三重大学教育学部研究紀要　第61巻　教育科学　(2010)　187 − 218頁

教育数学序説

― 古代における教育と数学の類型 ―

蟹江　幸博[*]・佐波　　学[†]

Prelude to Educational Mathematics

— Types of education and mathematics in antiqity —

Yukihiro KANIE and Manabu SANAMI

目次

*三重大学教育学部数学
†鳥羽商船高等専門学校

はじめに

教育の対象としての数学とは，どういうものであるべきか．そういう根源的な問いから始めよう．

小学生，中学生，高校生，理工系の大学生，文系の大学生，また数学研究者を目指す者，数学以外の分野の研究者を目指す者，公開講座やカルチャーセンターの受講者など，教育対象が異なる場合に教える数学の内容は，同じなのか，違うのか，違うべきなのか．そして，違うとしたらどう違い，どのように決めるのが良いのだろうか．

教育を，しかるべき共同体の構成員を再生産するための手段であると考えれば，教育は，共同体の維持発展のための最も基本的で重要な装置であるといえる．そして，その教育は，共同体の維持のためには過去を包摂し，発展のためには未来を見通すものでなければならない．

数学は，世界を量的に把握するという人間の認識活動の根源的な部分に発するもので，現在の高度科学技術化社会を支える枠組みを構成するまでに進展した，人間の知的営みである．その意味で，数学の歩みは人類の歴史と共にあり，その広がりは人跡ある地すべてに及ぶのである．

そういう数学の教育には，その共同体ごとの目的があってしかるべきであり，また，採りうる手段も共同体ごとに違うだろう．このことと,「数学」の時間的・空間な広大さを思い合わせるとき，共同体の維持・発展のための数学の教育において,「教えるべき数学」が何であるかという問いは，とうてい単純なものとは言えないだろう．

教育数学は，この「教えるべき数学とは何か」という問いかけに，数学の側から答えようとするひとつの営みとして構想された．

数学教育の現代化

1950年代のアメリカに発し，世界を席巻した「数学教育の現代化[1]」と呼ばれる運動がある．この現代化運動は，教育改革運動としては失敗と評されることが多い[2]．この運動を数学的な側面から取り上げてみよう．

教育のような極度に複合的な営みにおいては，単純化が誤謬の同義語となることも多いが，ここでは，その危険をおかし，議論を単純化して，次の二点を問題としてみよう．

一つは，現代化運動で新しく教育の対象にしようとした「数学」はどんな数学であったのかであり，もう一つは，その数学は「学校[3]」で教える対象として相応しいものだったのか，ということである．

ブルバキと構造主義

前者の問いの答えは，少なくとも公式には，よく知られている．現代化運動が対象とした「数学」は，主としてブルバキ集団によって面目を一新した「数学」のことであった．

ブルバキは，数学を規定するために「集合と構造」という原理を立て，その原理の下で数学を新たに構成もしくは再構成しようとした[4]．彼らの拠ったこ

[1] “New math”もしくは“Modern mathematics”と呼ばれる「数学」を学習の目標とした数学教育改革運動のこと．

[2] アメリカにおけるニュー・マス運動の歴史と現在への影響に関する総括的研究である [38] によれば,「失敗」と過去形で断定するのは状況の単純化が過ぎるようである．

[3] 主として初等・中等教育機関を意味する．

[4] ブルバキの見解については，例えば，[2] を参照のこと．

の立場は，後に構造主義と呼ばれるようになり，数学を超えて現代思想に影響を及ぼすことになる．

もちろん，ブルバキの試み自体には，数学の内部におけるそれなりの必然性があり，数学にとっての一定の効用があったことは否定できない．では，このブルバキ的な「数学」は，学校で教える対象の数学として相応しいものだったのだろうか．

フロイデンタールの立場

ハンス・フロイデンタールは，その問いに「否」と答えている．つまり，集合や論理といった，現代化で導入が図られた新教材の当否を問題とするのではなく，そもそも,「数学」というものを「構造」という原理で捉えることが，教育的な観点から見れば誤っているのだという．これが，フロイデンタールの主張である．

フロイデンタールにとって，教育の対象としての数学を規定する原理は「構造」ではなく,「数学化の過程」であった（2.3 節参照）.「教育の対象としての数学は，ブルバキ的な研究の対象としての数学と同一ではない」というのが，フロイデンタールのメッセージである．

教育数学の必要性

あらためて問おう．教育の対象である数学とは，いったい何であるのか．

この問いに答えるために,「教育数学」という学的営みを提案したい．

「教育数学」は,「教育の対象としての数学」について，その在り方を規定する原理を問い，その原理に従って数学を構成もしくは再構成しようという学的営為となるべきものである．

教育数学を提唱する目的のひとつは，数学教育に数学の側から確固たる基盤を提供することである．もっとも，それは，数学の新しい領域を構成するというよりは，数学に向かいあう姿勢の問題という方がよいかも知れない．

一方で，教育数学の目的には，数学という学問の発展において果たすべき役割がある．

数学の新分野生成に関するクラインの見解

フェリックス・クラインは，1872 年のエアランゲン大学教授就任講演において，数学の新しい分野の生成に関する自身の見解を述べている（[17]）．クラインの主張を模式的に表せば，数学という学問は「数学の応用⇒応用数学⇒純粋数学」と生成発展することになる．

ここでいう「数学の応用」とは，天文学なり物理学なりといったしかるべき領域において生じた問題を，数学的な方法を用いて解決に導こうとする営みを意味する．それに対して,「（クラインの意味での）応用数学」は，そのしかるべき領域の用語を用いてはいるが，扱う内実はその分野の文脈を離れてしまい,「数学」となっているもののことである．そして，この応用数学は，用語も出自の領域から解放されたときに,「純粋数学」に転じることになる．

実は，こうした数学発展の過程（プロセス）において，しばしば「教育」が重要な役割を果たしていることが見て取れるのである．

商業への応用から生まれた数学

歴史に例を求めてみよう．

12 世紀から数世紀にわたり，地中海を囲むビザンツ帝国，イスラム諸国，南欧諸国は，交易を介して一つの文化圏を構成する．この文化圏において，複雑化する商取引の実務から生じた諸問題を解決するための，種々の数学的な技法の発達が促進された．

そうした数学的技法の集成から，新しい数学の専門分野が形成された痕跡が残されている．この分野を，その代表的な教科書[5]に拠って,「アバクス数学」と仮称しておこう．近代の代数学は，このアバクス数学の伝統を承けたものと考えることもできる．

前項のクラインの図式に当てはめるならば,「商取引という領域への応用」⇒「アバクス数学」という流れを見ることができる．

[5]ピサのレオナルド（フィボナッチ）の手になる『アバクスの書』([32])．アバクス (abacus) という言葉は，本来は計算のために小石等を並べる盤（算盤）を意味したが，後に，標準的な計算法がインド式記数法を用いた筆算に替わっても，この種の数学を象徴する名称として使われた．アバクス数学の実態に関する最近の知見については，[15] とその参考文献を参照のこと．また，こうした数学の発達を促進した環境が，近代的な数学的＝機械論的世界観の成立に与えた重大な影響については，[13] を参照されたい．なお，この「アバクス数学（仮称）」の詳細については，別稿で論じる予定である．

このアバクス数学の実態は，その種の数学技法の教授を専門とするアバクス教師 (maestro d'abaco) と称される一群の人々が担っており，その経済的基盤は，アバクス学校 (scuole d'abaco) に拠ることが多く，そこで用いられた教科書類はしばしば「アバクスの書 (Liber abaci)」と称された．ここでの「教育」の介在は，容易に推測されるところであろう．

無限小解析から微分積分学

数学の応用の対象領域が，数学以外の分野である必要はない．19 世紀の，いわゆる「解析の厳密化」を例にとろう．

17 世紀末に生まれたニュートン・ライプニッツ的な「無限小解析」は，強力な計算技法として，幾何学や力学などの領域における様々な問題に適用された．

この計算技法の一種としての性格が濃い無限小解析は，ラグランジュ，コーシー，ワイエルシュトラス，デデキントといった一群の人々によって,「微分積分学」という学的な営みに転じた．この過程が，しばしば,「解析の厳密化」と呼ばれたのである．

この場合,「教育」の役割は何であったのだろう．

新分野生成の触媒としての教育

「解析の厳密化」に貢献した数学者たちと，それ以前の数学者たちとの違いのひとつは，前者が拠ったのが，エコール・ポリテクニク，ベルリン大学等々の「学校」であったことにある．

教師として学生に「無限小解析」をどのように伝えようかと考えたとき，ラグランジュやコーシーの意識に「概念の明確化」や「題材配置の体系化」といった志向が生じたことが想像される．

そして，こうした志向に従って無限小解析を再構成したところに,「解析の厳密化」のある側面を見ることができるだろう[6]．

「教育」の本質を，デューイに従い,「コミュニケーションを通じた伝達 (transmission through communication)[7]」と規定すれば，上述の例においてラグランジュたちの心中に生じた志向性は,「教育」のもたらしたものだといってもよいのではないだろうか．

教育は，新しい数学の分野が生成する際の，いわば「触媒」の役割を果たしているといってもよいだろう．

「数学の教育」から「教育数学」へ

教育の「触媒」としての機構（メカニズム）の本質は，上述のような志向性を「原理」とし，その原理に従って数学を再構成するところにある．つまり，本稿で提唱する「教育数学」の枠内におさまることになる．

そして，この過程（プロセス）を,「数学を教育すること」を意識するとき（それが「触媒」となって）「新しい数学」が生じるものであると解釈すれば，その機構（メカニズム）は,「数学の応用⇒応用数学」であっても，また,「応用数学⇒純粋数学」においても，同様に適用が可能ではないだろうか．

「数学」の変移の過程（プロセス）のこうした側面を模式化すれば,「数学の教育 ⇒ 教育数学」とまとめることができるだろう．

教育数学の目的のひとつは，上述の過程（プロセス）を支配する機構（メカニズム）を解明することにある．

教育数学の定礎のために

最後に，本稿の主題について述べておこう．

フロイデンタールの提示した「教育的な観点から数学を規定する原理」は，ブルバキの「構造」と同じく,「数学全体」を統一的に規定するものであった．しかし，教育数学が教育の実践の場で有用であり得るためには，より細分化された場合への対応が可能であるべきだろう．例えば,「工学部情報系学科における基礎教育としての数学は，どのような課程を組み，どのようなテキストを作成するのが適当か」といった，具体的で個別な問題の解決に資するものでなければならない．

そのためには，ブルバキやフロイデンタール流の数学全体を一括して規定するような原理だけでは十分でない．そこで，我々は，教育数学の定礎のための第一歩として，教育の種別と対応するような「教育の対象としての数学」の類型化という枠組みを考えてみたい．さらにその第一歩として，本稿では，古代における教育の対象としての数学の類型に関する考察を行う．

[6]例えば，[12] pp. 360-361 を参照．

[7][4] p.9.

なお，類型化することは，大切な何かを失わせる可能性のあることに留意願いたい．類型を変えれば，まったく異なる主張が導かれることがあるかも知れない．その意味では，拙速に結果を求めることは危険でもある．そのためにも，本稿においては，歴史を振り返ることから始めることとした．

本稿の構成

本稿の構成は，以下の通りである．

第 1 章では，以下の議論で用いる用語の曖昧さを減らすため,「数学」という言葉の用法について簡単にまとめてみた．第 2 章は，教育数学とはどういうものであるかを説明し，フロイデンタールの事績をひとつの例として紹介した．

第 3 章は，教育と数学をある観点から類型化することの教育数学的な必要性を論じ，また，本稿で扱う主題について述べた．そして，その方針に従い，第 4 章で古代における教育の二つの類型 — 専門教育と一般基礎教養教育 — について調べ，第 5 章では，さらに，一般基礎教養教育における数学観について類型化を試みた．以上の結果にもとづき，古代における数学の類型について論じたのが，第 6 章である．

最後に，二十世紀初頭の数学教育改造運動を主導したフェリックス・クラインの事績を紹介し，彼を教育数学の先駆として位置づけることで，本稿の結びにかえることとした．

1　「数学」という用語

1.1　明治期以前の「数学」

「数学」という言葉を「算(かぞえる)数の学」と解するとき，この言葉が引き起こす印象は，数（有理数）の四則や開平・開立等の計算技法とその図形等への応用といったものであろう．

明治期以前の日本において，こうした内容をもつ営みは，主として,「算術」,「算法」,「算学」などの言葉が担っていた．現在では,「和算」と総称されるものである．

「数学」という言葉も用いられたが，これは多義であった．「数学」には，まず，上述の算術・算法・算学と同義の用法が見られる．また,「数」を「算(かぞえる)数」ではなく「命数」と解する，計算技法を超越した一種“形而上学”的な用法があった．

一例を挙げると，京都の和学者西村遠里は，安永七年に出版した『数度宵談(すうどよいだん)』[8]において,「数学と算学と其学ぶ所異なるか，又は二名にして相同じきか，其の異別如何」と問い，次のように答えている[9]．

> 数学は大事なり，算学は小技なり，世人其理をしらず，算士と云へども，其異別なしと思ふ者多し，それ数は体にして，算は用なり,「抑数起一成於十（そもそも数は一に起つて十に成る），天地之数也,」今試に問曰,「天地之惣幾何（天地の惣て幾何ぞ),」答曰,「総数五十五，術曰，列天地之数加一（天地の数を列べて一を加え)，而以天地之数乗之（而して天地の数を以て之に乗じ)，而折半之（而して之を折半すれば)，得五十五（五十五を得る)，合問也（問に合ふ也),」惣数を知らんと欲して如右（右の如く)，布算（算を布く）これ算術なり，習之（之を習ふ）これを算学と云，所謂数起一成於十（数は一に起つて十に成る)，その然る所以を学ぶ，これを数学と云，算は芸にして，数は芸にあらず，六芸の尾に居るものは，これ体用を統るの謂なり，蓋し天の能覆ふところ，地の能載るところ，孰れか数にあらずとせんや，三才の道みな数学の外に出ず，学徒尚此理を悟らず，況衆人乎（況んや衆人をや)．

「数学」という言葉の多義性は，上記引用中の「算士と云へども，其異別なしと思ふ者多し」によく表出されている．

1.2　明治期以降の「数学」

明治維新の前後，西欧の学術が激しい勢いで日本に流入した．その流れのなかで，西欧の学術用語の翻訳語として，新しい言葉がつくられ，あるいは，既存の言葉が新たな語義を纏うこととなる．

“mathematics”という英術語については，後者であった．

---

[8]宝暦十一年出版の『数学夜話』を改題再版したもの．

[9][26]p.260．なお，引用に際しては，横書きに直したため，訓点は省略し，訓み下し文を補った．

日本数学会の前身である東京数学会社は，設立当初の1880（明治13）年，会の事業として，混乱状況にあった各種西欧術語の訳語統一を目的とする「訳語会」を設立した．mathematics の訳語もこの会で検討されたが，すんなり決まったわけではない．

この mathematics という語は，審議予定であった10月2日開催の第2回訳語会では未決となり，明治15年1月7日の第14回訳語会で再度審議された．

訳語会の最初に草案者中川将行が提出した案では，mathematics の訳語は「数学」となっていた．菊池大麓は,「数理学」を推した（「凡そ物の理を論ずる学ゆへ物理学と云ふ如く数の理を論ずる学ゆへ数理学とすべし」）.「算学」を推す声もあったが，採決の結果，多数が「数学」に賛成したため，草案通り「数学」に決まった[10].

東京数学会社訳語会の議決は法的強制力を有するものではなかったが，教育制度における「洋法」の採用とあいまって，この時期以降の「数学」という言葉は，第一義的には mathematics の翻訳語と解すべきになったといえよう．

1.3　教育数学の「数学」

本稿で考察の対象とする「数学」，つまり，教育数学の「数学」は,「mathematics」の翻訳語としての数学である．

この「mathematics」も，日本語の「数学」と同様，歴史を重ねるなかで多義性を有する言葉となっており，その意味を規定することは容易ではない．(後述のように，この言葉の意味をある側面から規定しようとすることが，教育数学の目的のひとつである.）ここでは，mathematics の言葉としての由来について簡単にまとめておく．

mathematics という言葉は，周知の通り，一種の翻訳語（音訳）であり，その源は，古代ギリシアの地で,「学ぶ」の意の動詞「マンタノー（$\mu\alpha\nu\theta\acute{\alpha}\nu\omega$）」から派生した「マテマティケー（$\mu\alpha\theta\eta\mu\alpha\tau\iota\kappa\grave{\eta}$）[11]」にある．

「学ぶ」の意から派生した「マテマティケー」という言葉には,「数」の含意はない．この言葉が今で言う「数学」の意に転義した理由として，例えば，ラオディケアの司教として知られる三世紀末のアナトリウスは次のように伝えている．

> なぜ，マテマティケーはこういう名で呼ばれるようになったのか？
>
> 逍遥学派は，こう説く．修辞（レトリケー）や詩文（ポイエティケー）や通俗音楽（デモウデオウス・ムゥシケー）は教えを受けることなく理解することできる．が，このマテマティケーという特別な名で呼ばれる学的領域は，教育を通ぜずしては何人も修得能わざるものであるのだ，と．[12]

この「マテマティケー」に起源をもつ学的営みは，ヘレニズム世界，中世イスラム世界，近代西欧世界といった大文明圏を経由し，現在の世界につながっている.「mathematics」 の意の「数学」を用いる日本も，そのひとつに数えられよう．

「マテマティケー」の翻訳語として，ラテン語はもとより，ヨーロッパ系の言語は，おおむねギリシア語の音訳を用いている．顕著な例外であるオランダ語の「Wiskunde」 は,「厳密学」を意味する言葉で，シモン・ステヴィンの造語であるいう．

2　教育数学とは何か

2.1　教育数学を構想する

2.1.1　数学教育に関する言説

数学教育については，数多の，しばしば互いに矛盾する言説が行われている．

人口に膾炙するものに，普通教育における数学不要論がある.「数学は日常生活を送るのに必要な初等的知識だけあればよい」,「社会へ出てから2次方程式など一度も使わなかった」等々の言説である．

他方，高度科学技術社会にあって，国際競争力強化のため，あるいは，市民としての意思決定の基盤となるリテラシー能力の強化のため，より高度な数学を，より広範かつ早期に教育すべきだという声もある．

以上が，いわば教授すべき知識内容についての言説であるとすれば，一方で,「数学教育の目的は，数

[10]訳語会の議事の記録については [31] に，それを含めた明治期の数学の有り様については [16] に詳しい．

[11]動詞 $\mu\alpha\nu\theta\acute{\alpha}\nu\omega$ から派生した語には諸形があるが，ここでは，ピュタゴラス学派のアルキュタスに拠ると伝えられる著作の表題 $\Pi\epsilon\rho\grave{\iota}\ \mu\alpha\theta\eta\mu\alpha\tau\iota\kappa\hat{\eta}\varsigma$ からとった．

[12][35] p.2 .

学の知識を教えることではない．数学的な考え方を教えるべきである」という言説がある．つまり，教えるべき数学とは「数学的に考えること」であるというものである．

もっともな見解ではあろうが，それでは,「考えることを教える」とはいったいどういうことなのだろうか．

2.1.2　教えるべき数学とは何か

1980 年開催の ICMI[13]において，ハンス・フロイデンタールは『数学教育の主要問題』と題する招待講演を行った．この講演の中で，フロイデンタールは，こう説いている．

> おそらく皆さんは，ここのところまで，私が教材 (subject matter) やその教授法 (didactics) についてほとんど注意を払っていないことにご不満をおもちでしょう．教材というものが仮に教科書の一章を意味するのであれば，皆さんは失望することになります．それは，主要な問題ではないのです．ですが，教えるということは常に何か (something) を教えることだ，ということには私も同意します．何でも (anything)，ではなく，何かしかるべきものをです．教える価値のある何かをです．しかし，いったい何が教える価値のあるものなのでしょうか？[14]

個々の教材のことではない「教えるべき数学」とは何か．フロイデンタールのこの問いかけが，我々の考察の出発点である．

2.1.3　教えるべき数学を規定する原理

フロイデンタールは,「教えるべき数学」という言葉で何を問うているのだろうか．

フロイデンタールの講演は，こう続く.「教えるべきものであるためには，応用可能 (applicable) でなければならない．ある意味で，あるいは，何らかの意味で.」フロイデンタールの要求している答えは，個々の具体的な教材ではなく，教育実践の場で教材を構成するための，いわば「原理」であるといってよいであろう．

フロイデンタールの問いかけを敷衍すれば，最初に必要なのは,「教えるべき数学を規定する原理」についての探求に他ならない．

アリストテレスによれば，およそ学問研究というものは，その原理 (ἀρχή, principle) を知ることにより成り立つ（『自然学』 184a[15]）．そうであれば,「教えるべき数学を規定する原理」の探求は，それを知ることにより成り立つ学的な営みを予感させる．

そして，この学的営みとして,「教育数学」が構想された．

2.2　教育数学の定義

2.2.1　教育的原理から数学を規定すること

教育数学とは，何らかの原理にしたがって数学を規定し，構成しようとする試みの一種である．そして，その拠るべき原理は，哲学的でもなく，歴史的でもなく，認識論的でもなく，構造論的にでもなく，教育的なものである．

それでは,「教育的観点から数学を規定する原理」とは何か．その原理を求めることも，教育数学の重要な目的のひとつになる．

これは，循環論法ではない．教育数学は，数学を教育するという実務的な活動と緊密な結びつきをもつことにより，原理を探求しながら数学の形成や再構成を行うことを可能とする．

我々の求める「教育的観点から数学を規定する原理」は，その原理に則って構成された数学を実際に教えてみることで，その当否を問うことができる．いわば，実験的な検証が可能なのである．

こうして，教育数学は，教育実践を通じた検証結果に応じて変化できることになる．教育数学を，このように一種のフィードバック・システムとして構想することで，逐次近似的[16]に，より適した「教育数学」へと高めることを望むことが可能となる．

教育という観点を梃子の支点とすることで，数学という知的営為に関する我々の認識を深化させることに，大きな力を与えることができるのである．

[13] International Commission on Mathematics Instruction.
[14] [9] p.144.
[15] 本稿でアリストテレスの引用に際して併記した番号は，慣例に従い，ベッカー版全集の頁数を示す．
[16] 「弁証法的」と言っても良いかもしれない．

2.2.2　教育数学の定義 — 暫定版 —

以上の諸点を考慮するなら，教育数学とは何かという問いに対して，次のように答えることも出来るだろう．

> 教育数学とは，教育的観点から数学を規定する諸原理を見出し，かつ，その原理に従って数学を新たに形成，もしくは相応に再構成することを希求する営みの総称である．
>
> 言葉の畳用により，このようにして形成もしくは再構成された数学も，また，教育数学と呼ばれる．

本稿では，暫定的に，これを教育数学の定義としておく．

2.3　フロイデンタールの教育数学

2.3.1　教育数学の実際

教育数学の実際の姿は，どのようになるのだろうか．我々は，ハンス・フロイデンタールの半世紀に及ぶ数学と教育を主題とした活動の中に，教育数学の雛形をみることができる．

フロイデンタールは，2.1.1 節で述べた「数学的な考え方を教える」という課題をめぐって思索を深め，そこから，数学という人間の営みを「様々な水準で現実世界[17]を数学化する過程」として捉えるという原理を見出す．そして，この原理に従って，子供たちの生きる世界から新たな数学を形成し，あるいは，歴史的な文脈で生じた既成の数学的概念の再構成を試みた．

こうして，フロイデンタールは，数学研究者の養成にも，初等学校の数学教育にも，同様に適用できるであろう数学教育の方法論を提示し，その普及発展に尽力することになる．

なお，本稿では触れないが，フロイデンタールの活動は数学についてだけのものではなく，常に教育に関する理論的考察を伴い，かつ，教育実践の場でその成果をはかることでさらに自らの思索を深めていくといった方式のものであった．まさに，先述のフィードバック・システムとしての教育数学を予告する，弁証法的な活動と評することができる．

以下に，フロイデンタールの業績の中で，我々のいう教育数学に関わる部分について概観しておく[18]．

2.3.2　原理的探求 — 考えることの教育

第 2 次世界大戦中，ナチスのオランダ占領によって大学を追われたフロイデンタールは，その余暇に自身の子供の教育にかかわる中で，数学を教えることへの関心を深めていった．

1945 年 8 月に開催された数学教育関係の会合において，フロイデンタールは，戦時中の思索を振り返ってこう述べている．

> 考えるということを教える教育（Education in thinking） — 実に美しい響きと魅力的な言葉の組み合せではないか．何という魅惑的な課題だろう．··· 仕事のできない何年間かを過ごした後，私は，今，この課題へと立ち返ることになった．この課題について，私は，もうこれで良しと感じたことは一度もない．読むこと，書くこと，算術やフランス語，数学，体育であれ，何であれ，何かを教える者は，誰であっても，それをどう教えればよいかは正確には知らなくとも，教えているものが何であるかは知っている．考えるということは，技能（skill）ではない．私は，しばしば，長時間にわたり，私が教えたい，そして教えるべきだと思う，この奇妙な「考えるということ」について，思索にふけった．しかし,「考えるということ（thinking）」についての思索は，堂々めぐりを繰り返すばかりだった．徐々に，私は,「考えるということを教える」という問題は，理論的な方法ではなく，むしろ，もっと実践的な方法で扱うべきだということを学んだ．[19]

2.3.3　数学を学ぶということ

こうして，教育の実践の場に立って試行錯誤を重ねた後，フロイデンタールの達した結論は，次のよ

[17]現実世界 (real world) とは，学習者が（主観的に）実感できる世界を意味する．

[18]例えば，フロイデンタールの遺著 [11] 第 1 章を参照．

[19]講演手稿 ([33] p.26) による．

うなものであった.

数学とは，公式の集まりや公理系で記述される集合といった「静的な体系」ではなく，人間が営む動的な知的活動の一種，詳しくは，ある種の対象を数学化するという過程を繰り返す不断の営みである．そして，数学を学ぶということは，学習者が，数学的に考えること，すなわち，数学化の過程を，誘導されながら追体験し，かつ，その追体験の過程を内観することで，内在化することに他ならない.

次に，フロイデンタールの理論の鍵となるいくつかの概念について，簡単にまとめておく.

2.3.4 数学化とは何か

フロイデンタール理論における最も重要な概念は,「数学化 (mathematising)」である.「数学化」の過程(プロセス)こそ数学の本質であり，その過程の追体験が数学教育の本質であった.

それでは，数学化とは何か.

数学化とは,「フォーム (form) とコンテント (content) が相互作用 (interplay)」している状況[20]において，何かを発見したり組織化したりする活動である.

例を挙げてみる．原始的な社会では，しばしば動物の骨などに刻みをつけて，数の記録をしていた．次は架空の例ではあるが,「 フォーム=動物の骨に刻まれた“ 数字 ”，コンテント=家畜の群れ，相互作用=数えるという行為 」 が，ひとつの数学化の対象としての状況である．家畜の群れというコンテント上で生じる，組み分けやら増減やらといった現象が，数えるという相互作用を通じて数字の集まりというフォームの世界に反映されるとき，自然数や演算の原初形態の形成が始まる．あるいは，数字というフォームの世界における加減乗除といった操作が，コンテントにおいて生じる種々の問題を解決する方式を提供することもあろう.

こうした種々の営みが，数学化の姿のひとつである.

[20]数学的思考が成り立つ場として，form と content がある関係を保ちつつ分離した状況を想定するのは，必ずしも独創的な発想というわけではない．例えば，アリストテレスにとって，数学とは，形相と質料の双方に関わる理論的学問であった.(『形而上学』1078a.）しかし，フロイデンタールにアリストテレス的な含意があるとは言えず，本稿では，form,content をそれぞれフォーム，コンテントと音訳しておく.

2.3.5 数学化の諸側面

数学化の主要な側面として，定式化 (formalising), 公理化 (axiomatising)，スキーム化 (schematising) の三種を挙げることができる[21]．定式化と公理化はフォームの方で働き, スキーム化はコンテント上で機能する.

定式化は，状況に適合した（記号や表記法を含む）“ 言語表現 ” の創案をもたらす活動である．いわゆる「公式」の導出も，そのひとつと考えられる．また，公理化は，状況を演繹的な公理系として組織化しようとする活動である.

スキーム化は，コンテント上で生じるある種の問題群に対し，その一般的な解法をフォームの言葉で提示しようとする活動である．科学・工学等で数学が実際に適用されている場面では，しばしば「数学的モデル」と呼ばれるものと同義になる.

定式化, 公理化, スキーム化は，数学化の特定の傾向を概念化したものだが，独立な働きというよりは，こうした働きが一体化したものとして，数学化という活動を捉えるべきである.

なお，定式化, 公理化, スキーム化の結果生じるのが，記号法や公式，公理系，あるいは数学的モデルといった「静的な体系」である．こうした「静的な体系」は，数学という営みの，ある限定された一局面をなすに過ぎない.

2.3.6 数学化の方向

数学とは，繰り返し，不断に数学化を続ける営みである．営みの主体は，一人の人間であることも，対象を共有する共同体であることもある．ひとつの過程を完成するのに必要な時間は，短い場合も，長い場合もあろう.

数学では，ある対象を数学化した結果生じたものどもを新たな対象とし，さらなる数学化を行うことがある．これを,「垂直方向の数学化」という．未だ数学化のなされていない対象の場合は,「水平方向の数学化」と呼ぶ．大きな数学化が進行する過程の内に，小さな数学化の過程が包含されていることもある.

[21]より詳細な数学化の諸側面については，例えば，[11] p.35 を参照のこと.

数学という営みでは，そこに包含される過程のいずれにも,「数学化」という働きが貫通している．総称としての「数学」は，この「数学化」という働きを繰り返し繰り返し適用し続ける，人類史的な規模の人間の知的営みである．

2.3.7　数学の現象学 — 数学を再構成するために

「数学的に考えることを教える」という教育的観点から出発したフロイデンタールは,「数学化の過程」という原理をもって「数学」を規定することを提唱した．それでは，この原理をもって数学を再構成するにはどうすれば良いか．

「数学の現象学」([10]) は，この問いに対するフロイデンタールの解答だとも言える．

フロイデンタールにとって，数学は，現実（リアリティ）を数学化する人間の営みの総体であった．主客を逆転させてみれば，個々の人間にとって，数学は，現実を数学化（組織化，構造化）するための認知装置と考えることができる．

したがって，数学の教育に必要なことの第一は，学習者を取り巻く環境の内で，数学のしかるべき部分によって数学化され得る諸々の現象 (phenomenon) を探求することになる．

次に必要なのが，こうした「現象 (phenomenon)」が，数学の基本的な構成要素である「概念化されたもの (noomenon)」によって，いかに記述されるかを示し，そのありさまを分析し，それを数学的な思考や計算の活動対象として利用可能なものにすることである，

このようにして数学を「数学化」という原理から捉えなおす営みを，フロイデンタールは，現象学，もしくは，現象学的方法と呼んだ．

3　教育と数学の類型

3.1　類型化と原理

3.1.1　外部から数学を見る

2.3 節で紹介したフロイデンタールの活動は，2.1.1 節の言説との関係で言えば，前提となる教育的観点を，知識の型を問う方にではなく,「数学的に考えること」においたものであった．いわば，フロイデンタールは，教育的観点を数学の内部におき，そこから見える光景を言葉にしたといってもよいかもしれない．

我々は，本稿では，別のところに教育的観点をとりたい．観点を，いわば，数学の外におき，そこから数学というものがどういう形態に見えるかを問題にする．別の言葉で述べれば，今までに教育の対象とされてきた様々な「数学」を，その様態を比較対照して類別し，それぞれの類の特徴について調べてみるのである．

この作業は，最終的には，教育との関連で数学を類型化するという作業に結実させるべきものである．

3.1.2　類型化を通じて原理を見出すこと

様々な数学を教育的な観点から類別するためには，当然，類別に先立って，類別の基準となるような「教育的観点」が必要となる．しかし，そうした「教育的観点」として確固たるものが存在しているとはいえない．その観点を見出すことも，また，教育数学の目的のひとつである．

結局のところ，我々が原理的な探求を旨とする限り,「教育の対象としての数学」の規定に有効な「教育的観点」についても，それがいかなるものかを問うていく必要がある．

こうして,「数学の規定に教育的観点が必要であり，教育的観点について知るには数学の規定が必要である」という循環論法に陥ることとなった．したがって，この課題を解決するには，2.2.1 節の議論と同様，ある種のフィードバック・システムを構築し，逐次近似的に精度を高めていくしかないであろう．つまり，近似的に教育を類型化し，その型にもとづいて数学の類型化を行い，その後，その数学の型を通して，再度教育の型について見直しをする，という作業の繰り返しをするのである．

そして,(近似的な) 数学の類型化の終了後，同じ類に含まれる数学に共通する性質を抽出し抽象化することで，我々の欲していた「原理」へと達することが期待される．

3.2　本稿の主題

3.2.1　教育の類型の仮設

本稿の主題は，古代における数学と教育を対象に，前項の手続きにおける一次近似の部分の素描を与えることである．つまり，古代における「教育の類型」を仮設し，それに基づいて「数学の類型化」を行うのである．

議論の第一歩として仮に設ける「教育の類型」は，2.1.1 節に即して述べれば,「職業教育と普通教育[22]」の二つである.（詳細は，4.1 節を参照のこと.）

3.2.2　なぜ古代なのか

古代を対象とするのは，教育も数学も，要素的に単純であることが期待されること，そして，現存史料が少ないため，精密な議論には適さないが，大要を把握するにはかえって便利だということである．

もっとも，洋の東西に渡ることもあり，古代の正確な時代区分を与えることは難しい．さらに，史料についても，その数学的構造を把握できるためには，ある程度まとまりのある「教科書的（教科書として作成されたか，もしくは，作成の意図とは別に教科書として使用された）文書」が必要だが，そうした文書の大半は，後代の人の手が入っており，成立の時期について確定することが難しいこともある．

したがって，本稿における「古代」はおおよその見当であり，史料の面から見て，メソポタミアの粘土板，エジプトの各種パピルス，中国であれば『九章算術』や『周髀算経』，ヘレニズム＝ローマ期のエウクレイデス，アルキメデス，アポロニウス，プトレマイオス等々の著作を包含するような時期を想定している．

[22]本稿における用法としてはおおよそ，職業教育は特定の職業に従事するために直接的に必要な教育を，また，普通教育はその対立概念として，特定の職業と直接的な結びつきをもたない教育を意味する．いずれも，概念規定を明確にさせた術語というよりは，日常用語的な用法である．

4　教育の類型

4.1　教育の二つの類型

4.1.1　専門教育と一般基礎教養教育

人間の共同体の規模が大きくなり，分業化が進むと，種々の職業集団が形成される．そうした集団はそれぞれ固有の社会的機能を担うことになるが，集団の存続のためには，専門化した機能を構成員に保持させる必要がある．そして，そのための手段が「教育」である．

数学は，古来より，土木，建築，作暦，交易，あるいは，生産管理・賦税等々の職能と密接な関係を有している．そして，数学は，そのような職能の教育において，一定の位置を占めることになった．

本稿では，3.2.1 節で「職業教育」と呼んだもののうち，こういった種類の数学が本質的な役割を有する職能教育を，仮に「専門教育」と呼ぶ．

他方，数学が地歩を占める教育の種別には，中世西欧の自由学科（アルテス・リベラレス）における四科（クアドリヴィウム）のように，一般教育ないし教養教育といった名称で呼ばれるものがある．3.2.1 節で述べた「普通教育」の一種である．この種別の教育を，ここでは，4.3.1 節で述べる理由により,「一般基礎教養」教育と呼ぶ．

本稿では，第 3.1.2 節で示した手続きの最初の段階のために，専門教育と一般基礎教養教育という教育の二つの類型を採用する．

4.1.2　数学との関係

人間社会が分業をその最も基本的な性格のひとつとしている以上，専門教育は，厳密な概念規定はともかく，日常的な感覚による理解が容易であろう．また，専門教育と数学の関係も，数学が実際に応用される場面を観察することで，その必要性も自然に感得されうる．

他方，一般基礎教養教育，特にそれと数学との関係については，必ずしもその理解が容易とは言いがたい．そこで，この種別の教育について，まずは，その源流を探り，数学との関係を明らかにしてみたい．

4.2　ヘレニズム期の教育

本節では,「一般基礎教養」という概念の確立と不可分の関係にあるヘレニズム期の社会について，マルーの古典的な著作『古代教育文化史』([22]) に従い，主として教育の側面から概観しておく.

4.2.1　ヘレニズム文明と教養《パイデイア》

アレクサンドロス大王によって征服された広大なヘレニズム世界において，古代の伝統的な都市環境は破壊された．人々は，それまでの都市の構成員として前提されていた生活，集団による規制や全体への埋没，から解放され，世界市民《コスモポリテース》としての能力や欲求・権利に目覚め始める.

そして，人々の生活を規定し，是非を判断するための基準は，共同体的なものにかわって,「人間」に求められるようになる．この基準としての「人間」は，理念的な「全き人」のことである．完璧な形の人格の完成を目ざすことこそが，ヘレニズム期の人間にとっての人生の目的となった. (もちろん，ここでいう「人間」とは，いわゆる自由民のことである.)

こうして，未完成な状態で生れてきた子どもを理想としての全人へと変化させること，つまり，教育，が社会における重大な関心事となる.

この社会的関心の重心の変化は，言葉の変化として現われる.

> 教育《パイデイア》(παιδεία) は，もはや単に子ども《パイース》(παῖς) 向けの技術，子どもがはやく大人になるように支度し準備してやるだけのものではなくなった．じじつ，この同じ用語は — ヘレニズム期のギリシア語ではその語義がいちじるしい拡張《アウクセーシス》(αὔξησις) をうけた — 学齢期をすぎてもなお全生涯を通じ，一貫してもっと完全に理想的人間像を実現しようという教育熱の成果を指すのに役立った．そしてここからパイデイア（παιδεία）またはパイデウシス (παίδευσις) は能動態の — つまり準備中の — 意味での教育ではなく，現代の用語が含む完了態の意味での教養を指すようになった. [23]

なお，この「パイデイア」というギリシア語は，後に，キケロによって，ラテン語の “humanitas” と訳されることになる.

マルーによれば，この「パイデイア」こそ，ヘレニズム文明の核 (centre) をなす概念なのだという．彼は，こう説く.

> ... 一方で時間上これに先行する古代都市の文明とくらべ，他方これにつづく神の国のそれ ... とくらべねばならぬとする．その際，いってみれば古代都市《ポリス》(πόλις) の文明と神の国《テオポリス》(Θεόπολις) のそれとの間にあって，ヘレニズム期の文明はいわば教養《パイデイア》(παιδεία) の文明であろう. [24]

4.2.2　教育の制度

我々は，上述の教養《パイデイア》と数学との関係に興味がある．しかし，その前に，ヘレニズム期の教育制度について一瞥しておきたい.

(1)　初等教育

ヘレニズム期の特徴として，いわゆる「読み書き教育」が教育のなかで重要な位置を占めてきたことが挙げられる.

この変化は，用語の面からは次のようになる[25].

> 「教師《ディダスカロス》(διδάσκαλος)」とだけいえば，それは初等教師，つまり読むことを教える学校教師《グランマティステース》(γραμματίστης) のことであり，じじつこの呼びかたがあった．そして「学校《ディダスカレイオン》(διδασκαλεῖον)」とだけいえば，この教師が教える施設のことだった.

もうひとつの特徴として，この種の初等教育が，一種の公共性を帯びていたことが挙げられる．ギリシア文化の定着した都市には必ず存在し，教育課程等がある程度制度化されていたという意味での公共性である.

経済的な面からみると，教師の報酬は，一般的には親たちが負担したようだが，ある時期のミレトス

[23] [22] p. 120.

[24] [22] p.122.

[25] [22] p.177.

やテオスのように，都市が負担する「公立学校」もあったという．

初等教育のうち，数学に関連するものとしては，基数と序数の名称と表記と，おそらくは指算を学んだ．また，度量衡，特に単位の変換との関係で，分数の名称や表記が学ばれたという．

なお，実際の計算は，算盤（アバクス）が普及していたから，それに拠ったものと想像される．

(2) ギュムナシオン

元来は運動競技の訓練を行う場であった体育場（ギュムナシオン）は，時代の経過とともに，その付属施設において行われる知的教育の方に重心が移っていったという．

紀元前 1 世紀頃のアテネ出土碑文には，そこで学ばれるべきものとして，「文法・文学の教師，哲学教師，弁論教師の講義ならびにそのほかの講義[26]」が挙げられている．また，ときには，弁論術や哲学，あるいは医学といった「専門」教育も提供された．

このギュムナシオンにおける教育もある種の公共性をもっており，一般の青年にとっては最終段階の教育を意味した．

(3) ムーセイオン

アレクサンドリア，ペルガモン，アテネといった中核都市のいくつかには，「ムーセイオン」が置かれていた．

ムーセイオンは，本来は教育機関ではなく，学術研究のための機関であった．また，あくまで学術研究機関として，その維持のための「公的」支援がなされていた．

しかし，ムーセイオンに集った学者たちは，各人が多数の弟子を擁し，しばしば学派を形成することになる．それぞれの学派は，また，構成員の養成という教育的な機能も担っていた．

こうして，ムーセイオンを核として，各種の「学者の共同体」が構成されることになった．なお，この集団は，上述の初等教育やギュムナシオンの教育のような公共性はもっておらず，「師承」という徒弟制度の一種によって教育がなされたものと思われる．

(4) 専門技術教育

土木や工兵の技師，測量技師，航海士等，ヘレニズム社会で重要な役割を占めていた各種技術に従事する者たちの教育については，医師は別として，文献によるかぎり，その実態が判然としない．

おそらく，技術者の養成は，上述の学者の場合と同様，徒弟制度にもとづく教育であったと思われる．

(5) 私的な教育機関

生徒が支払う謝礼によって維持される私的な教育機関，いわゆる「私塾」，が存在していた．教授する内容は，読み書き学校といった初等的なものから弁論術といった高等なものまで，分野も程度も多様であった．

また，受講者の謝礼のみを経済的基盤とするのではないが，ストア学派，エピクロス学派，プラトン学派，逍遥学派等々の「哲学者の共同体」が存在し，構成員養成のための，ある程度組織化された教育的機能を保持していた．

この哲学者共同体の中には「数学」と深い関係を有しているものがあるため，次に別項として取り上げる．

4.2.3 哲学と弁論術

ヘレニズム人の目的である「真の教養」を身につけるための教育には，二つの潮流があった．哲学と弁論術である．それぞれ，プラトンとイソクラテスが定礎を築いたとされる．

哲学と弁論術は，高等教育における支配権を握ろうと，様々な形で競合し，あるいは互いに影響しあった．しかし，弁論をもって政策論争や裁判闘争に勝利することを主たる目的とする弁論術は，ヘレニズム・ローマ期の社会運営の中核にかかわる重要性を有していたため，哲学と弁論術の支配権闘争の結果は明白だった．

> 歴史の次元では，プラトンはやぶれ去った．つまり自分の教育理念をうまく後代に課すことができなかった．おおまかにいって，後代を制し，ギリシアの，さらには古代世界全体の教育者となったのはイソクラテスである．[27]

[26] [22] pp.227-228.

[27] [22] pp. 237-238.

こうして，ヘレニズム期に確立された弁論術を最上級におく教育課程が，ローマを経てヨーロッパに流れ込み，人文(フマニタス)優位の文明を形成することになる．

なお，弁論術との競合に破れた哲学学派は消滅したわけではなく，開祖より連綿と衣鉢を継ぐとされる学頭(スコラルケース)が束ねる「結社」の形で存続し，ヘレニズム文明の重要な構成要素のひとつを形成した．

4.2.4　教育課程における数学

教育課程における「数学」の位置づけについては，どうであっただろう．

弁論術系統の場合，知的にも全方位の人間完成が必要とされ，したがって，その課程における数学の必要性は常に謳われてはいた．しかし，文学と弁論を諸学の頂点に位置づけ，様式美を志向するこの系統にあって，数学の扱いは，事実上添え物的な立場を超えることはなかったとされる．

一方，哲学の学派の中には，数学を最も重要な予備課程として重視し，その維持発展に務めたものがあった．

> 正規の哲学にはいくつかの教え方があって … 数・形の学を基本とした予備学の必要性を墨守した学派では，科学教育の衰退に直面して自力でその手ほどき — 手ほどき自体が哲学者の専門課程になじまないのに — を確保しなければならなかった．… 古代末期の新プラトン派がそうであった．[28]

4.3　一般基礎教養教育と数学

4.3.1　一般基礎教養の源流

以上のようにして，我々は，4.1 節で述べた「一般基礎教養」という概念に到達することになる．

「一般基礎教養」という言葉は，ヘレニズム期に確立された「エンキュクリオス・パイデイア（*ἐγκύκλιος παιδεία*）」の訳語として，文献 [22] で採用されたものである．

ヘレニズム期の著作に頻出するというこの言葉について，マルーの著書 [22] では，次のような説明がなされている．

> この語が含む観念は終始かなり輪郭がぼやけたままであったし，この語を使うさいにも，次の二つの概念のどれを取るかについては，実際にとまどいがあった．つまり一方は一般教養 (culture générale) で，これは教育そのものには関係せず，ただりっぱな人物になるにふさわしい教養を意味し，中等教育と高等教育，学校教育と私的な教育のすべての成果の集積であった．もう一方は基礎教養 (culture de base)，予備教育(プロパイデウマタ)（*προπαιδεύματα*）で，これは人びとが，さらに高次の分野での教育や教養を身につけるための準備をする教育であり，端的にいえば中等教育の理念である．この後者の理念はとりわけ哲学教師が抱いていた … [29]

つまり，ヘレニズム期の「エンキュクリオス・パイデイア」という概念は，「一般教養教育」と「基礎教育」の二重性が分離できないまま用いられており，その含意を適切に表現するため，「一般基礎教養」という日本語が選ばれたことになる．

4.3.2　哲学と数学

さて，それでは，「数学」が重要な位置を占めていた「哲学」の場合はどうであったのか．再度，マルーによれば，こうなる．

> 終始この課程の核となり，哲学教師がそれにかぎって教育の対象とした科目は，七自由学芸 (sept arts libéraux) の全体であった．そしてこの七自由学芸は中世が古代末期の学問の伝統から受けつぐことになる学科であり，その学科表は前一世紀中葉あたりで，トラキアのディオニュシオスからヴァロまでのあいだに，画然とかたまった．それは，周知のとおり三つの文科的学芸 (trois arts littéraires)，つまりカロリ

[28] [22] pp. 251-253.

[29] [22] p. 216. (　) 内のフランス語は，マルーの原著で用いられている語を補ったもの．

> ング朝の人たちのいわゆる「三科」(Trivium) に当たる文法，弁論術，弁証術と,「四学」(Quadrivium) にあたる数・形の四学科 (quatre disciplines mathématiques) — 幾何 (géométrie)，算数 (arithmétique)，天文 (astronomie)，音楽理論 (théorie musicale) — とである．[30]

こうして，後世のヨーロッパにおける「一般基礎教養」と「七自由学芸」,「数学」と「四学(クアドリヴィウム)[31]」の同一視が準備されたことになる．

なお，哲学と数学の関係については，次の第 5 章で，より詳しく扱う．

5　一般基礎教養における数学観の類型

5.1　一般基礎教養としての数学の捉え方

5.1.1　数学の種別

前章では，マルーの著書に従い，ヘレニズム期における一般基礎教養と数学の関係の大要をみた．

上述の内容を,「教育」の側からではなく,「数学」の側から見れば，次のように言ってもよいだろう．ヘレニズム期における高度な数学は,「組織的な教育」という側面については哲学もしくは弁論術を奉ずる集団において保持され,「研究」的な側面については主としてムーセイオンを中心とした学者集団が担っていた，と.（もちろん，両種の集団は，構成員の重複も含め，さまざまに影響を及ぼしあっていたものと思われる.）

ところで，数学を保持・発展させた集団が複数あるということは,「数学」というものの捉え方に種別があったと想定してもよいであろう．

本章では，ヘレニズム及びその後継のローマ期において，一般基礎教養教育としての「数学」がどのようなものとして捉えられていたかを，代表的と思われるいくつかの集団に分けて考察してみたい．

[30][22] p.216.
[31]この言葉自体は，ボエティウス（480 頃–524）による造語だとされている．5.2 節を参照のこと．

5.1.2　分類法

分類の方法であるが，まずは，4.2.3 節の分類に従い，哲学と弁論術の系統に分ける．次に，哲学の系統を細分するのだが，これには少し説明が必要である．

古代期の数学に関する最大の史料のひとつである『エウクレイデス原論第一巻註解』([24]) において，著者のプロクロスはこう述べている．

> 次いで，何が数学的な類や種に属するのが相応しいのかを確かめなければならない．そのようなものどもが，通例言われる通り抽象(アファイレオー) (ἀφαιρέω) によって ··· 感覚的事物から生じたということを認めるべきなのであろうか．もしくは，そうしたものどもに，むしろ感覚的事物に先立つ実体の役割を与えるべきなのか．[32]

前者はアリストテレスが代表する立場であり，後者がプラトンのそれである[33]とされる．

つまり，哲学の系統は，数や直線，円といった数学的概念を存在論的にどう位置づけるかによって，2 種に大別されることになる．そして，我々も，哲学をこの種別に従って二分して考察をすることにしたい．

以上より，本稿で採用する分類の範疇としては，プラトン的（より詳しくはピュタゴラス＝プラトン主義的）立場の哲学，アリストテレス的立場の哲学，そして，弁論術の三つになる．

5.1.3　数学観とは何か

数学(マテマティケー)の特徴のひとつは，それが複数の学科の総称であるということである (1.3 節)．数学(マテマティケー)を構成する学科目は一定せず，時代と共に増加する傾向にあった[34]．

[32][24] p.10 .
[33]イアン・ミュラーの用語（[24] p.xxvi）を借用すれば,「分離主義 (abstractionism)」的立場と「投射主義 (projectionism)」的立場と呼んでもよい．
[34]クリスティアン・ヴォルフの“Elementa Matheseos Universæ”(1730–41 年に出版された全 5 巻の版) にいたっては，21 の学科目（Elementa Arithmeticæ, Elementa Geometriæ, Elementa Trigonometriæplanæ, Elementa Analyseos finitorum, Elementa Analyseos infinitorum, Elementa Mechanicæ & Staticæ, Elementa Hydrostaticæ, Elementa

本章でいう「数学観」とは，数学に関係する複数の学科目から，どのような観点で，どのような学科目を選んで「数学」として規定するのかを問うものである．

5.2　ピュタゴラス＝プラトン主義的立場

5.2.1　ピュタゴラス派の四学科

古代ギリシアにおいて，「世界は数的秩序によって支配されている」とし，数学の重要性を称揚したのは，ピュタゴラスを奉ずる人々であったとされる．

ピュタゴラス派は，数学がどのような学科から構成されると考えていたのか．初期のピュタゴラス集団の実態は伝説の霧の中だが，著名なピュタゴラス主義者でプラトンと同時代人であったアルキュタスは，真正と目されるある断片で，次のように述べている．

> （ピュタゴラス派の数学者たちは）我々に，以下のことどもについての知識を手渡してくれた．星々の速さやその昇没について，そして，幾何学（ゲオメトリア），整数学（アリトメティケー）[35]，球体学（スファイリカ）[36]について，そして，とりわけ，音楽学（ムゥシケー）[37]について．こうした諸学（マテーマタ）は姉妹（アデルフェー）のようなものである．[38]

5.2.2　『エピノミス』にみるプラトン学派の数学観

アルキュタスたちとの交流を通して，ピュタゴラス学派の数学観に大きな影響を受けたプラトンは，『国家』をはじめ，さまざまな対話編で数学の教育の必要性を謳った．

なかでも，数学の重要性が最も強調されているのは，『エピノミス』である．（この著作には偽作説もあるが，プラトンの死後間もない頃のプラトン主義者たちの見解のひとつであったことに違いはないと思われる．）

プラトンは，『法律』において理想の国が備えるべき法律制度について論じ，国の最高意思機関として「夜明け前の会議」の設置を提案する（951D[39]）．『エピノミス』は，この「夜明け前の会議」の構成員に相応しい賢人を育てるにはどうしたら良いかについて，『法律』の登場人物たちが論じるという体裁をとる．

語り手である「アテナイからの客人」は，「人が知恵を身につけるにはどうすればよいか」を明らかにするため，種々の知識を「一つずつ調べ」ていくことを提案し，結果として，最高の重要性をもつものは「数」に関する知識であると説く（976E）．そして，この「数」の力について，次のように説明する．

> たとえば，音楽の分野では，どんな種類の曲でも，数の関係に合うように配列された楽音と，それに拍子とを，必要としていることは，いうまでもありません．それから，これは特に大事な点なのですが，立派なものはことごとく数の力でできあがるのに，くだらないもののうちには，数の作用が及んでいるものはひとつもないのだという事実，これを誰でも理解しなければなりません (978A)．[40]

こうして，「数」の力が及んでいる様々な現象を真に理解することで，人は，「神聖な法則によって私どもの眼前に整然と組み立てられているあの美しい世界秩序（986C）」を知ることになる．そして，そのために学習が必要なものが，アルキュタスのいう数学の四学科になる．

> （こうした学問を）正しい方法に従って学習していく人の目には，すべての幾何学的図形，すべての数列．すべての音階構造，全天体の回転運動が作る調和関係，これらが一体をなしたものであるのだという

Aërometriæ, Elementa Hydraulicæ, Elementa Opticæ, Elementa Perspectivæ, Elementa Catoptricæ, Elementa Dioptricæ, Elementa Sphæricorum & Trigonometriæ Sphæricæ, Elementa Astronomiæ, Elementa Geographiæ & Hydrographiæ, Elementa Chronologiæ, Elementa Gnomonicæ, Elementa Pyrotechniæ, Elementa Architecturæ militaris , Elementa Architecturæ civilis ）を数えている．

[35]アリトメティケーとは，単位 (モナス) からなる多 (プレトス) としての「数 (アリトモス)」に関する学のこと．「数の学」の意で「数学」ともできないので，整数学と訳すことにした．

[36]天文現象を説明するための球面幾何ないし天文学 (アストロノミア) のこととされる．

[37]「音楽」と訳されることが多いが，語源であるミューズの神々に関することどもというより，音階や和音等の数的構造に関する学のこと．

[38][35] p.4 .

[39]本稿でプラトンの引用に際して併記した番号は，慣例に従い，ステファヌス版全集の頁数を示す．

[40][27]p.18.

> ことが，突如として明確になるはずなのです (991E). [41]

こうして,『エピノミス』の主張するところでは，数学は，整数学，幾何学，音楽学，球体学の四学から構成されることになる．ただ，この四学は，一なる世界の秩序の現われであるという意味で，ひとつの学である数学の，四つの側面（アルキュタスの言葉では「姉妹 (ἀδελφή)」）を見ているのだといってもよいだろう．

さらに述べれば，こうした世界秩序の現われである「数に関する知識」を人間が手にすることができたのは,「偶然などではなくて，神さまご自身 (976E)」が授けてくれたからであるとされる．なお，この「神さま」は,「ウゥラノス」や「コスモス」などと呼ばれる「宇宙そのもの」を意味している．

こうした記述に，東洋的な「命数」(1.1 節）との類似を見ることは易しい．

5.2.3　新ピュタゴラス主義者の数学観

時代の経過と共に,「ピュタゴラス的四学科」の説明はより巧緻なものになっていく．プロクロスの『エウクレイデス原論第一巻註解』によれば，こうなる．

> ピュタゴラス主義者の考えるところでは，数学的諸学 (μαθηματικὴ ἐπιστήμη) は四つの部分に分けられるべきである．その半ばは数 (ποσόν) に関する側に，残りの半ばは量 (πηλίκον) の側へと仕切られた．そして，その各々が二重になっているとされる．数は，自分自身との関係において，あるいは，他の数との関係において，量は，静止の状態において，もしくは運動の状態において，考察することができる．こうして，整数学（アリトメティケー）は数をそれ自身との関係で，音楽学（ムゥシケー）は他の数との関係で，幾何学（ゲオメトリア）は量を静止の状態において，球体学（スファイリカ）は自身の運動状態において，考究することになる．[42]

ここはプロクロスによったが，ゲラサのニコマコス（100 年頃）の『整数学入門』の冒頭部にもほぼ同様の文章が記されている．また，このニコマコスの著にもとづくボエティウス（480 頃 - 524）の『整数学教程』によって，この定義は後世で著名となる．なお，ひとつの概念として「四つの学科」を表わす「クオドリヴィウム (quadrivium)」という用語の初出は，ボエティウスのこの著作であるとされている[43].

「一般量」についての学問である「数学」と，連続・離散や静・動といった二項対立的概念による「四つの学科目」への分割というこの主題は，やはり，新プラトン主義派において，世界秩序の生成との相似形を為すものとして解釈される．

例えば，プロクロスは，プラトンの『ティマイオス』的な世界創造の過程で，整数学，音楽学が「投射 (προβάλλω)」され，幾何学，球体学が「創造 (ἐνεργάζομαι)」される様を描写している ([28] pp.36-37).（プロクロス自身の数学観については，例えば，[30] を参照のこと.）

5.3　アリストテレス的立場

5.3.1　アリストテレスの数学観

アリストテレスは『自然学』において，次のように述べている．

> 自然的物体がもつ点・線・平面・立体などについては … 数学者は … 自然的物体に属する性格として考察するのではない．彼はそれらの研究対象を自然的物体から引き離 (χωρίζω) して扱うのである，なぜなら，そうした数学的対象は，思考において，自然物の動きから引き離してそれだけ独立に扱いうるものだからであり，また，そのように引き離されても，研究上なんの変わりもないし，まちがいが生じるわけでもないからである (193b). [44]

さらに，アリストテレスは，幾何学と光学等との間に，次のような差異を見出す．

[41] [27]p.60.
[42] [24] pp.29-30 .
[43] [23] p.11.
[44] [34]p.65.

… 光学・音階論・天文学などがそうであるが，これらの学問は，ある意味で，幾何学のばあいと逆のやりかたをとるといえるからである．すなわち，幾何学はたしかに自然物のもつ線を考察の対象とするけれども，しかしそれを自然的なものとしての資格で取り扱うのではない．これに対して，光学はたしかに数学的な線を対象とするけれども，しかしそれを数学的なものとしての資格で取り扱うのではなく，自然的なものとして考察するのである (194a). [45]

つまり，数学的諸学のなかには，感覚的事物から「抽出」されたものを対象とする分野と，数学的概念の自然学的考察に従う分野があることが表明されたことになる．

5.3.2　中期ストア学派とゲミノスの分類

紀元前130年頃，アテナイのストア学派の学頭を継いだのが，パナティオス（前185頃 – 前109）である．このパナティオスと，その門下であるポセイドニウスの率いた集団は，後世,「中期ストア学派」と称されることになる．

その著作の大半が散逸したこともあり，この二人の人物の事績は，必ずしも明らかではない．ただ，二人の講筵に列したキケロの著書等を通じて，各種の断片が伝わっている．そうした伝承によれば，パナティオスはペルガモンのムーセイオンで研鑽を積み，数学的諸学や地理学・文献学に通じていたという（[37] p.240）．また，ポセイドニウス[46]の方は，アリストテレスやエラトステネスに比肩しうる広大な知の領域に通じた人物であったとされる（[21] p.239）．

この中期ストア学派について，数学の方で重要なのは，ポセイドニウスと，その弟子といわれるゲミノス[47]である．(その数学に関する業績については，[14] の第十五章が詳しい.)

ゲミノスには，当時の数学諸学に関する百科全書的書物を著したという伝承がある（散逸して，現存していない）．そして，この書物にもとづくと思われる，ゲミノスの名を冠した数学諸学の分類が知られている．例えば，プロクロスは，次のように記す．

ゲミノスのような人々は，数学（マテマティケー）を異なるふうに分けるべきだと考えている．一方は知性のみに関係する領域で，他方は知覚されるものどもに働き触れ合っている領域である．… 知性にかかわる数学には，最高位かつ真正である二つの分枝として，整数学と幾何学がおかれる．他方，感覚的対象に応対する数学は，六つの学科をふくむ．機械学（メカニケー），天文学（アストロギア），光学（オプティケー），測地学（ゲオデシア），音楽学（カノニケー），計算学（ロギスティケー）である．用兵学（タクティケー）を数学の一部であると呼ぶのは適切ではないと考えられている．[48]

ゲミノスの数学観を窺わせるまとまった史料は知られていないが，5.5 節では，間接的な資料にもとづく考察を試みる．

5.4　クインティリアヌス的立場

弁論術の系統として，古代における弁論術の大成者として著名なマルクス・ファビウス・クインティリアヌス（35年頃 - 100年頃）の著作『弁論家の教育（Institutio Oratoria)』（[29]）から，弁論家の養成における数学教育の役割についての見解を抜粋してみる．

5.4.1　一般基礎教養の必要性

クインティリアヌスによれば，弁論家の養成において,「弁論術教師に委ねられる前に子供が学ばねばならない」ものは，最初に読み書き，次に文法であるとされる．

そして，その後，学問を十全に仕上げるために学ぶべき「学芸」が，ギリシア人が「一般基礎教養 (encyclion paedian)」と呼ぶものになるのだという．

[45] [34]p.66.

[46] ポセイドニウスについては [18] を参照のこと．

[47] ゲミノスについては，例えば，[8] を参照のこと．

[48] [24] p.31．なお，伝アナトリウスとして，ヘロンの『定義集』に，同様な数学の分類法が引用されている．内容は，次の通り.「数学の分枝はいくつあるか．最高位にしてより尊ばれるべき類の分枝が二つある．整数学と幾何学である．そして，感覚的な対象に関する類の分枝が六つある．計算学，測地学，光学，音楽学，機械学，天文学である．いわゆる，用兵に関する学や，通俗音楽（デモーデス・ムシケー），ファセイスに関する学，ホモニモースと呼ばれる機械学は，数学の分枝ではない（[35] p.8）.」

では，なぜ，そうした学科を学ばなければならないのだろうか．クインティアリヌスは，言う．

> 「どうすれば所与の線分上に二等辺三角形が描けるのかを知っているとして，起訴をおこしたり判決を下したりすることに何のかかわりがあるのか」あるいは，「竪琴の音色を名称と音程によって区別してきた人物のほうが，より巧みに被告を弁護したり政治上の助言をしたりするというのか」という人たちがあるでしょう．法廷において有能であっても，幾何学者［の講義］を聞いたこともなければ，音楽に関してはだれの耳にも快いものとしか理解できない数多くの人を，おそらくこういう人たちは列挙するでしょう．[49]

まさに，2.1.1 節で述べた言説と同工異曲であろう．この問いに対し，クインティアリヌスは，次のように答える．

> こうした人たちに対して私がまず第一に答えるのは … われわれは，現に弁論家である者ないしかつて弁論家であった者を教育しているわけではなく，完全にしていかなる点においても非の打ちどころのない弁論家の，いわば肖像を心のなかに思い描いているのです．… 弁論家も賢者であるべきなのであり，幾何学者や音楽家やそのほか私がつけ加える人々は弁論家を作るわけではありませんが，こうした学芸は完璧な弁論家となるのを助けてくれるでしょう．… 他にぬきんでて人間に先見の明を与える弁論が，数多くの学芸を必要とするとしても，いったい驚くべきことなのでしょうか．こうした学芸は，たとえ弁論のなかに現われず，言及されなくとも，秘めたる力を内に宿し，黙っていてさえ［これを身につけているかどうかは］感じ取れるものなのです．[50]

[49] [29] p.110.
[50] [29] pp.110-112.

5.4.2　学ぶべき数学とその効用

以上がいわば総論であるとすると，続いて，各種の学芸の具体的な効用が語られる．

まず，「音楽 (musica)」について述べた後，「幾何学 (geometria)」が主題となる．ただし，この「幾何学」は，数に関する学や天文のことも含んでおり，「数学（マテマティケー）」の意に近い．つまり，以下の説明が，我々の求める「弁論術系統における一般基礎教養としての数学」に関する見解となる．

> 幾何学のなかに，幼い子供たちにとって有益なものがあることは，認められています．すなわち，幾何学によって精神が鍛錬され，才能が磨かれ，理解力が速まると考えられているのです．しかしながら，幾何学が役に立つのは，他の学芸のように修得し終えてからではなく，学んでいる過程においてであるとみなされています．これが一般的な意見なのです．[51]

この後，クインティアリヌスは，幾何学を数 (numerus) と図形 (forma) の二つに分ける．そして，「裁判において … みっともない様子で指折り数えたあげくに計算が合わない」発言者は無教養だと判断されるから，数に関する知識は，「弁論家のみならず，少なくとも初等教育を受けた者すべてにとって不可欠」であるとする．また，境界や測量をめぐる起訴があるから，「線の理論 (linearis ratio)」も裁判で必要であると述べている．（つまり，ここでいう「数」や「線の理論」は，プラトン＝ピュタゴラス派的な分類でいう「ロギスティケー」,「ゲオデシィー」であることに注意.）

しかし，幾何学には，こうした「実務的な必要性」とは別の重要性があると，クインティアリヌスは主張する．

> 幾何学は弁論術ともっと重要な関係をもっています．まず第一に秩序は幾何学に不可欠です．雄弁にも不可欠ではないでしょうか．また，幾何学は先行するものから後続のことを，確実なことから不確実なことを証明します．弁論においてもわれわれはこれをおこなうのではないでしょうか．では

[51] [29] p.120

> どうでしょう．幾何学において設問への解答はほとんどすべて推論にもとづくのではないでしょうか．･･･ 扱う事柄に応じて弁論家は，弁論術における推論であるエンテューメーマを用い ･･･ 証明の中で最も確実なものは「線による論証」であると，一般に言われています．[52]

幾何学を学ぶことの意義の第一は,「演繹体系の規範」としての役割にあるということであろう．

クインティアリヌスが次に挙げるのは,「幾何学は推論によって，真実に似た誤りを見つけ」出すことができるということである．例として,「二つの図形をそれぞれ取り囲む線の長さが等しいならば，これらの線で囲まれた二つの図形の面積もまた等しいことは，必然ではないのか」という命題を挙げ，船が島の周りを一周する時間で島の大きさを表わせると信じていた歴史家たちが，幾何学者によって非難されたことを採りあげている．

さらに，幾何学は宇宙の仕組みにまで及び「計算によって星の確固として定まった運行を教えてくれるのであり，われわれは無秩序や偶然に属するものは何もないことを幾何学から学ぶ」ことを挙げる．また，このことが弁論家に役に立つ例として，日食によって太陽が陰ったことに怯えるアテナイ人をペリクレスが原因を説明することで恐怖から解放したこと等を挙げている．

そして，最後に，こう説く．

> われわれが目指していることを実現するために，とりわけかかわりをもつのは，他の方法では説明が困難なさまざまな問題を，分割法，無限可分性，速度増加といった「線による論証」が常に解決する点なのです．･･･ 弁論家がすべてのことについて語らねばならないのであれば，幾何学をぬきにしては絶対に弁論家とはなりえないのです．[53]

「分割法で (de ratione dividendi)」,「無限可分性で (de sectione in infinitum)」そして「速度増加で (de celeritate augendi)」ということが何を意味しているのか，古来より注釈者が判断に苦しめられてきた部分である．もっとも，著者のクインティアリヌス自身，この著作における数学についての議論を読む限りでは，必ずしも数学に明るいとはいえないようであるから，この三つについても，わからないまま引用しただけの言葉のようにも思える．

[52][29] pp.121-122.
[53][29] p.124.

5.5　数学観の類型

以上，ヘレニズム＝ローマ期の一般基礎教養教育における数学観を三種に分けて見てきた．

本稿では，それぞれが，ある傾向を代表しているものと想定する．そして，そうした傾向をもつ数学観の類型を仮設し，ピュタゴラス＝プラトン主義的立場に対応するものを「一元型数学観」，アリストテレス立場のそれを「複合型数学観」，そして，クインティアリヌス的立場の場合を「混淆型数学観」と仮称することとする．

以下に，それぞれの数学観に対する簡単な所見を付しておく．

5.5.1　一元型数学観

数学は本来一つのものであり，数学を構成する諸学科は一なる数学の異なる側面の現われであるとする見方．

この一なるものは，古代のある人々にとって，世界の秩序そのものであった．そして，世界の実相は，平常は隠されており，数学を学ぶことを通じてしか感得できないとされる．これが，数学を学ばねばならない理由でもある．

この数学観は，数学を修得する目的が人間完成であるという意味では，基礎教育ではなく，教養教育の方に重点があるといっても良いかも知れない．

5.5.2　複合型数学観

人間にとっての世界を，五感を通じて認知する感覚的世界と，そこから抽象化された形式的な概念の世界に分け，両世界に対応する数学諸学科がそれぞれに存在し，互いに影響を及ぼしあっているという見方．

後世，数学を，対象世界が感覚的かどうかの観点から「純粋 (pure) 数学と混合 (mixed) 数学」に，あるいは，影響の仕方に重点をおいて「純粋 (pure) 数

学と応用 (applied) 数学」に区分することがあるが，ここでいう複合型数学観の後継であろう．

上述の一元型数学観が，新ピュタゴラス主義者や新プラトン主義者といった哲学者共同体で奉じるられていたような意味合いで，この複合的数学観はどのような集団によって護持されていたのだろうか．はっきりとは答えられない．

ここでは，仮説として，複合型数学観に拠った中核集団は，ムーセイオンを中心に構成された，数学的自然学の研究に従事した学者の共同体であったと想定したい．「中期ストア学派」の哲学的な見解を問題にするのではなく，あくまで「数学」についてという限定の下ではあるが，5.3.2 節で述べた創始者パナティオスがペルガモンのムーセイオンで学んだという伝承，ポセイドニウスやゲミノスの自然学関係の事績と学者集団との親近性などから推量した．

もとより，ヘレニズム＝ローマ期における「学者共同体」なるものの実態は定かなものではないが，例えば，おそらくそういった学者の一人であったと思われるクラウディオス・プトレマイオス (2 世紀) は，『数学集成（アルマゲスト）』の序文でこう述べている．「アリストテレスは理論的学問を，まことに適切なことに，三つの領域に分けた．存在するあらゆるものは，質料，形相，そして運動から成って[54]」おり，神学，数学，自然学の三つのうち，数学のみが「厳密に近づいていけば，確実にして揺るぎのない知識を与えてくる．というのも，その種の証明は，議論の余地のない方法，すなわち，整数学と幾何学，によって手続きが進められるのであるから．[55]」．プトレマイオスのこの序文を，我々の主張の傍証のひとつとしたい．

ところで，ムーセイオンに拠り，数学的諸学を必要とする学者とは，現代における類似を考えるなら，「自然科学者」と呼ばれるべき人であろう．この類似で考えれば，こうした人々にとっての「数学」の教育は，一般基礎教養というより，専門教育の範疇に属すべきではないかという疑問が起こるだろう．

この疑問については，一般基礎教養教育と専門教育を区分する重要な要素として「職業」というものに対する考え方の問題があり，ヘレニズム＝ローマ社会の公式見解として，技術（職能）と結びつかない科学は，専門教育の対象ではなく，一般基礎教養教育と関係する営みと目されていたと答えることが出来よう．

[54] [36] p.35.
[55] [36] p.36.

5.5.3　混淆型数学観

5.4 節で見たクインティアリヌス的な数学観を，混淆型数学観と仮称した．

そもそも，クインティアリヌスの著作の引用箇所には，「数学 (mathematica)」の言葉がなく，「幾何学 (geometria)」に数や図形の実用的技術，さらには天文・暦法を含めている上，それを正当化するような理論的立場の説明もない（というより，説明の必要を感じているふうもない）．つまりは，雑多な数学的知識の寄せ集めという意味での混淆型である．

そういう意味では，数学的には，特に見るものがないというべきかもしれない．

ただ，この著作をはじめとし，クインティアリヌス的な弁論術の後継である「人文主義」が，現在にいたるまでヨーロッパの知的潮流の主流であり続けたことに留意すれば，その重要性に鑑みて，さらに詳細な調査検討が必要であると思われる．が，この点については他日を期したい．

6　数学の類型

6.1　数学の類別

6.1.1　祖型と範型

本章では，第 3 章で示した方針に従い，古代期における数学の，専門教育と一般基礎教養教育という観点からの類別を行なう．

類別の対象とする「数学」は，バビロニアの粘土板（[25]），エジプトのリンド・パピルス（[3]），中国の『九章算術』と『周髀算経』（[39], [40]），インドの『アールヤバティーヤ』（[41]），ギリシア系として，エウクレイデス（[6], [7]），アルキメデス（[34]），プトレマイオス（[36]）等々である．

専門教育と親和性の高いものとして，ギリシア系以外の「数学」がひとくくりにできる．また，ギリシア系の数学も，アルキメデスやプトレマイオスには専門教育との親和性を有する要素も小さくはないが，複合型数学観の下で，一般基礎教養教育に関係する類に含めて考えることとする．

以下，6.2節と6.3節において，上述の二組の類のそれぞれに対し，原初的な形態を示すもの（祖型）と範例をなすと思われるもの（範型）の概要を記し，その後，類自体の主要な特徴についてまとめておく．

6.1.2　算術系数学と原論系数学

数学の二つの類の名称について，ひとこと述べておく．

そもそも，アルキメデスやプトレマイオスの著作ならずとも，一冊の著作にさまざまな要素が含まれているのは通例のことであり，専門・一般基礎教養と区分しきれないのは当然のことである．したがって，前項で行った類別の結果に，教育の類型の名称を被せ，専門系数学，一般基礎教養系数学と呼ぶことは，類型化の目的に沿わない．

この理由をもって，本稿では，仮にではあるが，範型として選んだ代表的著作の名称を，類の名に冠することとしたい．

専門教育と親和性の高い類は，範例として『九章算術』を採用するため，この類に属する数学を「算術系数学」と呼ぶことにする．一般基礎教養教育の場合は，エウクレイデスの『原論（ストイケイア）』が範型なので，「原論系数学」となる．

6.2　算術系数学

6.2.1　祖型としてのバビロニア数学

算術系数学の祖型としては，現存する最古の「数学」である，メソポタミア出土の粘土板を措定する．以下，この「粘土板の数学」について，[25] に従って，概観してみる．

まず，誰が，何のために，そのような文書（粘土板）を作成したかについては，いわゆる「書記[56]」と呼ばれる社会階級に属する人々が，国家の行政管理のために，とされている．

例えば，古バビロニア時代（紀元前20-16世紀）には，書記養成のための学校である「粘土板の家[57]」が存在しており，その勉学の模様を伝える断片の中に，父親が息子に尋ねるという形式で，次のような文章が残されているという．

> お前は，掛算，ある数とその逆数，定数，会計，委託業務を委託すること，あらゆる仕事割り当て量を計算すること，分け前を分けること，土地を区画することをしっているのか．[58]

こうした書記養成学校では，楔形文字の読み書き，基本的な掛算表（九九に相当）の暗唱に始まり，法律や行政経済文書類の書き方，さらに，数学，文学，音楽，シュメール語等が教えられていたという．

粘土板で扱われる内容は，先に引用した父親の質問事項がそれにあたるといってもよいだろう．（具体例は文献 [25] を参照されたい．）

また，叙述の形式は，次のようであった．

> （古バビロニア時代の）数学問題文書には，アッカド語とシュメール語で書かれたものがあったが … 前者は，問題文，解法の手順，答，そして場合によっては検算という構成を取るものが多く，バビロニア数学の典型的な問題とその解法を詳述するものである．… 一方，後者は問題文と答だけ，あるいは問題文だけが多数述べられている場合が多い．[59]

最後に，原論系数学との対比で重要な要素となる，幾何については，こうであった．

> バビロニア人はいろいろな図形を考え，彼らの感覚でそれらを命名し，数学の題材としたが，主題は辺の長さや面積の求め方であった．彼らは，図形の面積を求めるために必要な数値を表にし，図形を「理解」したのである．彼らにとって，後はやるべきことは何もなかったのある．なお，「表にして理解する」ということは，バビロニア文化全般にあてはまることであった．[60]

結局のところ，出土粘土板の「数学」は，書記という職能に必要な数学であり，その諸々の断片の背

[56] シュメール語で dub-sar（粘土板を書く人），アッカド語ではその借用語で *ṭupšarrum* と呼ばれたという．[25] p.11.

[57] シュメール語で é-dub-ba，アッカド語で *īt-ṭuppim*. [25] p.11.

[58] [25] p.14.

[59] [25] p.42.

[60] [25] p.131.

景に「演算を備えた数系の計算および応用技法」とでも呼ぶべき「数学」が想定され得るものであったことがわかる.

6.2.2 範型としての『九章算術』

前節で，バビロニアの数学について紹介したが，粘土板をパピルスの断片に換えれば，古代エジプトの数学[61]についても，同様な状況が見られる.

ただ，古バビロニア，古エジプトとも，現存するのは断片であり，数学としての組織性・体系性が見て取れないところは不備の感がいなめない.

古バビロニア・古エジプトとほぼ同等な題材を扱いながら，組織性・体系性を供えた「集成」としての性格を保持するものに,『九章算術』[62]がある．本稿では，この『九章算術』をもって，算術系数学の範型としたい[63].

『九章算術』は，古代中国において，漢以前に発達した種々の技法を集成したもので，後漢時代に現存の形式にまとめられたとされる.

なお，中国の「数学」は，暦学の一部として発達したものと，行政と結びついた土木・建築・生産管理・賦税等の専門基礎学のためのものに大別されるが,『九章算術』は後者の代表とされている.

こうした数学を保持あるいは発展させていったのは，どのような集団であったのか．中国の場合，歴代王朝が国家的な教育機関である算学をおき,『九章算術』といった書物を教科書として，専門技能を有した行政官を養成しており，その様子については，史書を通じて知ることができる.

『九章算術』は，方田，粟米，衰分，少広，商功，均輸，盈不足，方程，句股の九章からなり，扱われている技法は，分数計算，開平・開立計算，比例按分計算，連立１次方程式の解法，種々の図形の面積・体積計算，三平方の定理の応用等々である.

実際的な計算の方法は，古バビロニアの「数表」にかえて，算木によるものが前提されている.

方田の章の最初の部分[64]を例に挙げてみると，

> 今有田廣十五步，從十六步．問為田幾何.
>
> 答曰，一畝.
>
> 又有田廣十二步，從十四步．問為田幾何.
>
> 答曰，一百六十八步.
>
> 方田術曰，廣從步數相乘得積步．以畝法二百四十步除之，即畝數．百畝為一頃.

となっている.

長方形の面積計算と，単位の換算についての話題が，まず問と答という形式にまとめられており，さらに，同種の解法をもつ問題群ごとにその技法が「術曰」として与えられているのがわかる.

方田のもう少し先の方にある，分数の加法計算の技法も，以下の通り，同様である.

> 今有三分之一，五分之二．問合之得幾何.
>
> 答曰，十五分之十一.
>
> 又有三分之二，七分之四，九分之五．問合之得幾何.
>
> 答曰，得一，六十三分之五十.
>
> 又有二分之一，三分之二，四分之三，五分之四．問合之得幾何.
>
> 答曰，得二，六十分之四十三.
>
> 合分術曰，母互乘子，并以為實，母相乘為法，實如法而一．不滿法者，以法命之．其母同者，直相從之.

やはり，問，答を何度か繰り返した後，術が与えられているのが見てとれる.

6.2.3 主たる教育数学的特徴

算術系数学の，教育数学的に重要と思われる特徴について，簡単にまとめてみる.

1. 「演算を備えた数系の計算および応用技法の集成」と総称しうる性格をもつ.
2. 使用する数系は，今で言う有理数体である.
3. 後述の原論系数学との対比で述べれば，図形に関係する諸問題も「数値的」に取り扱う[65].

[61]例えば，[3] 参照.

[62]日本語訳に，[39]，[40] 等がある.

[63]先述したとおり，算術系の名称は，この著作からとった.

[64]インターネットのサイト『中國哲學書電子化計劃』(http://chinese.dsturgeon.net/index.html) を参照した.

[65]古代の中国・メソポタミア等の文明社会では，算術系数学を基盤とする天文・暦法も,「関数的」とも称される数値的方法で展開された.

4. 標準的なテキストは,「技法の記述（術則)」と「問題と解答（及び解説)」からなる「範例集」の体裁をもつ．この点も，原論系の標準である演繹体系的体裁と対比的である．

5. 問題で扱う数値は，現実的であるよりは，計算の容易さが優先されている．このことは,「直接の応用を離れている」ことの証左のひとつであり，独立した学術的営みとしての「数学」であるかどうかの判定条件であるとも解せる．

6. 計算技法は，古代中国の算木，メソポタミアやエジプトの各種数表といった「計算補助装置」を包含している．

6.3　原論系数学

6.3.1　原論型数学の祖型

原論系数学は，少なくともその最初期においては，ギリシアの数学（マテマティケー）と同義である．そして，原論系数学の原初の形態とは，まさに,「マテマティケー」という言葉が生まれた頃の状態に他ならない．

原論系数学の祖型を求めることは，マテマティケーの起源を考えることである．

(1) マテマティケーの起源

マテマティケーは，歴史のある時期に，ギリシアのいずれかの地で，誕生したものである．しかし，その起源は謎めいていて，種々の説があり，今も数多の研究が重ねられいる．

例えば，古代ギリシアで論証数学が生れたのは，

> ピュタゴラス派が「万物は数である」という原理に基づいて，数論を利用して幾何学を発展させたのだが，非共測量（通約不能量）[66]の発見により，この理論が無効になり，ギリシャ数学の全体が大幅な書き換え，理論展開の迂回を余儀なくされた[67]

ことによるとする「通説」は，[7] によれば,「非共測史観」にもとづく一種の神話にすぎないという.（最近の初期ギリシア数学史の知見については，文献 [7] の第 6・7 章およびその参考文献を参照のこと.）

(2) 本稿の想定するシナリオと祖型

ところで，ラオディケアの司教アナトリウスは，

> ピュタゴラス派の者どもが，幾何学（ゲオメトリア）と整数学（アリトメティケー）のみにマテマティケーという特別な名称を与えたという．それ以前は，各々は別々の名で呼ばれており，両者に共通の名はなかった[68]

と伝えている．

本稿の立場としては，ピュタゴラス派という名称にこだわるつもりはなく，この伝承と「通説」から，以下のようなマテマティケー誕生のシナリオを想定し，誕生時のこのマテマティケーをもって原論系数学の祖型とすることにしたい．

そのシナリオとは，次の通りである．

1. 古代ギリシアの地で，ある時期までに，ある集団において,「数（アリトモス）（離散)」と「図形的量（メゲトス）（連続)」に関する二種類の別系統をなす学問体系の前史的営みが存在した.（前者に由来する学的営みが「整数学と音楽学」であり，後者のそれが「幾何学」である.）

2. しかるべき時期に，ある集団で，両者を厳密に区別する態度が生じた．そして，この態度が生じることになった契機のひとつが「非共測量の発見」である．

3. 区別された両者を統一的に扱うべきであることが意識化され，両者を調停し得る手段の探求が開始された．そして，この探求が開始された時点をもって，マテマティケーの誕生と考える．

上述のシナリオに現われた主要な事項について，以降，簡単に説明を加えていく．

(3) 整数学と音楽学に関する前史的営み

二種の楽音が調和（ハルモニア）することと，その音を発する振動体の長さの間に単純な整数的関係が存在することは，洋の東西を問わず，古代文明では周知であっ

[66] ἀσύμμετρος．本稿では，文献 [7] の説 (p.103 脚注 4) に従い，従来の「通約不能量」に替えて「非共測量」という訳語を採用した．

[67] [7] pp.88 – 89.

[68] ヘロンの『定義集』より．[35] p.2 .

たと思われる．そして，この関係を宇宙的ないし人倫的な秩序にまで敷衍することも，また，珍しくはない．(例えば，史記の律書を参照のこと.)

ギリシアではピュタゴラスの発見に仮託されるこの「数と音」との関係に関する諸知識が，本項でいう「整数学と音楽学に関する前学問的営み」の中核をなすものであったと想定される．

(4) 幾何学の前史的営み – 特異性の原点 –

マテマティケーと前節で扱った算術系数学との最大の相違点は，図形に対する態度にある．したがって，ギリシアにおける幾何学の前史的営みが何かということは，きわめて重要な問題である．

実際のところ，算術系数学においても，図形への応用に際して，円周率や正方形の対角線の長さ（つまり，2 の平方根）を数値化したものは近似に過ぎないこと，近似のプロセスを繰り返すことで精度が高まること等の認識はあった[69]．

しかし,「近似の精度」の良否ではなく,「近似」自体を拒絶する心性が，ギリシア的幾何学の根底には存在しているように思える．

では，その心性は何に由来するのか．

(5) ギリシア的幾何学の源流

古代ギリシアの幾何学の源流は，神殿や祭壇を設営する基礎としての「縄張り術」に求めることが出来るのではないかと考える．現在，祖型を求めることは，もとより困難だが，インドのヴェーダ文献を通じて，かすかに垣間見ることができる．

例を挙げれば，古代インドのヴェーダ文献に，ヴェーダ祭式の祭場設営を規定する縄経（シュルバ・スートラ）[70]がある．黒ヤジュルヴェーダ所属のアーパスタンバ派（前五世紀頃成立）の祭式儀軌書の一部門を成す，シュラウタ祭場設営規定書の『アーパスタンバ・シュルバスートラ』をはじめ，何種類かのスートラが現存している．

この『アーパスタンバ・シュルバスートラ』[71]をみると，冒頭の部分に,「縄張」によって正方形や長方形といった基本図形や基本図形間の等積変形を行う「作図法」が記載されている．こうした「作図法」と，エウクレイデスの『原論』の作図題[72]との類似に留意されたい．

我々は，こうした縄張り術の「技法」に関する諸知識に，ギリシア的幾何学の源流を見ることにしたい．

それでは，他の地域では「数値化」され算術系数学の応用対象となるか，そうでなければ，縄張りの「術」のままで実務的技能を離れた学的体系にまで組織化され得なかったものが，どうしてギリシアにおいてのみ「幾何学」まで進化したのだろう．その鍵となるのが,「非共測量の発見」である．

(6) 非共測量の発見

先進地帯の進んだ文明が，後進地帯に伝播する．この構図は，歴史において何度も繰り返された．

それでは，エジプトやメソポタミアといった先進地帯の「進んだ数学」が，後進地帯であるギリシアの地にもたらされたとき，何が生じたのだろうか．

以下は，史料にもとづく推定ではなく，想像である．

先進地帯では，聖的な儀式を司る役割の専門職化と並行して，聖性に対するある種の俗化が進行したと思われる．しかし，対応する文化的装置をもたない後進地帯では，専門職以外の者が専門技術を学ぶこともあったであろうし，結果として，元来想定していなかった状況にその技術の適用を試みるといったことが生じ得たであろう．

後進地帯として聖性への感覚が色濃く残ったギリシア社会[73]に，先進地帯（エジプト，メソポタミア）の数学が導入され，俗化された数学では問題にならなかったことが起こったのではないか．つまり，神殿や祭壇の縄張り（「定木とコンパス」による作図の源流）という「聖なる技法」に崇敬を感じる心性が，近似を許容せず，厳密性へのこだわりを強いるといったことが起こったのではないだろうか．

長さの異なる二線分のなす比を求める方法，いわゆる相互差引[74]は，洋の東西を問わず，先進文明の「数と音」に関する技芸においては，既知であったと思われる．

[69]例えば,『九章算術』における少広の章の開平計算に対する劉徽の註を参照のこと．[40] p.135.

[70]シュルバ (*śulba*) とは，ダルバ草 (*darbah*，和名チガヤ) の茎を 3 本（あるいはより多数）縒り合わせせたものを，さらに長くつなぎあわせたもの ([41]).

[71]日本語訳が [41] に所収されている．

[72]6.3.2 節の（3）および 6.3.4 節の (1) を参照のこと．

[73]古代人の聖と俗をめぐる心性については，例えば，[5] を参照のこと．そこでは，こう述べられている：「古代世界では,「俗的」活動は何も認められない（[5] p.40)」.

[74]いわゆる互除法のこと．

こうして，象徴的な図形，例えば正五角形（ペンタグラム）において，辺と対角線の成す比といった「聖なる数」を相互差引で求めようとするとき，そこに無限の循環を発見するといった「事件」が起きることも有りえたのではないだろうか．

こうした「事件」が,「数（離散量）」と「図形的な大きさ（連続量）」とを区別する態度を引き起こしたことも，また，想定不能というわけではあるまい．

(7) マテマティケーの誕生

空想の羽根を広げるのは，これくらいにしておく．

その後,「何か」[75]があって，厳密な区別を保っていた「数と大きさ」を統一的に扱うべきであるという「志向」が生じたものと思われる．

我々は，この「離散と連続という異質なものの統一の試みへの志向性」の出現をもって，マテマティケーの誕生としたい．

次節で論じるが，エウクレイデスの『原論』は，そうした試みに対するひとつの解答を与えているとみることができる．

あるいは，数系を線分の演算系として捉えるというデカルトの発想，連続量を離散量から産み出そうというカントールの超限数の発想等々，古代を越え，近代に至るまで，数学の発展を，この「離散と連続の超克」という観点から見ることができるかもしれない．

(8) 非共測量発見の起源 – 教育数学の立場では –

本節の最後に,「非共測量の発見」を話題に，教育数学的議論を紹介してみたい．

「非共測量の発見」については,「正方形の対角線と辺が非共測であることが，$\sqrt{2}$ が無理数であることの今日の証明とほぼ同様の，偶数・奇数の理論に基づいて発見された」という見解と,「正方形や正五角形の辺と対角線の比を相互差引によって決定する試みが発見の契機になった」という主張があるという ([7] p.104).（なお，[7] において，訳者は,「現時点で最も蓋然性が高い」と考えるのは前者であるとし，論証数学の成立に対する本稿とは別のシナリオを提示している.）

[75] 何人もの論者がそれぞれのシナリオに従って所論を述べているが，本稿ではこれ以上想像をめぐらすことは慎みたい．

しかし,「非共測量の発見」をめぐる上述の二つの見解について，歴史的にではなく，教育数学的観点から比較するならば，その優劣ははっきりしている．つまり，教材として採りあげるとき,「線分の相互差引」の方が「偶数・奇数論」によるよりも自然であるように思われる．

前者においては，学習者にとって，相互差引の理解から，正方形なり正五角形なりに対してそれを実行すること，そして手続きが「無限の循環」に陥ること（無限の淵をのぞきこんだような目が眩む（タウマゾー）感覚）までを体験することができる．

他方，偶数奇数論に必要な「帰謬法」的論法は，ある種の逆理（パラドックス）感覚を抱かせることになり，学習者には了解させにくいものである．

仮に数学史において「個体発生は系統発生を繰り返す」というテーゼが真であるならば,「相互差引による非共測量の発見」が時間的に優先することは確からしいといえよう（学習の難易と発見の難易が別なものなのではあるが.）

なお，以上の話題が教育数学的である所以は,「学習者にとっての了解の容易さ」という教育的観点から,「無理数に関連する数学」を（しかるべき教材を用意する等の目的で）再構成する際の，数学というものへの優先的な見方を提供しているという点においてである．

6.3.2　範型としての『原論（ストイケイア）』

原論系数学の範型として，本稿は，エウクレイデスの『原論（ストイケイア）[76]』を採択する．

エウクレイデスの『原論』については，日本語の全訳 [6] があり，また，最新の知見にもとづいた新訳 [7] も出版されつつある．また，各種の解説書や研究書の類も少なくない．

[76] ストイケイア ($\sigma\tau o\iota\chi\varepsilon\tilde{\iota}\alpha$) の字義については，例えば，[7]p.52 を参照のこと．『原論』という言葉は，中村幸四郎によって 1950 年に採用された訳語．図形の学以外も扱われているという理由で，従来の『幾何原論』,『幾何原本』,『幾何原理』などの訳語に替えたものである ([6] p.489）．なお，ラテン語の訳語 elementa (elementum の複数形) は，ストイケイアの字義のうち「字母 (アルファベット，つまり $\alpha\beta\gamma$)」の意を採り，ラテン語の ABC に代えて LMN(当時の二十個のローマ字母を二行に書いた二行目の頭の三文字) から，el-em-en-tum (すなわち elementum) と造語したという説がある ([1] p.357).

したがって,『原論』の詳細については，そうした著書の参照を請うことにして，ここでは，以降の議論のために，次の四点を取り上げておく．

(1) 全体の構成

『原論』は，全 13 巻からなる．第 I 巻から第 IV 巻までは，平面的な図形の基本的な事項を扱う．第 V 巻は比例論，第 VI 巻は比例論の平面的図形への応用である．第 VII 巻から第 IX 巻は整数の基本事項，第 X 巻は非共測量の分類が主題である．

第 XI 巻から最終巻までは，立体的図形を扱う．詳しくは，第 XI 巻は基本事項，第 XII 巻は取り尽くし法による求積，そして第 XIII 巻が正多面体論となっている．

なお，ギリシア数学の文献としての『原論』の特異性のひとつが，序文を欠いていることである．通例，著作は，しかるべき人物に宛てた送り状といった形式の序文をもっており，そこで，著作の意図や結果の説明等が行われる．『原論』は，この序文を欠く（元来なかったのか，失われたのかは不明）ため，謎めいてみえる著作となっている ([7]p.69) .

(2) 演繹体系としての構造

基本的な記述の方法は，命題の提示とその証明の連鎖による．

一つの命題の証明に際して利用されるのは，それ以前に証明された命題群であるが，この連鎖を遡った最初に位置するのが，定義・要請（公準）・共通概念と呼ばれる証明抜きで承認されることを要求する言明群である ([7]p.69ff.).

(3) 命題の種類

命題は,「定理」と「問題（作図題）」の二種に区分される．

第 I 巻の冒頭部分の命題を挙げてみる[77]と，

1. 与えられた有限直線の上に等辺三角形［正三角形］を作図すること．
2. 与えられた点において与えられた直線を置くこと．
3. 2 本の等しくない直線が与えられたとき，大きい方から小さい方に等しい直線を取り去ること．
4. もし 2 つの三角形が，2 辺に各々等しい 2 辺を持ち，さらに角に等しい角を持つ — その角とは等しい 2 直線に囲まれる角である — ならば，底辺も底辺に等しく，さらに三角形は三角形に等しく，残りの角も残りの角に，等しい辺が向かい合う角が各々等しくなる．

となっており，最初の三題は「問題」，四番目が「定理」である.（なお,「問題」の多くは作図題であるが，整数に関する巻では，作図以外の問題も見られる.）

「定理」には証明が与えられ,「問題」には「解法」とその解法が正しいことの証明が与えられるのが標準的な内容である.（プロクロス以来,「命題」の形式を，言明・提示・特定・設定・証明・結論という六つに区分することが行われている．詳細については，例えば，[7]pp.73 –74 を参照.）

(4) 比例論

『原論』は，第 V 巻において，非共測な場合を含むあらゆる量に対して適用可能な「比例の定義」を確立する.（そして，それ以降，比例に関係する諸命題には，この定義に従って正当化され得るような証明が与えられていくことになる.）

議論の詳細は，例えば [7] の第 8・9 章にあるが，この比例論の確立が，6.3.1 節で強調した「離散と連続の調停」という課題へのひとつの解答であったという見方が出来る.（次項参照.）

6.3.3　一元型数学観と親和的な教育数学的特徴

原論系数学の主要な教育数学的特徴について，5.5 節の分類に従い，一元型数学観と親和的な特徴（本項）と，複合的数学観のそれ（次項）とに分けてまとめておく．

(1) 離散と連続の調停

一元型数学観と親和的な特徴は,「いかにして離散と連続の調停をなしうるか」という問いに，どう答えたかという点に関係する．

この問いに対する答えは，二種類ある．

最初の答えは，技術的なもので，前項 (4) で挙げた「比例論」がそれである．

[77]訳文は，[7] による．

プロクロスの『エウクレイデス原論第一巻註解』に,「数学的諸学を一体化させる紐帯 (ὸ σύνδεσμος; coniunctio) に関してであるが，それをわれわれは，エラトステネスのように，比例 (ἀναλογία; proportio) と考えるべきではない．というのは，比例はあらゆる数学に共通の特色と言われ，現にそうであるけれども，数学の共通の本性に，いわば遍く浸透し本質的である他の多くの特徴があるからである．[78]」という一節がある．この文章からは，ある人々にとって，整数学と幾何学のように異なる種別の学科を「一体化」させるものが「比例論」であると思われていたことが窺える．そして，プロクロス自身はそれに賛同していないことも，である．

では，プロクロスの見解はどうであったのだろう．それが，二番目の答えである．

プロクロスによれば，数学的な諸学科に上から被さって全体を束ねる「冠石」の役を果たすのは，哲学に属する「弁証法」である．そして,「哲学の最も純粋な部分である弁証法 (ὴ διαλεκτική; Dialectica) は，数学の上を注意深く飛び，その全体の発展を包み込み．それ自身で，個別の諸学に，完全化し，批判的，知的なさまざまな力として貢献する — それらは，分析 (ἀναλυτική; resolvens), 分割 (διαιρετική; dividens)，定義 (ὸριστική; definiens)，論証 (ἀποδεικτιλεή; demonstras) の手順である[79].」

哲学的な含意をのぞけば，プロクロスの主張は,「公理的演繹体系という形式に表現するということ自体が，別種の営みを同一のものの異なる側面とみなせるようにする方法である」と解釈できよう．

(2) 教育数学的特徴としての公理的演繹体系

以上のことから，原論系数学の最大の特徴は，やはり，その「公理的演繹体系」の体裁にあると考えられる．

そして，一元型数学観と親和的な原論系数学の最大の特徴は,「複数の異なる体系を同一の体系の異なる実現とみなすことを可能にする」という意味合いでの「公理的演繹体系の体裁」にあるとしたい．

[78] [28] p.43. 訳文は [30]pp.400–401 による．
[79] [28] pp.42-43. 訳文は [30]p.404 による．

6.3.4　複合型数学観と親和的な教育数学的特徴

5.5.2 節で述べたように，我々は，複合型数学観を，数学的自然学（今の自然科学の前身）の研究に従事する人々の奉ずる数学観であると想定した．したがって，複合型数学観と親和的な教育数学的特徴も，この想定の下での考察となる．

(1) 空間の量的な認知・操作の道具

ギリシアの幾何学は，長さや面積を数値的に扱わないという「伝説」がある．このことは，エウクレイデスの『原論』に限れば正しいかもしれないが，アルキメデスやプトレマイオスの著作を見れば,「近似」であることの理解の下で「数値」を扱っていることはすぐにわかる．したがって,「数値的な扱いをしない」ということを原論系数学の特徴とは考えない．

しかし，図形というものの扱い方が，原論系数学と算術系数学との相違の大なるものであることに変わりはない．

算術系数学にとって，図形に関する問題は，数値化という操作を通じて数学技法が応用される題材のひとつに過ぎない．

他方，原論系数学の場合は，図形を，数値化を経ず直接的に操作することで,「空間の量的な認知や操作」にかかわる種々の技法を提供している．具体的には,「問題」型の命題のうち，特に作図題群がこの役割を果たしている．(テキストの体裁は,「問題–解法–説明」型と見ることができ，算術系数学に通じる.）

つまり,「作図題型の命題群によって，空間の量的な認知や操作の教育に資する」ことを，原論系数学の特徴に挙げることができる．そして，この特徴は，複合型数学観と親和的なものであるだろう．

(2) 公理的演繹体系

原論系数学の「公理的演繹体系」という特徴は，一元型数学観との関係だけでなく，複合型数学観においても重要な役割を果たす．ただ，一元型の場合の「異種のものを統一する」方向とは，逆の向きに捉えるべきである．

複合型数学観においては,「考察の対象が，しかるべき公理系を満足すれば，演繹体系の端末に位置する結果まで自動的に従う」という方向が大切にな

る．つまり，「応用」の原理的方法を与えると見ることができる．そして，これが，複合型数学観と親和的なもうひとつの特徴である．

結びにかえて — クラインと教育数学

本稿の冒頭部で，数学教育の現代化運動の話題に触れたが，この運動の半世紀前に世界的な規模の数学教育改造運動があったことはよく知られている．そして，後者の改造運動は，前者の現代化運動とはちがい，成功をおさめたと評価されることも多い．

この運動の，ドイツにおける主導者は，フェリックス・クラインであった．

改造運動におけるクラインの最大の貢献は，教育数学的に見れば，当時の学校数学（学校教育の対象としての数学）を再構成するために，「関数的方法（諸々の数学的概念や技法を関数に関連づけて捉える）」という原理を提示したことである．

以下に，クラインが，いかにしてこの「関数的方法という原理」に到達したかについて，簡単に振り返ってみたい[80]．

反数学運動

ドイツでは，近代産業化社会への転換期である19世紀後半，「国家の施設である高等教育機関」に対する理工系の人材養成や基礎教育に対する要求が増大するようになった．そのため，大学以外の高等教育機関として，フランスのエコール・ポリテクニクに範をあおぐ「テヒニシェ・ホーホシューレ（工科系高等教育機関）」が急増する．そして，科学教育を受けた教員の必要性が高まり，大学卒業生のテヒニシェ・ホーホシューレにおける大量の雇用が生まれた．

しかし，新人文主義的な学問の純粋性を誇示する大学で教育を受けた若手数学者たちは，厳密な理論構成を良しとする「純粋精神」に則った数学を教えるだけで，彼らを雇用している学校の必要を満たすことには，無理解であり，怠惰であった．その結果，テヒニシェ・ホーホシューレの教員や卒業生の間から，「反数学運動（数学不要運動）」が起きるまでにいたった．本稿の論旨からいえば，「専門教育と一般基礎教養教育の対立」と評し得る事態である．

1895年，クラインは，数学の必要性をめぐり，エンジニア協会と論争を繰り広げたが，反数学運動の勢いはおさまらず，法改正を伴う数学の授業時間数削減に成功するまでにいたった．

数学教育改造運動へ

強い危機感をもったクラインは，この問題解決のために，「テヒニシェ・ホーホシューレにおける数学課程の基礎的で準備的な部分を，下級の準備的な学校，つまり，中等教育機関へ移行する」という方策を立てる．

1901年，この方策を実現に移すため，クラインは，学校教育における数学課程の改革の実施を教育大臣に働きかける．つまり，「上から」の改革を実現しようと試みたことになる．

しかし，大臣補佐官から返ってきたのは，「プロイセン当局は，クライン教授の考え方には賛同するが，上からのカリキュラム変更を宣言することは拒否する」旨の通告であった．1902年4月のことである．ただ，この通告には，「選抜された学校で改革を実行するエージェントとして行動できるように訓練された教員を支援することで，下からのカリキュラム変更を組織する」ようにという助言が付されていた．そして，この助言を実行する手段として選ばれたのが，ドイツの数学教育改造運動である．

実際，当時のクラインの私信には，「テヒニシェ・ホーホシューレにおける数学の準備教育の問題を解決することが，自分の数学教育改造運動の鍵である」という文章が残されているという．

クラインの戦略

大臣補佐官の助言に従うことを決意したクラインは，数学教員たちを立ち上がらせることができるような「事態を旋回させる軸となりうる主張」を見つけ出すという戦略を立てる．そして，ただちに，当時の数学教育の全般状況の調査検討に入った．

改造運動時のクラインの助手であったリーツマンの回想によれば，あの改造運動の成功は「人々が結集できる軸として役に立ち，同時に，解析学を自動的にギムナジウムのカリキュラムに導きいれてしま

[80] [17] とその参考文献を参照のこと．

うような，そういう基本的な理念を見つけ出すことに拠って」おり，クラインの提示した「関数的方法」という理念が,「いきいきとした言葉」として，巧妙で戦略的な装置として働いたのだという．

研　鑽

クラインが，数学教育に関しておこなった調査検討とは，どのような内容であったのか．クラインのゲッティンゲン大学における講義録 ([19] や [20]) から，その研鑽の跡を窺ってみよう．

まず，学校種別の調査がある．例えば,『高等教育機関の数学教育に関する講義』([19]) には，当時のドイツの高等教育機関以外 (表題とは異なるが) の諸々の教育機関 — 国民学校 (Die Volksschulen)，男子中等学校低学年部 (Die sechs unteren Klassen der höheren Knabenschulen)，女学校 (Die Mädchenschulen)，商船学校や工業学校といった中等職業学校 (Die mittleren Fachschulen) 等々—の学制，数学の教育課程，教員養成の仕組み等々の概要が述べられている．さらに，大学等の高等教育機関については，十六世紀以降の数学教育の歴史，現行の教育課程に現われる数学の詳細な研究と問題点の分析等々がみられる．

同様に，クラインは，イギリス，フランス，イタリア等の外国の教育事情にも通じていた（[20] 第 2 巻）.

以上は，数学教育の主として制度的な面からの調査分析である．これが，いわば横軸であるとすれば，縦軸にあたるのは，人類史的な規模での数学発展の流れの分析であった．

その成果は，話題別という形式ではあるが,『高い立場から見た初等数学』([20]) に結実している．クラインは，この著作の第 1 巻において，当時の最先端であった考古学や数学史等の知見にもとづき,「教師の知っておくべきこと」という観点から数学の歴史を分析してみせ，数学の発展傾向の類型を抽出し，それに沿う数学教育のありかたについての考察を深化させている．

クラインの指導理念である「関数的方法」とは，上述のような努力の蓄積から搾り落とされた，一粒の真珠のようなものであったと言えるだろう．

クラインとフロイデンタール

フェリックス・クラインとハンス・フロイデンタールは，共に数学の初等・中等教育に大きな影響を与えた数学者だったが，数学教育への取り組み方には相違が見られる．フロイデンタールが，自ら小学校の教壇に立つなど,「現場で実務に従事する者」の中にまで入り込んでいったのに対し，クラインの方は，初等・中等教育の現場とは一線を画しており，助言者の立場を越えることはなかった．

このことは，両者の「教育的観点」の違いにも現われている．

フロイデンタールの観点が,「人が学ぶべき数学とは何か」という一般性の高いものであったのに対し，クラインの「教育的観点」は，必ずしも明示的ではない．少なくとも，先にあげた二部の講義録は，初等・中等教育で教えるべき数学を問うのではなく,「数学教員の教育のために必要なこと」を問うものであった[81].

ただ，このことは，数学教育に対するクラインの関心が限定的なものであったことの反映と見るべきであろう．クラインの主たる望みは，ドイツの数学と帝国の発展が世界史的意義を持ちうるために，両者の発展を同調させることにあった．数学教育は，そのための手段のひとつに過ぎなかったのかもしれない．

フロイデンタールが数学教育を科学たらしめようと心血を注いだのに対し，クラインの方は，講義録は残したものの，学的営みにまで体系化することがなかったことも，同様な理由からであろうか．

クラインと教育数学

クラインの数学教育への取り組みは，先述の通り政治色の強い動機に拠るものであったが,「教育の対象である数学は，ある理念 (原理) に従って再構成されるべきである」という立場をあきらかにしたことをもって，教育数学の先駆と呼ぶのに相応しい．

また，数学発展傾向の類型化や，学校制度の形態にまで踏み込んだ議論のありかたは，教育数学への，フロイデンタールとは異なるアプローチの仕方を示唆していると見ることもできる．

[81] クラインの当時，大学の数学科が属していた哲学部は，中等教育機関の教員養成を主務としていた．そして，[19] と [20] は，教員 (志望者) に対する講義がもとになったものである．

クラインが拓いてくれた広大な原野を，より一般性をもった方法論を確立しつつ，耕していくことが，教育数学の使命なのかもしれない．

参考文献

[1] アリストテレス『形而上学 (上)』(出 隆 訳・岩波文庫) 岩波書店 (1959) ．

[2] Bourbaki : *L'architecture des mathématiques*, In Le Lionnais, François, (ed.) *Les grands courants de la pensée mathématique*, Cahiers du Sud, Paris (1948). 35-47.

[3] Chace, A.B. 『リンド数学パピルス』平田寛監修, 吉成薫訳, 朝倉書店 (1985) ．

[4] Dewey, J.:*Democracy and Education*, Dover Publications (2004) ; Republication of "*Democracy and Education: An Introduction to the Philosophy of Education*", originally published by The Macmillan Company(1916).

[5] エリアーデ 『永遠回帰の神話』(堀一郎 訳) 未来社 (1963).

[6] 『ユークリッド原論』（中村幸四郎，寺坂英孝，伊東俊太郎，池田美恵訳 ）共立出版 (1971).

[7] 『エウクレイデス全集 第 1 巻』（斎藤憲，三浦伸夫 訳・解説 ）東京大学出版会 (2008).

[8] Evans, J. and Berggren J.L. : *Geminos's Introduction to the Phenomena*, Princeton University Press (2006).

[9] Freudenthal, H. :*Major Problems of Matematics Education*, Educational Studies in Mathematics 12 (1981) 133-150.

[10] —— : *Didactical phenomenology of mathematical structures*, Dordrecht, Reidel (1983).

[11] —— : *Revisiting mathematics education: China lectures*, Dordrecht, Kluwer Academic Publ., 1991.

[12] Grabiner,J.V.:*Is Mathematical Truth Time-Dependent ?*, The American Mathematical Monthly, Vol. 81, No. 4. (Apr., 1974), 354-365.

[13] Hadden, R.W. : *On the Shoulders of Merchants*, State University of New York Press (1994).

[14] Heath, T. : *A History of Greek Mathematics, Volume II*, Dover Publications, Inc. New York (1981)

[15] Høyrup, J. : *Jacopo da Firenze's Tractatus Algorismi and Early Italian Abbacus Culture*, Birkhäuser (2007).

[16] 蟹江幸博， 並木雅俊 『文明開化の数学と物理』岩波科学ライブラリー 150，岩波書店 (2008).

[17] 蟹江幸博， 佐波学 『エアランゲン就任講演にみるクラインの数学観について – 試論 – 』 三重大学教育学部紀要， 第 60 巻， 教育科学 (2009), 219-236.

[18] Kidd, I.G. (ed) : *Posidonius*, Volume I–III. Cambridge University Press (1972 / 1988 / 1999).

[19] Klein, F. , Schimmack, R. : *Vorträge über den mathematischen Unterricht an den höheren Schulen. Teil I. Von der Organisation des mathematischen Unterrichts*, Leipzig (1907). （日本語訳）『独逸に於ける数学教育』（林鶴一，武邊松衛訳） 大日本図書 (訂正再版 1922).

[20] —— : *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus* , Leipzig: Teubner (Reprints: Springer, Berlin, Vol.1, Reprint 4. Aufl. 1933. 1968 / Vol.2, Reprint 3. Aufl. 1925, 1968) (日本語訳)『高い立場からみた初等数学 1–4』(遠山啓 監訳) 東京図書 (1959/1960/1961/1961).

[21] A.A. ロング『ヘレニズム哲学』(金山弥平 訳) 京都大学学術出版会 (2003).

[22] H.I. マルー 『古代教育文化史』(横尾荘英・飯尾都人・岩村清太 訳) 岩波書店 (1985).

[23] Masi, M. (ed.) :*Boethius and the Liberal Arts*, Peter Lang Publishers Ltd., Bern (Awitzerland) (1981).

[24] Morrow, G.R. (tr.) : *A Commentary On the First Book of Euclid's Elements (1992 edition)*, Princeton University Press (1992).

[25] 室井和男 『バビロニアの数学』 東京大学出版会 (2000) ．

[26] 西村遠里 『数度霄談』(日本経済大典第十七巻所収) 啓明社 (1929). 再版：鳳文書館 (1992) ．

[27] 『プラトン全集 14 エピノミス (法律後編) 書簡集』(水野有庸・長坂公一 訳) 岩波書店 (1975).

[28] Proclus Diadochus : *In Primum Euclidis Elementorum Librum Commentarii*, ed. Friedlein, G., Leipzig : Teubner (1873).

[29] クインティリアヌス 『弁論家の教育 1 』(森谷宇一他訳) 京都大学学術出版会 (2005) ．

[30] 佐々木 力 『デカルトの数学思想』 東大出版会 (2003).
[31] 佐藤 健一 『明治初期における東京数学会社の訳語会の記事』 日本私学教育研究所調査資料 第218号 (1999).
[32] Sigler, L. E. (tr.) : *Fibonacci's Liber Abaci*, Springer, 2002.
[33] Streefland, L. (ed.) : *The legacy of Hans Freudenthal*, Dordrecht (1993).
[34] 田村松平 編 『ギリシアの科学』（世界の名著 第9巻）中央公論社 (1980).
[35] Thomas, I.(tr.) : *Greek Mathematical Works*, Volume I: Loeb Classical Library 335: Harvard University Press, 1991.
[36] Toomer, G.J. (tr.) : *Ptolemy's Almagest*, Princeton University Press (1998).
[37] 内山勝利 責任編集 『哲学の歴史 第2巻 帝国と賢者』中央公論新社 (2007).
[38] Walmsley, A.L.E., *A History of the "New Mathematics" Movement and its Relationship with Current Mathematical Reform*, University Press of America (2003).
[39] 藪内清 編 『中国の科学』（世界の名著第12巻）中央公論社 (1979).
[40] ——『中国天文学・数学集』（科学の名著第2巻）朝日出版社 (1980).
[41] 矢野道雄 編 『インド天文学・数学集』（科学の名著第1巻）朝日出版社 (1980).