

非対称積層構造材の振動特性解析法の研究* (FEM 平板モデルによる固有値解析)

松本 金矢*¹, 座古 勝*², 鈴木 浩平*³

A Study of Vibration Analysis of Unsymmetrically Laminated Composite Plates (Eigenvalue Analysis by using a Simple FEM Plate Bending Model)

Kin'ya MATSUMOTO, Masaru ZAKO and Kohei SUZUKI

On the assumption that the neutral surface of the bending shifts toward a stiffer side in unsymmetrically laminated composite plates, a thin plate bending model is generated without using the coupling stiffness. And a new finite element for eigenvalue analysis of these composite plates is formulated. As a result of numerical works, the natural frequencies and modal shapes of unsymmetrically laminated FRP square plates are obtained. A shaking test using fixed CFRP rectangular plates is performed. The experimental results are compared with the analytical ones by the proposed method. Each results agrees well with one another.

Key Words: Vibration, Finite Element Method, Eigenvalue Problem, Composite Materials, Unsymmetrical Lamination, Fiber Angle, Neutral Surface, Plate Element, Experimental Modal Analysis

1. 緒 言

強い材料異方性を有する繊維強化形複合材料は、積層されることによって高い機能性を生み出す材料である。現在のところ、その積層形態は成形上の制約から、対称積層が主流となっているが、航空機分野などでは積極的に非対称積層材の設計が行われている。

積層複合材の設計に欠かせない振動特性解析法についての研究は、これまで対称積層を対象としたものがほとんどであったが、非対称積層構造材に関する研究もいくつか報告されている⁽¹⁾⁽²⁾。これらはすべて、非対称積層による効果を面内変位と面外変位の連成としてとらえ、カップリング剛性を導入する手法を用いている。しかしながらこの手法では、薄肉平板であっても非対称積層されている場合にはシェルとして取扱わなければならない。その結果、この手法を有限要素法に応用する場合には、面内力と面外力の連成を考慮した曲面シェル要素を用いなければならない。単純な構造物の解析にも複雑なプログラムを必要とし、計算時間のうえで合理性を欠くことになる。

本研究では、このような問題点を改善し、非対称積層された複合材料薄肉平板を、面内-面外変位の連成を導入するのではなく、面外変位だけを考慮した板曲げ問題としてモデリングする新たな手法を提案する。そしてこの手法を用いて、以前に報告した対称積層材の振動特性解析法⁽³⁾と同程度の規模および計算時間で、非対称積層された長方形板の振動特性解析をパーソナルコンピュータ上でも可能とする有限要素法固有値解析プログラムを開発する。

さらに、周辺固定されたCFRP非対称積層板の加振実験を行い、強い異方性を有する積層板の振動特性を明らかにする。その結果得られた振動特性を、開発したプログラムによる固有値解析結果と比較し、本手法の有効性を検証する。

2. 非対称積層材のモデリング手法

直交異方性を有する複合材料単層材を、任意の角度で非対称に積層した薄肉積層平板の、板曲げ問題における応力-ひずみ関係のモデリング手法を提案する。

N 枚の直交異方性単層材を、非対称に積層した平板の座標系を図1に示すようにとる。変位は x 方向の変位 w のみであるとする。その一般化された曲げひずみ $\{\epsilon\}$ は、

* 原稿受付 平成3年12月19日。

^{*1} 正員, 三重大学教育学部 (〒514 津市上浜町 1515)。

^{*2} 正員, 大阪大学工学部 (〒565 吹田市山田丘 2-1)。

^{*3} 正員, 東京都立大学工学部 (〒192-03 八王子市南大沢 1-1)。

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (1)$$

となり、このひずみに対する一般化応力 $\{\sigma\}$ は、次のような x, y 方向の曲げおよびねじりモーメントとなる。

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (2)$$

本研究で提案する非対称積層板のモデリング手法の最も重要な特徴は、積層板に曲げモーメントが作用した場合、発生するたわみの中立面が x, y 方向でそれぞれ異なった位置にくると仮定することである。すなわち、中立面が中央面に対して剛性の高い側に位置するという仮定を導入する。

第 k 番めの単層材の板厚を t_k とし、その x 方向の縦弾性係数を E_{xk} 、積層材の上面から単層材までの距離を h_k とすると、 x 軸方向の曲げモーメントに対する中立面の位置 H_x は、各層の剛性の釣合いから、

$$H_x = \frac{\sum_{k=1}^N E_{xk} h_k t_k}{\sum_{k=1}^N E_{xk} t_k} \dots\dots\dots (3)$$

となる。ただし、

$$h_k = \sum_{s=1}^k t_s - t_k/2 \dots\dots\dots (4)$$

である。したがって、 x 軸方向曲げモーメントに対する中立面から第 k 番めの単層材までの距離 l_{xk} は、

$$l_{xk} = H_x - h_k \dots\dots\dots (5)$$

となる。同様に y 軸方向の曲げモーメントに対する中立面からの距離 l_{yk} は、

$$l_{yk} = H_y - h_k \dots\dots\dots (6)$$

である。ただし、 y 方向のヤング率を E_{yk} とすると、

$$H_y = \frac{\sum_{k=1}^N E_{yk} h_k t_k}{\sum_{k=1}^N E_{yk} t_k} \dots\dots\dots (7)$$

として、 y 軸方向の曲げモーメントに対する中立面の位置 H_y が計算される。

第 k 番めの単層材の中央面からの距離 δ における面内ひずみと曲げひずみとの関係は、図 2 より、

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} (\delta + l_{xk}) \\ \varepsilon_y &= -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} (\delta + l_{yk}) \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} (\delta + l_{xk}) + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} (\delta + l_{yk}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

となる。

ここで、面内応力と面内ひずみとの関係を、

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} + \tau_{yx} \end{Bmatrix} = [D]_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (9)$$

とする。一般にせん断応力は $2\tau_{xy}$ と表現されるが、ここでは、 x, y 方向それぞれに分けて考える。

第 k 番めの単層材における、曲げ、ねじりモーメントと面内応力との関係は、

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \int_{-\frac{t_k}{2}}^{\frac{t_k}{2}} \sigma_x (\delta + l_{xk}) d\delta \\ M_y &= \int_{-\frac{t_k}{2}}^{\frac{t_k}{2}} \sigma_y (\delta + l_{yk}) d\delta \\ M_{xy} &= \int_{-\frac{t_k}{2}}^{\frac{t_k}{2}} \{ \tau_{xy} (\delta + l_{yk}) + \tau_{yx} (\delta + l_{xk}) \} d\delta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

であるから、これらに式(8)、(9)を代入して積分し、各層でのそれらの値を加え合わせるにより、非対称積層材の応力-ひずみ関係が次のように得られる。

$$\{\sigma\} = [D_B] \{\varepsilon\} \dots\dots\dots (11)$$

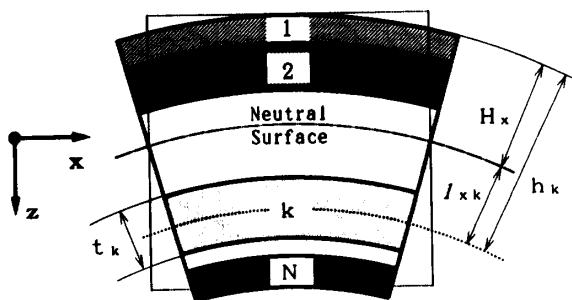


図 1 非対称積層板の座標系

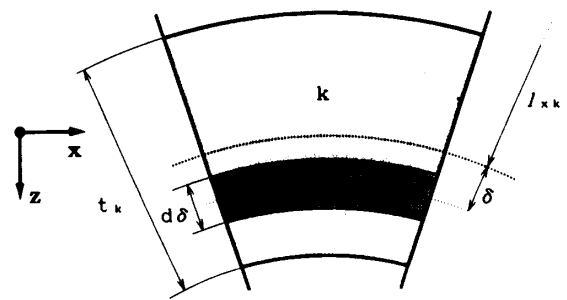


図 2 第 k 番め層の座標系

ただし,

$$[D_B] = \sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} \left(\frac{t_k^3}{12} + l_{xk}^2 t_k \right) D_{11} & \left(\frac{t_k^3}{12} + l_{xk} l_{yk} t_k \right) D_{12} & \left(\frac{t_k^3}{12} + \frac{l_{xk}^2 + l_{xk} l_{yk}}{2} t_k \right) D_{16} \\ & \left(\frac{t_k^3}{12} + l_{yk}^2 t_k \right) D_{22} & \left(\frac{t_k^3}{12} + \frac{l_{xk} l_{yk} + l_{yk}^2}{2} t_k \right) D_{26} & \dots \\ \text{Symmetrical} & & \left\{ \frac{t_k^3}{12} + \frac{(l_{xk} + l_{yk})^2}{4} t_k \right\} D_{66} \end{bmatrix} \quad (12)$$

である。ここで、 $D_{11} \sim D_{66}$ は式(9)に示される第 k 番めの単層材の、 x, y 方向の応力-ひずみ関係マトリックス $[D]_k$ の各成分を表す。

対称積層材の場合には、その曲げに対する中立面は積層材の中央面に一致し、中立面から各単層材までの距離 l_{xk}, l_{yk} は同一の値 l_k となる。その場合の応力-ひずみ関係マトリックスは、前報⁽³⁾で提案した対称積層材の応力-ひずみ関係マトリックスに一致することから、本報で提案しているモデリング手法が、対称積層材をも包含していることがわかる。

3. 数値解析結果

非対称積層材の例として、文献(2)に用いられている E ガラス繊維強化エポキシ材 [$E_1=60.7$ GPa, $E_2=24.8$ GPa, $G_{12}=12.0$ GPa, $\nu_{12}=0.23$] を非対称積層した周辺支持正方形板を取り上げ、その固有値解析を行う。積層状態は $(0^\circ, \theta^\circ)$ の 2 層非対称積層で、 θ を 0° から 90° まで変化させた場合の固有振動数を求める。比較のために、 0° から 90° までの繊維角度を有する単層板の固有振動数も調べる。また、固有振動モードについても検討する。

固有値解析に用いた分割は、縦横ともに 6 分割であ

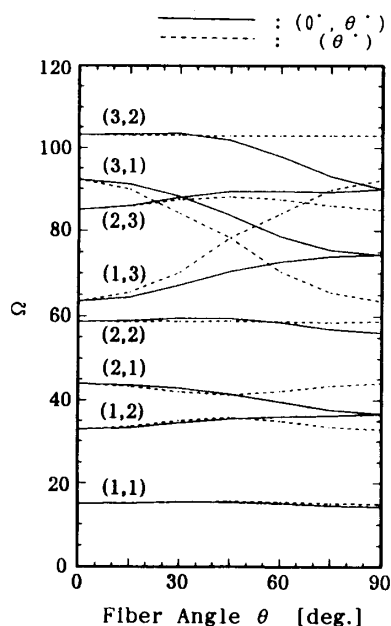


図 3 Eglass-epoxy 積層正方形板の固有振動数

り、各積層角度について一次から八次までの固有振動数を求めた。図 3 は、積層角度を横軸にとり、縦軸には次式によって無次元化されたパラメータ Ω をとって、解析結果をプロットしたものである。

$$\left. \begin{aligned} \Omega &= \omega a^2 (\rho h / D)^{1/2} \\ D &= E_1 h^3 / 12 (1 - \nu_{12} \nu_{21}) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

ここで、 ω は固有値、 a は正方形板の辺の長さ、 ρ は密度、 h は板厚である。図 3 では、実線が非対称積層板の場合であり、破線が単層板の場合を示す。また図中の数値は振動モードを示している。

これによると、 $(1, 2)$ と $(2, 1)$ 、 $(1, 3)$ と $(3, 1)$ さらに $(2, 3)$ と $(3, 2)$ の各モードが積層角度が大きくなるに従い接近し、積層角度 $(0^\circ, 90^\circ)$ において同一の固有振動数を示していることがわかる。これは $(0^\circ, 90^\circ)$ に非対称積層された正方形板では、これらのモードはそれぞれ重根となるためであり、非対称積層板特有の振動特性が正しく解析されていることを示している。

さらに図 4 には、 0° の単層板と $(0^\circ, 30^\circ)$ $(0^\circ, 60^\circ)$ $(0^\circ, 90^\circ)$ の非対称積層板の $(1, 2)$ および $(2, 1)$ の振動モードの解析結果を示す。

これによると、積層角度が大きくなるにつれて、各モードの節の傾きが大きくなっている。これは、 0° 層と斜交積層された層との剛性の比により発生する現象であると考えられ、このような非対称積層板の振動モードの解析においても、本手法が有効であることを示すものである。

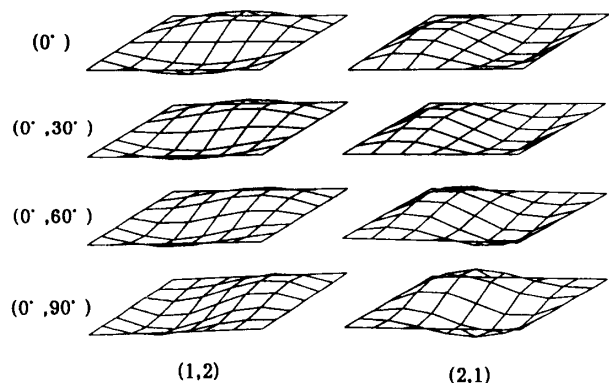


図 4 Eglass-epoxy 積層正方形板の固有モード

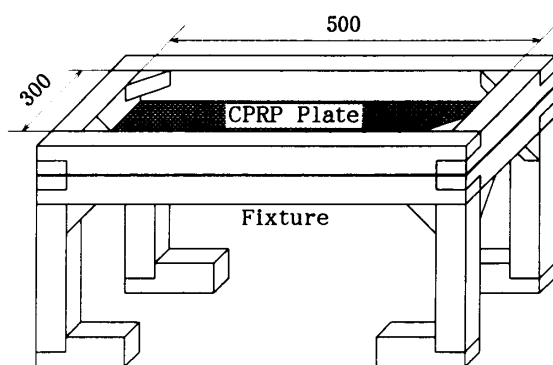


図 5 CFRP 積層長方形板および周辺固定持具

4. CFRP 平板の加振実験

提案した手法の有効性を確認するために、周辺を固定した CFRP 積層長方形平板の加振実験を行った。

試験体は、プリプレグシート 8 層を直交積層したもので、寸法は $580 \times 380 \times 1.2$ [mm] であり、これを 40×40 [mm] 軟鋼製周辺固定枠ではさみ、さらに 16 個の万力で締め付けることにより周辺固定条件を実現した。加振実験装置を図 5 に示す。積層構成は、 $[0_2/90_2]_s$ 、 $[90_2/0_2]_s$ 、 $[0_4]+[90_4]$ の対称積層 2 種類、非対称積層 1 種類の計 3 種類である。なお、対称積層板はプリプレグシートを積層し、オートクレーブ成形したものであり、非対称積層板は、対称積層板を常温で接着することにより製作した。

加振実験では、小形ロードセルによりインパルス波加振を行い、試験体上に設定した 10 点の応答を、レーザ変位計により非接触状態で測定した。入力および応答データを FFT アナライザに取込み、伝達関数を計算し、多点参照曲線適合法⁽⁴⁾により固有振動数を同定した。また固有モードは、各モードの固有振動数に対応する正弦波を、試験体下部に設置したスピーカに入力し、非接触状態で音圧による加振を行い、試験体上に酸化ケイ素の粉末を散布して振動の節の位置を調べる、いわゆるクラドニ法により確認した。

一方、開発した有限要素法により実験と同じ条件で固有値解析を行い、実験結果と比較した。解析は横 15、縦 9 の等分割の 160 節点、135 要素とし、境界条件は周辺固定とした。

実験により得られた固有振動数と解析により得られた固有振動数の比較を表 1 に示す。これから、積層構成により固有振動数が大きく変化する状態が明らかになり、しかも同じモードの固有振動数を比較すると、非対称積層板が最も低くなっていることもわかる。また、実験結果と解析結果の誤差は、対称積層、非対称積層ともにほぼ 10% 程度に収まっており、強い異方

表 1 CFRP 積層長方形板の固有振動数

Lamination	Mode	Experiment [Hz]	Analysis [Hz]	Error [%]
$[0_2/90_2]_s$	1. 1	64.8	61.9	-4.5
	2. 1	117.6	115.6	-1.7
	1. 2	157.6	138.7	-12.0
	2. 2	191.7	171.9	-10.3
	3. 1	218.1	209.5	-3.9
	3. 2	275.1	246.0	-10.6
$[90_2/4_2]_s$	1. 1	110.9	105.8	-4.6
	2. 1	127.6	115.8	-9.2
	3. 1	159.0	141.9	-10.8
	4. 1	212.1	188.5	-11.1
	5. 1	284.7	255.7	-10.2
	1. 2	308.9	289.5	-6.3
$[0_4]+[90_4]$	1. 1	54.3	56.4	3.9
	2. 1	78.6	76.4	-2.8
	3. 1	126.7	117.7	-7.1
	1. 2	145.7	146.2	0.3
	2. 2	168.4	157.5	-6.5
	4. 1	200.0	179.3	-10.4

性を有する CFRP 積層板の加振実験結果との比較であることを考慮すれば、よい一致を示しているといえる。

5. 結 言

非対称積層された複合材料構造材のための簡便なモデリング手法を提案し、それを用いた有限要素法固有値解析プログラムを開発した。その手法の有効性を確認するために、周辺を固定された CFRP 積層長方形板の加振実験を行い、提案した手法による解析結果と比較した。

実験結果から、積層構成により大きく変化する固有振動数など、CFRP 積層板の振動特性が明らかとなり、また、解析結果と実験結果がよい一致を示すことから、本手法が強い異方性を有する非対称積層複合材料の振動特性解析に対して有効であることが検証された。

本研究を行うに当たり、実験のご指導をいただいた東京都立大学講師・吉村卓也、同大学助手・三森友彦両氏に感謝する。実験にご協力いただいた同大学学生・和田昭久君に感謝する。また、試験体を提供していただいた東燃(株)総合研究所に謝意を表する。

文 献

- (1) Jones, R. M., Buckling and Vibration of Unsymmetrically Laminated Cross-Ply Rectangular Plates, *AIAA J.*, 11-12(1973), 1626.
- (2) 一宮・成田・丸山, 非対称積層された FRP 積層長方形板の振動解析, 機械力学講演論文集, A-906(1990), 181, 日本機械学会.
- (3) 鈴木・松本・座古, パーソナルコンピュータ用の対称積層構造材の振動特性解析法の研究, 機論, 55-511, C(1989), 533.
- (4) 吉村・長松, モード解析に関する研究, 機論, 56-523, C(1990), 527.