三重大学教育学部研究紀要　第53巻　自然科学（2002）　1－6頁

劉徽の円周率計算に関する一考察*

上垣　　渉**・石崎　麻里***

A Study on the Calculation of π by Liu Hui

Wataru UEGAKI and Mari ISHIZAKI

[1]　問題の所在

すでによく知られているように、魏の劉徽は『九章算術』に註釈を付け、その中で、円周率の値を一層精密に求めている。ところが、劉徽によるこの円周率計算の過程において、無限等比級数の求和法が使用されたか否かという問題に関しては今なお定説がないと言われている。本節では、この問題をめぐる状況について一定の整理を行う。

劉徽は『九章算術』の巻第一「方田」の問題32、

「又有圓田周一百八十一歩徑六十歩三分歩之一　問為田幾何」[1)]

（訳：また周181歩、直径63歩と$\frac{1}{3}$歩の円田がある。問う、田の面積はいくらか。）

に対する註釈の中で、円に内接する正６角形から出発し、次々と辺数を２倍した内接正多角形に関して、それぞれの一辺の長さを求めていき、内接正96角形の一辺の求長にまで到達している。さらに、その内接正96角形の一辺の長さを用いて内接正192角形の面積を求めているのである。

そして、内接正６角形から作られる内接正12角形の面積を基点として次々に差冪を加えていく方法に言及し、結果的に、内接正192角形の面積に$\frac{36}{625}$を加えた値 $314\frac{4}{25}$ を円の面積としている。ここで「差冪」とは、内接正n角形の面積と内接正$2n$角形の面積との差を意味している。この内容に関する原文は、

「以十二觚之冪為率消息」[2)]

という10文字である。この10文字をどのように解釈するかが鍵である。三上義夫は、

「十二觚の冪を以て率と為して消息すると云ふのは、十二觚からして二十四觚、次に四十八觚……と次々の差を考へ、其次々の差が次第に減少する割合を定めて、一百九十二觚の冪へ六百二十五分の三十六を加へる事にすると、一層精密になると云ふ事であるらしい。」[3)]

と述べていて、劉徽が無限等比級数を用いた計算を行なっていると主張している。

これに対して、川原秀樹は、

「だが「消息」の用法として有限個の差率の合計を示すことがあり（『唐書』暦志）、かつこの段の最後に「正三千七十二角形の面積」などとあるから、ただ割円法を有限回繰り返すことによって「差冪」を加えていき、面積を求めることと解釈しておく。」[4)]

と述べて、三上の主張に同意していない。また、中国の数学史家である銭宝琮は、

「上に引いた“十二觚の冪を率として消息する（以十二觚之冪為率消息）”の十字はどう解釈すべきか、現在なお定論がなく、やむなく保留した。」[5)]

と述べるにとどまっている。

このように、『九章算術』への劉徽註における無限等比級数の求和法の使用をめぐって種々の議論がなされている。そこで筆者は、先行研究を参考にしつつ、この問題の解明に資したいと考えるものである。

[2]　劉徽による円周率計算の検証

『九章算術劉徽註』における円周率計算は、まず円に内接する正６角形から出発して、内接正12角形の一辺の長さを求めることから始まる。劉徽は2679億4919万3445（平方）忽を開平した結果が内接正12角形の一辺であると述べているにとどまり、その結果は記述していない。筆者の計算によれば、

＊ 原稿受理日　平成13年９月20日
＊＊ 三重大学教育学部数学教室
＊＊＊ 三重大学大学院教育学研究科修士課程在学

忽の単位までとして、517638忽という値になる。

続いて劉徽は、内接正12角形の一辺を用いて内接正24角形の一辺の求長へと進み、681億4834万9466（平方）忽を開平した結果が内接正24角形の一辺であると述べているが、より正確には下４桁を「7684」とすべきである。しかし、いずれの場合においても、忽の単位までの計算結果は同じで、内接正24角形の一辺は261052忽である。なお、ここでも劉徽はその計算結果を記述していない。

劉徽はさらに内接正24角形の一辺の長さを用いて内接正48角形の一辺の求長へと進み、171億1027万8813（平方）忽を開平した結果が内接正48角形の一辺であると述べているが、より正確には下４桁を「7767」とすべきである。しかし、いずれの場合においても、忽の単位までの計算結果は同じで、内接正48角形の一辺は130806忽であり、この値は劉徽自身の記述と一致している。そして、劉徽はここで初めて内接正多角形の面積に言及し、内接正48角形の一辺の長さを用いて計算した内接正96多角形の面積を $313\frac{584}{625}$（平方寸）と記述している。この値は筆者の検証結果と一致する。

『九章算術劉徽註』では、さらに内接正48角形の一辺の長さを用いて内接正96角形の一辺の求長へと進み、42億8215万4012（平方）忽を開平した結果が内接正96角形の一辺であると述べている。ここでも、下４桁のより正確な値は「3912」であるが、開平計算の結果を忽の単位までに留めれば、65438忽となり、劉徽の記述と一致する。劉徽は、この値を用いて内接正192角形の面積を $314\frac{64}{625}$（平方寸）と求めていて、筆者の検証結果とも一致する。

劉徽による内接正多角形の面積計算は内接正192角形までにとどまっており、ここまでの計算結果を考察することによって、円の面積に迫ろうとするのである。

[3]　$\frac{36}{625}$ という値について

『九章算術劉徽註』では、内接正192角形の面積を $314\frac{64}{625}$（平方寸）と記述した直後、この値から内接正96角形の面積を引くと $314\frac{105}{625}$（平方寸）となり、「之を差冪と謂う」（原文では「謂之差冪」）と記述されている[6]。この「差冪」に係わって、第１節で引用した10文字「以十二觚之冪為率消息」を含む下記の文章が登場するのである。

「以十二觚之冪為率消息當取此分寸之三十六以增於一百九十二觚之冪以為圓冪三百一十四寸二十五分寸之四」[7]

この文章に対する三上義夫の解釈はすでに紹介した通りであるが、三上の主張に必ずしも同意しない川原秀樹はこの部分を、

「ゆえにさらに（正六角形より求められる）内接正十二角形の面積を基点として、つぎつぎに「差冪」を加えていくと、六百二十五分の三十六平方寸を正百九十二角形の面積に加えた三百十四平方寸と二十五分の四平方寸が円冪となる。」[8]

のように訳出している。この訳文にあるように、内接正12角形の面積を出発点として、順々に差冪、比率（後項÷前項）を計算してみると下記のようになる。

<table>
<tr><th>正多角形</th><th>面　積</th><th>差　冪</th><th>比　率</th></tr>
<tr><td rowspan="2">正12角形</td><td rowspan="2">300</td><td></td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\frac{6614}{625}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">正24角形</td><td rowspan="2">$310\frac{364}{625}$</td><td rowspan="2">0.2532506</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\frac{1675}{625}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">正48角形</td><td rowspan="2">$313\frac{164}{625}$</td><td rowspan="2">0.2507462</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\frac{420}{625}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">正96角形</td><td rowspan="2">$313\frac{584}{625}$</td><td rowspan="2">0.2500000</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\frac{105}{625}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">正192角形</td><td rowspan="2">$314\frac{64}{625}$</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td></td></tr>
</table>

『九章算術劉徽註』には「次々に差冪を加えていく」とあり、「内接正192角形の面積に $\frac{36}{625}$ を加えた値が円の面積になる」と記述されているが、ここでの値 $\frac{36}{625}$ は一体どこから求められたのであろうか。上記の表中で、比率が約 $\frac{1}{4}$ であることに注目し、内接正96角形の面積と内接正192角形の面積の差が $\frac{105}{625}$ であることから、内接正384角形の面積は、

$$314\frac{64}{625}+\frac{105}{625}\cdot\frac{1}{4}$$

と推測され、さらに内接正768角形の面積は、

$$314\frac{64}{625}+\frac{105}{625}\cdot\frac{1}{4}+\frac{105}{625}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2$$

と推測される。したがって、「次々に差冪を加えていく」という文言は、

$$\frac{105}{625}\cdot\frac{1}{4}+\frac{105}{625}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2+\frac{105}{625}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^3+\frac{105}{625}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^4+\cdots$$

を意味していると考えられる。これを計算すると、

$$\frac{105}{625}\left(1+\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\left(\frac{1}{4}\right)^4+\cdots\right)$$

$$=\frac{105}{625}\cdot\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{105}{625}\cdot\frac{1}{3}=\frac{35}{625}$$

となり、これを $314\frac{64}{625}$ に加えるのであるが、この分子が64であることから、$\frac{35}{625}$ の分子を36とし、$\frac{36}{625}$ としたのではないかと考えられる。この推測は三上義夫によるものであり、彼は、

> 「三十五と三十六とでは其差は六百二十五分の一寸に過ぎずして甚だ微細であり、且つ三十五とせずして三十六とすれば、分數は整除せられ二十五分の四と云ふ簡潔な形になるから、三十五を三十六に變へたのではあるまいか。」[9]

と述べている。この三上説は『九章算術劉徽註』の記述とよく符合するとともに、$\frac{36}{625}$ という値の根拠についても説得力のあるものと思われる。そして、この三上説によれば、劉徽は公比 $\frac{1}{4}$ の無限等比級数の求和法に知悉していたということになるのである。

[4] 公比 $\frac{1}{4}$ について

前節における内接正多角形の面積計算によれば、内接正多角形の差冪の比率は約 $\frac{1}{4}$ であったが、実は、この差冪の比率の極限値は正確に $\frac{1}{4}$ なのである。本節ではそのことを確認しておくことにしたい。

内接正 n 角形の一辺を s_n、面積を S_n とすると、

$$S_n=\frac{1}{4}nrs_{\frac{n}{2}},\ S_{2n}=\frac{1}{2}nrs_n,\ S_{4n}=nrs_{2n}$$

であるから、S_{2n} と S_n の差冪を D_n とすれば、

$$D_n=S_{2n}-S_n=\frac{1}{2}nrs_n-\frac{1}{4}nrs_{\frac{n}{2}}=\frac{1}{4}nr\left(2s_n-s_{\frac{n}{2}}\right)$$

$$D_{2n}=S_{4n}-S_{2n}=nrs_{2n}-\frac{1}{2}nrs_n=\frac{1}{2}nr\left(2s_{2n}-s_n\right)$$

となる。よって、差冪の比率の極限値は、

$$\lim_{n\to\infty}\frac{D_{2n}}{D_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}nr\left(2s_{2n}-s_n\right)}{\frac{1}{4}nr\left(2s_n-s_{\frac{n}{2}}\right)}=2\lim_{n\to\infty}\frac{2s_{2n}-s_n}{2s_n-s_{\frac{n}{2}}}$$

となる。ここで、

$$s_{2n}=2r\sin\frac{\pi}{2n},\ s_n=2r\sin\frac{\pi}{n},\ s_{\frac{n}{2}}=2r\sin\frac{2\pi}{n}$$

であるから、

$$\begin{aligned}2\lim_{n\to\infty}\frac{2s_{2n}-s_n}{2s_n-s_{\frac{n}{2}}}&=2\lim_{n\to\infty}\frac{2\sin\frac{\pi}{2n}-\sin\frac{\pi}{n}}{2\sin\frac{\pi}{n}-\sin\frac{2\pi}{n}}\\&=2\lim_{n\to\infty}\frac{2\sin\frac{\pi}{2n}-2\sin\frac{\pi}{2n}\cos\frac{\pi}{2n}}{2\sin\frac{\pi}{n}-2\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}}\\&=2\lim_{n\to\infty}\frac{2\sin\frac{\pi}{2n}\left(1-\cos\frac{\pi}{2n}\right)}{2\sin\frac{\pi}{n}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)}\\&=2\lim_{n\to\infty}\frac{2\sin\frac{\pi}{2n}\sin^2\frac{\pi}{4n}}{2\sin\frac{\pi}{n}\sin^2\frac{\pi}{2n}}\\&=2\lim_{n\to\infty}\frac{\sin^2\frac{\pi}{4n}}{\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{\pi}{2n}}\\&=2\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{\sin\frac{\pi}{4n}}{\frac{\pi}{4n}}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2}{\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}}\cdot\frac{1}{2}}\\&=2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot 2=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

となって、差冪の比率の極限値は確かに $\frac{1}{4}$ となる。

[5] 三上説への不同意

すでに第1節で紹介したように、川原秀樹は前述の三上説に同意せず、「ただ割円法を有限回繰り返すことによって「差冪」を加えていき、面積を求めることと解釈しておく。」と述べていた。その根拠として、

① 『唐書』暦志などに見られるように、「消息」という用語の用法として有限個の差率の合計を示すことがあるということ。

② 『九章算術劉徽註』における該当文章の段の最後に「正三千七十二角形の面積」などの記述があること。

の2点を指摘しているのである。

第1の点は用語の用法として別解釈があることの指摘であるから、これに関しては後述することにし、ここでは、第2の指摘を検討する。川原は、劉徽が正3072角形の面積までも求めたと考えているのである。確かに、『九章算術劉徽註』における該当箇所には、

「求一千五百三十六觚之一面得三千七十二觚之冪」[10]

（訳：正1536角形の一辺を求め、正3072角形の面積を得る。）

とある。しかし、川原もこの部分を、

「つまり内接正千五百三十六角形の一辺を求め、正三千七十二角形の面積を得、その微数部分を定めると、数値もまたそれに従って緻密になっていくのである。」[11]

と訳出しているように、劉徽が確かに正3072角形の面積を求めたかどうかは疑わしい。すなわち、「もし正1536角形の一辺を求め、正3072角形の面積を求めれば、一層精密な値が得られる。」のように、仮定の形で述べているに過ぎないとも考えられるからである。

劉徽が正3072角形の面積を求めたか否かという問題に係わって、藪内清は、

「劉徽の註釈では内接正三〇七二角形の面積を求めており，この面積より得た値から $314\frac{4}{25}$ が得られたのかも知れない。」[12]

と述べている。そこで、実際に正384角形～正3072角形の面積を計算してみると、以下の表のようになる。

正多角形	面　積	差　冪	比　率
正192角形	$314\frac{64}{625}$		0.247619
		$\frac{26}{625}$	
正384角形	$314\frac{90}{625}$		0.2615384
		$\frac{6.8}{625}$	
正768角形	$314\frac{96.8}{625}$		0.2794117
		$\frac{1.9}{625}$	
正1536角形	$314\frac{98.7}{625}$		0
		$\frac{0}{625}$	
正3072角形	$314\frac{98.7}{625}$		

ここで、正3072角形の面積 $314\frac{98.7}{625}$ を $314\frac{100}{625}$ とみなせば、確かに $314\frac{4}{25}$ という結果が得られる。しかし、上記のような計算によって値 $314\frac{4}{25}$ が得られたとしても、『九章算術劉徽註』に見られた $\frac{36}{625}$ という値の由来は一向に説明され得ないし、「次々と差冪を加えていく」という文言との乖離も避けられない。

[6] 「消息」という用語について

前節において、川原の三上説への不同意の根拠の1つとして、「消息」という用語の使用法に関して言及していたことを見た。すなわち川原は、

「「消息」の用法として有限個の差率の合計を示すことがあり（『唐書』暦志）、……」

と述べていて、「消息」という用語の使用法が必ずしも無限級数の和に係わらないと考えていたのであった。

しかし、『唐書』暦志における「消息」という用語の使用法だけを示して、無限級数の和に係わらないと断定するのは性急すぎるきらいがある。そこで、この「消息」という用語の語義に関する研究成果を李繼閔『《九章算術》及其劉徽注研究』にしたがって見てみることにしたい。

李繼閔はその著書『《九章算術》及其劉徽注研究』の「第四章　面積與體積的度量理論」において、「消息」の一語は古代と現代ではその意味が同じではないと述べ、この用語の語義の歴史的変遷に関する研究成果として、

(1) 「消息」は、前漢以前の上古及び唐代以後の近代中国語では、基本的には1つの意味の語であり、前者の場合は「消長」であり、後者は「音信」の意味である。

(2) 「消息」は後漢より隋に至る中古の中国語では、比較的複雑な語義の系統が存在した。

という2点を指摘している[13]。

そして、李繼閔は劉徽の注釈文における「消息」を「増減」あるいは「損益」と解釈すべきであることは疑いないと述べ、その理由として、

(1) この注釈文の一節の前後の意味からすると、「消息」の語は運算と関係ある1つの動詞と考えるべきであり、「増減」あるいは「損益」（すなわち「消長」）と解釈してはじめて妥当となる。

(2) ここでの説き方は、S_{192} を $\frac{36}{625}$ 平方寸だけ増加したものを円冪と為すというのであるから、「消息」を解釈して「増減」とすることと符合する。

(3) 古代の天文暦算家は、「消息」の一語で、天文学的数値の損益と調整を表示することを慣用的に行なっている。そして、暦法中の数値の「消息」は多く内挿法と関係があり、それは挿入値の増減を表示しているのである。

という3点を指摘しているのである。さらに李繼閔は「以十二觚之冪為率消息」という10文字の解釈に関して、

「「以率消息」とは何のことを謂っているのであろうか。「率」とはすなわち比率のことである。中国の数学者は比率の計算法を慣用的に使用し、劉徽はもっともこの方法に精しかった。「以率消息」とはすなわち比率によって増減することであり、これも現代で謂うところの一次内挿法のことである。この種の考え方について、劉徽は何度も双仮設法（盈不足術のこと）の中で明らかにしている。暦書中の所謂「消息衰」（「衰」は率である）は、だいたい線性挿値間の増減率を示しているはずである。劉徽が提起したこの種の計算法は暦法の推算を参考にしていることは大いに考えられることである。

そうであるとすれば、「以十二觚之冪為率消息」の一句は、文言に明らかに脱漏があって、理解できない。この句は南宋本から写しており、殿本では「以十二觚之冪為率消息」と改訂しているが、文意はやや通りやすくなったといっても、数学の理法においては、なおわかりにくい。前後の文意にもとづいて、私はこの句に増補して、「以十二觚之差冪為率、以率消息」とすべきであると考える。」[14)]

と述べている。

したがって、「以十二觚之冪為率消息」という10文字は「内接正12角形の面積から出発して、次々と辺数が2倍の内接正多角形の面積を求め、それらの差冪を比率とし、その比率に従って消長していく」と解釈することができる。ここでの「消長する」という言葉が無限の意を含むかどうかという問題はなお専門的な語源調査研究のまたれるところであるが、前節でも言及した $\frac{36}{625}$ という値の出所に鑑みて、「消長」には「ずっと尾を引いていく」という語義を含むとも考えられる。

[7] 結　　　語

筆者は、劉徽が円周率計算の過程において無限等比級数の求和法を使用したか否かという問題をめぐって、三上義夫と川原秀樹・藪内清の説を検討してきた。その結果、川原秀樹及び藪内清が言うように、有限回の割円法の使用や正3072角形の求積などによっては、『九章算術劉徽註』に見られる記述、すなわち、

① $\frac{36}{625}$ という値の由来

② 「次々と差冪を加えていく」ことの説明

という2点を解明することができないことが明らかになった。したがって、この2点を合理的に説明しうる三上説が今日においてもなお有力な説であると言わざるを得ない。

ただ、劉徽が正3072角形の求積計算を行なったか否かという問題はなお不明であるが、劉徽は2つの方法、すなわち、

① 無限等比級数の求和法の使用による円周率の計算

② 正3072角形の求積計算による円周率の計算

を併用し、円周率のより精密な値が $3.14\frac{4}{25}=3.1416$ であることを確信したのではないかとも考えられる。

謝　　　辞

本論文を作成するにあたっては、三重大学教育学部の東晋次教授および新田貴士助教授のお世話になった。ここに記してお礼申し上げる。

[注]

1) 四部叢刊子部『九章算術』微波榭刊本、京都大学人文科学研究所（東方部）所蔵、十一丁
2) 同上書、十四丁
3) 三上義夫「關孝和の業績と京坂の算家並に支那の算法との關係及び比較（六）」（東洋協会調査部編纂『東洋学報』第22巻（昭和43年10月5日発行）に所収）、p. 63
4) 川原秀樹訳「劉徽註九章算術」（藪内清責任編集『中国天文学・数学集』（科学の名著2）朝日出版社、昭和55年11月15日発行に所収）、p. 106

5) 銭宝琮『中国数学史』（川原秀樹訳）みすず書房、1990年2月28日発行、p. 74
6) 前掲書 (1)、十三丁
7) 前掲書 (1)、十四丁
8) 前掲書 (4)、p. 96
9) 前掲書 (3)、p. 65
10) 前掲書 (1)、十四丁
11) 前掲書 (4)、p. 97
12) 藪内清「中国の数学と天文学」（藪内清責任編集『中国天文学・数学集』（科学の名著2）朝日出版社、昭和55年11月15日発行に所収）、p. 17
13) 李繼閔『《九章算術》及其劉徽注研究』九章出版社、中華民国81年8月、p. 265
14) 同上書、p. 267