三重大学教育学部研究紀要　第52巻　人文・社会科学　(2001)　51 − 54 頁

ファジィ・ベイズ意思決定法則の事例研究

植　村　芳　樹

A Case Study for Fuzzy-Bayes Decision Rule

Yoshiki UEMURA

1．はじめに

人間の思考過程において、沈黙と呼ばれる状態がある。これは、頭で考えている意思決定の目的とそれに伴う効用と心で感じている意思決定の目的とそれに伴う効用が異なるからである。我々の研究では、ベイス意思決定法則にファジィ事象の概念を導入し、ファジィ事象における効用関数に基づいた意思決定法則を構築した[1]。さらに、ファジィ事象の可能性分布を導出し、代表区間を導きファジィ事象の効用関数の代表値を産出し簡易ファジィ意思決定法則を提案した[2]。本論文では２つの相競合する意思決定問題に対して２つの自然の状態を考え、２変数の可能性分布をもつファジィ事象で融合し、このファジィ事象での意思決定法則を提案する。また、我々は田中らが提案した正規可能性理論[3]の意思決定への適用として正規可能性意思決定法則を提案している[4]。本論文では、２次元のファジィ事象のメンバシップ関数を正規型の可能性分布として適用例を構築し、意思決定者を危険中立型であると仮定した。またファジィ事象を意思決定者の迷いの状態として一つのものをとりあげた。その結果、ファジィ期待効用関数は正規型となり、意思決定法則はこの正規型の可能性分布の中心の大小関係に帰着される。一つのファジィ事象を考えた場合、ファジィ事象の可能性測度は、直接意思決定法則に反映されない。従って、２つの自然の状態の事前分布とファジィ事象の可能性分布の設定は必要なくなる。また、ファジィ事象の可能性分布の幅も消去される。以上のことより、意思決定者は各自然の状態の１次元の効用関数だけを見積ればよい。しかしながら、意思決定者が危険中立者以外の場合はファジィ期待効用関数は正規型にならない。この場合には事前確率分布とファジィ事象の可能性分布を見積る必要がある。この意思決定法則は、我々の研究におけるファジィ事象の次元増加を意味し、我々の研究の自然な拡張となっている。

2．ファジィ事象における意思決定法則

２つの相競合する意思決定問題の自然状態をそれぞれ S_1, S_2 と表記する。また、本論文では意思決定者は２つの意思決定問題において共通の決定 D_i $(i = 1,\cdots,n)$ を考えているものと仮定する。頭で考えている意思決定問題を問題１とし、$\langle S_1, D_i, U_{(1,D_i)}, \pi_1\rangle$ と表記する。また、心で感じている意思決定問題を問題２とし、$\langle S_2, D_i, U_{(2,D_i)}, \pi_2\rangle$ と表記する。ここで、π_1 と π_2 は、事前分布である。さて意思決定者が、m 個のファジィ事象 F_j $(j = 1,\cdots,m)$ を頭と心に共通した状態を設定したと仮定する。このファジィ事象における意思決定法則を $\langle F, D_i, U_F, \Pi_F\rangle$ と表記する。U_F は、ファジィ効用関数であり、Π_F は、ファジィ事象の可能性

測度である。ファジィ事象の可能性分布を$\mu_{F_j}(s_1, s_2)$と表記し、正規型であると仮定する。この時、ファジィ事象の可能性測度は次式で与えられる[3]。

ファジィ事象の可能性測度

$$\Pi_{F_j} = \max_{s_1}\max_{s_2}[\mu F_j(s_1, s_2)\cdot\pi_1(s_1)\cdot\pi_2(s_2)] \tag{1}$$

ファジィ効用関数は、写像の拡張原理により次式で与えられる[3]。

ファジィ効用関数

$$U_{F_j}, D_i(z) = \sup_{\{s_i, s_2: z = \mu_{F_j}(s_1, s_2)\}}[U_{(1, D_i)}(s_1), \wedge U_{(2, D_i)}(s_2)] \tag{2}$$

$$= \mu_{F_j}(U^{-1}_{(1, D_i)}(z), U^{-1}_{(2, D_i)}(z)) \tag{3}$$

(4)

ファジィ期待効用関数は、それぞれの行動毎に各ファジィ事象についてファジィ事象の可能性測度をファジィ効用関数にスカラー倍したものの総和になる[1]。このファジィ期待効用関数は次式で与えられる。

ファジィ期待効用関数

$$E_{D_i}(z) = \Pi_{F_1}\otimes U_{(F_1, D_i)}(z)\oplus\cdots\oplus\Pi_{F_m}\otimes U_{(F_m, D_i)}(z) \tag{5}$$

ここで$\otimes$、$\oplus$は、各々限界積、限界和を表す。

意思決定法はファジィ期待効用の大小関係を表現し、*Dubois* and *Prade*[5]が定式化した可能性理論を基にしたファジィ数の大小関係の指標により最適行動を決定する。この指標を以下に示す。

$$Pos(E_{D_l} > E_{D_k}) = \sup_{y}\inf_{x\geq y}\min(E_{D_l}(x), 1 - E_{D_k}(y)) \tag{6}$$

上記の指標をもとに$\max(Pos(E_{D_l} > E_{D_k}), Pos(E_{d_l} > E_{D_m}))$を基準として意思決定を行う。もし、$Pos(E_{D_l} > E_{D_k})(k = 1,\cdots,n)$が最大ならば最適行動は、$D_l$である。

3．適用例

ある事業体において、工場の拡張に伴うプラントの設備投資を考えている。いま、この製品は売れ筋であり生産アップすると利潤が増すことは明白であるとする。しかしながら、この製品を生産すれば有害な汚染物が発生し、地元では工場の拡張を反対している。行動として、D_1（拡張）とD_2（保留）を意思決定者は考えている。意思決定者は、頭では利潤追求のみを考えている。また心では、地球環境の破壊阻止を願っている。この拡張投資は今回だけでなく、過去のプラント拡張の利益増益率と汚染物の発生量のデータはそろっているものとする。また、

意思決定者は危険中立者であるとする。

頭で考えている利益追求という目的に伴う利益増収率を自然の状態 s_1 とし、過去の経験からの事前分布を $\pi_1(s_1)$ とする。また、確実同値法により意思決定者が 2 点を見積もったとする。行動 D_1 については $(1, 0)$ と $(q_1, 1)$、行動 D_2 については $(0, 1)$ と $(q_2, 0)$ を見積ったとする。ここで、$(s_1, U_{(1, D_i)}(s_1))$ とする。この時効用関数は次式でもとめられる。

$$U_{(1, D_1)}(s_1) = 1-(1/q_1)s_1 \quad (7)$$

$$U_{(1, D_2)}(s_1) = -(1/q_2)s_1+1 \quad (8)$$

(9)

として求められたとする。同様に心で感じている環境問題に対する目的に伴う汚染物の量を自然の状態 s_2 とし、事前分布を $\pi_2(s_2)$ とする。確実同値法により行動 D_1 については $(1, 0)$ と $(q_3, 1)$、行動 D_2 については $(0, 1)$ と $(q_4, 0)$ を見積ったとする。ここで、$(s_1, U_{(2, D_i)}(s_1))$ とする。この時効用関数は次式で求められる。

$$U_{(2, D_1)}(s_2) = -(1/q_3)s_2+1 \quad (10)$$

$$U_{(1, D_1)}(s_1) = 1-(1/q_1)s_1 \quad (11)$$

(12)

意思決定者は、ファジィ事象として「迷いの状態」Fを考えており、そのメンバシップ関数として、$\mu_F(s_1, s_2) = \exp\dfrac{-\{s_1+s_2-(m_1+m_2)\}^2}{c(b_1+b_2)}$ を見積もったとする。ここで、m_1、m_2 は、それぞれの自然の状態上にファジィ事象を考えた場合のメンバシップ関数の中心値であり、同様に b_1、b_2 は幅のパラメータの値である。また、c は統合した際に生じる曖昧さの増加を表し、過去データから共分散をもとにして意思決定者が設定するものである。

この時、ファジィ事象の効用関数は次式で与えらえる。

$$U_{D_1}(z) = \exp\frac{-\left[\frac{(a_2-a_1)}{a_1 a_2}z-\left(m_1+m_2-\frac{a_1}{a_1 a_2}\right)\right]^2}{c(b_1+b_2)} \quad (13)$$

$$U_{D_2}(z) = \exp\frac{-\left[\frac{(a_4-a_3)}{a_3 a_4}z-\left(m_1+m_2-\frac{a_3}{a_3 a_4}\right)\right]^2}{c(b_1+b_2)} \quad (14)$$

(15)

ファジィ事象の可能性測度 Π_F が、$\Pi_F = \max_{s_1}\max_{s_2}[\mu_F(s_1, s_2)\cdot\pi_1(s_1)\cdot\pi_2(s_2)]$ により計算されてるとする。この時ファジィ期待効用関数は次式で与えられる。

$$E_{D_1}(z) = \exp\frac{-\left[\Pi_F^2\frac{(a_2-a_1)}{a_1 a_2}z-\Pi_F\left(m_1+m_2-\frac{a_1}{a_1 a_2}\right)\right]^2}{c(b_1+b_2)} \quad (16)$$

$$E_{D_2}(z) = \exp\frac{-\left[\Pi_F^2\frac{(a_4-a_3)}{a_3 a_4}z-\Pi_F\left(m_1+m_2-\frac{a_3}{a_3 a_4}\right)\right]^2}{c(b_1+b_2)} \quad (17)$$

(18)

可能性正規意思決定法則[4]より、ファジィ数の大小関係の指標を用いずともファジィ期待効用の可能性分布が正規型の場合中心の大小関係でファジィ数の大小関係が導けることが示され

ている。従って意思決定法則は以下のようになる。

意思決定法則

(1) $\dfrac{a_1}{a_1 a_2} \geq \dfrac{a_3}{a_3 a_4}$ のとき、D_1（拡張する）を採択する。

(2) $\dfrac{a_1}{a_1 a_2} \leq \dfrac{a_3}{a_3 a_4}$ のとき、D_2（保留する）を採択する。

従って、この意思決定法則では Π_F と $\mu_F(s_1, s_2)$ は消去される。これは、各自然の状態の事前確率分布とファジィ事象の可能性分布を導出しなくても良いことを示している。さらに、ファジィ事象の可能性分布の幅も消去される。従って、意思決定者が危険中立者であり頭と心のファジィ事象を一つと考えた場合、頭と心上の効用関数のみを設定すればよい。また、本例では意思決定者が危険中立者の場合のみを取り上げたが、その他の場合でもファジィ期待効用関数は正規型にはならないが、2章で述べた写像の拡張原理とスカラー倍の拡張原理によって導くことができる。この後、ファジィ集合の大小関係の指標を用いることで意思決定できる。

4. おわりに

本論文では、人間の意思決定過程でよく生ずる沈黙状態に関する意思決定法則を提案した。頭で考える意思決定問題と心で感じる意思決定問題の融合をファジィ事象の導入により行い、ファジィ事象における意思決定法則を提案した。また、適用例ではファジィ事象の可能性分布を正規型と考え、我々が提案している正規可能性意思決定理論に適用し有効性・妥当性を示した。実際問題を考えると迷いというようなファジィ事象がひとつだけ頭と心に発生すると考えられる。もし意思決定者が危険中立者の場合、各々の意思決定問題における自然の状態上の事前分布とファジィ事象の可能性分布を見積る必要はなくなる。さらに頭と心の上に生ずるファジィ事象の可能性分布の幅も設定する必要はなく、各自然の状態上の1次元の効用関数のみを見積ればよい。しかしながら、意思決定者が危険中立者以外の場合はファジィ期待効用関数は正規型にならない。この場合には事前確率分布とファジィ事象の可能性分布を見積る必要がある。また、本論文で定式化した意思決定法則は我々が研究してきた意思決定法則の自然な拡張であり、数理的には1次元から2次元にファジィ事象を拡張した2次元のファジィ事象における意思決定法則の定式化といえる。

参考文献

[1] 植村芳樹, ファジィ事象における意思決定法、日本ファジィ学会誌、Vol. 3, pp. 123−130, (1991)。
[2] 植村芳樹, 坂和正敏, ファジィ事象の可能性分布に基づく簡易意思決定法、日本ファジィ学会誌、Vol. 5, pp. 528−536 (1993)。
[3] 田中英夫, 石渕久生, 正規可能性分布による証拠理論、システム制御情報学会誌、Vol. 5, pp. 235−243 (1992)。
[4] Y. Uemura, A Normal Possibility Decision Rule, Control and Cybernetic, Vol. 24, pp. 103−111 (1996).
[5] D. Dubois and H. Prade, *Possibility Theory*, Plenum Pless (1988).