

スピログラフのペン先の「逆行」について

正 田 良

A Note on “Retrograde Motions” in Spirographs

Rio SHOWDER

要 旨

スピログラフというハイポトコロイドを描く道具に関して次の考察を行った。大円の中心からペン先までの距離が極小から次の極小に行くまでの間の曲線の部分に注目したとき、その部分が自己交差を起こすことを「逆行」と呼ぶ。この逆行を起こす条件は、大円の半径を a 、小円の半径を b 、小円の中心からペン先までの距離を c とすると、 $a - b < c < b$ のとき逆行が起こることを示した。

1. はじめに

スピログラフとは、補注1に記すように、1968年ごろに流行したおもちゃである。その単純な機構にも拘わらず神秘的な図形を描くことができ、さらに、その条件による変化に意外性があるので、中学校や高等学校の数学の教師や数学者が現実世界の現象の数学化を試みる題材として注目して来た。しかし、その多くは輪の歯数と歯車の歯数とが単純な整数比となるかどうかに関心しているが、ここに述べる「逆行」に注目した例は寡聞にしてまだ見ることはない。この現象はスピログラフのうちで、よく普及しているものに顕著にあらわれる現象であるので、その探求がどの程度の数学的な知見によって解明しうるものかを明らかにし、その現象を教育活動の中でどの程度の詳しさと取り上げるべきかの教材研究に資することを目的とする。

2. 定義などの準備

2.1 サイクロイドとトロコイド

直線の上を円が滑ることなく転がるとき、円の周上の点Pの描く曲線をサイクロイド (cycloid) という¹⁾。x軸の上を半径 a の円が転がるとき、原点を通るサイクロイドを媒介変数 t を用いて式表示すると、 $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ となることは、よく知られていることである²⁾。

同じく円が直線の上を滑ることなく転がっている場合を考える。点Pが円周上ではなく、円の内部もしくは外部にあって、円周の回転と同じ回転を円の中心に関して行うとき、点Pが描く曲線をトロコイド (trochoid) という。bを円の半径から点Pまでの距離とすると、トロコイドの媒介変数表示は、 $x = at - b \sin t$, $y = a - b \cos t$ である³⁾。

また、円周の上を他の円が滑ることなく転がる場合、後者の円の円周上にある点Pの軌跡を

考える。一方の円が他方の円と外接する場合、この点Pの軌跡をエピサイクロイド (epicycloid)、後者の円が前者の円の内部にあって内接するときハイポサイクロイド (hypocycloid) という。

媒介変数表示は、複号上側をエピサイクロイド、下側をハイポサイクロイドとして、

$$x = (a \pm b) \cos t \mp b \cos \frac{a \pm b}{b} t, \quad y = (a \pm b) \sin t - b \sin \frac{a \pm b}{b} t$$

として得られる⁴⁾。

さらに、円周の上を他の円が滑ることなく転がっているが、後者の円の中心に関してその円周と同じ回転をする点Pが円周上にないとき、その点Pの軌跡を、エピトコロイド、ハイポトコロイドという。スピログラフは、ハイポトコロイドを描く器具である。

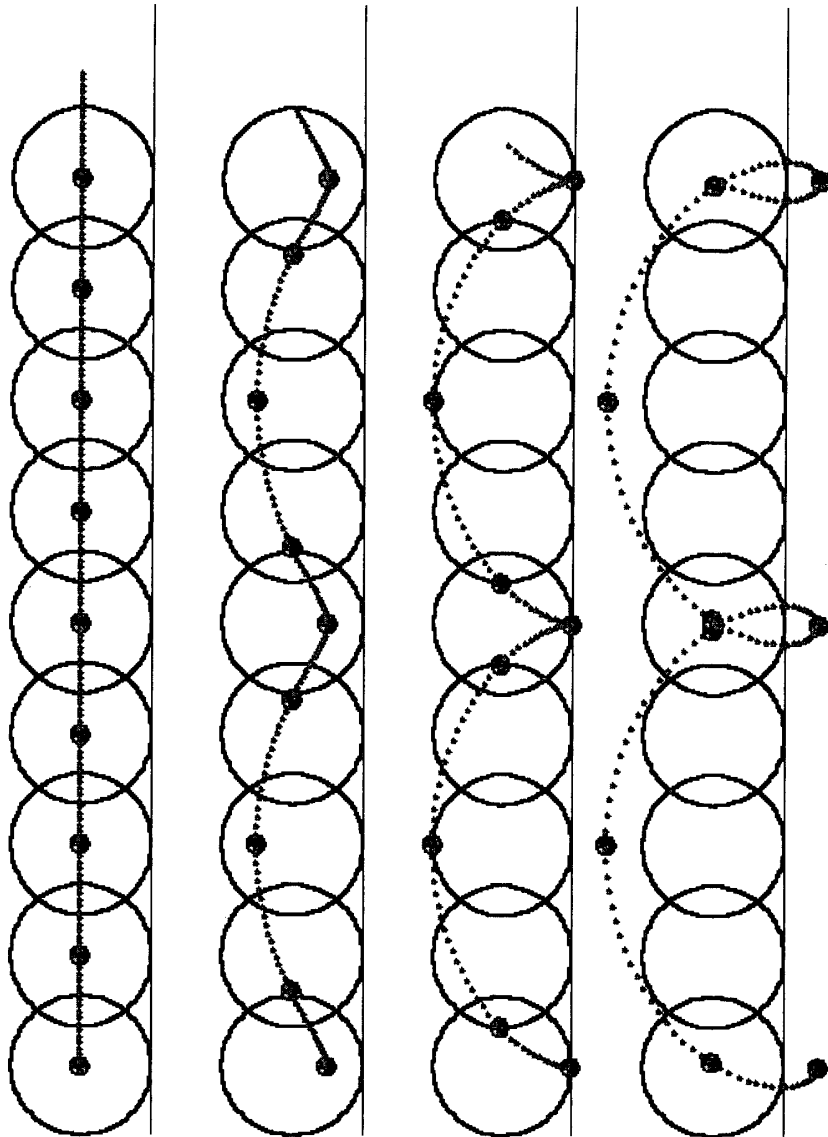


図1 左から2、4番目がトコロイド、3番目がサイクロイド

2.2 座標の選択

エピトコロイド、並びに、ハイポトコロイドの媒介変数表示は、次の方程式で得られる。複号上側をエピトコロイド、下側をハイポトコロイドとして、

$$x = (a \pm b) \cos t \mp c \cos \frac{a \pm b}{b} t, \quad y = (a \pm b) \sin t - c \sin \frac{a \pm b}{b} t$$

である⁵⁾。このとき、大円の中心は原点O (0, 0)で、半径の長さは a 、小円の半径は b で、ペン先Pと小円の中心との距離は c である。

2.3 「逆行」の現象について

トコロイド $x = at - b \sin t$, $y = a - b \cos t$ では、計算によってすぐわかるように、

$$\frac{dx}{dt} = y$$

という性質があるが、 a, b の大小関係の違いによって、図形の特徴が異なる。

[1] $a > b$ のとき

即ち、点Pが円の内部にあるときには、自分自身と交点を一切持たない (図1)。この場合、すべての実数 t で、

$$\frac{dx}{dt} > 0, \quad y > 0$$

が成り立つ。一方、

[2] $a < b$ のとき

即ち、点Pが円の外部にあるときには、自分自身と交わる点があり、 y の値の極小となる点1つに対して1つ存在する。この場合、極小となる点の近くで

$$\frac{dx}{dt} < 0, \quad y < 0$$

となる点がある。この左の条件、即ち t を増やしているにも拘わらず x が減っている状態を「逆行」と呼ぶことにしよう。

この2つのタイプの境界例であるサイクロイドは、尖点⁶⁾を円が滑らずに転がる x 軸上に有する。

2.4 「逆行」へのハイポトコロイドへの拡張

極座標表示 $\langle r, \theta \rangle$ によって、ハイポトコロイドの動点を表すと、

$$r \cos \theta = x = (a - b) \cos t + c \cos \frac{a - b}{b} t$$

$$r \sin \theta = y = (a - b) \sin t - c \sin \frac{a - b}{b} t$$

となるので、

$$r^2 = (a - b)^2 + c^2 + 2(a - b)c \cos \frac{a}{b} t$$

である。

スピログラフでは、歯車の内部に開けられた穴にボールペンを入れるという機構上の理由で、 $c \leq b$ である。動点は大円の中心の周囲を回るので、 x, y, r, θ の値は、軌跡が円になる場合や線分になる場合の特殊な例外を除いて増減する。 r は、

$$p = \frac{b\pi}{a-b}$$

を満たす p を周期とする周期的な変化をする。 $t=0$ の近くでは、極大が $\theta = t=0$ 、極小は、

$$t = \frac{\pm b\pi}{a}$$

を満たす t の値をとるときとなる。

前節2.3に見たような、変化率の符号が異なる現象はほとんどの場合に生じるため、区別すべき現象とは言えない。しかし、スピログラフでの描きにくい現象として、次の現象は注目に値する。 r が極小になる点から r が極大になる点を経て次の r が極小となる点に行く連続な弧に注目する。これが自分自身に交差するか否かである。この自己交差の交点から先の描き心地は、歯車が輪から外れやすく「逆行」しているかのような印象を与えるので、これをハイポトロコイドの「逆行」と呼ぶことにしよう。

3. いくつかの例

$a=1$ としても一般性を失わないので、この節では以下そう約束する。つまり、

$$x = (1-b)\cos t + c \cos \frac{1-b}{b}t, \quad y = (1-b)\sin t - c \sin \frac{1-b}{b}t$$

$$r^2 = (1-b)^2 + c^2 + 2(1-b)c \cos \frac{a}{b}t$$

である。また、大円の内部に小円を内接させているので、 $0 < b < 1$ である。

3.1 増減しない特殊な例

(1) $c=0$ のとき

$r=1-b$ となるので、原点を中心とし、半径の長さが $(1-b)$ である円周となる。

(2) $b=\frac{1}{2}$ のとき

$$x = \left(\frac{1}{2} + c\right) \cos t, \quad y = \left(\frac{1}{2} - c\right) \sin t$$

となるので、 $c=\frac{1}{2}b$ のとき $-1 \leq x \leq +1, y=0$ の線分。 $c=0$ のとき、(1)の場合となるので円。他の場合は楕円となる。

3.2 交点の数

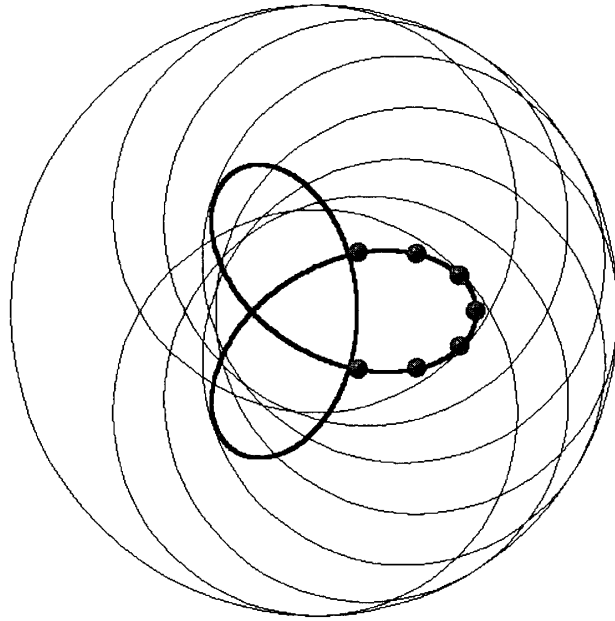
b の値が同じでも動点が動く軌跡（ハイポトロコイド）が自己交差する交点の数が c の値によって変わる場合がある。

(1) $b=\frac{2}{3}$ のとき

$0 < c < \frac{b}{2}$ のとき、交点は3つ。 $c=\frac{b}{2}$ のとき、交点が原点のみ。 $\frac{b}{2} < c < b$ のときも、交点が

3つあるが、この場合に逆行が起こっている。(図 2-1~3)

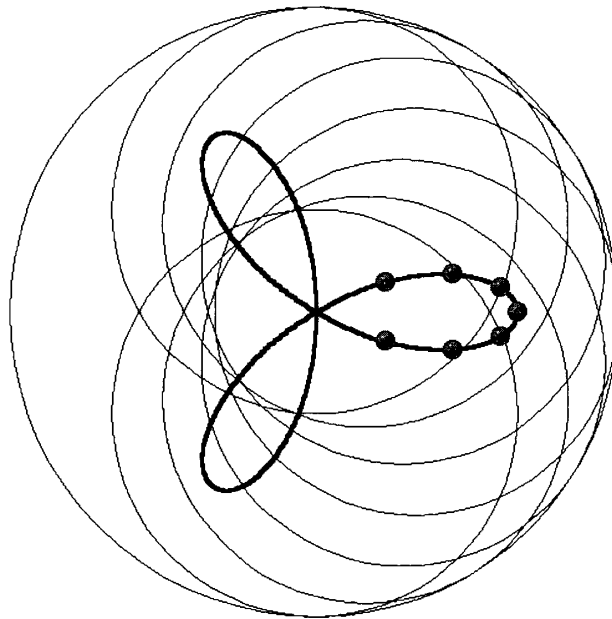
1800
n
900
ii



2
bs
3
bb
0.3
cv

図 2-1 $a : b : c = 3 : 2 : 0.6$ のとき

1800
n
900
ii



2
bs
3
bb
0.5
cv

図 2-2 $a : b : c = 3 : 2 : 1$ のとき

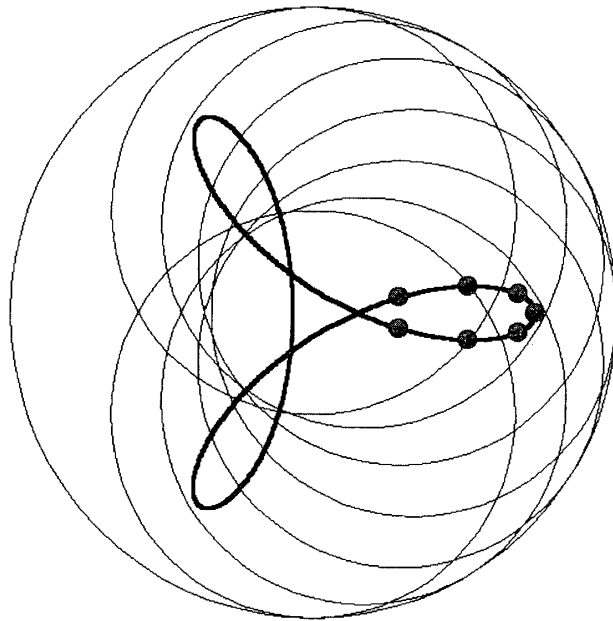
(2) $b = \frac{1}{3}$ のとき

$0 < c < b$ のとき自己交差は起こらない。なお、 $c = b$ のときは尖点が3つある「デルトロイド」⁷⁾ と呼ばれる図形となる。 $c > b$ のとき自己交差が生ずるがスピログラフの機構上このような設定はできない。

(3) $b = \frac{2}{5}$ のとき

前項と同様に、 $0 < c < b$ のとき逆行は起こらない。(図 2-4)

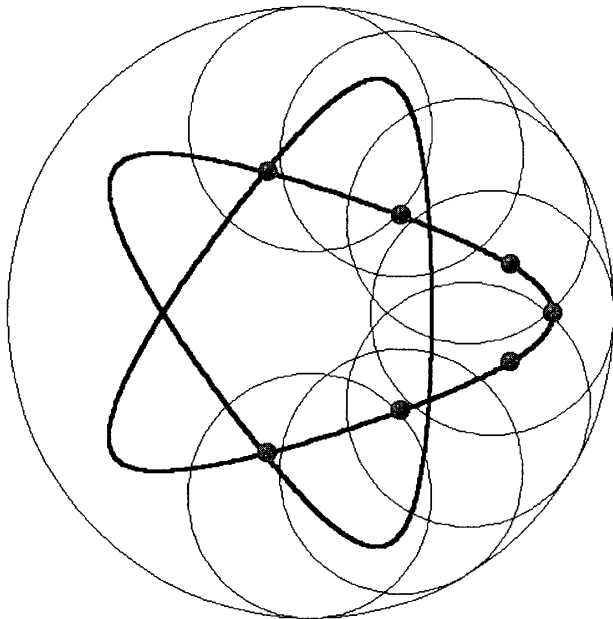
1800
in
900
ii



2
bs
3
bb
06
cv

図 2-3 $a : b : c = 3 : 2 : 1.2$ のとき

1800
in
900
ii



2
bs
5
bb
05
cv

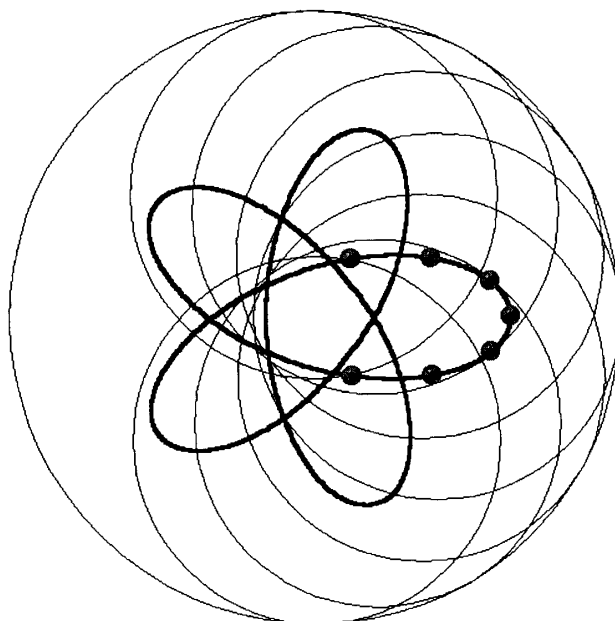
図 2-4 $a : b : c = 5 : 2 : 1$ のとき

(4) $b = \frac{3}{5}$ のとき

$0 < c < \frac{2b}{3}$ のとき交点は10個ある。 $c = \frac{2b}{3}$ のとき、交点は原点のみ。 $\frac{2b}{3} < c < b$ のときも交点は10個あるが、この場合に逆行が起こっている。(図 3-1~2)

スピログラフのペン先の「逆行」について

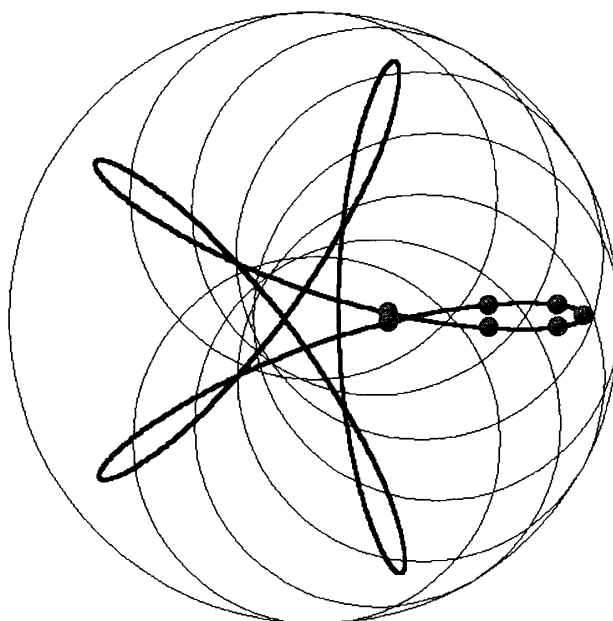
1800
n
900
ii



3
bs
5
bb
0.4
cv

図 3-1 $a : b : c = 5 : 3 : 1.2$ のとき

1800
n
900
ii



3
bs
5
bb
0.8
cv

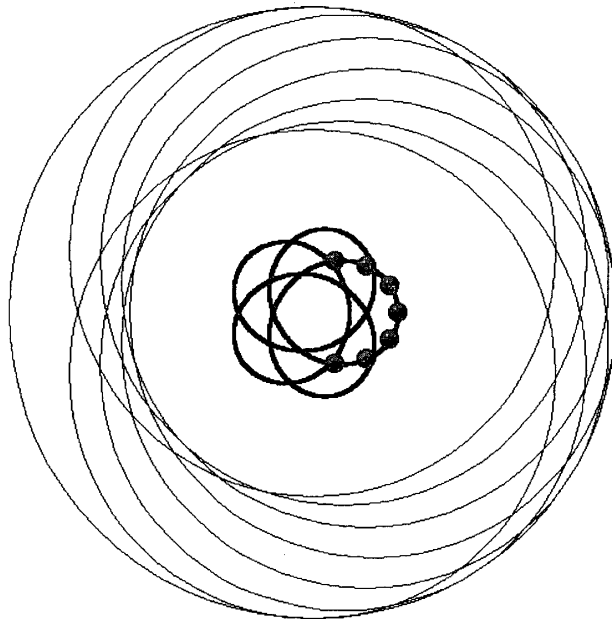
図 3-2 $a : b : c = 5 : 3 : 2.4$ のとき

(5) $b = \frac{4}{5}$ のとき

$0 < c < \frac{b}{4}$ のとき交点は15個ある (図 3-3)。 $c = \frac{b}{4}$ のとき、交点は原点を含む6個ある。

$\frac{b}{4} < c < b$ のとき交点は5つで逆行が起こっている。(図 3-4)

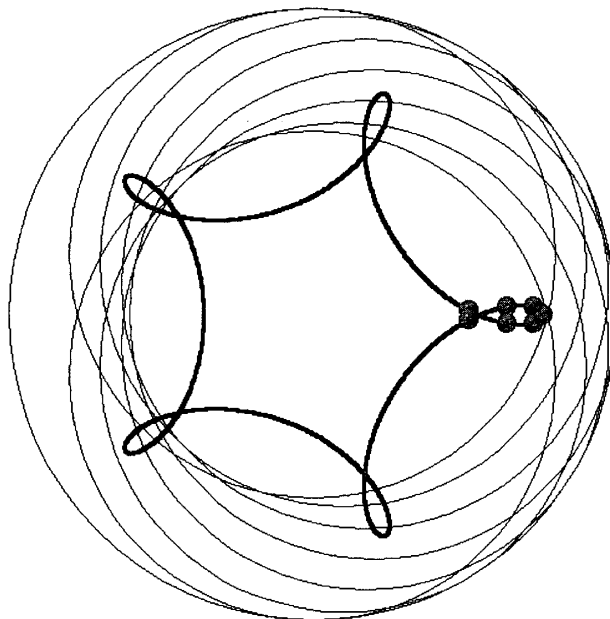
1800
n
900
ii



4
bs
5
bb
0.1
cv

図 3-3 $a : b : c = 5 : 4 : 0.4$ のとき

1800
n
900
ii



4
bs
5
bb
0.7
cv

図 3-4 $a : b : c = 5 : 4 : 2.8$ のとき

4. いくつかの命題

これまでの観察によって、次の性質があることが予想される。

動点が大円の中心 O を通るときの c の値を、 c_0 とおくと、 $c_0 < c < b$ のとき、「逆行」が起こる。

このことを論証するためにいくつかの命題を記そう。

(命題1) 動点の軌跡は、2.4の極座標表示を用いると、

$$a-b-c \leq r \leq a-b+c$$

と表される領域に含まれる。

(∵) 大円の中心をO、小円の中心をA、動点をPとする。 $r=OP$ 。

$\triangle OAP$ で $\geq OA+AP$

a, b はそれぞれ大円、小円の半径。また、大円と小円は内接しているため、 $OA = a - b$

また、 $AP = c$ だから、 $AP = (a - b) + c$ 。

同様に、 $r \leq (a - b) - c$ 。■

(注1) $a : b$ が有理数比のとき、動点がいつかはもとに戻ってそれ以降は既に通った軌跡の上をそのまま通る。そのため必ずしも上に記した領域の任意の点を通るとは限らない。また、 $r \geq 0$ なので、 $a < b + c$ の場合、 $0 \leq r \leq a - b + c$ となる。

(命題2) $a - b - c > 0$ のとき、動点は大円の中心Oを通らない。

(∵) 命題1より $r \geq a - b - c$ 。

仮定より、 $r > 0$ 。

∴ $r > 0$ なので、 $r = 0$ とはならない。■

(命題3) $b > \frac{a}{2}$ のとき、動点は大円の中心Oを通らない。

(∵) スピログラフの機構によって (2.4参照)、 $c \leq b$ 。

$$b + c \leq 2b$$

仮定より、 $b + c < a$ 。

よって、 $a - b - c = a - (b + c) > 0$ となるので、命題2の条件を満たす。■

(命題4)

$c = a - b$ のとき、動点Pは大円の中心Oを通る。

(∵) 2.4で述べたように、

$$r^2 = (a - b)^2 + c^2 + 2(a - b)c \cos \frac{a}{b} t$$

$$r^2 \geq (a - b)^2 + c^2 - 2(a - b)c = (a - b - c)^2 \geq 0$$

なので、 $\cos \frac{a}{b} t = -1$ 、 $c = a - b$ のときに限って原点を通る。■

(命題5) $a - b - c < 0$ のとき「逆行」が起こる。

(∵) この軌跡は x 軸に関して対称である。また、 $t = 0$ のとき、動点は x 軸上にある。よって、自己交差が2.4で述べた意味で起こる場合には $y = 0$ となる。よって、「逆行」とは、 r が最小値をとる前に、 $y = 0$ となることである。

$$y = (a - b) \sin t - c \sin \left(\frac{a}{b} - 1 \right) t$$

の右辺を $f(t)$ とおく。この増減を調べる。

$$\begin{aligned} f'(t) &= (a-b)\cos t - c\frac{a-b}{b}\cos\frac{a-b}{b}t \\ &= (a-b)\left\{\cos t - \frac{c}{b}\cos\frac{a-b}{b}t\right\} \end{aligned}$$

スピログラフの機構上 $a > b \geq c$ なので、 $0 < t < \text{Arccos}\frac{c}{b}$ の範囲で、 $f(t)$ は単調増加である。 $f(0) = 0$ なので、 $f'(t) = 0$ となる正の数 t のうちで最小のものを、 t_1 とおくと、

$$0 < t \leq t_1 \text{ の範囲で } f(t) > 0 \tag{1}$$

r の値が最小となるときの t の値の絶対値を、 t_2 とおくと、 $t_2 = \frac{\pi b}{a}$ であった。

$$\begin{aligned} f(t_2) &= f\left(\frac{\pi b}{a}\right) \\ &= (a-b)\sin\frac{\pi b}{a} - c\sin\frac{a-b}{b}\frac{\pi b}{a} \\ &= (a-b-c)\sin\frac{\pi b}{a} \end{aligned}$$

$a - b - c < 0$ のとき、 $f(t_2) < 0$ (2)

(1), (2) より、 $a - b - c < 0$ のとき、 $t_1 < t < t_2$ の範囲に $f(t) = 0$ を満たす t が少なくとも 1 つある。これは「逆行」をすることを意味している。■

(命題 6) 原点を動点を通る c の値を c_0 とすると、 $c_0 < c < b$ のとき逆行が起こる。

(\because) 命題 4 より、 $c_0 = a - b$ なので、 $c_0 < c < b$ のとき、

$$a - b < c < b. \quad \therefore a - b - c < 0$$

命題 5 より $c_0 < c < b$ のとき「逆行」する。■

5. 最 後 に

大円の中心である原点を動点を通るように c がとれる条件は、

$$2b > a > b > 0$$

であることは初等幾何の範囲で証明することができた。しかし「逆行」の条件に関しては、いまのところ微積分を利用した証明しか与えることができていない。

ただ、観察をする段階で、交点の数に関しては原点を動点を通る条件は、交点が原点で重複する点で境界となることは重要な知見である。これを境に位相的な性質が異なってくることは観察できることであろう。既存のスピログラフを用いて図形をかいた後、他の歯数比、小円とペン先との距離による図を描ける環境を用いて探求するのに面白い話題と言えるだろう。

この意味ではパソコンによる描画で補助することが有用な場面と言えるだろう。

[文献・注]

- 1) 栗田 稔『いろいろな曲線』共立出版, 1966, p. 73
- 2) 文部省『高等学校学習指導要領解説 数学編 理数編』実教出版, 1999, p. 107 に数学 C での、「曲線の媒介変数表示」の教材例として記されてもいる。
- 3) 上掲、栗田。p. 74

- 4) 上掲, pp. 74-75。
 5) 上掲, p. 79 にこの結果が記されているが、次の方針で示すことができる。
 大円の中心を O 、 $t=0$ のとき、大円と小円とが $A(a, 0)$ で接していたが、現在小円の中心は C で大円とは Q で接しており動点 (ペン先) は P であるとする。 $\vec{e}_t = (\cos t, \sin t)$ と記すと、 $\vec{OP} = \vec{OC} + \vec{CP} = (a-b)\vec{e}_t + c\vec{e}_\alpha$ とおけるが、「滑らずに」という条件から、大円の弧 AQ に対応する小円の弧の中心角が α なので、 $(a-b)t = b\alpha$ 。
 6) 一松 信他『新数学事典』大阪書籍, 1979, p. 519
 7) ロックウッド/松井政太郎『カーブ』みすず書房, 1961/1964, p. 79

[補注1] 教具としてのスピログラフ

インターネットサイト <http://www.gantsu.co.jp/nendai1968.html> や、<http://f25ans.tripod.co.jp/chidhood/toy.html> によれば、昭和43(1968)年2月ごろに、「スピログラフ 1450円 (セイコウ)」として売られていたもの。

現在100円ショップなどで「デザイン定規」としてよく見られるのは、日本製のもの与中国製のものとの2種類みられる。後者は時として歯車にバリが残っていることがあるので、使う前に手入れをしないと前者に比べて外れやすい。ただ、歯車の歯数、輪の歯数、サイズなど両者同じようである。輸入製造元と卸業者などを記しておく。

[日本製] レモン(株) 03-3822-8899/修勝堂 03-3866-2597

[中国製] (株)オオイシ 052-502-3216/キャラメル横町 <http://www.carayoko.com/>

数学に関連する教具としては、

- ・遠山 啓『初等整数論』日本評論社, 1972. pp. 35-36。
- ・足立久美子『たのしい中学数学』日本書籍, 1985. p. 9。
- ・野崎昭弘 (監修)『数学の窓の開けかた』1995. pp. 18-23

などに紹介されている。

中学生などを対象とした授業では、歯数の少しの違いがえがかれる図形の複雑さが「がらっ」と変わること意外性がある面白い。(1) 輪と歯車の歯数の比によって、花びらの数や、何回回転すると元に戻るかを調べる活動や、(2) ペン先の動き方が、楕円をかくように動くのか、三角形をかくように動くのかなど他に、今回注目した(3) 逆行が起こる場合があることに生徒が気付くことはある。

[補注2] 描画のための算譜

(図1) 以外の図は後にまとめた。画面にパラメータを表示させているが、 a は1として固定。 b の値を bs/bb として表すこととし、 c の値は、 b の何倍かを cw の値として指定するようにした。

(図1) のための算譜を以下に記す。言語は Logo の一種である Micro World ((株)創育) である。実行にはテキストボックスやタイトルを必要に応じて作り、コントロール・センタで S なるコマンドを行って起動させる。

```
to cycloid :r :y0
  pu      setpos (list -320 :y0)    pd
  setpsize 1  setshape 1  setsize 10
  seth 90  forward 640
  pu      setpsize 2
  let [ n 0 ]
  let [ dt 40 * 2 * 3.141592 / 4 ]
  repeat 9 [
    D_Circle :dt * :n - 280  :y0 + 40  40
    let [ n :n + 1 ]
  ]
  let [ n 0 ]  let [ dt :dt / 18 ]
  repeat 9 [
    setsize 15
    setpos ( list :dt * :n - 280 :y0 + 40 )
    seth 180 + 5 * :n
    forward :r
    setsh 2  pd  stamp pu
```

```

    setsh 1 back :r
    let [ n :n + 1 ]
  repeat 17 [
    setsize 10
    setpos ( list :dt * :n - 280 :y0 + 40 )
    seth 180 + 5 * :n
    forward :r          pd stamp pu
    back :r
    let [ n :n + 1 ]
  ]
]
setpos [-320 -180]
end

to D_Circle :x :y :r
  pu          setpos ( list :x + :r :y )          pd
  let [ t 5 ]
  repeat 72 [
    setpos ( list :x + :r * ( cos :t ) :y + :r * ( sin :t ) )
    let [ t :t + 5 ]
  ]
  pu
end

```

```

to S
  cg cycloid 0 150 cycloid 20 30 cycloid 40 -90
  cycloid 60 -210 ht
end

```

また、後の描画に用いる算譜を以下に記す。

```

to hypotrocid
  cg st pu          D_Circle 250 0 0 1
  let [ b bs / bb ] let [ r2 250 * :b ]
  let [ r3 250 - :r2 ] let [ k -3 ]
  repeat 7 [
    let [ tt 30 * :k ]          D_Circle :r2 ( :r3 * cos :tt ) ( :r3 * sin :tt ) 1
    let [ k :k + 1 ]
  ]
  let [ i (-1) * n / 2 ] let [ j :i - :i / :b ]
  pu let [ rr cv * :b ]
  let [ x (1 - :b) * (cos :i) + :rr * (cos :j) ]
  let [ y (1 - :b) * (sin :i) + :rr * (sin :j) ]
  setpos ( list :x * 250 :y * 250 ) setpense 3 pd
  repeat n [
    let [ rr cv * :b ] let [ j :i - :i / :b ]
    let [ x (1 - :b) * (cos :i) + :rr * (cos :j) ]
    let [ y (1 - :b) * (sin :i) + :rr * (sin :j) ]
    setpos ( list :x * 250 :y * 250 )
    let [ i :i + 1 ] ii, cleartext insert :i
  ] pu
  let [ k -3 ]
  repeat 7 [ pu
    let [ i 30 * :k ] let [ j :i - :i / :b ]
    let [ x (1 - :b) * (cos :i) + :rr * (cos :j) ]
    let [ y (1 - :b) * (sin :i) + :rr * (sin :j) ]
  ]
end

```

スピログラフのペン先の「逆行」について

```
setpos ( list :x * 250 :y * 250 )
pd stamp pu      let [ k :k + 1 ]
] ht
end

to D_Circle :r :x :y :d
pu      setpenseize :d      setpos ( list :x + :r :y )      pd
let [ t 5 ]
repeat 72 [
  setpos ( list :x + :r * ( cos :t ) :y + :r * ( sin :t ) )
  let [ t :t + 5 ]
] pu
end

to S
hypotrocid
end
```