\alpha+1}$ 。すなわち、 $u \in F''\omega_{\alpha+1}$ 。

(証明終)

さて、前述の補題8.5を証明するために、最初に次の補助定理を証明する。

8.7 (C に関する閉包を除外した) 8.5の仮定から、次が導出される。

- (1) G は 3 項関係 J_i ($i=0, \dots, 8$) に対する同型関係である。すなわち ($G'\alpha$ を α' で表すと) : $\alpha, \beta \in m, i < 9$ に対して、 $J_i'(\alpha', \beta') = [J_i'(\alpha, \beta)]'$ 。
- (2) θ は 3 項関係 J_i に関して閉じている。

[証明] まず、証明の概要を与えておけば次のとおりである： J の定義と m の閉包性によって、 J は順序 3-組 $\langle i, \alpha, \beta \rangle$ [ただし、 $i < 9$ で、 $\alpha, \beta \in m$] のクラスと m の間に、 S と E に関する同型関係を確立する。 G により、この同型関係は $\langle i, \alpha, \beta \rangle$ [ただし、 $i < 9, \alpha, \beta$

$\in \theta]$ の集合 t と θ の間の同型関係に移される。だが同様にまた、 J は S と E について、 t とあるオーディナル γ の間に同型対応を定義する。このことから、3.49により、 $\gamma = \theta$ であり、 t に制限された J は、 $9 \times m^2$ に制限された J の G による像と合致するということが導き出される。だが、これは定理が述べることである。

以下、詳しい証明を与える。

$j = J \upharpoonright (9 \times m^2)$ とせよ。すると、 $\text{Dom}(j) = 9 \times m^2$ 。また、 m は全ての J_i に関して閉じているから、 $\text{Rng}(j) \subseteq m$ 。他方、 $m \subseteq \text{Rng}(j)$ でもある。なぜなら、 $\gamma \in m$ とすると、 m は K_1 と K_2 について閉じているから、ある i, α, β [ただし、 $\alpha, \beta \in m$] に対して、 $\gamma = J' \langle i, \alpha, \beta \rangle$ となり、よって、 $\gamma \in \text{Rng}(j)$ となるからである。したがって、 $\text{Rng}(j) = m$ 。また、この定義域に対しては、 J は j と合致する。よって

$$j \text{ Isom}_{S,E}(9 \times m^2, m).$$

ここで、 j が G によって移された関数を \bar{j} で表すことにしよう。すなわち、 \bar{j} は次によって定義される： $\alpha, \beta \in m, i < 9$ に対して

$$j \text{ Fn}(9 \times \theta^2) \wedge \bar{j} \langle i, \alpha', \beta' \rangle = [j' \langle i, \alpha, \beta \rangle]'$$

これはまた、次のように記してもよい： $\alpha, \beta \in \theta, i < 9$ に対して、 $\bar{j} \langle i, \alpha, \beta \rangle = [j' \langle i, \alpha_1, \beta_1 \rangle]'$ (ただし、 $\alpha_1 = \bar{G} \alpha$)。ところで、 j は対応する性質をもつから、 $\text{Dom}(\bar{j}) = 9 \times \theta^2$ であり、 $\text{Rng}(\bar{j}) = \theta$ 。仮定より、 G は E についての同型関係であった。よって、3.52により、 $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in m$ に対して、 $\langle \alpha, \beta \rangle \text{ Le} \langle \gamma, \delta \rangle \equiv \langle \alpha', \beta' \rangle \text{ Le} \langle \gamma', \delta' \rangle$ 。同様にして、3.53により、 $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in m$ に対して、 $\langle \alpha, \beta \rangle \text{ R} \langle \gamma, \delta \rangle \equiv \langle \alpha', \beta' \rangle \text{ R} \langle \gamma', \delta' \rangle$ 。よって、5.5により、 $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in m, i, k < 9$ に対して

$$\langle i, \alpha_1, \beta_1 \rangle \text{ S} \langle k, \gamma_1, \delta_1 \rangle \equiv \langle i, \alpha, \beta \rangle \text{ S} \langle k, \gamma, \delta \rangle.$$

さて、 $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \theta, i, k < 9$ かつ $\langle i, \alpha, \beta \rangle \text{ S} \langle k, \gamma, \delta \rangle$ と仮定してみよう。すると、 $\langle i, \alpha_1, \beta_1 \rangle \text{ S} \langle k, \gamma_1, \delta_1 \rangle$ 。これは、 $j' \langle i, \alpha_1, \beta_1 \rangle \text{ E } j' \langle k, \gamma_1, \delta_1 \rangle$ を含意する。なぜなら、 $j \text{ Isom}_{S,E}(9 \times m^2, m)$ であるから。さらに、 G は E についての同型関係であるから、次のようになる。

$$[j' \langle i, \alpha_1, \beta_1 \rangle] \text{ E } [j' \langle k, \gamma_1, \delta_1 \rangle]'$$

すなわち、 $\bar{j} \langle i, \alpha, \beta \rangle \text{ E } \bar{j} \langle k, \gamma, \delta \rangle$ 。逆の含意関係も容易に示すことができる。ゆえに、 $\bar{j} \text{ Isom}_{S,E}(9 \times \theta^2, \theta)$ 。

ここで、 $j_\theta = J \upharpoonright (9 \times \theta^2)$ と定義せよ。すると、 $\text{Dom}(j_\theta) = 9 \times \theta^2$ 。また、 $9 \times \theta^2$ は $9 \times \text{On}^2$ の S -セクションである。よって、3.34により、 J の下では、 $9 \times \theta^2$ の像は On の E -セクション、すなわちオーディナルでなければならない。したがって、 $\text{Rng}(j_\theta)$ はあるオーディナル γ で表してよい。すなわち、 $j_\theta \text{ Isom}_{S,E}(9 \times \theta^2, \gamma)$ 。よって、3.49を用いると、 \bar{j} と j_θ の同型関係性より、 $\gamma = \theta$ かつ $j_\theta = \bar{j}$ 。ゆえに、 $\alpha, \beta \in m, i < 9$ に対して

$$j_\theta \langle i, \alpha', \beta' \rangle = \bar{j} \langle i, \alpha', \beta' \rangle = [j' \langle i, \alpha, \beta \rangle]'$$

これは、 j_θ と j の構成の仕方を見ると、次の言明と同値である： $\alpha, \beta \in m, i < 9$ に対して、 $J' \langle i, \alpha', \beta' \rangle = [J' \langle i, \alpha, \beta \rangle]'$ 。これはまた、次と同じである： $\alpha, \beta \in m, i < 9$ に対して、 $J' \langle \alpha', \beta' \rangle = [J' \langle \alpha, \beta \rangle]'$ 。そして、これが8.7の(1)にほかならない。 θ が J_i について閉じているということは、最後の等式から直接に明らかである。 (証明終)

8.8 $m \subseteq \text{On}, m' \subseteq \text{On}$ 。かつ m, m' は共に K_1, K_2 および3項関係としての J_0, \dots, J_8 に関して閉じており、 $G \text{ Isom}_{E,E}(m, m')$ であるとする。このとき、 G は3項関係 J_0, \dots, J_8 に対する同型関係である。

〔証明〕 条件より, $m \subseteq On$ かつ $m' \subseteq On$. よって, 3.31により, m と m' は共に E によって整列される. したがって, 3.50により, m と m' はそれぞれ, E に関して順序数 α, β に同型である. しかるに, G は E に関する m から m' への同型関係であるから, m と m' は同じオーディナル θ に写すことができる. よって, E に関する m から θ への同型関係たる G_θ が存在する. ゆえに, 3.49により, $G_\theta = G$ かつ $m' = \theta$ となり, 定理は証明された. (証明終)

8.9 定理8.8の仮定は次を含意する:

$$\alpha \in m, i < 9 \text{ に対して, } \alpha \in \text{Rng}(J_i) \rightarrow G'\alpha \in \text{Rng}(J_i).$$

〔証明〕 m は K_1, K_2 について閉じているから, $\alpha \in \text{Rng}(J_i)$ は $\alpha = J_i' \langle \beta, \gamma \rangle$, $\beta, \gamma \in m$ を含意する. よって, 8.8 により, $\alpha' = J_i' \langle \alpha', \beta' \rangle$. すなわち, $\alpha' \in \text{Rng}(J_i)$. (証明終)

以下, 次の定理を示そう.

8.10 m, m', G は8.8の仮定をみたし, m と m' はさらに C についても閉じているとする. このとき, G は関係 $\hat{\alpha}\hat{\beta}(F'\alpha \in F'\beta)$ と $\hat{\alpha}\hat{\beta}(F'\alpha = F'\beta)$ に対して同型関係である. すなわち, $G'\alpha$ を α' で表すと

$$(a) \quad \begin{aligned} \alpha, \beta \in m \rightarrow F'\alpha \in F'\beta &\equiv F'\alpha' \in F'\beta' \wedge \\ &F'\alpha = F'\beta \equiv F'\alpha' = F'\beta'. \end{aligned}$$

〔証明〕 証明は $\eta = \text{Max}\{\alpha, \beta\}$ についての帰納法による. すなわち, $\alpha, \beta \in m$, $\alpha, \beta < \eta$ なる α, β に対して (a) は成立するということを仮定して, $\alpha, \beta \in m$, $\text{Max}\{\alpha, \beta\} = \eta$ に対して (a) が成立することを示す. この場合, 帰納法によって全ての順序数 η に属することが示される性質は次の命題関数によって与えられる:

$$\begin{aligned} \forall \alpha, \beta [\alpha, \beta \in m \wedge \eta = \text{Max}\{\alpha, \beta\} \rightarrow (F'\alpha \in F'\beta \equiv F'G'\alpha \in F'G'\beta) \wedge \\ (F'\alpha = F'\beta \equiv F'G'\alpha = F'G'\beta)]. \end{aligned}$$

この表現は正規的である. したがって, 3.31により, 確かに帰納法を適用することができる. $\text{Max}\{\alpha, \beta\} = \eta$ の場合は, 次の3つの可能なケースが考えられる. 第一に

$$1) \quad \alpha = \beta = \eta$$

の場合である. この場合は, (a) の同値関係はいずれも成立する. なぜなら, 最初の同値式では両辺が偽となり, 2番目の同値式では両辺が真となるからである. よって, 残る2つのケースは, $\alpha = \eta$ かつ $\beta < \eta$ の場合と, $\alpha < \eta$ かつ $\beta = \eta$ の場合である. したがって, 証明されるべきは次のことである:

$$\eta \in m, \text{ かつ}$$

$$\alpha, \beta \in m \cap \eta \text{ に対して } \begin{cases} \text{I. } F'\alpha \in F'\beta \equiv F'\alpha' \in F'\beta', \\ \text{II. } F'\alpha = F'\beta \equiv F'\alpha' = F'\beta', \end{cases}$$

という帰納法の仮定の下に

$$\alpha, \beta \in m \cap \eta \text{ に対して } \begin{cases} \text{(i)} & F'\alpha \in F'\eta \equiv F'\alpha' \in F'\eta', \\ \text{(ii)} & F'\eta \in F'\beta \equiv F'\eta' \in F'\beta', \\ \text{(iii)} & F'\eta = F'\beta \equiv F'\eta' = F'\beta', \end{cases}$$

が成立する.

この後, この定理8.10の証明の終りまでに示されることは全て, この帰納法の仮定と8.10の仮定に依存している.

最初に, 次の省略記法を導入しておく:

$r = F''m$, $r_\eta = F''(m \cap \eta)$, $r' = F''m'$, $r'_\eta = F''(m' \cap \eta')$. したがって, $r_\eta \subseteq r$, $r'_\eta \subseteq r'$. さて, r_η の r'_η への 1 対 1 写像 H を, $H = F|G|F^{-1}$ によって定義することができる. この H については帰納法の仮定 II より, H は 1 対 1 であり, しかも, $x = F'\alpha$, $\alpha \in m \cap \eta$ であれば, $H'x = F'\alpha'$. さらに, 帰納法の仮定 I を用いると, H は E についての同型関係であることもわかる. ところで, 定理 8.10 の仮定と帰納法の仮定において, m , η , r , r_η , G , H をそれぞれ, m' , η' , r' , r'_η , \tilde{G} , \tilde{H} でおきかえてえられるものは元の仮定と同じことを意味している. すなわち, それらの元の仮定は, m と m' , η と η' , r と r' , r_η と r'_η , G と \tilde{G} , H と \tilde{H} において完全に対称的となっている. よって, 8.10 と帰納法の仮定から証明されるものについては, そこに含まれる m , η , r , r_η , G , H を, それぞれそれに対応する対称的なものでおきかえてえられるものもまた成立することになる.

次の段階は, H は 3 項関係 $\hat{x}\hat{y}[z = \langle x, y \rangle]$, 4 項関係 $\hat{u}\hat{v}\hat{w}[z = \langle u, v, w \rangle]$ および Q_i に対して同型関係であるということを証明することである. これを実行するには, まず, 次の補助的な諸結果が示されねばならない.

(1) r は基本演算に関して閉じている.

[証明] $x, y \in r$ をとる. すると, $x = F'\alpha$, $y = F'\beta$ なる $\alpha, \beta \in m$ が存在する. よって, m は J_i について閉じているから, 5.14–5.17 により, $\mathcal{F}_i(x, y) \in r$. したがって, $x, y, z \in r$ ならば, $x - y$, $\{x, y\}$, $\langle x, y \rangle$, $\langle x, y, z \rangle$, $x \cap Q_i$ “ y は全て r の中にある. そして特にまた, $x, y \in r$ ならば, $x \cap Q_i$ “ $\{y\} \in r$ も明らかである.

(2) $x \in r \rightarrow \text{Od}'x \in m$.

[証明] $x \in r$ とする. すると (1) より, $\{x\} \in r$. よって, $\{x\} = F'\alpha$ なる $\alpha \in m$ が存在する. $\beta = C'\alpha$ とおく. m は C について閉じているから, $C'\alpha \in m$. 他方, C の定義より, $C'\alpha = \text{Od}'x$.

(3) $(x \in r) \wedge (x \neq 0) \rightarrow x \cap r \neq 0$.

[証明] $x = F'\alpha$ なる $\alpha \in m$ が存在する. 定義 8.2 により, $F'C'\alpha \in x$. だが, m は C について閉じているから, $F'C'\alpha \in r$. ゆえに, $x \cap r \neq 0$.

(3.1) $\{x, y\} \in r \rightarrow x, y \in r$, $\langle x, y \rangle \in r \rightarrow x, y \in r$, $\langle x, y, z \rangle \in r \rightarrow x, y, z \in r$.

[証明] x は $\{x\}$ の唯一の元であるから, (3) より, $\{x\} \in r \rightarrow x \in r$. ここで, $\{x, y\} \in r$ と仮定すると, (3) より, $x \in r$ か $y \in r$ のどちらかである. $x \in r$ としてみると, (1) より, $\{x\} \in r$. よって再び (1) より, $\{x, y\} - \{x\} \in r$. したがって, $x \neq y$ ならば, $\{y\} \in r$. ゆえに, $y \in r$. 同様に, $\langle x, y \rangle \in r \rightarrow x, y \in r$, $\langle x, y, z \rangle \in r \rightarrow x, y, z \in r$.

(4) $y \in r \wedge \langle y, x \rangle \in Q_i \rightarrow x \in r$. ($i \neq 5$)

[証明] Q_6 の場合を考えてみる. $y \in r \wedge \langle y, x \rangle \in Q_6$ と仮定する. すると, ある u, v に対して, $y = \langle u, v \rangle$, $x = \langle v, u \rangle$ である. 仮定より, $\langle u, v \rangle \in r$. よって, (3.1) より, $u, v \in r$. ゆえに, (1) より, $\langle v, u \rangle \in r$. すなわち, $x \in r$. 他の Q_7 , Q_8 の場合も同様に示される. 次に, $Q_i = \tilde{P}_2$ を考えてみる. $y \in r \wedge \langle y, x \rangle \in \tilde{P}_2$ と仮定する. すると, $\langle x, y \rangle \in P_2$. よって, y は順序対であり, 其の 2 番目のメンバーは x である. ゆえに, (3.1) より, $x \in r$.

(5) $x \in r_\eta \wedge y \in x \rightarrow (y \in r \rightarrow y \in r_\eta)$.

[証明] $\alpha = \text{Od}'y$ とする. すると, (2) より, $\alpha \in m$. 5.26 により, $\text{Od}'y < \text{Od}'x < \eta$. よって, $\alpha \in m \cap \eta$. すなわち, $y \in r_\eta$.

(6) $y \in F'\eta \wedge y \in r \rightarrow y \in r_\eta$.

[証明] 5.26により, $\text{Od}'y < \eta$. (2)より, $\text{Od}'y \in m$. よって, $\text{Od}'y \in m \cap \eta$. すなわち, $y \in r_\eta$.

$$(7) \{x, y\} \in r_\eta \rightarrow x, y \in r_\eta, \langle x, y \rangle \in r_\eta \rightarrow x, y \in r_\eta, \langle x, y, z \rangle \in r_\eta \rightarrow x, y, z \in r_\eta.$$

[証明] $\{x, y\} \in r$. よって, (3.1)より, $x, y \in r$. ゆえに, (5)により, 求める最初の結果がえられる. それを利用して2番目の結果が, さらにそれを利用して3番目の結果がえられる.

なお, 以後, $H'x$ は x' で表すことにする. すなわち, ダッシュは, ギリシヤ字つきで現われるときは G に対する省略記法であり, ローマ字つきで現われるときは H に対する省略記法である.

(8) H は, $\hat{z} \hat{x} \hat{y} [z = \{x, y\}]$, $\hat{z} \hat{x} \hat{y} [z = \langle x, y \rangle]$, $\hat{z} \hat{x} \hat{y} \hat{t} [z = \langle x, y, t \rangle]$ および Q_i ($i=4, \dots, 8$) についての同型関係である.

[証明] まず, $\{x, y\}$ の場合を考えてみる.

$$x, y, z \in r_\eta \rightarrow [z = \{x, y\} \equiv z' = \{x', y'\}]$$

を示せばよい. 仮定の対称性, ならびに, $x, y, z \in r_\eta$ と $x', y', z' \in r_\eta'$ とは同値であることを念頭に入れると, 上の同値関係を確立するには, 一方向での含意関係を示せば十分である. そこで, \leftarrow 方向の含意関係を証明することにする. $z' = \{x', y'\}$ であるから, $x' \in z'$ かつ $y' \in z'$. H は E に関する同型関係であるから, $x \in z$ かつ $y \in z$. すなわち, $\{x, y\} \subseteq z$. ゆえに, $z - \{x, y\} = 0$ を示せばよい. そこで, $z - \{x, y\} \neq 0$ としてみる. $x, y, z \in r$ であるから, (1)より, $z - \{x, y\} \in r$. したがって, (3)により, $(z - \{x, y\}) \cap r \neq 0$. すなわち, $u \in z - \{x, y\}$ なる $u \in r$ が存在する. よって, $u \in z$ かつ $z \in r_\eta$. ゆえに, (5)により, $u \in r_\eta$. よって, $u' \in r_\eta'$. 他方, $u \in z$, $u \neq x$ かつ $u \neq y$. したがって, $u' \in z'$, $u' \neq x'$ かつ $u' \neq y'$. なぜなら, H は 1 対 1 で, しかも E に対して同型的であるから. しかし, これは $z' \neq \{x', y'\}$ を意味し, 仮定に反する.

$\langle x, y \rangle$ の場合は, 次が示されればよい.

$$x, y, z \in r_\eta \rightarrow [z = \langle x, y \rangle \equiv z' = \langle x', y' \rangle].$$

ここでもまた, 一方向の含意関係の成立することを示せばよい. $z = \langle x, y \rangle$ とする. $u = \{x, x\}$ かつ $v = \{x, y\}$ とおくと, $z = \{u, v\}$. (7)により, $u, v \in r_\eta$. よって, z', u', v', x', y' を作ると, $v' = \{x', y'\}$, $u' = \{x', x'\}$ および $z' = \{u', v'\}$. すなわち, $z' = \langle x', y' \rangle$.

順序 3-組の場合は, $z = \langle x, y, t \rangle$ と仮定する. $s = \langle y, t \rangle$ とすれば, $z = \langle x, s \rangle$. $z \in r_\eta$ より, (7)を用いると, $t, s \in r_\eta$. よって, $z' = \langle x', s' \rangle$, $s' = \langle y', t' \rangle$. したがって, $z' = \langle x', y', t' \rangle$.

今度は, $Q_5 = P_2$ の場合を考えてみよう. 示すべきは次である.

$$x, y \in r_\eta \rightarrow [\langle x, z \rangle \in P_2 \equiv \langle x', z' \rangle \in P_2].$$

例によって, 一方向の含意関係だけでよい. $x, z \in r_\eta$ かつ $\langle x, z \rangle \in P_2$ と仮定する. 2.44より, $z = \langle y, x \rangle$ なる y が存在する. (7)により, $y \in r_\eta$. ゆえに, (8)により, $z' = \langle y', x' \rangle$, すなわち, $\langle x', z' \rangle \in P_2$. なお, H は P_2 について同型関係であるから, $Q_4 = \bar{P}_2$ についてもまた同型関係でなければならない.

そこで, Q_6, Q_7, Q_8 の場合が残されるが, Q_6 の場合を考えてみよう. $\langle x, y \rangle \in Q_6$ と仮定する. すると, $x = \langle u, v \rangle$ かつ $y = \langle v, u \rangle$ なる u と v が存在する. $x, y \in r_\eta$ であるから, (7)により, $u, v \in r_\eta$. よって, (8)により, $x' = \langle u', v' \rangle$ かつ $y' = \langle v', u' \rangle$. すなわち, $\langle x',$

$y' \in Q_6$. Q_7 と Q_8 の場合も同様に証明することができる.

さて, 帰納法を完成させるために証明しなければならない3つの同値式を考察してみよう. それは次であった.

$$(9) \quad \alpha, \beta \in m \cap \eta \text{ に対して } \begin{cases} (i) & F'\alpha \in F'\eta \equiv F'\alpha' \in F'\eta', \\ (ii) & F'\eta \in F'\beta \equiv F'\eta' \in F'\beta', \\ (iii) & F'\eta = F'\beta \equiv F'\eta' = F'\beta'. \end{cases}$$

まず, この3つの同値式のうち, (i) を証明すれば十分であることを示す. 最初に, (i) は真であると仮定して (iii) を証明する. $F'\eta \neq F'\beta$ とする. すると, $F'\eta - F'\beta \neq 0$ か $F'\beta - F'\eta \neq 0$ のどちらか一方のみが成立する. よって, (1)より, $[F'\eta - F'\beta] \in r$, $[F'\beta - F'\eta] \in r$. したがって, (3)により, $u \in [F'\eta - F'\beta]$ あるいは $u \in [F'\beta - F'\eta]$ のどちらかであるような $u \in r$ が存在する. ゆえに, $u \in F'\eta$ あるいは $u \in F'\beta$. また, $F'\beta \in r_\eta$ であるから, (5)と(6)により, そのどちらの場合も, $u \in r_\eta$ である. ここで, $u \in [F'\eta - F'\beta]$ とする. すると, $u \in F'\eta$ かつ $\sim(u \in F'\beta)$. よって, 帰納法の仮定 I により, $\sim(u' \in F'\beta')$. だが, (9)の(i)は真であると仮定しているから, $u' \in F'\eta'$, ゆえに, $F'\eta' - F'\beta' \neq 0$. 他方, $u \in [F'\beta - F'\eta]$ としてみる. すると, $u \in F'\beta$ かつ $\sim(u \in F'\eta)$. 上と同様にして, $u' \in F'\beta'$ かつ $\sim(u' \in F'\eta')$. すなわち, $F'\eta' \neq F'\beta'$. よって, いずれにせよ, $F'\eta' \neq F'\beta'$. かくして

$$F'\eta \neq F'\beta \rightarrow F'\eta' \neq F'\beta'.$$

逆の含意関係は対称性により導出される.

これで, (iii) は (i) から導出されることがわかったが, 今度は, (i) と (iii) から (ii) を導出する. $F'\eta \in F'\beta$ と仮定し, $\alpha = \text{Od}'(F'\eta)$ とする. 5.26により, $\alpha < \beta < \eta$. また, (2)より, $\alpha \in m \cap \eta$. したがって, $F'\alpha = F'\eta$ であり, ゆえに, $F'\alpha \in F'\beta$. よって, 帰納法の仮定 I より, $F'\alpha' \in F'\beta'$. また, $F'\eta = F'\alpha$ より, (9)の(iii)を用いると, $F'\eta' = F'\alpha'$. ゆえに, $F'\eta' \in F'\beta'$. 以上より, $F'\eta \in F'\beta \rightarrow F'\eta' \in F'\beta'$. 逆方向の含意関係は対称性による. 上の議論によって, (9)の(i)を示せばよいのであり, それはまた, 対称性により, 次を証明すれば十分であることがわかる:

$$\alpha \in m \cap \eta \text{ に対して, } F'\alpha \in F'\eta \rightarrow F'\alpha' \in F'\eta'.$$

$F'\alpha \in F'\eta$ と仮定し, $\eta \in \text{Rng}(J_i)$ なる i に応じて個々の場合を検討する.

1. $\eta \in \text{Rng}(J_0)$ とする. 8.9により, $\eta' \in \text{Rng}(J_0)$. よって, 5.18により, $F'\eta = F''\eta$ かつ $F'\eta' = F''\eta'$. したがって, 同値関係(9)の(i)の両辺は真であり, よって, 明らかに同値である.

2. $\eta \in \text{Rng}(J_1)$ とする. すると, $\eta = J_1' \langle \beta, \gamma \rangle$ なる β, γ が存在する. m の閉包性より, $\beta, \gamma \in m$ であり, 5.10より, $\beta, \gamma < \eta$. また, 8.8により, $\eta' = J_1' \langle \beta', \gamma' \rangle$. よって, 5.14により, $F'\eta = \{F'\beta, F'\gamma\}$ かつ $F'\eta' = \{F'\beta', F'\gamma'\}$. $F'\alpha \in F'\eta$ と仮定すると, $F'\alpha = F'\beta$ あるいは $F'\alpha = F'\gamma$. ゆえに, 帰納法の仮定 II により, $F'\alpha' = F'\beta'$ あるいは $F'\alpha' = F'\gamma'$. よって

$$F'\alpha' \in \{F'\beta', F'\gamma'\};$$

すなわち, $F'\alpha' \in F'\eta'$.

3. $\eta \in \text{Rng}(J_2)$ とする. 上と同様にして, $\eta = J_2' \langle \beta, \gamma \rangle$ かつ $\eta' = J_2' \langle \beta', \gamma' \rangle$, $\beta, \gamma \in m \cap \eta$. 5.15より, $F'\eta = E \cap F'\beta$ かつ $F'\eta' = E \cap F'\beta'$. $F'\alpha \in F'\eta$ と仮定すると, $F'\alpha \in F'\beta$

かつ $F'\alpha \in E$. 帰納法の仮定 I により, $F'\alpha' \in F'\beta'$. 他方, $F'\alpha \in E$ より, $F'\alpha = \langle x, y \rangle$ かつ $x \in y$ となるような x, y が存在する. $F'\alpha \in r_\eta$. よって, (7) より, $x, y \in r_\eta$. ゆえに, (8) より, $F'\alpha' = \langle x', y' \rangle$ かつ $x' \in y'$. すなわち, $F'\alpha' \in E$. 以上より

$$F'\alpha' \in E \cap F'\beta';$$

すなわち, $F'\alpha' \in F'\eta'$.

4. $\eta \in \text{Rng}(J_3)$ とする. 上と同様にして, $\eta = J_3' \langle \beta, \gamma \rangle$ なる β, γ が存在し, かつ, $\eta' = J_3' \langle \beta', \gamma' \rangle$. よって, 5.16 より, $F'\eta = F'\beta - F'\gamma$, $F'\eta' = F'\beta' - F'\gamma'$, $\beta, \gamma \in m \cap \eta$. $F'\alpha \in F'\eta$ と仮定すると, $F'\alpha \in F'\beta - F'\gamma$. よって, $F'\alpha \in F'\beta$ かつ $\sim(F'\alpha \in F'\gamma)$. したがって, 帰納法の仮定 I より, $F'\alpha' \in F'\beta'$ かつ $\sim(F'\alpha' \in F'\gamma')$. ゆえに, $F'\alpha' \in F'\beta' - F'\gamma'$. すなわち, $F'\alpha' \in F'\eta'$.

5. $\eta \in \text{Rng}(J_i) (i=4, 6, 7, 8)$ とする. 上と同様にして, $\eta = J_i' \langle \beta, \gamma \rangle$, $\eta' = J_i' \langle \beta', \gamma' \rangle$, $\beta, \gamma \in m \cap \eta$. よって, 5.17 より, $F'\eta = F'\beta \cap Q_i''(F'\gamma)$ かつ $F'\eta' = F'\beta' \cap Q_i''(F'\gamma')$. ここで, $F'\alpha \in F'\eta$ と仮定する. よって, $F'\alpha \in F'\beta$ かつ $F'\alpha \in Q_i''(F'\gamma)$. 帰納法の仮定 I より, $F'\alpha' \in F'\beta'$. また, 定義 2.36 より, $\langle F'\alpha, x \rangle \in Q_i$ なる $x \in F'\gamma$ が存在する. さて, (4) より, $x \in r$. また, $x \in F'\gamma \in r_\eta$. したがって, (5) より, $x \in r_\eta$. よって, (8) より, $\langle F'\alpha', x' \rangle \in Q_i$. さらに, $x' \in F'\gamma'$. ゆえに

$$F'\alpha' \in Q_i''(F'\gamma');$$

したがって, $F'\alpha' \in F'\eta'$.

6. 最後に, $\eta \in \text{Rng}(J_5)$ の場合だけが残される. 前と同様にして, $\eta = J_5' \langle \beta, \gamma \rangle$ かつ $\eta' = J_5' \langle \beta', \gamma' \rangle$. よって, 5.17 より, $F'\eta = F'\beta \cap P_2''(F'\gamma)$ かつ $F'\eta' = F'\beta' \cap P_2''(F'\gamma')$. ここで注意すべきは, $x \in P_2''y$ は $y \cap \check{P}_2''\{x\} \neq 0$ と同値であるということである. さて, $F'\alpha \in F'\eta$ と仮定すると, $F'\alpha \in F'\beta$ かつ $F'\alpha \in P_2''(F'\gamma)$. すなわち, $F'\gamma \cap \check{P}_2''\{F'\alpha\} \neq 0$. また, $F'\alpha \in r$ かつ $F'\gamma \in r$. したがって, (1) より, $[F'\gamma \cap \check{P}_2''\{F'\alpha\}] \in r$. ゆえに, (3) より, $u \in F'\gamma$ かつ $u \in \check{P}_2''\{F'\alpha\}$ なる $u \in r$ が存在する. よって, (5) より, $u \in r_\eta$. また, $u \in F'\gamma$ かつ $\langle u, F'\alpha \rangle \in \check{P}_2$ であるから, (8) より, $u' \in F'\gamma'$ かつ $\langle u', F'\alpha' \rangle \in \check{P}_2$. すなわち

$$F'\alpha' \in P_2''(F'\gamma');$$

よって, $F'\alpha' \in F'\beta'$ であるから, $F'\alpha' \in F'\eta'$ が導かれる. 以上で, 8.10 の証明は完了した.

8.5 は 8.10 から直接に導かれる. なぜなら, m, θ が 8.5 の仮定をみたすとする, 8.7 より, θ は J_i に関して閉じているのみならず, また, 5.10 より, $K_1'\alpha \leq \alpha$, $K_2'\alpha \leq \alpha$, 8.2 より, $C'\alpha \leq \alpha$ であるから, K_1, K_2, C に関しても閉じておらねばならず, したがって, m, θ は 8.10 の仮定をみたすことになるからである. しかるに, 定理 8.6 において, 8.4 は 8.5 から導出されることが証明されている. よって, 一般連続体仮説は Σ と付加的公理 $V=L$ の帰結であることが示され, かくてまた, ‘ Σ の諸公理が無矛盾であれば, 選択公理と Cantor の一般連続体仮説はそれらの公理と無矛盾である’ということが証明された.

注

- (1) ここでの無矛盾性証明と ZF 集合論での無矛盾性証明(とりわけ, 定義可能性概念を用いた構成可能集合の定義)との関係については, Jech[4]を参照.
 (2) Gödel[3]においては, ZF 集合論を基にして, 構成可能集合は, α についての超限帰納法で, 次のように定義されている:

$$\begin{cases} M_0 = A \\ M_{\alpha+1} = M_{\alpha}' \\ M_{\beta} = \sum_{\alpha < \beta} M_{\alpha} \quad (\beta \text{ が極限数の場合}) \end{cases}$$

$x \in M_{\alpha}$ なる順序数 α が存在するとき, 集合 x を '構成可能' とよぶ.

[ただし, A は空集合であり, M' は, M 上の命題関数 $\phi(x)$ によって定義される M の全ての部分集合の集合である.]

- (3) Cohen[1], p.95.
 (4) 8.3, 8.4 および 4.17 から一般連続体仮説が導出されることについては, Gödel は証明を与えていない. これは次のようにして証明することができる:

$$2^{\aleph_{\alpha}} = \overline{\mathcal{P}(\aleph_{\alpha})} = \overline{\mathcal{P}(F''\aleph_{\alpha})} \leq \overline{F''(\aleph_{\alpha+1})} = \aleph_{\alpha+1}.$$

Cantor の定理より, $\aleph_{\alpha} < \overline{\mathcal{P}(\aleph_{\alpha})} = 2^{\aleph_{\alpha}}$. よって

$$2^{\aleph_{\alpha}} = \aleph_{\alpha+1}.$$

文 献

- [1] P. J. Cohen, *Set Theory and the Continuum Hypothesis*, Benjamin, 1966.
 [2] K. Gödel, *The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum Hypothesis with the Axioms of Set Theory*, Princeton Univ. Pr., 1940.
 [3] K. Gödel, Consistency Proof for the Generalized Continuum Hypothesis, *Proc. Nat. Acad. U. S. A.* **25**(1939), p.220-224.
 [4] T. Jech, *Set Theory*, Academic Pr., 1978.
 [5] W. van O. Quine, *Set Theory and Its Logic*, Harvard Univ. Pr., 1963.
 [6] G. Takeuti & W. M. Zaring, *Introduction to Axiomatic Set Theory*, Springer-Verlag, 1981.