

# 種々のファジィ融合型 CCR モデルとその応用

植村 芳樹

## Fuzzy Mixed CCR Models with an Application

Yoshiki UEMURA

### 1. はじめに

いくつかの営業所や支店（一般に、事業体（DMU）という）から構成される企業において、各事業体の相対的な個別の効率評価を行うことが重要な課題となっている。また、企業をひとつの事業体とみなして、属する業種内での各企業の相対的な効率性の位置づけも重要な課題となっている。このような背景から、生産関数を用いた事業体の効率性評価の研究が盛んになっている。最近では、DEA（Data Envelopment Analysis）<sup>[1]</sup>が、生産可能集合の制約を満たす効率評価の手法として注目されており、CCR（Charnes-Cooper-Rhodes）モデルやBCC（Banker-Charnes-Cooper）モデルが考案されている<sup>[2]</sup>。しかしながら、DEA効率値に注目すると、一般にBCCモデルで評価した効率値の方が、CCRモデルで評価した効率値より大きくなる。これは、BCCモデルの方が、CCRモデルに比べ、甘い評価をDMUに与えることを意味する<sup>[3]</sup>。DEAモデルは、多出力他入力の方法であるが、1出力毎にCCRモデルで評価して、最大の効率値と最小の効率値とでファジィ目標を形成し、CCRモデルに導入したファジィ満足化手法が提案されている<sup>[4, 5, 6]</sup>。また、包絡分析法の別の評価手法として、出力指向のファジィ対数線形回帰分析がある<sup>[7]</sup>。包絡分析法と可能性生産関数との評価の違いも考察されている<sup>[8, 9, 10]</sup>。1出力毎にファジィ対数線形回帰分析で評価して、非効率性を最小に効率性を最大にするように2つのファジィ目標を構成し、DEAモデルに導入したファジィ多目的満足化手法も提案されている<sup>[11, 12]</sup>。本論文では、BCCモデルとCCRモデルの評価の違い<sup>[2, 3]</sup>に注目して、1出力毎にBCCモデルで評価して、BCCモデルによる最大の効率値と最小の効率値とでファジィ目標を規定し、CCRモデルに導入したファジィ融合型CCRモデルを定式化する。また、包絡分析法において、出力指向のモデルが提案されている<sup>[2, 3]</sup>。1出力毎に出力指向型CCRモデルによる最大の効率値と最小の効率値を求め、ファジィ目標を規定し、CCRモデルに導入したファジィ融合型CCRモデルを定式化する。

### 2. 生産可能集合に基づく DEA

DEAの最初の定式化においては、直接的に効率性を評価するために分数計画問題として定式化された<sup>[1]</sup>。しかしながら、生産可能集合の概念からも、同様なモデル化がなされること示されている<sup>[3]</sup>。ここでは、生産可能集合からのモデル化について簡単に説明する。

いま、 $n$ 個のDMU（Decision Making Unit）があり、 $DMU_j$  ( $j = 1, \dots, n$ )には共通した入力群  $X_j = (x_{j1}, \dots, x_{jm})$ 、および共通した出力群  $Y_j = (y_{j1}, \dots, y_{js})$ があると仮定する。

ここで、入力ベクトルを  $X = [X_1, \dots, X_n]$  とし、出力ベクトルを  $Y = [Y_1, \dots, Y_n]$  と表記する。ここで、これらの値は一般に正值であり、ある出力を産出するための入力に関しては値の小さいものほど好ましく、ある入力による出力に関しては大きいものほど望ましい状態にあるとする。DMU のデータセット  $(X, Y)$  をもとに、生産可能集合  $(x, y)$  を次の制約を満たす値の集合として定義する。

$$\begin{aligned} x &\geq X\lambda \\ y &\leq Y\lambda \\ \lambda &\geq o \\ L &\leq e^T\lambda \leq U \end{aligned} \tag{1}$$

ここで、 $X \in R^m$ ,  $Y \in R^s$ ,  $\lambda \in R^n$ ,  $e^T = (1, \dots, 1)$  である。(1) によって、DEA における生産集合を規定し、 $\lambda$  の要素の和に対する上限および下限を表す  $L$  と  $U$  に制約を加えることで様々なモデルが提案されている。特に、 $L = 0$ ,  $U = \infty$  としたモデルが、CCR モデルであり、 $L = U = 1$  としたモデルが、BCC モデルである。まず、効率を  $\theta$  表すと CCR モデルと BCC モデルは、次式で定式化される。

CCR モデル

$$\begin{aligned} \min \quad & \theta \\ \text{st.} \quad & \theta x_0 \geq X\lambda \\ & Y \leq Y\lambda \\ & \lambda \geq o \end{aligned} \tag{2}$$

BCC モデル

$$\begin{aligned} \min \quad & \theta \\ \text{st.} \quad & \theta x_0 \geq X\lambda \\ & Y \leq Y\lambda \\ & e^T\lambda = 1 \\ & \lambda \geq o \end{aligned} \tag{3}$$

出力指向型 CCR モデル

$$\begin{aligned} \min \quad & \theta \\ \text{st.} \quad & X \geq X\lambda \\ & \theta y_0 \leq Y\lambda \\ & \lambda \geq o \end{aligned} \tag{4}$$

出力指向型 BCC モデル

$$\begin{aligned} \min \quad & \theta \\ \text{st.} \quad & X \geq X\lambda \\ & \theta y_0 \leq Y\lambda \\ & e^T\lambda = 1 \\ & \lambda \geq o \end{aligned} \tag{5}$$

### 3. BCC モデルから導出したファジィ目標を CCR モデルに導入したファジィ融合型 CCR モデル

ある事業体  $DMU_j$  の  $m$  個の入力  $x_{ij}$  について個別の  $s$  個の出力  $y_{kj}$  に対する効率値  $\theta_k^*$  を BCC モデルにより求める。

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \theta_k \\
 \text{st.} \quad & \theta_k x_k \geq X_k \lambda \\
 & y_{kj} \leq Y \lambda \\
 & e^T \lambda = 1 \\
 & \lambda \geq 0
 \end{aligned} \tag{6}$$

(6) 式で求めた  $\theta_k^*$  のなかで、最大の効率値を  $\theta_1$  とし最小の効率値を  $\theta_2$  とする。

個別の出力に関する最大値と最小値との間に効率値の満足解が存在することを仮定して、(2) 式のファジィ目標 ( $\mu_G: R \rightarrow [0, 1]$ ) として意思決定者が主観的に規定したと仮定する。

$$\mu_G(\theta) = \begin{cases} 0, & (\theta \leq \theta_2) \\ \frac{(\theta - \theta_2)}{(\theta_1 - \theta_2)}, & (\theta_2 \leq \theta \leq \theta_1) \\ 1, & (\theta_1 \leq \theta) \end{cases} \tag{7}$$

意思決定者は、(7) 式で規定されたファジィ目標を CCR モデルに導入し、Bellmann と Zadeh が定義した最大化決定 [13, 14] を採用したと仮定すれば、ファジィ融合型 CCR モデルは次式で定式化される。

$$\begin{aligned}
 \max \quad & \alpha \\
 \text{st.} \quad & \alpha \leq \mu_G(\theta) \\
 & \theta x_j \geq X \lambda \\
 & Y \leq Y \lambda \\
 & \lambda \geq 0
 \end{aligned} \tag{8}$$

(8) 式は、線形計画問題に帰着され、求められた満足解を  $\hat{\theta}$  とおく。ファジィ融合型 CCR モデル (8) で求められた効率値を基準として、個別の出力に対する効率値と比較しながら、下記のような入力改善策が考えられる。

**入力改善策**

$$\hat{x}_{ij} = \hat{\theta} \cdot x_{ij}$$

**定理 1** ( $\hat{\theta}$  の性質)

$\hat{\theta}$  は、BCC 効率値と CCR 効率値の間に存在する。

### 4. 出力指向 BCC モデルから導出したファジィ目標を出力指向 CCR モデルに導入したファジィ融合型 CCR モデル

ある事業体  $DMU_j$  の  $m$  個の入力  $x_{ij}$  について個別の  $s$  個の出力  $y_{kj}$  に対する効率値  $\theta 1_k^*$  を出力指向 CCR モデルにより求める。

$$\begin{aligned}
& \max \quad \theta 1_k \\
& \text{st.} \quad x_k \geq X_k \lambda \\
& \quad \theta 1_k y_{kj} \leq Y \lambda \\
& \quad e^T \lambda = 1 \\
& \quad \lambda \geq 0
\end{aligned} \tag{9}$$

(9) 式で求めた  $\theta 1_k^*$  のなかで、最大の効率値を  $\theta 1_1$  とし最小の効率値を  $\theta 1_2$  とおく。個別の入力に関する最大値と最小値との間に効率値の満足解が存在することを仮定して、(7) 式のファジィ目標 ( $\mu_{G1}: R \rightarrow [0, 1]$ ) として意思決定者が主観的に規定したと仮定する。

$$\mu_{G1}(\theta 1) = \begin{cases} 1, & (\theta 1 \leq \theta 1_2) \\ \frac{(\theta 1 - \theta 1_2)}{(\theta 1_1 - \theta 1_2)}, & (\theta 1_2 \leq \theta 1 \leq \theta 1_1) \\ 0, & (\theta 1_1 \leq \theta 1) \end{cases} \tag{10}$$

意思決定者は、(10) 式で規定されたファジィ目標を CCR モデルに導入し、Bellmann と Zadeh が定義した最大化決定を採用したと仮定すれば、ファジィ融合型 CCR モデルは次式で定式化される。

$$\begin{aligned}
& \max \quad \alpha \\
& \text{st.} \quad \alpha \leq \mu_{G1}(\theta 1) \\
& \quad X \geq X \lambda \\
& \quad \theta 1 y_k \leq Y \lambda \\
& \quad \lambda \geq 0
\end{aligned} \tag{11}$$

(11) 式は、線形計画問題に帰着され、求められた満足解を  $\overline{\theta 1}$  とおく。

**定理 2** ( $\hat{\theta}$  と  $\overline{\theta 1}$  の関係)

もし、 $\mu_G(\hat{\theta}) = \mu_{G1}(\overline{\theta 1})$  ならば、 $\overline{\theta 1} = 1/\hat{\theta}$  である。

(証明)

$\theta 1 = 1/\theta$  とおくと、(8) 式の線形計画問題と (11) 式の線形計画問題は同型となる。このことにより、定理 3 は説明される。

**定理 3** ( $\hat{\theta}$  と  $\overline{\theta 1}$  の性質)

もし、CCR 効率値が 1 ならば、 $\overline{\theta 1} = \hat{\theta} = 1$  である。

(証明)

$\mu_G(\theta^*) = \mu_{G1}(\theta^*) = 1$  と、定理 2 から説明できる。ここで、 $\theta^*$  は CCR 効率値である。

## 5. 出力指向 BCC モデルから導出したファジィ目標を CCR モデルに導入したファジィ融合型 CCR モデル

ある事業体  $DMU_j$  の  $m$  個の入力  $x_{ij}$  について個別の  $s$  個の出力  $y_{kj}$  に対する効率値  $\theta 1_k^*$  を出力指向 CCR モデルにより求める。

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \theta 1_k \\
 \text{st.} \quad & x_k \geq X_k \lambda \\
 & \theta 1_k y_{kj} \leq Y_k \lambda \\
 & e^T \lambda = 1 \\
 & \lambda \geq 0
 \end{aligned} \tag{12}$$

(12) 式で求めた  $\theta 1_k$  のなかで、最大の効率値を  $\theta_1$  とし最小の効率値を  $\theta_2$  とする。ここで、 $\theta 1_1 = 1/\theta_2$ ,  $\theta 1_2 = 1/\theta_1$  とおく。個別の入力に関する最大値と最小値との間に効率値の満足解が存在することを仮定して、(12) 式のファジィ目標 ( $\mu_{G2}: R \rightarrow [0, 1]$ ) として意思決定者が主観的に規定したと仮定する。

$$\mu_{G2}(\theta) = \begin{cases} 0, & (\theta \leq \theta 1_2) \\ \frac{(\theta - \theta 1_2)}{(\theta 1_1 - \theta 1_2)}, & (\theta 1_2 \leq \theta \leq \theta 1_1) \\ 1, & (\theta 1_1 \leq \theta) \end{cases} \tag{13}$$

意思決定者は、(13) 式で規定されたファジィ目標を CCR モデルに導入し、Bellmann と Zadeh が定義した最大化決定を採用したと仮定すれば、ファジィ融合型 CCR モデルは次式で定式化される。

$$\begin{aligned}
 \max \quad & \alpha \\
 \text{st.} \quad & \alpha \leq \mu_{G1}(\theta 1) \\
 & \theta x_k \geq X \lambda \\
 & Y \leq Y \lambda \\
 & \lambda \geq 0
 \end{aligned} \tag{14}$$

(14) 式は、線形計画問題に帰着され、求められた満足解を  $\tilde{\theta}$  とおく。

**定理 4** ( $\tilde{\theta}$  の性質)

$\tilde{\theta}$  は、出力指向 BCC 効率値と出力指向 CCR 効率値の間に存在する。

(能率の観点からの  $\tilde{\theta}$  の定性的性質)

- 1)  $\tilde{\theta}$  が出力指向 CCR 効率値よりも小さい場合は、DEA の見方とは逆に、現状の入力で DEA の評価以上の出力を産出していることを意味し、DEA 効率値が低く見積もられたと考えられる。この DMU は能率的に見ると、活発に活動していると判断される。
- 2)  $\tilde{\theta}$  が出力指向 CCR 効率値よりも大きい場合は、DEA の見方とは逆に、現状の入力で現状で産出できる可能性を考慮した出力よりも現状出力は低い出力であることを意味し、DEA 効率値が高く見積もられたと考えられる。この DMU は能率的に見ると、あまり活動的でないと判断される。この場合には、入力の改善を推進すべきではないかと考えられる。

以上のことと同様に出力指向の CCR モデルで 1 入力毎に評価し、ファジィ目標を形成し出力指向の CCR モデルに導入するファジィ満足化手法も考えられるが、文献 [5] の議論と全く同様になる。定理として以下のものがある。

定理5 上記ファジィ満足化手法の満足解は、出力指向CCR効率値になる。証明は、文献 [5] の定理1の議論と同様である。

## 6. 都市銀行問題への適用

11の都市銀行データを表6.1に示す。この都市銀行データにDEAを用いた結果を表6.2に示す。ここで、入力としては、総資産、従業員数、店舗数であり、出力としては、経常収益、業務純益である。2節で定式化したファジィ融合型CCRモデルをこの銀行データに適用した結果を表6.2 ( $\hat{\theta}_1$ )に示す。表6.3より、すべての $DMU_j$ においてファジィ満足解 $\hat{\theta}_1$ は、

Table 1 Japanese National Bank data

	assets	branch	employment	revenue	profit
BANK 1	52230247	418	19061	2416526	225141
BANK 2	10597709	211	6128	457723	32021
BANK 3	23265654	94	8284	1484621	172423
BANK 4	52465934	565	21600	2617983	160168
BANK 5	48775121	368	15701	2872097	246699
BANK 6	50730147	365	16252	2870857	2870857
BANK 7	52256008	387	17247	2812759	243580
BANK 8	18299016	243	9604	1097083	93180
BANK 9	51849609	396	14909	2748593	304894
BANK10	30860566	302	11971	1463481	145766
BANK11	28004284	437	14436	1287137	146690

Table 2 DEA Efficiency

	CCR	BCC	CCRO	BCCO
BANK 1	0.7251	0.7883	1.3791	1.1966
BANK 2	0.6768	1.0000	1.4775	1.0000
BANK 3	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
BANK 4	0.7820	0.8387	1.2788	1.0000
BANK 5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
BANK 6	0.9678	1.0000	1.0333	1.0000
BANK 7	0.8952	0.9166	1.1171	1.0214
BANK 8	0.9396	1.0000	1.0643	1.0000
BANK 9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
BANK10	0.7432	0.7455	1.3455	1.2869
BANK11	0.7203	0.7422	1.3883	1.3452

Table 3 Fuzzy Mixed CCR Efficiency

	$\hat{\theta}_1$	$\hat{\theta}_2$	$\hat{\theta}_3$
BANK 1	0.7883	1.3791	0.7883
BANK 2	1.0000	1.0000	1.0000
BANK 3	1.0000	1.0000	1.0000
BANK 4	0.8387	1.2788	0.8387
BANK 5	1.0000	1.0000	1.0000
BANK 6	1.0000	1.0000	1.0000
BANK 7	0.9150	1.0306	0.9150
BANK 8	1.0000	1.0643	1.0000
BANK 9	1.0000	1.0000	1.0000
BANK10	0.7455	1.3455	0.7455
BANK11	0.7397	1.3178	0.7363

CCR 効率値と BCC 効率の中間に存在する。次に、3 節で定式化したファジィ融合型 CCRO モデルをこの銀行データに適用した結果を表 6.3 ( $\hat{\theta}_2$ ) に示す。表 6.3 より、すべての  $DMU_j$  においてファジィ満足解  $\hat{\theta}_2$  は、CCRO 効率値と BCCO 効率の中間に存在する。最後に、4 節で定式化した出力指向ファジィ融合型 CCR モデルをこの銀行データに適用した結果を表 6.3 ( $\hat{\theta}_3$ ) に示す。表 6.2 と表 6.3 を対比すると、CCR 効率値が 1 の  $DMU$  は、すべてのファジィ満足解も効率値が 1 である。銀行 11 に注目すると、 $\hat{\theta}_3 < \hat{\theta}_1$  である。これは、1 出力毎に導出した BCCO 効率の最小値の逆数が、BCC 効率値より小さいためである。表 6.3 より、ファジィ満足解と CCR 効率値を比べて、能率の意味からも入力改善計画が作成できる。

## 7. おわりに

様々なファジィ融合型 CCR モデルを考案した。まず、BCC モデルと CCR モデルの評価の違いに注目し、1 出力毎に BCC モデルで評価を行い、ファジィ目標を形成し CCR モデルに導入した。その結果、ファジィ満足解は CCR モデルと BCC モデルの中間に位置づけられ、ファジィ満足解が効率的であるときは、CCR モデルと BCC モデルとも効率的であることが分かった。次に、出力指向 BCC モデルに注目し、1 入力毎に評価を行いファジィ目標を形成し、出力指向 CCR モデルに導入した出力指向 BCC モデルから導出したファジィ目標を出力指向 CCR モデルに導入した出力指向ファジィ融合型 CCR モデルを提案した。ファジィ融合型 CCR モデルにおけるファジィ満足解と出力指向ファジィ融合型 CCR モデルのものとの関係を明確にした。この結果、ある条件を満たせば、両モデルの満足解は逆数の関係であることが分かった。最後に、出力指向 BCC モデルによってファジィ目標を形成し、CCR モデルに導入した。このファジィ満足解を用いることで、能率という側面から CCR 効率値の定性的評価ができる。一般的に見ると CCR での評価が効率的である場合、どのタイプのファジィ融合型 CCR モデルでの評価も効率的になることが分かった。

(謝辞)

本論文の適用例を作成するのにご助力を頂いた植村研究室 DEA 研究グループ (山口、小山、都築各氏) に深謝します。

参考文献

- [1] A. , Charnes, W. W. , Cooper and E. , Rhodes : Measuring the efficiency of decision making units, *European Journal of Operational Research*, Vol. 2, pp. 429-444 (1998).
- [2] R. D. Banker, A. Charnes and W. W. Cooper : Some Models for Estimating Technical and Inefficiencies in Data Envelopment Analysis, *Management Science*, Vol. 30, pp. 1078-1092 (1984).
- [3] 刀根薫、経営効率性の測定と改善、日科技連出版社 (1993)。
- [4] Y. Uemura : Satisfactional Method introducing the Concept a Fuzzy Goal and Fuzzy Constrains into DEA, *Control and Sybernetics*, Vol. 27, pp. 453-457 (1998).
- [5] 植村芳樹、ファジィ目標の概念を DEA に導入したファジィ満足化手法、*日本ファジィ学会誌*、Vol. 9、No. 3、pp. 762-766、(1998)。
- [6] Y. Uemura : Satisfactional Method Introducing a Fuzzy Goal into DEA by Dialogue to DM, *Proceedings of 6th European Congress on Intelligent Techniques and Soft Computing*, Aachen, Germany, Vol.2, pp. 1648-1651 (1997).
- [7] Y. Uemura, M. Kobayashi, K. Hiro : Application of Fuzzy Loglinear Regression Analysis to Evaluation of Efficiency for DMUs, *Journal of Fuzzy Mathematics*, Vol. 4, pp. 199-206, (1996).
- [8] Y. Uemura : A Comparative Study in Evaluation of the Efficiency for DMU : Fuzzy Loglinear Model and DEA, *Proceedings of Methodologies for the Conception, Design, and Application of Intelligent Systems*, Iizuka, Japan, Vol. 2, pp. 680-683 (1998).
- [9] Y. Uemura : A Comparative Study in Evaluation of the Efficiency for DMU : Fuzzy Loglinear Model and DEA, *Proceedings of Methodologies for the Conception, Design, and Application of Intelligent Systems*, Iizuka, Japan, Vol. 2, pp. 680-683 (1998).
- [10] Y. Uemura : A Comparative Study of Fuzzy Loglinear Model and DEA in Evaluation of the Efficiency for DMU, *Control and Sybernetics*, Vol. 27, pp. 459-465 (1998).
- [11] Y. Uemura : Fusion of Evaluation of Possibility Production Function and DEA by Introducing a Fuzzy Goal, *Proceedings of 2nd International Conference on Knowledge-Based Intelligent Electronic System*, Adelaide, Australia, Vol. 1, pp. 285-288 (1998).
- [12] Y. Uemura : Fuzzy Satisfactional Method by Fuzzy Multi-Objective Linear Problem Introducing Two Fuzzy Goals from Possibility Function into DEA, *Proceedings of 6th European Congress on Intelligent Techniques and Soft Computing*, Aachen, Germany, Vol.2, pp. 1028-1032 (1998).
- [13] Bellman, R. E. and Zadeh, L. : Decision making in a fuzzy environment. *OMEGA, Int. J. of Management Science*, Vol. 17, 141-164 (1970).
- [14] M. Sakawa : *Fuzzy Sets and Interactive Multiobjective Optimization*, Plenum Press (1993).