土の応力，ひずみ～時間曲線の多項式近似について

著者	井上 宗治
雑誌名	三重大學農學部學術報告 = The bulletin of the Faculty of Agriculture, Mie University
巻	62
ページ	129-135
発行年	1981-03-01
その他のタイトル	On Polynominal Approximations of Relations between Stresses and Time or Strains and Time in Soil Testing
URL	http://hdl.handle.net/10076/3029

土の応力，ひずみ～時間曲線の多項式近似について

井　上　宗　治

On Polynominal Approximations of Relations between Stresses and Time or Strains and Time in Soil Testing

Sohji INOUE

I．ま　え　が　き

変位制御の下で三軸試験を行なうと軸方向変位は直線で与えられるがそれに対応する軸方向荷重，側方変位，間げき水圧等の値は時間（変形の進行を表わす軸方向変位あるいはひずみ量でもよい）に対して曲線状——非線形——を呈する。これに対処するために増分法を用いてきたがそのためには各測定量の第一差分値をとることになる。ところが記録紙上の読取り誤差などのために第一差分値が必ずしも規則正しい値とはならず様々のバラツキを生み出す。したがって，このような曲線を何らかの関数で近似する必要に迫られる。

ところで土構造物の有限要素法による大規模な数値解析にはいわゆる土の応力～ひずみの「双曲線近似」がよく用いられているが[1,2,3,4]土の種類や状態によっては実測値と近似曲線とは部分的に必ずしも一致しない個処も現われてくるので[5]問題によってはこの近似では意に添わない場合もでてくる。

一方，「データに誤差がない場合」の曲線近似法としては Lagrange の補間多項式あるいは spline 関係による方法[4,6]などが挙げられるが前者の場合は次数をむやみに高くすると凹凸の激しい不自然な結果になることが多く[7]，後者の場合は曲線近似法としては非常に有用な方法であるが計算がやゝ複雑でコンピューターの助けなしでは行なえない。

以上のような理由から当研究では最もオーソドックスな最小二乗法による多項式近似を用いることにした。とくに一般の n 次多項式を直交関数系に変換することによって実測データーに一番良く fit する次数を比較的容易に定めることができる。

昭和55年10月31日受理

II．基礎式の誘導[8]

軸差応力，測方変位，間げき水圧を次式で近似する。

$$\bar{y}=a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3+\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots(1)$$

一般に最小二乗法によって次の曲線

$$\bar{y}=a_0\cdot q_0(t)+a_1\cdot q_1(t)+a_2\cdot q_2(t)+\cdots\cdots+a_q\cdot q_q(t)\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots(2)$$

ただし，$q_q(t)$は q 次の整式とする。

に近似する場合，q 次の整式とした場合と q＋1 次の整式とした場合とでは全く別の計算を行なわれなければならない。このような不便を除くためには $q_0(t)$，$q_1(t)$，$q_2(t)$… なる整式から直交関数列 $G_0(t)$，$G_1(t)$，$G_2(t)$，……を導きその直交性を利用すれば計算が極めて容易になる。

いま，(1)式のような多項式近似とするためにべき関数列

$$q_0(\nu)=1,\quad q_1(\nu)=\nu,\quad q_2(\nu)=\nu^2,\quad \cdots\cdots$$

をとる。ただし，$\nu=0$，1，2，……n のようにとるものとする。このとき，

$$\sum_{\nu=0}^{n-1}\nu^k\cdot\nu^l=\sum_{\nu=0}^{n-1}\nu^{k+l}=C_{k,l}(\nu)=C_{l,k}(\nu)=C_{k+l}(\nu)\ (=C_{k+l}) \qquad \cdots\cdots(3)$$

とおく。特に $C_{o,l}=C_l$ の値は

$$C_0=\Sigma\nu^0=n$$

$$C_1=\Sigma\nu^1=\frac{1}{2}n(n-1)$$

$$C_2=\Sigma\nu^2=\frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)$$

などとなる。つぎに，次式のような $k+1$ 次の新関数を定義する。

$$G_k(n,t)=C_k(n)\cdot\begin{vmatrix}1 & t & t^2 & \cdots t^k\\ C_0 & C_1 & C_2 & \cdots C_k\\ C_1 & C_2 & C_3 & \cdots C_{k+1}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ C_{k-1} & C_k & C_{k+1} & \cdots C_{2k}\end{vmatrix} \qquad \cdots(4)$$

ただし，$C_k(n)$は任意の定数

(4)式において t^j の余因子行列を Δ_{kj} で表わし行列式を展開すれば

$$G_k(n,t)=\Delta_{k0}\cdot t^0+\Delta_{k1}\cdot t^1+\Delta_{k2}\cdot t^2+\ \cdots\cdots \qquad \cdots\cdots(5)$$

となる。この式の両辺に t^j を乗じ t の 0 から $n-1$ までの集和を作れば

$$\sum_{t=0}^{n-1}G(n,t)\cdot t^j=\Delta_{k0}\sum_{t=0}^{n-1}t^0\cdot t^j+\Delta_{k1}\sum_{t=0}^{n-1}t^1\cdot t^j+\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots+\Delta_{kk}\sum_{t=0}^{n-1}t^k\cdot t^j$$
$$=\Delta_{k0}\cdot C_j+\Delta_{k1}\cdot C_{j+1}+\cdots\cdots\cdots+\Delta_{kk}\cdot C_{j+k}=0$$
$$(j=0,1,2,\cdots\cdots,k-1) \qquad \cdots\cdots\cdots(6)$$

となる。何となれば(6)式の右辺の第二辺は(4)式の第一行の各要素の余因子行列に他行の対応要素を乗じた和となるからである。(6)式にさらにΔ_{lj}を乗じ $j=0,1,2,\cdots,l$（ただし，$l<k$）として和を作れば

$$\sum_{t=0}^{n-1}G_k(n,t)\cdot\{\Delta_{l0}\cdot t^0+\Delta_{l1}\cdot t^1+\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots+\Delta_{ll}\cdot t^l\}=0 \qquad \cdots\cdots(7)$$

となる。上式において{ }の中は(5)式により $G_l(n,t)$ に他ならない。

$$\therefore\ \sum_{t=0}^{n-1}G_k(n,t)\cdot G_l(n,t)=0 \quad (k\neq l) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

となり直交性が証明された。上式では $l<k$ としたが $l>k$ でも同様に成立することは明らかである。

遂次の関数の形は

$$G_1(n,t)=C_1(n)\cdot\begin{vmatrix}1 & t\\ n & \sum_{\nu=0}^{n-1}\nu\end{vmatrix}=\frac{1}{2}n\cdot C_1(n)(n-1-2t)$$

$$G_2(n,t)=C_2(n)\cdot\begin{vmatrix}1 & t & t^2\\ n & \Sigma\nu & \Sigma\nu^2\\ \Sigma\nu & \Sigma\nu^2 & \Sigma\nu^3\end{vmatrix}$$

$$=C_2(n)\cdot\begin{vmatrix}1 & t & t(t-1)\\ n & \Sigma\nu & \Sigma\nu(\nu-1)\\ \Sigma(\nu+1) & \Sigma\nu(\nu+1) & \Sigma\nu(\nu+1)(\nu-1)\end{vmatrix}$$

ここで，Σ の部分を計算するために公式[9]

$$\sum_{r=1}^{m}r(r+1)(r+2)\cdots\cdots(r+k-1)=\frac{m(m+1)(m+2)\cdots\cdots(m+k)}{k+1}$$

を用いて上式を整理すれば

$$G_2(n,t)=n^2(n+1)\cdot C_2(n)\cdot\begin{vmatrix}1 & t & t(t-1)\\ 1 & \frac{1}{2}(n-1) & \frac{1}{3}(n-1)(n-2)\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3}(n-1) & \frac{1}{4}(n-1)(n-2)\end{vmatrix}$$

$$=\frac{n^2(n^2-1)}{(3!)^2}\cdot C_2(n)\cdot\left\{\frac{(2-n)(1-n)}{2}+3(2-n)t+3t(t-1)\right\}$$

同様にして

$G_3(n,t)=$

$$C_3(n)\cdot\begin{vmatrix}1 & t & t(t-1) & t(t-1)(t-2)\\ n & \Sigma\nu & \Sigma\nu(\nu-1) & \Sigma\nu(\nu-1)(\nu-2)\\ \Sigma(\nu-1) & \Sigma(\nu+1)\nu & \Sigma(\nu+1)\nu(\nu-1) & \Sigma(\nu+1)\nu(\nu-1)(\nu-2)\\ \Sigma(\nu+2)(\nu+1) & \Sigma(\nu+2)(\nu+1)\nu & \Sigma(\nu+2)(\nu+1)\nu(\nu-1) & \Sigma(\nu+2)(\nu+1)\nu(\nu-1)(\nu-2)\end{vmatrix}$$

$$=-\frac{2n^3(n^2-1)^2(n^2-4)C_3(n)}{(5!)^2}\left\{\binom{3-n}{3}+\binom{4}{1}\binom{3-n}{2}t+\binom{5}{2}\binom{3-n}{1}\binom{t}{2}+\binom{6}{3}\binom{t}{3}\right\}$$

ただし，

$$\binom{l}{m}=\frac{l(l-1)l-2)\cdots\cdots(l-m+1)}{m!},\quad \binom{l}{o}=1$$

上式から $G_k(n,t)$ の一般形を求めれば

$$G_k(n,t)=\bar{C}_k(n)\cdot\sum_{\nu=0}^{k}\binom{k+\nu}{\nu}\binom{k-n}{k-\nu}\binom{t}{\nu}$$

である。ここに、$\bar{C}_k(n)$は n, k の任意関数であるから特に

$$\bar{C}_k(n)=\frac{k!}{2^k}$$

とすれば次式が得られる。

$$q_k(n,t)=\frac{k!}{2^k}\cdot\sum_{\nu=0}^{k}\binom{k+\nu}{\nu}\binom{k-n}{k-\nu}\binom{t}{\nu} \quad\cdots\cdots(9)$$

後の数値計算のために $k=0$, 1, 2, 3, 4, 5, 6 に対する(9)式を以下のように示しておく。

$$q_0(n,t)=1$$

$$q_1(n,t)=\frac{1}{2}\left\{(1-n)+2t\right\}$$

$$q_2(n,t)=\frac{1}{2}\left\{\binom{2-n}{2}+3(2-n)t+3\binom{t}{2}\right\}$$

$$=\frac{3}{2}t^2-\frac{3}{2}(n-1)t+\frac{1}{4}(n^2-3n+2)$$

$$q_3(n,t)=\frac{3}{4}\left\{\binom{3-n}{3}+4\binom{3-n}{2}t+10(3-n)\binom{t}{2}+20\binom{t}{3}\right\}$$

$$=\frac{5}{2}t^3-\frac{15}{4}(n-1)t^2+\frac{1}{4}(6n^2-15n+11)t-\frac{1}{8}(n^3-6n^2+11n-6)$$

$$q_4(n,t)=\frac{3}{2}\left\{\binom{4-n}{4}+5\binom{4-n}{3}t+15\binom{4-n}{2}\binom{t}{2}+35(4-n)\binom{t}{3}+70\binom{t}{4}\right\}$$

$$=\frac{35}{8}t^4-\frac{35}{4}(n-1)t^3+\frac{5}{8}(9n^2-21n+17)t^2-\frac{5}{8}(2n^3-9n^2+17n-10)t$$

$$+\frac{1}{16}(n^4-10n^3+35n^2-50n+24)$$

$$q_5(n,t)=\frac{15}{4}\left\{\binom{5-n}{5}+6\binom{5-n}{4}t+21\binom{5-n}{3}\binom{t}{2}+56\binom{5-n}{2}\binom{t}{3}+128(5-n)\binom{t}{4}+252\binom{t}{5}\right\}$$

$$=\frac{63}{8}t^5-\frac{315}{16}(n-1)t^4+\frac{35}{8}(4n^2-9n+8)t^3-\frac{105}{16}(n-1)(n^2-3n+5)t^2$$

$$+\frac{1}{16}(15n^4-105n^3+365n^2-525n+274)t-\frac{1}{32}(n-5)(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)$$

$$q_6(n,t)=\frac{45}{4}\left\{\binom{6-n}{6}+7\binom{6-n}{5}t+28\binom{6-n}{4}\binom{t}{2}+84\binom{6-n}{3}\binom{t}{3}+150\binom{6-n}{2}\binom{t}{4}\right.$$

$$\left.+462(6-n)\binom{t}{5}+924\binom{t}{6}\right\}$$

$$=\frac{231}{16}t^6-\frac{693}{16}(n-1)t^5+\frac{105}{32}(15n^2-33n+32)t^4-\frac{105}{16}(4n^2-11n+21)(n-1)t^3$$

$$+\frac{21}{32}(10n^4-60n^3+215n^2-315n+178)t^2-\frac{21}{32}(n^4-9n^3+46n^2-94n+84)(n-1)t$$

$$+\frac{1}{64}(n-6)(n-5)(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)$$

上式を用いて近似式を求めるには変数xを公差hなる等差級数にとり，$x=x_0+h\cdot t$ とおけば $x=x_j$ ($j=0$, 1……, $n-1$)に対して t は整数となる。実験式 $\bar{y}$ がxのp次多項式，したがって t のp次整式である場合は

$$\bar{y}=\alpha_0+\alpha_1\cdot q_1(n,t)+\alpha_2\cdot q_2(n,t)+\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots+\alpha_p\cdot q_p(n,t) \quad\cdots\cdots(10)$$

とおくことができ，係数α_lは次式より求まる。

$$\alpha_l=\frac{\sum_{t=0}^{n-1}y_t\cdot q_l(n,t)}{\sum_{t=0}^{n-1}\{q_l(n,t)\}^2} \quad\cdots\cdots(11)$$

なんとなれば，誤差の自乗和〔vv〕は

$$[vv]=\sum_{t=0}^{n-1}\{\alpha_0+\alpha_1\cdot q_1(n,t)+\cdots\cdots+\alpha_p\cdot q_p(n,t)-y_t\}^2$$

で与えられるから

$$\frac{1}{2}\frac{\partial[vv]}{\partial\alpha_l}=\sum_{t=0}^{n-1}\{\alpha_0+\alpha_1\cdot q_1(n,t)+\cdots\cdots$$
$$\cdots+\alpha_p\cdot q_q(n,t)-y_t\}\cdot q_l\doteqdot 0$$

$\therefore$

$$\alpha_0\cdot\Sigma q_l+\alpha_1\cdot\Sigma q_1\cdot q_l+\cdots\cdots+\alpha_l\cdot\Sigma(q_l)^2+\cdots\cdots$$
$$\cdots+\alpha_p\cdot\Sigma q_p\cdot q_l=\Sigma y_t\cdot q_l$$

関数 q_l の直交性により　$\Sigma q_k\cdot q_l=0\ (k\neq l)$

$\therefore\quad \alpha_l\cdot\Sigma(q_l)^2=\Sigma y_t\cdot q_l$

したがって，誤差の自乗和は

$$[vv]=\Sigma y_t^2-n\alpha_0^2-\alpha_1^2\cdot\Sigma q_1^2-\cdots\cdots-\alpha_p^2\cdot\Sigma q_p^2$$

と書くことができる。さらに，この場合の確率誤差は

$$r_t=\pm0.6745\sqrt{\frac{[vv]}{n-p-1}}$$

によって与えられる。

III．実験の方法と用いた試料

使用した装置や実験方法は以前に行なった研究[10]とほゞ同様であるので詳細は略す。異なる点だけを列挙すると次のようである。

① 三軸供試体の上下端部に幅 1 cm の鋼製の円環(うち 0.5 cm は載荷板に，残りの 0.5 cm は供試体部に密着させる）をはめ，これによって供試体設置に際しての偏心を防ぐとともに端部における側方変位をより完全に拘束した。

② 供試体の成形用モールドに所定の密度で土を締固めた後，そのまゝの状態で変水位透水試験を行ない，試料の飽和度を高めた。

③ 三軸圧縮室内に試料をセットしてから若干の真空圧の下でおよそ 5 日間水を通し，さらに飽和度を上げるように務めた。

④ 試験方法は変位制御方式による圧密・非排水試験法を採用し，間げき水圧は供試体下端で測定した。軸方向ひずみ速度は約 0.45 % である。

用いた試料の基本的性質を Table-1 および Fig.1, Fig.2 に示す。日本統一分類法[11]によると SM——シルト質砂——に属する土である。

Table - 1

Specific Gravity Gs	2.696
Clay Fraction	5 %
Silt 〃	14%
Sand	64%
Gravel 〃	16%
w_{opt}	12.8%
γ_{dmax}	1.810 gr/cm³
Mean Permeability Coefficient	7.01×10^{-6}cm/sec

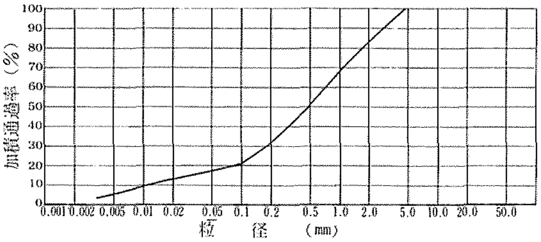
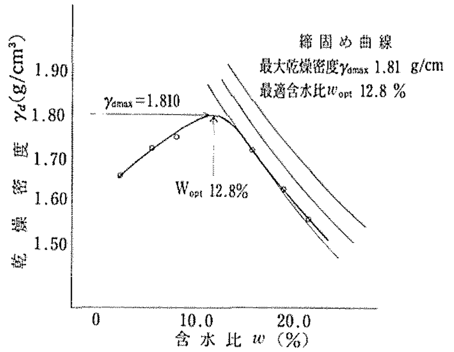


Fig. 1　Grain Size Curve



※ランマー重量 2.5kg　落下高 30cm
備考　突固め回数 25回/層(3層)
※※　非乾燥法を用いた場合

Fig. 2　Compaction Curve

IV．計算結果および考察

計算の対象となる諸量は①軸差応力，②側方変位，③間げき水圧と時間との関係でそれぞれ側圧 1.0, 2.0, 3.0, 4.0 kg/cm² の場合のものである。

さて，いずれの場合も初期設定値は(0，0)であるゆえ(1)式における定数項 a_0 は不要になる。そこで計算方法としては逐次次数を増やしていき，各データに対して

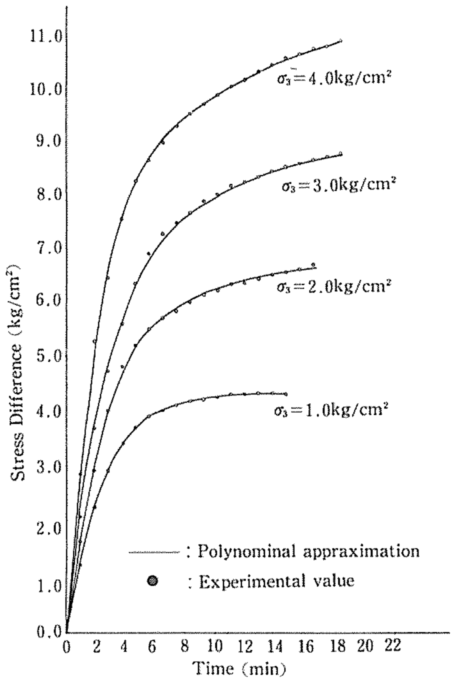


Fig.3 Comparison of the Experimental Results with Calculated Results in Stress Difference vesus Time

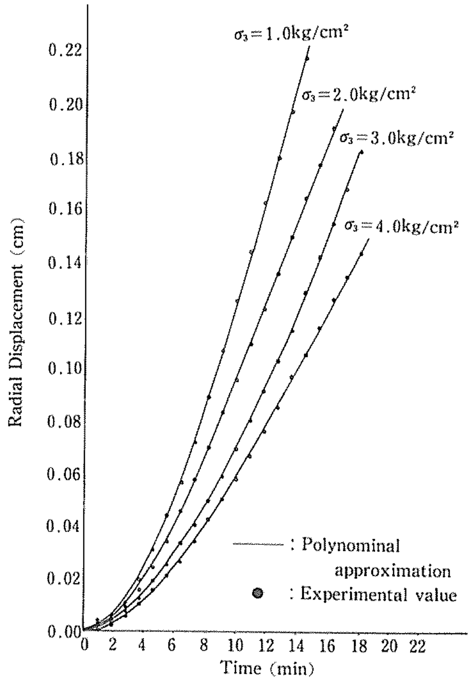


Fig.4 Comparison of the Experimental Results with Calculated Results in Radial Displacement versus Time

a_0が無視できる程小さな値になり，なおかつ確率差 r_t が充分微小になった時をその近似式の最適次数とみなした。Fig.3～Fig.5 に ①，②，③ の実測値（○印）とn次典線(実線)との関係を，Table−2 に各係数および確率誤差 r_t の数値を一覧表にして示す。ただし，次数nは最大6までとした。①に対する Fig.3，②に対する Fig.4 はどちらも単調増加で①は上に凸，②は上に凹の曲線になっており，いずれも実験値に非常によく近似しているとみなすことができる。特に②の場合は比較的微小な数値を取扱っているので立上り付近（2～3分のところ）では実測データの側圧による相違をはっきり読み取ることができないが，このように全体の値を用いて一つの曲線に近似することにより関接的にこれらの関係をある程度明確に識別することが可能となる。

①，②と比べると③（間げき水圧曲線）は大部分が複数の変曲点を有するやゝ複雑な曲線となっている。したがって，初めの極植を示す点の前後では実測値と近似曲線との間に若干のバラツキがみられるが全体的にはこの場合も4次ないし6次曲線に非常に良くフィットしているとみなせるであろう。

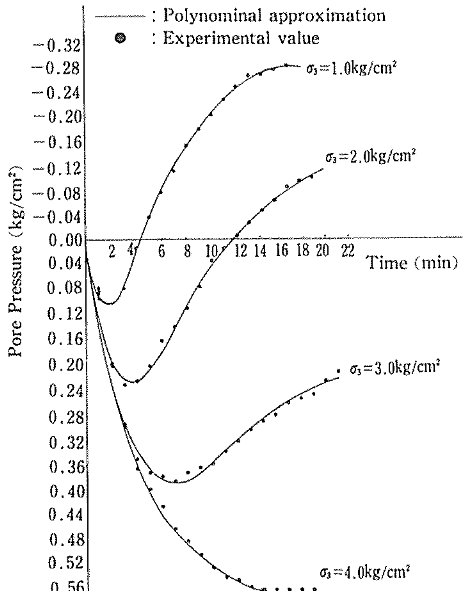


Fig.5 Comparison of the Experimental Rerults with Calculated Results in Pore Pressure versus Time

Table - 2 Coefficients of Polynomial Approximation

$\bar{y}=a_0+a_1t^1+a_2t^2+a_3t^3+a_4t^4+a_5t^5+a_6t^6$ r_t : Probable Error

	Confining Pressure (kg/cm²)	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	$\lvert r_t \rvert$
Stress Difference (kg/cm²)	1.0	−0.0175816547	1.540532497	−0.2325813610	0.0182648510	−0.0007238818	0.0000113323		0.1043768574
	2.0	0.0321731225	2.007021937	−0.2741487113	0.0195265549	−0.0006930886	0.0000096665		0.1532021254
	3.0	0.0402820544	2.314391349	−0.2896940691	0.0198817385	−0.0006497166	0.0000086377		0.1799331325
	4.0	−0.0017031597	3.498101498	−0.5675833965	0.0508591896	−0.0025120698	0.0000642327	−0.0000006650	0.3184524988
Radial Displace-ment (cm)	1.0	0.0001567730	0.0003151162	0.0013184971	−0.0000319957				0.0031390137
	2.0	−0.0002844839	0.0005676888	0.0010019343	−0.0000258318				0.0006787204
	3.0	0.0000179936	0.0001792116	0.0007770882	−0.0000278197				0.0005048904
	4.0	−0.0004967893	−0.0002121511	0.0006993981	−0.0000217977	0.0000002427			0.0005311045
Pore Pressure (kg/cm²)	1.0	−0.0029712474	0.1460312949	−0.0646872353	0.0101832034	−0.0008084555	0.0000321680	−0.0000005072	0.0195323267
	2.0	−0.0097476419	0.1505978241	−0.0314764501	0.0021780584	−0.0000349941	−0.0000020956	0.0000000680	0.0216551668
	3.0	−0.0011642140	0.1418598190	−0.0173581176	0.0003051823	−0.0000132079			0.0142929033
	4.0	−0.0016015055	0.1388442093	−0.0163109811	0.0011519090	−0.0000395720	0.0000005608		0.0092680139

V. あとがき

①，②のような単調曲線では他の関数形による近以（例えば指数関数を用いた近似）も考えられるが③の場合も含めると多項式による近似が最も適当な方法ではないかと考えられる。

この計算では時間 t を等間隔にとり，整数に関する公式を有効に利用して計算を簡単化しているが，もちろん不等間隔でも差し支えはない。しかし，その場合は計算そのものが相当繁雑になるので電子計算機の使用なしでは行なえないであろう。そうするとⅠ. で述べた Spline 関数との優劣の問題が起こってくる（単に計算が複雑か否かの相違だけではないが）のでこの点に関しては今後研究を進めて比較検討してみたいと考えている。

引用文献

1) Duncan, J. M. and Chang, C. - Y. : Nonlinear analysis of stress and strain in soils, Proc. ASCE, Jour. Soil Mech. Found, Div. Vol.96, No.SM5 : 1629-1653, 1970.

2) Daniel, D. E. and Olson, R. E. : Stress -strain properties of compacted clays, Proc. ASCE, Jour. Soil Mech. Found, Div. Vol.100, No.GT10 : 1123-1136,1974.

3) Kondner, R. L. : Hypabolic stress-strain response : Cohesive soils, Proc. ASCE, Jour. Soil Mech. Found. Div. Vol.89, No.SMI : 115-143, 1963.

4) Desai, C. S. and Christian, J. T. Numerical methods in geotechnical engineering, McGRAW-Hill : 81-88, 1977.

5) 鳥山晄司：締固め粘性土のセン断特性の水浸による変化，農業土木学会論文集第77号：39～46, 1978.

6) Desai, C. S. : Nonlinear analysis using spline functions, Proc. ASCE Jour. Soil Mech. Found. Div. Vol.97, No.SM10 : 1461-1480,1971.

7) 戸川隼人：サイエンスライブラリコンピュータテキスト＝5，数値計算，サイエンス社：40－43, 1976.
8) 渡辺義勝：最小自乗法及統計，丸善KK：247-252, 1943.
9) 森口繁一他：数学公式II——級数・フーリェ解析——，岩波全書：5，1974.
10) 井上宗治：三軸圧縮試験における土の応力と変形について，農業土木学会論文集第74号：75－81, 1978.
11) 土質工学会調査部：土質工学会基準「土質分類ならびに分類結果表示」の判定について，土と基礎，No.182 : 63-70, 1973.

Summary

A polynominal approximation methods was applied for the nonlinear relations between observed values, namely sterss difference, radial displacemnt and pore pressure in the triaxial compression tests, and time by means of a least-squares fitting.

By a general n th-order polynominal equation being transformed to a system of orthgonal functions, it was shown that optimal order in the equation which was filt to experinental data could be selected easily (see equation (10), (11)). Comparison of experimental values with calculated values in approximate curves is described in Fig. 3 to Fig. 5.