決定不能命題の哲学

決定不能命題の哲学

山　岡　悦　郎

要旨：決定不能命題の哲学的前提は実無限的実在論である。

理論Ｔの命題の中に、Ｐも「Ｐでない」も共にＴにおいて証明することができないというような命題Ｐが存在するとき、Ｔは（強い意味で）不完全であるといわれる。またそのようなＰは「決定不能命題」とよばれる。数学の中にはそのような命題は存在しないだろうと思われていたが、1931年、大方の予想を裏切り、自然数の理論を一部として含む公理的理論の中には決定不能命題が存在するということがゲーデルによって証明された。これがゲーデルの第一不完全性定理である。続いて1933年、タルスキがある種の集合算公理系の中に決定不能命題の存在することを証明し、1977年に至って、パリスとハリントンの二人は、ゲーデルとは違うやり方で、自然数公理系の中に決定不能命題の存在することを証明した。

証明という論理的思考の力を信ずる人は、どのような数学的命題Ｐについても、Ｐと「Ｐでない」のどちらかはかならず証明できるはずであると思うかもしれない。ゲーデルの定理は数学者にとって大きな衝撃であったといわれる。これは、数学者は決定不能命題など数学には存在しないと考えていたためであろう。またゲーデルの場合は、第一不完全性定理の系として、数学理論Ｔにおけるｔの無矛盾性証明は不可能であるという内容の第二不完全性定理が導出される。この定理は人間の論理的思考には限界があるということをより直接的に示すものであるので、決定不能命題の存在はさらに驚くべき結果となった。

ある主張と哲学とのかかわりは、その主張の哲学的含意とその主張の哲学的前提の少なくとも二つの視点から考察することができる。決定不能命題の存在は、それ自体が一つの哲学的主張なのであり、またそこからさらに人間の論理的思考の限界を導き出すこともできよう。では決定不能命題の存在証明の哲学的前提とはどのようなものであろうか。以下において、上記三つの決定不能命題の存在証明を少しばかり検討することを通して、この問題を考えてみよう。

Ｉ　ゲーデルの第一不完全性定理

1931年、当時24歳のチェコスロバキア生まれの数学者・哲学者ゲーデルは論文「プリンキピア・マテマティカ及び関連した体系の形式的に決定不能な命題についてＩ」を発表して、現在「第一不完全性定理」とよばれている定理を証明した。この定理は一般的には以下のように述べられる。

> 自然数の理論を一部に含むある数学的な理論がもし矛盾を含んでいないならば、その理論における命題で、その理論の公理からは、肯定も否定も共に証明できぬような命題がかならず存在する。

第一不完全性定理は、自然数の理論を一部に含む数学理論ではかならず決定不能命題が存在すると主張するものである。

ゲーデルの定理は超難解な定理であるといわれる一方で、その粗筋だけであればそれほど難しくはないといわれたりもする。ここでは以下の論述に必要と思われることがらを中心に簡単に定理の構造を述べてみよう。

まず指摘すべきは、かれの定理は通常の数学的定理とは異なりメタ数学的定理であるということである。通常の「数学」とメタ数学は区別される。その区別を数学的議論に導入して重要な成果を上げた人としてポーランド生まれの数学者・哲学者タルスキが知られている。かれはある言語表現Eについて何事かを語る言語表現Fが存在するとき、EをFに対する対象言語とよび、FをEに対するメタ言語とよんだ。たとえば1+1=2という文が対象言語的文であれば、「“1+1=2”は真である」という文はメタ言語に属する文となる。一般に、自然数その他の数学的概念や1+1=2その他の数学的命題は対象言語によって記述される「数学」的表現であり、それらの数学的表現について何事かを語る表現は「メタ数学」的表現である。したがって、数学的命題について用いられる「真」「証明」その他の語はメタ数学的語ということになる［Tarski 1935］。第一不完全性定理は「ある数学的命題は証明不可能であり、同時にそれの否定命題も証明不可能である」と述べているのであるから明らかにメタ数学的命題を主張している定理である。

さて、ゲーデルの研究の舞台となるのは公理化された自然数の理論Pである。かれは神業としかいいようのない革命的な方法を用いて議論を展開した後、カントールの対角線論法に基づくやり方で「Uは証明可能でない」という内容の自己言及的命題UがPにおいて存在することを証明する（対角化定理)。そして続けて、Uとそれの否定命題は共にPにおいては証明することができないということ、つまりUはPにおける決定不能命題であることを証明する。そしてそこのところでゲーデルは、Uはうそつきのパラドックスを生み出す「発言Sは真でない」という内容の自己言及的発言Sと類似的であることを指摘している。ゲーデルの定理は数学を舞台にしてうそつきのパラドックスを作り直したのだといわれる所以である。

さらにゲーデルは以下のように議論を続けている。Uは証明可能でないことが証明できるのであるから、Uは証明可能でないということは真である、つまり事実として、Uは証明可能でない。したがって、Uは証明可能でないという命題、つまり命題Uは真である。このことから、Uは真ではあるが証明可能でない命題であることがわかる。

このことはゲーデルとは別につぎのように説明することもできる。まず、Uは真か偽のいずれかである。そこで真だと仮定してみる。それは「Uは証明可能でない」が真であるということである。よって、Uは証明可能でない。つぎにUは偽であると仮定してみる。それは「Uは証明可能でない」が偽であるということである。よって、Uは証明可能である。だが論理学的には、証明可能な命題は必ず真である。だから二番目の仮定は起こりえないのである。したがって、Uは真であり同時に証明可能でない命題であることになる。要するに、決定不能命題は「肯定も否定も共に証明できない命題」として説明できるだけでなく「真ではあるが証明できない命題」として説明することもできるのである。こうしたことから、ゲーデルの第一不完全性定理は「自然数の理論を一部に含むある数学的な理論がもし矛盾を含んでいないならば、その理論における命題で、真ではあるが証明することはできないような命題がかならず存在する」という仕方で表現されるときがある。

ゲーデルの革命的アイデアはただ驚嘆するほかないが、それに基づく数学的議論はきわめて厳密な推論の連鎖であって、文句のつけようのないものである。ただ哲学的観点からみるなら

ば、第一不完全性定理の証明そのものに関しては、もっとも重要な決定不能命題Uの存在を証明するときに用いられている「対角線論法」が気にかかるのである。

Ⅱ　対角線論法と実無限

対角線論法は、カントールが無限集合としての自然数の個数よりも同じく無限集合としての実数の個数の方が多いということを証明するときに用いた証明法である。これは無限といっても大きさの違いがあるということであり、数学者の多くは受け入れているといわれるが、哲学的には異論のありうる主張である。

さて、対角線論法とは大まかに以下のような論法である。まず、自然数は実数の一部であるから、すべての実数の個数はすべての自然数の個数より少ないことはない。つぎに無限個の自然数と無限個の実数がともに存在するとした上で、もし自然数の個数と実数の個数が同じであれば、自然数と実数の間には一対一の対応関係が成立するはずであるが、対角線の概念を使用することでこの一対一の対応関係の成立しないことを示すことができる。したがって、すべての実数の個数の方がすべての自然数の個数よりも多い。

この論法はきわめて初等的なものであるが、威力は絶大であり、いろんな場面で用いられている。そして改めてこの論法の構造を考えてみると、そこで前提されているのは「無限個のものが存在する」という考え方である。カントールの例でも、無限個の自然数と無限個の実数が存在するとの前提の下に議論は展開されている。だがこの前提は無条件に認められるものであろうか。

対角線論法が前提している無限観は一般に「実無限」とよばれるものである。無限の存在をどう理解するかについてはアリストテレスの時代から二つの見方があった。一つは、無限に大きなものや無限に多くのものはそれ自体としてわれわれから独立に存在するという立場である。長さが1センチの線分をつぎつぎに2分割していくと、その2分割点は無限に多くあり、しかもその線分上に存在しているように思われる。この場合の無限個の2分割点は実際に存在している無限、つまり実無限であると解せられる。しかしながら、有限なるわれわれには、1センチの線分上に無限個の2分割点が存在するかどうかは正確にはわからないのであり、「存在するであろう」と想像したり、「存在することができる」と主張することしかできないのだとも考えられる。自然数の場合でも、どんなに大きな自然数をとっても必ず「それより大きなつぎの数」があるのであり、自然数の世界は膨張していくのであるから、無限個ある自然数の全体を捉えることはできないように思える。この立場では、無限の世界はまさに「限りが無い」のであり、常態にとどまることはできないのであるから、その全体は想像の世界にのみ、可能性としてのみ存在するということになろう。可能性としての無限は「可能無限」といわれる。

無限の存在をどう理解するかは時間的にも空間的にも有限な存在者である人間にとって困難な問題である。現実に存在するようにも思えるし可能性としてのみ存在するようにも思える。この二つの無限の対立は現在でもみられ、数学の世界でもそうである。ただ多くの数学者は実無限の立場に与しているといわれる。優勢な実無限的数学に対して少数の数学者が可能無限的数学を構築せんと努力しているのが現状である。ゲーデルの第一不完全性定理は実無限の立場に基づく対角線論法を用いて証明されている。よって、究極的にはかれの定理は実無限の立場に立つ定理であるということを忘れてはならない。

III　タルスキによる集合算公理系の不完全性証明

ゲーデルの定理発表から2年後の1933年、ゲーデルの友人であったタルスキは「形式化された言語における真理概念」と題する画期的な論文をポーランド語で発表した。かれはそこで真理の定義可能性を問題とし、日常言語では不可能であるが、ある種の人工的な数学的言語では可能であることを示した。そしてかれは、真理の定義が可能な数学的言語によって記述される理論のうちで∀x（x⊆x）を含む5個の公理から作られる集合算公理系では、真理の定義を用いるならば矛盾律や排中律が証明できるだけでなく、この体系の中には真ではあるが証明できない命題の存在すること、つまりこの体系は不完全であるということを示した。

さて、この証明の中で使用されている真理の定義であるが、この定義はより基礎的概念としての「満足」概念を用いて定義され、説明されている。満足概念はつぎのような例により直観的には理解できるだろう。

対象列〈雪〉は命題関数「x_1は白い」を満足する。

対象列〈富士山、白山〉は命題関数「x_1はx_2より高い」を満足する。

対象列〈6、5、7〉は命題関数「x_1は x_2とx_3の中間である」を満足する。

………　　　　　　………

そして、ここで詳細を述べることはできないが、かれはある技術的理由から、「対象の無限列〈f_1、f_2、…〉が命題関数$F(x_1$、x_2、…、$x_n)$を満足する」を基本とし、この「対象の無限列」という概念を使用して真理を定義しているのである。タルスキによって開拓された、満足概念やそれを用いての真理の定義は現代論理学では財産としてそのまま受け入れられている。

当然かれの場合も、無限集合$\{f_1$、f_2、…$\}$の存在はいわば自明視され、この実無限的、実在論的前提の下に議論が展開されているのである。

IV　パリス・ハリントンの定理

第一不完全性定理に関しては何か釈然としないものが感じられる。この定理によれば、数学理論の中には、肯定も否定も共に証明できない命題、つまり決定不能命題Uが存在するとされるが、このUは「Uは証明可能でない」という内容のメタ数学的命題である。つまり、それは通常の数学的命題ではない。だがわれわれが決定不能命題として期待するのは通常の数学的命題、たとえば、$1+1=2$のような命題ではなかろうか。このような通常の数学的命題の中に決定不能命題が存在することを示したというのであれば、ゲーデルの定理は疑いもなく天才のみが生み出しうる定理である。この点に関して第一不完全性定理に不満が感じられるのである。

ところで、数学者にも上のような不満を持つ人が少なからずいたようである。ゲーデルの定理が知られるや、通常の数学的命題の中に決定不能命題を見つけ出そうとする努力が始まったが、なかなかその努力は実らなかった。

そうこうするうちに時間は流れ、定理発表から46年後の1977年、アメリカの二人の数学者パリスとハリントンの共著論文「ペアノ算術における数学的不完全性」が発表され、そこにおいて、ペアノ算術（以下、PAで表す）すなわち、公理的自然数論の中に通常の自然数的命題で真ではあるが証明できない決定不能命題の存在することがようやく示されたのである

[Paris-Harrington 1977]。これはパリス・ハリントンの定理（以下、PHで表す）といわれている。この定理は素朴な立場（たとえば集合論）で考えれば証明することができる。したがって、真である。だが自然数に関する命題であるにもかかわらず、PAにおいては（公理から）証明することはできないのである。この定理の証明法は画期的なものとされ、その後の研究に大きな影響を与えることとなった。つぎにこの定理について二つのことを指摘しておきたい。

一番目はこの定理の前提的立場に関することである。

PHは有限ラムジー定理のちょっとした拡張としてえられる。有限ラムジー定理とはラッセルの後継者と目されたイギリスの数学者・哲学者ラムジーの証明した組み合わせ数学における定理である。かれは1930年の論文「形式論理学のある問題について」において、まず無限ラムジー定理を証明し、そしてその結果を用いて有限ラムジー定理を証明したのである[Ramsey 1930]。ちなみに有限ラムジー定理の方はPAにおいて証明することができる。

ここで問題となるのは、無限ラムジー定理の証明において公理的集合論における選択公理と無限公理が用いられているということである。無限公理はまさしく「無限集合は存在する」と述べる公理である。つまり実無限の立場を表明する公理である。選択公理は「無限個の集合のそれぞれから元を選び出して、一つの集合を作ることができる」と述べる公理である。これは明らかに無限公理を前提している公理である。だが、選択公理が問題なく受け入れられたのかといえばそうではない。ツェルメロによって1904年に初めてこの公理が使用されたとき、直ちにその正否をめぐって、ボレル、ベール、ルベークそれにアダマールといった20世紀を代表する数学者たちの間で激しい論争が戦わされたほどである。田中尚夫氏によれば、他の集合論の公理はわれわれの素朴な集合観にかなりマッチしたもので、ユークリッド幾何学の公理におけるように信じて下さいといわれればわれわれはハイと答えられるものである。しかしながら選択公理はラッセルも疑問を呈しているように、かなり議論の余地ある主張なのである[田中 1987, 1988]。またバナッハとタルスキの二人は、選択公理を認めると、そのことから体積に関するパラドックスが導かれることを証明した（バナッハ・タルスキのパラドックス）。このように、PHは無限公理と議論の余地ある選択公理という実無限的な立場を採用している定理なのである。

二番目は決定不能命題に関することである。

かれらの論文では、PHはまさに定理として証明されている。だからPHは真であるとされる。そして続けて「PHはペアノ算術PAにおいて証明可能でない」というメタ的命題が証明されている。こうしたことから、PHは真ではあるが証明可能でない決定不能命題であるといわれるのである。ここで、理論SにおいてPHは証明されるとしてみる。この場合、SがPAであることはできない。なぜなら、そのときは、PHはPAにおいて証明可能であると同時に証明可能でないという矛盾を生み出すことになるからである。ではPAとは異なるSとはどのような理論であるか。かれらの共著論文では、PHの証明は通常の公理的集合論ZFにおいて「PHが成立しないと仮定すれば矛盾が生じる、よってPHは成立する、よってPHは真である」という論法で遂行されている。ではZFとPAとはどう異なるのか。かれらによれば、PAはZFの公理の中の無限公理をその否定と置きかえてえられるものと（自然数についての命題に関しては）同値である。つまり、無限公理はZFでは成立するがPAでは成立しない。PHは、背理法的証明においては無限公理に基づく無限ラムジー定理を用いて証明されるのでZFでは証明できる（よって真である）が、無限公理の成立しないPAでは証明できないというの

は当然ともいえよう。これは要するに、PH は真ではあるが証明可能でない命題であるというのは「PH は（ZF では）真であるが（PA では）証明可能でない命題である」ということであり、それはまた「PH は（ZF では）証明可能であるが（PA では）証明可能でない命題である」ということである。理論が異なるのであれば、一方の理論では真であるとか証明可能であるといわれる命題が他方の理論では証明可能でないといわれることはありそうであり、特に不思議な感じはしない。これをゲーデルの U と比べてみよう。

ゲーデルの場合は「U の証明不可能性が証明できる、よって事実として U は証明可能でない。したがって、U は証明可能でないと主張する命題は真である、すなわち U は真である。ゆえに、U は真ではあるが証明可能でない命題である」という論法がとられている。ここで理論 A において U の証明可能性が証明されたとすると、A において U は証明可能でない、よって、A において「U は証明可能でない」と述べる命題 U は真である。つまりゲーデルの U の場合は、U の真理性が U の証明可能性に必ずしも基づいていないので、そこにおいて真であるといわれる理論と証明可能でないといわれる理論が異なる必要はかならずしもないと解せられる。それに対して PH の場合、そこにおいて真であるといわれる理論と証明可能でないといわれる理論は異なる必要があるように思われる。この違いは無視することはできない。このように、決定不能命題 PH については素直に受け入れ難い点があるのではなかろうか。

V　無限観と数学

さて上で見たように、ゲーデルの第一不完全性定理は実無限の立場からの主張である。しかしながら、そこでの決定不能命題は数学的命題というよりはメタ数学的命題である。またその後、純粋な数学的決定不能命題として見出されたパリス・ハリントンの定理も実無限の立場からのものである。さらにタルスキの示した決定不能命題の存在も実無限的な実在論を前提していた。したがって、決定不能命題の評価は実無限の評価に還元されることになる。われわれは実無限を受け入れるべきなのであろうか。

実無限か可能無限かという哲学的問題についてはいまだに決着はついていないというべきである。最初に無限をこの二種に分けたアリストテレスは可能無限を支持した。そしてかれの無限観は長い間西欧の思想界を支配してきたといってよい。無限の学といわれる数学でも事情は同じであった。そのような可能無限重視の風潮の中にあって、19 世紀前半に実無限派の数理哲学者ボルツァーノが登場し、かれを継ぐ形で 19 世紀後半、カントールがようやく実無限の立場に立つ集合論を展開するようになる。しかしこの集合論に関していえば、クロネッカーやポアンカレなどの数学者は当初から批判的であったが、他方において、ワイエルシュトラスやヒルベルトなどの数学者は全面的に支持したのであった。このように評価が半ばする中で、この集合論にはパラドックスの存在することがラッセルその他によって明らかにされた。だがヒルベルト一派はそのことで実無限の立場を放棄するということはせず、公理的集合論を構築することでパラドックスの問題を解決するという方向を選んだ。そして 20 世紀に入ってまもなく、カントール・ヒルベルト流の実無限的数学に対抗する形で可能無限の立場に立つ数学者ブラウワーの直観主義数学が台頭してきて、これらの二つの数学は激しい対立・抗争を生み出すことになる。その後いくらかの変遷をへて、実無限の立場が優勢であることは変わらないが、コンピューター理論の進化に伴い、直観主義的な構成的数学が見直されてくるようになる。数

学界の現状について、竹内外史氏は、ブラウワーおよびその後継者たちは、この直観主義に基づいて大きさから深さからすべての点において現代数学に匹敵する直観主義の数学が建設できることを実証したと述べておられる［竹内 1982］。これはある意味では、この二種の数学は、理論上は同等のものであるということである。

このように、数学の世界では実無限の立場だけが認められているのではない。このことは留意しておかねばならない。

VI　決定不能命題の哲学的前提

不完全性定理は難しいとよくいわれる。ラッセルや哲学者ウィトゲンシュタインさらには、ワイエルシュトラスの助手を務めたこともある哲学者フッサールでさえよく理解していなかったといわれることがある。それどころか数学界のノーベル賞といわれるフィールズ賞を受賞した大数学者小平邦彦氏でさえ、ゲーデルの定理は自分には難しかった、何とかわかったつもりだが自信はないと述懐しておられる［小平 2000］。この定理の理解しにくさの理由はいろいろあるのだろうが、もしかしたら、その根底に実無限の考え方が潜んでいるからであるかもしれない。なにしろ、カントールの集合論では「自然数全体の個数と正の偶数全体の個数は同じである」とか「無限には大きさの違いがある」といったような、直観的には理解しがたい定理が証明できてしまうのである。また数学者の森毅氏は対角線論法について、背理法のインチキクササの典型で、なにやらだまされたような気がすると書いておられる［森 1976］。他にもこの論法の不自然さ・わかりにくさを指摘する人は少なくない。

ゲーデルは有名な哲学的論文「ラッセルの数学的論理学」（1944）や「カントールの連続体問題とは何か」（1964）さらには 1944 年のギブス講演において、物体が存在するように、無限集合その他の数学的対象は人間精神から独立に存在するのであり、われわれは数学的直観によってそれを捉えるのだという「数学的実在論」の立場を明確に標榜したことで知られている［Feferman 1986］。かれの定理は実在論という哲学の上に構築されたものである。だがそれは、第一不完全性定理というのは、実無限とか対角線論法といった異論もある実在論的前提に基づく定理であり、論理法則のような誰でもが承認する絶対的前提の上に証明される定理、その意味で絶対的定理なのではないということを意味する。またこのことはタルスキやパリスとハリントンの場合についても当然あてはまる。今後は、天才的論理学者による実無限の実在論に基づかない決定不能命題の発見を期待したいものである。

参考文献

Barwise, J. (ed.), *Handbook of mathematical logic*, North-Holland, 1977.

Feferman. S. (ed.), *Kurt Gödel Collected Works* I－III, Oxford Univ. Press, 1986.

Gödel, K., "Über formal unentscheidbarer Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I", 1931, in Feferman 1986.

Paris, J. and Harrington, L., "A mathematical incompleteness in Peano Arithmetics, 1977, in Barwise 1977.

Ramsey, F. P., "On a problem of formal logic", *Proceedings of the London Mathematical Society* (2) vol. 30, 1930.

Tarski, A., Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen, *Studia Philosophica* I, 1935.

小平邦彦『怠け数学者の記』岩波書店，2000.
竹内外史『数学的世界観』紀伊国書店，1982.
田中尚夫『選択公理と数学』遊星社，1987.
田中尚夫『公理的集合論』培風館，1988.
森毅『無限集合』共立出版，1976.