

企業効率性評価手法へファジィ目標を 導入することに関する一考察

植村 芳樹

Study of evaluating DMUs Introducing Fuzzy Goal into DEA

Yoshiki UEMURA

1. はじめに

いくつかの営業所や支店（一般に、事業体（DMU）という）から構成される企業において、各事業体の相対的な個別の効率評価を行うことが重要な課題となっている。また、企業をひとつの事業体とみなして、属する業種内での各企業の相対的な効率性の位置づけも重要な課題となっている。このような背景から、生産関数を用いた事業体の効率性評価の研究が盛んになっている。従来から生産関数を表すモデルとして、対数線形回帰モデルがある。Cobb-Douglasモデル^[1]は、対数線形回帰モデルの一種である。対数線形回帰モデルでは、平均的な尺度から各事業体を偏差値的な評価を行うものである。次に、対数線形回帰分析の一種として、データを包み込むような包絡型対数線形分析方法が提案されている^[2]。さらに、対数線形回帰モデルにおける係数をファジィ数に拡張し、生産可能集合の上限と下限を同時に規定できる可能性生産関数が提案されている^[3]。この可能性生産関数における係数の同定方法は、可能性推定回帰分析^[4]に帰着できる。さらに、この可能性生産関数の効率性評価への適用研究も行われており、上側からの効率性のみならず、下側からの非効率性の評価も同時に行えることが示されている^[5,6]。他方、効率性評価を行うに当たり DEA (Data Envelopment Analysis) という手法^[7]が、注目されている。この手法は、数理計画問題に定式化されるが、双対問題を考えると制約条件は生産可能領域となり、その制約条件の下、効率性を評価する線形計画問題に帰着される^[8]。従って、可能性生産関数も DEA も、データを包み込む効率性評価手法の一種と考えられる。しかしながら、可能性生産関数は、出力の可能性の幅を導出し、上限の出力から事業体の出力を評価することに主眼がおかれ、「これぐらいの投資（入力量）なら最高これぐらいの産出（出力量）が期待できる」という評価になる。他方、DEA では、「これぐらいの産出（出力量）なら、これぐらいの投資（入力量）で済む」という評価になる。従って、可能性生産関数も DEA も包絡分析法の一種ではあるが、評価の取り組み方が逆の見方になる^[9]。この評価方法の違いを活用して、1 出力ごとに可能性生産関数により評価を行い、まず、包絡型対数回帰分析で求められた最大の効率値と最小の効率値を基づいて1 目的のファジィ目標を産出し、DEA に導入する^[11,12]。次に、可能性生産関数により、最大の効率値と最小の効率値及び最大の非効率値と最小の非効率値を求め、これらに基づき線形のメンバシップ関数により、DEA の効率性の最大化及び非効率性の最小化という2 目的のファジィ目標として融合を試み、2 目的のファジィ満足化手法を定式化する。この結果、1 出力だけが考慮され他の出力が無視されるという DEA の最大の欠点が、克服されることのみならず、現在の入力でどれぐらいの

出力が期待できるかという判断基準に基づいて、事業体の効率性評価ができる^[13, 14]。

2. 対数線形回帰型生産関数を用いた効率性評価

効率性評価のひとつの手法として、統計的な回帰分析がある。この分析は、平均的にみて企業体の優劣を付けるものである。このような背景から、生産関数として対数線形回帰型のモデル^[1]が、次式のように提案されている。

$$Q = X_0 \cdot A_1^{x_1} \cdot A_2^{x_2} \cdots A_n^{x_n} \quad (1)$$

ここで、 Q を DMU の出力、 A_i ($i = 1, \dots, n$) を DMU の入力とする。

(1)の両辺に対数をとることで、このモデルは次式の通常の対数線形回帰モデルに帰着される。

$$q = x_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n \quad (2)$$

ここで、 $x_0 = \ln X_0$ 、 $a_i = \ln A_i$ ($i = 1, \dots, n$) である。

最小二乗法を用いて、係数(a_i ($i = 1, \dots, n$))を推定し、平均的な尺度から、企業体を偏差値等を用いて評価する。

3. 包絡型対数線形回帰型生産関数を用いた効率性評価

効率性評価のひとつの手法として、統計的な対数線形回帰分析がある。この分析は、平均的にみて企業体の優劣を付けるものである。しかしながら、効率性評価の観点から、すべての企業体の出力を包み込むような生産関数を定義し、その上限からの効率を評価することが望ましい場合が多い。このような背景から、生産関数として包絡型対数線形回帰型のモデル^[2]が、次式のように提案されている。

$$Q = X_0 \cdot A_1^{x_1} \cdot A_2^{x_2} \cdots A_n^{x_n} \quad (3)$$

ここで、 Q を DMU の出力、($i = 1, \dots, n$) を DMU の入力とする。

(3)の両辺に対数をとることで、このモデルは次式の通常の対数線形回帰モデルに帰着される。

$$q = x_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n \quad (4)$$

ここで、 $x_0 = \ln X_0$ 、 $a_i = \ln A_i$ ($i = 1, \dots, n$) である。

DMU_j ($j = 1, \dots, m$) の実際のデータを (Q_j , A_{1j} , A_{2j} , \dots , A_{nj}) とし、 $q_j = \ln Q_j$ 、 $a_{ij} = \ln A_{ij}$ ($i = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, m$) とする。このとき、すべての DMU_j の出力データ Q_j が、(4)のモデルに包含されるように各係数 x_i を同定することを目的としているので、次式によって係数を同定することが提案されている^[2]。

$$\begin{aligned} \min \sum_{j=1}^m (x_0 + a_{1j} x_1 + a_{2j} x_2 + \cdots + a_{nj} x_n - q_j) \\ \text{s.t.} \quad x_0 + a_{1j} x_1 + a_{2j} x_2 + \cdots + a_{nj} x_n \geq q_j \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (5)$$

定理 1 効率な DMU の存在

すべての j について $Q_j \leq \widehat{Q}_j$ であり、少なくとも一つの k で $Q_j = \widehat{Q}_j$ なる k が存在する。ここで、 \widehat{Q}_j は(5)で同定された DMU_j の出力値である。

定義1 対数線形回帰モデルによる効率性評価指標

(5)で同定された DMU_j の出力値 \widehat{Q}_j を用いて、 DMU_j の効率性の評価指標として、 $\frac{Q_j}{\widehat{Q}_j}$ を用いている。

4. 可能性生産関数による効率性の評価

実際問題を考慮すれば、入力があるにも関わらず出力がゼロであることは、全く企業体が努力をしていないことを意味する。各企業体は、生産を行うために必死の努力をしていると考えられ、入力軸までも生産可能領域とすることは不自然であると考えられる。従って、生産可能領域の下限を考慮した生産関数をファジィ理論を導入して定式化する。

(1)、(3)における各係数 x_i を L-L ファジィ数 $\widetilde{x}_i = (x_i, d_i)_L$ に拡張し、可能性生産関数をモデル化する。ここで、研究対象として企業効率を考察しているため、出力を縦軸、入力の組を横軸としたイメージ的な生産可能集合は、出力軸の一点から出発し出力データを上側と下側から包含するような領域になるのが理想である。従って、 X_0 についてはノンファジィ数とする。可能性生産関数は、次式のように定式化される。ここで、煩雑をさけるためファジィ数 \widetilde{x}_i 以外は、前節で用いた記号を使用する。

$$Q = X_0 \cdot A_1^{\widetilde{x}_1} \cdot A_2^{\widetilde{x}_2} \cdots A_n^{\widetilde{x}_n} \quad (6)$$

(6)の両辺に対数をとることで、このモデルは次式の通常のファジィ対数線形回帰モデルに帰着される。

$$q = x_0 + a_1 \widetilde{x}_1 + a_2 \widetilde{x}_2 + \cdots + a_n \widetilde{x}_n \quad (7)$$

DMU_j ($j = 1, \dots, m$) の実際のデータを $(Q_j, A_{1j}, A_{2j}, \dots, A_{nj})$ とし、 $q_j = \ln Q_j$, $a_{ij} = \ln A_{ij}$ ($i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m$) とする。このとき、拡張原理より、このモデルは次式で与えられる⁽⁴⁾。

$$\begin{aligned} & x_0 + a_1 \widetilde{x}_1 + a_2 \widetilde{x}_2 + \cdots + a_1 \widetilde{x}_1 \\ & = (x_0 + \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j, \sum_{j=1}^n a_{ij} d_j)_L \end{aligned} \quad (8)$$

可能性推定回帰分析の定式化⁽²⁾に従って、次式のLP問題によりファジィ係数を同定する。

$$\begin{aligned} & \min \sum_{j=1}^m a_{ij} d_i \\ & \text{s.t.} \quad x_0 + \sum_{j=1}^m a_{ij} x_i + |L^{-1}(h)| \cdot \sum_{j=1}^m a_{ij} d_i \geq q_j \\ & \quad \quad x_0 + \sum_{i=1}^m a_{ij} x_i - |L^{-1}(h)| \cdot \sum_{j=1}^m a_{ij} d_i \leq q_j \\ & \quad \quad x_i \geq 0, i = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (9)$$

ここで、 h はモデルの可能性のレベルを表し、 $L(\cdot)$ は、L-L ファジィ数の型関数を表す。また、可能性推定回帰分析では、 x_i の非負条件は考慮されていないが、生産関数のモデルの性質上、可能性生産関数の係数の同定には非負条件を付加する。

定義 2 可能性生産関数による効率性評価指標

(9) 同定された DMU_j の可能性出力区間 $[\widehat{QL}_j, \widehat{QU}_j]$ を用いて、 DMU_j の効率性の評価指標として、 $\frac{Q_j - \widehat{QL}_j}{\widehat{QU}_j - \widehat{QL}_j}$ と定義し、非効率性の指標を $1 - \frac{Q_j - \widehat{QL}_j}{\widehat{QU}_j - \widehat{QL}_j}$ と定義する。

5. 生産可能集合に基づく DEA

DEA の最初の定式化においては、直接的に効率性を評価するために分数計画問題として定式化された^[7]。しかしながら、生産可能集合の概念からも、同様なモデル化がなされることが示されている^[8]。ここでは、生産可能集合からのモデル化について簡単に説明する。

いま、 n 個の DMU があり、 DMU_j ($j = 1, \dots, n$) には共通した入力群 $X_j = (x_{j1}, \dots, x_{jm})$ 、および共通した出力群 $Y_j = (y_{j1}, \dots, y_{js})$ があると仮定する。ここで、入力ベクトルを $X = [X_1, \dots, X_n]$ とし、出力ベクトルを $Y = [Y_1, \dots, Y_n]$ と表記する。ここで、これらの値は一般に正値であり、ある出力を産出するための入力に関しては値の小さいものほど好ましく、ある入力による出力に関しては大きいものほど望ましい状態にあるとする。DMU のデータセット (X, Y) をもとに、生産可能集合 (x, y) を次の制約を満たす値の集合として定義する。

$$\begin{aligned} x &\geq X\lambda \\ y &\leq Y\lambda \\ \lambda &\geq 0 \\ L &\leq e^T \lambda \leq U \end{aligned} \tag{10}$$

ここで、 $x \in R^m, y \in R^s, \lambda \in R^n, e^T = (1, \dots, 1)$ である。

(7)によって、DEA における生産集合を規定し、 λ の要素の和に対する上限および下限を表す L と U に制約を加えることで様々なモデルが提案されている。特に、 $L = 0, U = \infty$ としたモデルが、CCR (Charnes-Cooper-Rhodes) モデルであり、 $L = U = 1$ としたモデルが、BCC (Banker-Charnes-Cooper) モデルである。本論文では、特に CCR モデルを取り上げるため、以下に CCR モデルを紹介する。

CCR モデル

$$\begin{aligned} \min \quad & \theta - \epsilon(e^T s^+ + e^T s^-) \\ \text{st.} \quad & \theta x_0 - s^+ = X\lambda \\ & y + s = Y\lambda \\ & \lambda, s^+, s^- \geq 0 \end{aligned} \tag{11}$$

ここで、 s^+, s^- はスラック変数である。

6. ファジィ目標の導入による包絡型対数線形回帰型生産関数での評価と DEA での評価の融合

包絡型対数線形回帰型生産関数により、個別の出力に関する効率性評価(定義1)を行った後、最大値を θ_1 、最小値を θ_2 と置く。この最大値と最小値との間に効率値の満足解が存在することを仮定して、(11)式のファジィ目標 ($\mu_C: \theta \rightarrow [0, 1]$) として意思決定者が主観的に以下のように規定したと仮定する。

$$\mu_G(\theta) = \begin{cases} 0, & (\theta \leq \theta_2) \\ \frac{(\theta - \theta_2)}{(\theta_1 - \theta_2)} & (\theta_2 \leq \theta \leq \theta_1) \\ 0, & (\theta_1 \leq \theta) \end{cases} \quad (12)$$

参考文献^[10]に沿って、次式のようにファジィ満足化手法がモデル化できる。

$$\begin{aligned} \min \quad & \alpha \\ \text{st.} \quad & \alpha \leq \mu_G(\theta) \\ & \theta x_0 \geq X \cdot \lambda \\ & y \leq Y \lambda \\ & e^T \lambda = 1 \\ & \lambda, s^- \geq 0 \end{aligned} \quad (13)$$

(13)式は、線形計画問題に帰着され、求められた満足解を $\hat{\theta}$ とおく。

入力改善計画

$$x = \hat{\theta} \cdot x$$

この満足解は、1出力だけが考慮され他の出力が無視されるというDEAの最大の欠点を克服し、現在の入力でどれくらいの出力が期待できるかという判断基準に基づいて、事業体の効率性評価に基づいて導出されたことを意味する。結論的には、各々の出力を個別に可能性生産関数により評価し、その最大効率値と最小効率値に基づいたファジィ目標をDEAに導入することで、現入力での可能な最大出力を考慮した企業体効率性評価ができる。

7. ファジィ目標の導入による可能性生産関数での評価とDEAでの評価の融合

可能性生産関数により、個別の出力に関する効率性評価(定義2)を行った後、効率性の最大値を θ_{U1} 、最小値を θ_{U2} と置く。また、非効率性の最大値を θ_{L1} 、最小値を θ_{L2} と置く。効率性の最大化と非効率性の最小化を図るため、(11)式の効率性のファジィ目標($\mu_{GU}: \theta \rightarrow [0, 1]$)と、非効率性のファジィ目標($\mu_{GL}: \theta \rightarrow [0, 1]$)として意思決定者が主観的に以下のように規定したと仮定する。

$$\mu_{GU}(\theta) = \begin{cases} 0, & (\theta \leq \theta_{U2}) \\ \frac{(\theta - \theta_{U2})}{(\theta_{U1} - \theta_{U2})} & (\theta_{U2} \leq \theta \leq \theta_{U1}) \\ 0, & (\theta_{U1} \leq \theta) \end{cases} \quad (14)$$

$$\mu_{GL}(\theta) = \begin{cases} 0, & (\theta \leq \theta_{L2}) \\ \frac{(\theta - \theta_{L1})}{(\theta_{L2} - \theta_{L1})} & (\theta_{L2} \leq \theta \leq \theta_{L1}) \\ 0, & (\theta_{L1} \leq \theta) \end{cases} \quad (15)$$

ここで、(14)式のファジィ目標と(15)式のファジィ目標が、直交することに注意しよう。

参考文献^[10]に沿って、次式のようにファジィ満足化手法がモデル化できる。

$$\begin{aligned}
 & \min \alpha \\
 & \text{st. } \alpha \leq \mu_{GU}(\theta) \\
 & \quad \alpha \leq \mu_{GL}(\theta) \\
 & \quad \theta_{x_0} \geq \mathbf{X} \cdot \lambda \\
 & \quad \mathbf{y} \leq \mathbf{Y}\lambda \\
 & \quad \lambda, s^- \geq 0
 \end{aligned} \tag{16}$$

(16)式は、線形計画問題に帰着され、求められた満足解を $\hat{\theta}$ とおく。この満足解 $\hat{\theta}$ に基づく入力改善計画は $x = \hat{\theta} \cdot x$ となる。

この満足解は、1出力だけが考慮され他の出力が無視されるというDEAの最大の欠点を克服し、現在の入力ですれど程度の出力が期待できるかという判断基準に基づいて、事業体の効率性評価に基づいて導出されたことを意味する。結論的には、各々の出力を個別に可能性生産関数により評価し、その効率性の最大化と非効率性の最小化に基づいた2つのファジィ目標をDEAに導入することで、非効率性の最小化を図りながら、現入力での可能な最大出力を考慮した企業体効率性評価ができる。

8. ファジィ満足化手法の都市銀行効率性評価への応用

まず、11の都市銀行効率性評価問題にDEAを用いた結果を表1に示す。ここで、入力としては、総資産(100万円単位)、従業員数、店舗数であり、出力としては、経常収益(100万円単位)、業務純益(100万円単位)である。表1において $\mu^* = (\mu_1^*, \mu_2^*) = (a, 0)$ もしくは $\mu^* = (\mu_1^*, \mu_2^*) = (0, b)$ となっている銀行の効率性評価においては、出力が2個あるにも関わらず、1つの出力だけが考慮され、全体的な効率性が評価されていることを意味し、これがDEA手法の最大の問題といえる。

次に、これらのデータより個別の出力 y_1 (経常収益)と y_2 (業務純益)について、ファジィ対数回帰分析を行う。求められたファジィ対数回帰関数を以下に示す。

$$y_1 = 1 \cdot x_1^{(0.735, 0.017)_L} \cdot x_2^{(0.00, 0.00)_L} \cdot x_3^{(0.162, 0.00)_L} \tag{17}$$

$$y_2 = 1 \cdot x_1^{(0.675, 0.035)_L} \cdot x_2^{(0.00, 0.00)_L} \cdot x_3^{(0.002, 0.00)_L} \tag{18}$$

ここで、 x_1 は総資産、 x_2 従業員数、 x_3 は店舗数である。

これらのファジィ対数回帰関数に基づいて、各出力を評価した効率値を各々 θ_{U1} と θ_{U2} とし、非効率値を各々 θ_{L1} と θ_{L2} とし、表1に示す。また、これらの効率値と非効率値で構成されたファジィ2目的満足解を $\hat{\theta}$ と置き、表1に示す。このファジィ満足解により次のような指針が導出できる。

- 1) θ^* がDEA効率値よりも大きい場合は、DEAの見方とは逆に、現状の入力でDEAの評価以上の出力を産出していることを意味し、DEA効率値が低く見積もられたと考えられる。このDMUは能率的に見ると、活発に活動していると判断される。
- 2) θ^* がDEA効率値よりも小さい場合は、DEAの見方とは逆に、現状の入力で現状で産出できる可能性を考慮した出力よりも現状出力は低い出力であることを意味し、DEA効率値が高く見積もられたと考えられる。このDMUは能率的に見ると、あまり活動的でないと判断される。この場合には、前節で述べた、入力の改善を推進すべきではないかと考えられる。

表1 11都市銀行の1995年3月期の決算データとDEA効率値 θ^*

	総試算 (百万円)	店舗数 (軒)	従業員数 (人)	経常利益 (百万円)	業務純益 (百万円)	ファジィ対数線形回帰による効率	
						出力1	出力2
Bank 1	52230247	418	19061	2416526	225141	0.4940	0.6256
Bank 2	10597709	211	6128	457723	32021	0.0000	0.0000
Bank 3	23265654	94	8284	1484621	172423	1.0000	1.0000
Bank 4	52465934	565	21600	2617983	160168	0.5949	0.3240
Bank 5	48775121	368	15701	2872097	246699	1.0000	0.7814
Bank 6	50730147	365	16252	2870857	288250	0.9208	0.9440
Bank 7	52256008	387	17247	2812759	243580	0.8103	0.7094
Bank 8	18299016	243	9604	1097083	93180	0.6814	0.4768
Bank 9	51849609	396	14909	2748593	304894	0.8243	1.0000
Bank10	30860566	302	11971	1463481	145766	0.4285	0.5579
Bank11	28004284	437	14436	1287137	146690	0.2839	0.6333

	ファジィ対数線形回帰による非効率		ファジィ満足解	DEA効率	各出力に対する最適ウェイト (μ_1, μ_2)
	出力1	出力2	θ	θ^*	
Bank 1	0.5060	0.3744	0.8349	0.7251	(0.300, 0.000)
Bank 2	1.0000	1.0000	0.6708	0.6768	(0.148, 0.000)
Bank 3	0.0000	0.0000	1.0000	1.0000	(0.322, 0.303)
Bank 4	0.4051	0.6760	1.0000	0.7820	(0.299, 0.000)
Bank 5	0.0000	0.2186	1.0000	1.0000	(0.343, 0.623)
Bank 6	0.0792	0.0560	1.0000	0.9678	(0.328, 0.943)
Bank 7	0.1897	0.2906	0.9129	0.8952	(0.319, 0.000)
Bank 8	0.3186	0.5232	1.0000	0.9396	(0.856, 0.000)
Bank 9	0.1757	0.0000	1.0000	1.0000	(0.348, 0.144)
Bank10	0.5715	0.4421	0.8415	0.7432	(0.508, 0.000)
Bank11	0.7161	0.3667	0.7818	0.7203	(0.560, 0.000)

謝辞 本論文を作成するに当たり、適用例を作成して頂いた山口・荻窪各氏に深謝します。

参考文献

- [1] 佐藤和夫、生産関数の理論、創文社、1975
- [2] Di Giokas, Bank Branch Operating Efficiency: A comparative Application of DEA and the Loglinear Model, OMEGA, Int. J. of mgmt. Sci. Vol. 19, pp. 549-557, 1991
- [3] 和多田淳三、森本正明、可能性生産関数に基づく産業分析、日本ファジィ学会第2回ノンエンジニアリング・ファジィワークショップ講演論文集、pp. 22-25, 1992
- [4] 田中英夫、ファジィモデリングとその応用、朝倉書店、1991

- [5] 植村芳樹、小林正樹、ファジィ対数線形回帰を用いた企業効率性の評価、日本ファジィ学会第5回ノンエンジニアリング・ファジィワークショップ講演論文集、pp. 66-67, 1995
- [6] Yoshiki Uemura, Masaki Kobayashi, Kazuki Hiro: Application of Fuzzy Loglinear Regression Analysis to Evaluation of Efficiency for DMUs, J. of Fuzzy Mathematics, Vol. 4, No. 1, pp. 199-206, 1996
- [7] Charnes, A., W. W. Cooper and E. Rhodes: Measuring the Efficiency of Decision Making Units, European Journal of Operational Research, Vol. 2, pp. 429-444, 1978
- [8] 刀根薫、経営効率性の測定と改善、日科技連、1993
- [9] Yoshiki Uemura, A Comparative Study of Fuzzy Loglinear Model and DEA in Evaluation of Efficiency of DMUs, Control and Cybernetics, (to appear)
- [10] Sakawa M. : Fuzzy Sets and Interactive Multiobjective Optimization, Plenum Press 1993
- [11] 植村芳樹、山口誠、ファジィ目標を介することによる可能性生産関数とDEAとの効率性評価の融合の試み、日本ファジィ学会第8回ノンエンジニアリング・ファジィワークショップ講演論文集、pp. 11-14, 1998
- [12] Yoshiki Uemura, Fuction of Evaluation of Possibility Production Function and DEA by introducing a Fuzzy Goal, Proc. of 2th International Conference on Knowledge-Based Inteigent Electronic System, Adelaide, Austraria, Vol. 1 pp. 285-288, 1998
- [13] 植村芳樹、荻窪博、可能性生産関数から導出された効率性と非効率性をDEAに導入することによるファジィ満足化手法、日本ファジィ学会第14回ファジィシステムシンポジウム、1998
- [14] Yoshiki Uemura, Fuzzy Satisfactional Method by Fuzzy Multi-objective Linear Problem Introducing two Fuzzy Goals from Possibility Function into DEA, Proc. of 6th European Congress on Intelligent Techmiques and Soft Computing, Aachen, Germany, 1998