

II型行列パウルヴェ方程式の初期値空間

三重大学大学院
教育学研究科教育科学専攻理数・生活系教育領域

213M022 牛久 祥聡
平成 27 年 2 月 13 日

目次

1	序文	2
2	序論	3
2.1	パルヴェ方程式の歴史	3
3	II 型パルヴェ方程式	4
3.1	II 型パルヴェ方程式の局所解	4
3.2	II 型パルヴェ方程式のベックルンド変換	5
3.3	II 型パルヴェ方程式の初期値空間	7
4	II 型行列パルヴェ方程式	8
4.1	II 型行列パルヴェ方程式の局所解	9
4.2	II 型行列パルヴェ方程式の解とベックルンド変換	16
4.3	II 型行列パルヴェ方程式の初期値空間	18

1 序文

この論文では, 19 世紀にフランスの数学者 P.Painlevé によって発見されたパンルヴェ方程式のうち「II 型パンルヴェ方程式」を拡張した「II 型行列パンルヴェ方程式」と呼ばれる方程式の初期値空間を構成することを目的としている.

初期値空間を構成することでパンルヴェ方程式の研究が解析学的な視点だけでなく, 幾何学的な視点から行うことができるようになる.

第 1 章では, 「パンルヴェ方程式とはどういった方程式か」について簡単に歴史と共に述べる.

第 2 章では, II 型行列パンルヴェ方程式の初期値空間の構成にあたり, その拡張前である II 型パンルヴェ方程式の初期値空間を「局所解を求める」, 「ベックルンド変換でどのように貼り合わされるか求める」, 「ベックルンド変換によって貼り合わせた空間が本当に初期値空間になっているか確かめる」という手順で構成し, その方法やアイデアを述べる.

第 3 章では, 東京大学の川上拓志氏, 坂井秀隆氏, 中村あかね氏が発見した II 型行列パンルヴェ方程式について, 吉田和史氏が求めたベックルンド変換を用い, 2 章と同様の方法でその初期値空間を構成する.

最後に, 本論文の作成及びこれまでの研究に際し, ときに優しく, ときに厳しく指導して下さった川向先生並びに数学科の先生方, 2 年間本当にありがとうございました.

2 序論

2.1 パンルヴェ方程式の歴史

物理的な現象を数式で表すと微分方程式が現れることが多い。しかし、たいていの場合はその微分方程式の一般解は初等関数で表すことができない。そこで 19 世紀の解析学の問題意識として「微分方程式で定義される新しい特殊関数を見つける」というものが生まれた。

そのような意識の中で「解の極以外の特異点の位置が初期条件に依存しない」という性質（これをパンルヴェ性という）をもつ代数的常微分方程式を考えることになった。

パンルヴェ性をもつ 1 階の代数的常微分方程式は H.Poincaré と L.Fuchs によって

- リッカチ型の方程式: $y' = a(t)y^2 + b(t)y + c(t)$
- 楕円関数の満たす微分方程式: $(y')^2 - 4y^3 + g_2y + g_3 = 0 \quad (g_2, g_3 \in \mathbb{C}, g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0)$
- 代数的に求積出来る

のいずれかに帰着することが示された。

また 2 階の代数的常微分方程式については P.Painlevé と B.Gambier によって

- 線形方程式
- 楕円関数の満たす微分方程式: $y'' - 6y^2 + g_2/2 = 0 \quad (g_2 \in \mathbb{C})$
- 代数的に求積出来る
- 以下で与えられる 6 つの方程式: $P_I, P_{II}, P_{III}, P_{IV}, P_V, P_{VI}$

のいずれかに帰着することが示された。

$$\left\{ \begin{array}{l} P_I: \quad y'' = 6y^2 + t \\ P_{II}: \quad y'' = 2y^3 + ty + \alpha \\ P_{III}: \quad y'' = \frac{1}{y}(y')^2 + \frac{1}{t}y' + \frac{1}{t}(\alpha y^2 + \beta) + \gamma y^3 + \frac{\delta}{y} \\ P_{IV}: \quad y'' = \frac{1}{2y}(y')^2 + \frac{3}{2}y^3 + 4ty^2 + 2(t^2 - \alpha)y + \frac{\beta}{y} \\ P_V: \quad y'' = \left(\frac{1}{2y} + \frac{1}{y-1}\right)(y')^2 - \frac{1}{t}y' + \frac{(y-1)^2}{t^2}(\alpha y + \frac{\beta}{y}) + \frac{\gamma}{t}y + \delta \frac{y(y+1)}{y-1} \\ P_{VI}: \quad y'' = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y-1} + \frac{1}{y-t}\right)(y')^2 - \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} + \frac{1}{y-t}\right)y' + \frac{y(y-1)(y-t)}{t^2(t-1)^2} \left(\alpha + \beta \frac{t}{y^2} + \gamma \frac{t-1}{(y-1)^2} + \delta \frac{t(t-1)}{(y-t)^2}\right) \end{array} \right.$$

ただし, $y = y(t)$ は従属変数, $'$ は独立変数 t の微分, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ はパラメータとする。

なお, パンルヴェ方程式の発見当初, この方程式が本当に新しい関数を定義しているのかが問題になったが, (後述するように) このことは梅村浩氏らの研究により肯定的に解決された。

ところで P.Painlevé がフランスでパンルヴェ方程式を発見した後, 隣国ドイツでは一見パンルヴェ性とは関わりがなさそうなところからパンルヴェ方程式は現れることになる。

R.Fuchs は 4 つの確定特異点をもつ 2 階の Fuchs 型微分方程式を研究する中で, この方程式の含むパラメータを変数として動かしたとき, そのモノドロミーを不変に保つにはパラメータの 1 つが P_{VI} を満たさなければならないことを発見した。さらに R.Garnier は確定特異点だけでなく, 不確定特異点ももつ様な単独 2 階の線形常微分方程式を考え, その方程式のモノドロミー保存変形を考えると $P_I \sim P_V$ が導かれることを示し

た。

その後パルヴェ方程式の研究は一時影を潜めることとなったが、1970年代に Wu, McCoy, Tracy らによるイジング模型の相関関数の研究の中で P_{III} が現れ、再び注目されることになった。

そして現代にいたるまで、パルヴェ方程式に関する多くの研究がなされていくことになる。

岡本和夫氏は $P_I \sim P_{VI}$ のハミルトン構造を発見し、さらに初期値空間と呼ばれるパルヴェ方程式の解と 1 対 1 に対応する空間を構成した。

また、梅村氏は古典関数を

有理関数から出発して、既知関数の加減乗除と微分、既知関数を係数とする代数方程式を解く、既知関数を係数とする線形常微分方程式を解く、アーベル関数に既知関数を代入する 以上の操作を有限解繰り返して得られるもの

と定義し、古典関数でないものを“新しい関数”とした。さらに梅村氏は「パルヴェ方程式の解が古典関数ならば、代数関数が線形方程式の解を使ってかける」ということを証明した。このことにより「パルヴェ方程式は新しい関数を定義するか」という問題が「パルヴェ方程式の古典関数解をすべて決定する」という問題に変わり、2008 年にパルヴェ方程式の一般解は本当に新しい関数になっていることがわかった。

3 II 型パルヴェ方程式

この章では II 型パルヴェ方程式の局所解と“ベックルンド変換”と呼ばれる「解と解を結ぶ変換」の説明を行い、パルヴェ方程式の幾何学的側面を与える“初期値空間”について述べる。

3.1 II 型パルヴェ方程式の局所解

パルヴェ方程式の解は、その性質から方程式の特異点以外のところ (B とする) で有理関数となっている。すなわち任意の解を B の各点でローラン展開することができる。

この節では II 型パルヴェ方程式のローラン展開を与えよう。

定理 3.1. ([Okamoto])[2] II 型パルヴェ方程式の解を $t = t_0$ でローラン展開すると次のいずれかになる。

(1) q, p は $t = t_0$ で正則

$$\begin{aligned} q_1 &= a_1 - \left(a_1^2 - b_1 + \frac{t_0}{2} \right) T + \left(a_1^3 + \frac{a_1 t_0}{2} + \frac{c}{2} - \frac{1}{4} \right) T^2 + \dots \\ p_1 &= b_1 + (2a_1 b_1 + c) T + \dots \end{aligned}$$

(2) q は $t = t_0$ で 1 位の極, p は $t = t_0$ で 1 位の零。

$$\begin{aligned} q_2 &= \frac{1}{T} - \frac{t_0 T}{6} - \frac{(2c+1)T^2}{8} + a_2 T^3 + \dots \\ p_2 &= -cT + \left\{ 5a_2 + \left(\frac{t_0}{6} \right)^2 \right\} T^2 + \dots \end{aligned}$$

(3) q は $t = t_0$ で 1 位の極, p は $t = t_0$ で 2 位の極。

$$\begin{aligned} q_3 &= -\frac{1}{T} + \frac{t_0 T}{6} - \frac{(2c-3)T^2}{8} + a_2 T^3 + \dots \\ p_3 &= \frac{2}{T^2} + \frac{t_0}{3} - \frac{T}{2} + \left\{ a_3 + \left(\frac{t_0}{6} \right)^2 \right\} T^2 + \dots \end{aligned}$$

3.2 II 型パルヴェ方程式のベックルンド変換

II 型パルヴェ方程式

$$P_{II} : y'' = 2y^3 + ty + \alpha \quad (3.1)$$

について考える．高階の非線形微分方程式は，それと等価な 1 階の連立形の方程式に書き直すことができ，その方が都合のいいことも多い．そこで

$$q = y \quad (3.2)$$

$$p = y' + y^2 + \frac{t}{2} \quad (3.3)$$

とおこう．そうすると II 型パルヴェ方程式は

$$H_{II} : \begin{cases} q' = p - q^2 - \frac{t}{2} \\ p' = 2qp + c \end{cases} \quad (c = \alpha + \frac{1}{2}) \quad (3.4)$$

と等価である．ここで 3 変数 q, p, t についての多項式 $H = H(q, p, t)$ を以下のように定義する．

$$H = \frac{1}{2}p^2 - \left(q^2 + \frac{t}{2}\right)p - cq \quad (3.5)$$

すると， H_{II} は

$$\begin{cases} q' = \frac{\partial H}{\partial p} = p - q^2 - \frac{t}{2} \\ p' = -\frac{\partial H}{\partial q} = 2qp + c \end{cases} \quad (3.6)$$

と表すことができる．

定義 3.1. 1 個の関数 $H = H(q, p, t)$ を用いて (3.6) のような形に表される連立形の方程式をハミルトン系といい， H をそのハミルトニアンという．

ここで，初期値空間を構成する際に用いるベックルンド変換について構成法とともに説明する．

まず，(3.5) の q, p を「(3.6) を満たす t の関数」として両辺を t で微分すると

$$H' = -\frac{1}{2}p \quad (3.7)$$

$$H'' = -\frac{1}{2}(2qp + c) \quad (3.8)$$

となる．これから q, p を H', H'' で表したものを $\phi(H', H'', c)$ $\psi(H', H'', c)$ とすると

$$q = \phi(H', H'', c) = \frac{2H'' + c}{4H'} \quad (3.9)$$

$$p = \psi(H', H'', c) = -2H' \quad (3.10)$$

となる．これを (3.5) に代入すると，ハミルトニアンが満たす微分方程式

$$(H'')^2 + 4(H')^3 + 2H'(tH' - H) - \frac{1}{4}c^2 = 0 \quad (3.11)$$

が得られる．逆に (3.11) を満たす H に対して q, p を (3.9), (3.10) で定めると, これらは (3.6) を満たす．

ところで (3.11) において c を $-c$ と代えても方程式は不変である．そこで (3.9), (3.10) の右辺の c を $-c$ に代えた式

$$u = \phi(H', H'', -c) = \frac{2H'' - c}{4H'} \quad (3.12)$$

$$v = \psi(H', H'', -c) = -2H' \quad (3.13)$$

を考えよう．そうすると u, v の満たす微分方程式は (3.6) の q, p, c を $u, v, -c$ に置き換えたものだとわかる．つまり, (3.5) の右辺の q, p, c を $u, v, -c$ に代えたものを K とおくと

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{\partial K}{\partial v} \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{\partial K}{\partial u} \end{aligned}$$

が成り立つ．さらに (3.9), (3.10), (3.12), (3.13) より

$$\begin{cases} u = q + \frac{c}{p} \\ v = p \end{cases} \quad (3.14)$$

だから「ハミルトン系 (q, p, H, t) に変換 (3.14) を施すと, (H の q, p, c を形式的に $u, v, -c$ に置き換えたものである) K をハミルトニアンとするハミルトン系 (u, v, K, t) が得られる」ことがわかる．

このようにハミルトン系 (q, p, H, t) をハミルトン系 (u, v, K, t) に写す変換で, ハミルトニアン K が, H の正準変数 q, p とパラメータ c を u, v と別のパラメータ $-c$ に置き換えたものとなっているような変換をベックルンド変換と呼ぶ．

この他にも $u = -q, v = -p + 2q^2 + t, K = H + q$ とすると, 同様の計算を行うことでパラメータ以外は不変な変換になることがわかる．

Ⅱ型パウルヴェ方程式のベックルンド変換はこの2種類で与えられ, これらの変換はⅡ型パウルヴェ方程式の有理解の構成や初期値空間の構成などに用いられている．このベックルンド変換を定理としてまとめておこう．

定理 3.2. ([Okamoto])[1] Ⅱ型パウルヴェ方程式のベックルンド変換は次のように与えられる．

$$\begin{aligned} T_A : & \begin{cases} u = q + \frac{c}{p} \\ v = p \\ K = H \\ \sigma = -c \end{cases} \\ T_B : & \begin{cases} u = -q \\ v = -p + 2q^2 + t \\ K = H + q \\ \sigma = 1 - c \end{cases} \end{aligned}$$

ちなみに, このベックルンド変換を用いると定理 3.1 の3つの解を結びつけることができる．具体的に書くと以下ようになる．

$$\begin{aligned} T_A(q_1, p_1) \Big|_{a_1=a_2, b_1=0, c=-\sigma} &= (q_2, p_2) \Big|_{c=\sigma} \\ T_B(q_2, p_2) \Big|_{a_2=-a_3, c=1-\sigma} &= (q_3, p_3) \Big|_{c=\sigma} \end{aligned}$$

3.3 II 型パンルヴェ方程式の初期値空間

先述したように初期値空間とは解と 1 対 1 に対応するような空間のことであり，岡本和夫氏によって $P_1 \sim P_{VI}$ に対応するものが構成され，高野恭一氏によってそれらはパンルヴェ方程式を特徴づけるものだということが示されている．

つまり初期値空間を構成するということは，幾何学的な視点からパンルヴェ方程式の性質をとらえることができるということであり，パンルヴェ方程式の研究に新たな側面を与えるものである．

定理 3.3.

$$(q_1, p_1) \in W_1 = \mathbb{C}^2, (q_2, p_2) \in W_2 = \mathbb{C}^2, (q_3, p_3) \in W_3 = \mathbb{C}^2$$

を

$$\begin{cases} q_2 = q_1 + \frac{c}{p_1} \\ p_2 = p_1 \\ q_3 = -q_1 - \frac{c}{p_1} \\ p_3 = -p_1 + 2 \left(q_1 + \frac{c}{p_1} \right)^2 + t \end{cases}$$

という関係式で貼り合わせたものを W とする．また P の $t = t_0$ の近傍で定義される解全体を V とする．そのとき写像 Φ を

$$\Phi(q, p) = \begin{cases} (q_1(t_0), p_1(t_0)) \in W_1, (q, p) : (1) \text{ タイプの解} \\ (q_2(t_0), p_2(t_0)) \in W_2, (q, p) : (2) \text{ タイプの解} \\ (q_3(t_0), p_3(t_0)) \in W_3, (q, p) : (3) \text{ タイプの解} \end{cases}$$

とすると， Φ は W と V の 1 対 1 写像になる．

証明．(i) $(q, p), (\tilde{q}, \tilde{p})$ が同じタイプの解

やり方は同じなので代表して「 $(q, p), (\tilde{q}, \tilde{p})$ が (2) タイプのとき， $(q, p) \neq (\tilde{q}, \tilde{p})$ ならば $(q(t_0), p(t_0)) \neq (\tilde{q}(t_0), \tilde{p}(t_0))$ 」を示そう．

$$q = Q_2 - \frac{c}{P_2}, p = P_2 \text{ とすると}$$

$$\begin{aligned} Q_2 = q + \frac{c}{p} &= -\frac{5a_2 + (t_0/6)^2}{c} + \dots \\ P_2 = p &= 0 - cT + \dots \end{aligned}$$

同様に $\tilde{q} = \tilde{Q}_2 - \frac{c}{\tilde{P}_2}, \tilde{p} = \tilde{P}_2$ とすると

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_2 = \tilde{q} + \frac{c}{\tilde{p}} &= -\frac{5\tilde{a}_2 + (t_0/6)^2}{c} + \dots \\ \tilde{P}_2 = \tilde{p} &= 0 - cT + \dots \end{aligned}$$

となる．ここで Q_2, P_2 がみたす微分方程式は

$$Q_2'' = 2Q_2^3 + tQ_2 - c - \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} Q_2' = P_2 - Q_2^2 - \frac{t}{2} \\ P_2' = 2Q_2P_2 - c \end{cases}$$

であり，さらに Q_2, P_2 は正則だから $Q_2(t_0), P_2(t_0)$ は有界な数．これらを α_0, β_0 とおくとコーシーの存在定理より

$$Q_2(t_0) = \alpha_0$$

$$P_2(t_0) = \beta_0$$

となる解はただ 1 つである．(\tilde{Q}_2, \tilde{P}_2 についても同様．)

よって $(q, p) \neq (\tilde{q}, \tilde{p})$ ならば $(q(t_0), p(t_0)) \neq (\tilde{q}(t_0), \tilde{p}(t_0))$ である．

(ii) $(q, p), (\tilde{q}, \tilde{p})$ が違うタイプの解

(q, p) が (1) タイプ， (\tilde{q}, \tilde{p}) が (2) タイプのとき， W_1 の元 (λ_1, μ_1) と W_2 の元 (λ_2, μ_2) は

$$\lambda_1 = \lambda_2 - \frac{c}{\mu_2}$$

$$\mu_1 = \mu_2$$

という関係式で貼り合わさっていた．よって $\mu_2 = 0$ なら (λ_1, μ_1) と (λ_2, μ_2) は貼り合わない．このことに注意すると

$$\tilde{q} = \tilde{Q}_2 - \frac{c}{\tilde{P}_2}$$

$$\tilde{p} = \tilde{P}_2$$

と置いたとき， $\tilde{P}_2(t_0) = 0$ であれば W_1 の元 $(q(t_0), p(t_0))$ と W_2 の元 $(\tilde{q}(t_0), \tilde{p}(t_0))$ は貼り合わないことがわかる．(つまり $\Phi(q, p)$ と $\Phi(\tilde{q}, \tilde{p})$ は違う点となる．)

ところで， (\tilde{q}, \tilde{p}) が (2) タイプの解なら定理 3.1 より

$$\tilde{p} = -cT + \dots$$

と展開できた．従って $\tilde{P}_2(t_0) = 0$ となることがわかる．故に

$$\Phi(q, p) \neq \Phi(\tilde{q}, \tilde{p})$$

である．

定理 3.3 より W は V と 1 対 1 に対応することがわかった．この W を II 型パルヴェ方程式の初期値空間という．

4 II 型行列パルヴェ方程式

パルヴェ方程式の研究が盛んになるにつれ，この方程式を拡張する動きも盛んになってきた．例えば対称形式と呼ばれる野海正俊氏，山田泰彦氏による以下のようなパルヴェ方程式の新しい表示法がある．

例 P_{IV} の対称形式

$$\begin{cases} f'_0 = f_0(f_1 - f_2) + \alpha_0 \\ f'_1 = f_1(f_2 - f_0) + \alpha_1 \\ f'_2 = f_2(f_0 - f_1) + \alpha_2 \end{cases}$$

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = 1, f_0 + f_1 + f_2 = t$$

その中で、東京大学大学院理科学研究科の川上拓志氏は同大准教授の坂井秀隆氏、同大大学院の中村あかね氏らと共に II 型パンルヴェ方程式の拡張型である II 型行列パンルヴェ方程式を発見した。

定義 4.1. II 型行列パンルヴェ方程式とは

$$H = \frac{1}{2}p_1^2 - 2p_2(q_2p_2 - \theta_1 - \theta_2) - p_1(q_1^2 - q_2 + t) - 2q_1(q_2p_2 - \theta_1 - \theta_2) - 2\theta_1q_1 - 2q_1q_2p_2$$

をハミルトニアンとする次のハミルトン系のことである。

$$q'_1 = \frac{\partial H}{\partial p_1} = p_1 - q_1^2 + q_2 - t \quad (4.1)$$

$$q'_2 = \frac{\partial H}{\partial p_2} = -4q_1q_2 - 4q_2p_2 + 2\theta_1 + 2\theta_2 \quad (4.2)$$

$$p'_1 = -\frac{\partial H}{\partial q_1} = 2q_1p_1 + 4q_2p_2 - 2\theta_2 \quad (4.3)$$

$$p'_2 = -\frac{\partial H}{\partial q_2} = 2p_2^2 - p_1 + 4q_1p_2 \quad (4.4)$$

ただし、' は独立変数 t の微分、 θ_1, θ_2 はパラメータとする。

4.1 II 型行列パンルヴェ方程式の局所解

II 型パンルヴェ方程式の解のときと同様に、II 型行列パンルヴェ方程式の解においても方程式の特異点以外のところ (B とする) で有理関数となっている。すなわち、任意の解を B の各点でローラン展開することができる。

この節では II 型行列パンルヴェ方程式のローラン展開を与えよう。

定理 4.1. $t = t_0$ を \mathbb{C} の元とする。

(1) (q_1, q_2, p_1, p_2) が II 型行列パンルヴェ方程式の解であるとき、 $t = t_0$ での極の位数は、それぞれ、高々 1 位、高々 2 位、高々 2 位、高々 1 位である。

(2) q_1, q_2, p_1, p_2 を

$$\begin{cases} q_1 = (t - t_0)^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{1,k} (t - t_0)^k, q_2 = (t - t_0)^{-2} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2,k} (t - t_0)^k, \\ p_1 = (t - t_0)^{-2} \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{1,k} (t - t_0)^k, p_2 = (t - t_0)^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{2,k} (t - t_0)^k \end{cases} \quad (4.5)$$

と置く。これらが (4.1), (4.2), (4.3), (4.4) を満たすならば、 $(\alpha_{1,0}, \alpha_{2,0}, \beta_{1,0}, \beta_{2,0})$ は

$$\begin{aligned} & (0, 0, 0, 0), (0, 0, 0, -1/2), (1, 0, 0, 0), (1, 0, 0, -5/2), (1/2, -1/4, 0, 0), \\ & (-1, 0, 2, -1/2), (-1, 0, 2, 2), (0, -1, 1, 1/2), (-1/2, -1/4, 1, 1) \end{aligned} \quad (4.6)$$

のいずれかである。また未定係数法で $\alpha_{1,k}, \alpha_{2,k}, \beta_{1,k}, \beta_{2,k} (k = 1, 2, 3, \dots)$ を決めるとき、何個かのパラメータが一意的に決まらないが、この個数 \mathcal{N} は次の表のようになる。

	$\alpha_{1,0}$	$\alpha_{2,0}$	$\beta_{1,0}$	$\beta_{2,0}$	\mathcal{N}
(ϕ)	0	0	0	0	4
(a)	0	0	0	-1/2	3
(b)	1	0	0	0	2
(c)	1	0	0	-5/2	2
(d)	1/2	-1/4	0	0	3
(e)	-1	0	2	-1/2	2
(f)	-1	0	2	2	2
(g)	0	-1	1	1/2	2
(h)	-1/2	-1/4	1	1	3

定理 4.1 の (1) の証明

II 型行列パルヴェ方程式 (4.1), (4.2), (4.3), (4.4) に対し, 次の形の解を与える.

$$q_1 = \frac{1}{T^l} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_{1,k} T^k, \quad q_2 = \frac{1}{T^n} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_{2,k} T^k,$$

$$p_1 = \frac{1}{T^m} \sum_{k=0}^{\infty} \mu_{1,k} T^k, \quad p_2 = \frac{1}{T^r} \sum_{k=0}^{\infty} \mu_{2,k} T^k$$

ただし, $T = t - t_0$, $l, m, n, r \in \mathbb{Z}$, $\lambda_{1,0}, \lambda_{2,0}, \mu_{1,0}, \mu_{2,0} \neq 0$ とする.

定理 4.1 の (1) を 3 つの命題にわけて示す.

命題 4.1. q_1 は $t = t_0$ で高々 1 位の極. すなわち $l \leq 1$.

証明. $l \geq 2$ として矛盾を導く.

$l \geq 2$ とするとき, (4.1) の各単項式の極の位数をその下に書くと

$$q'_1 = p_1 - q_1^2 + q_2 - t \quad (4.7)$$

となる. よって以下の 4 つのケースが考えられる.

$$(i) m = 2l > n, (ii) n = 2l > m, (iii) m = n > 2l, (iv) m = 2l = n \quad (4.8)$$

また (i) ~ (iv) の場合について (4.2) と (4.3) の和の両辺の各単項式の極の位数は

$$p'_1 + q'_2 = 2q_1 p_1 - 4q_1 q_2 + \theta_1 \quad (4.9)$$

$m+1$	$n+1$	$l+m$	$l+n$	0	$(m \neq 0, n \neq 0)$
0	$n+1$	l	$l+n$	0	$(m \neq 0, n \neq 0)$
$m+1$	0	$l+m$	l	0	$(m \neq 0, n \neq 0)$
0	0	l	l	0	$(m \neq 0, n \neq 0)$

となる. これらのことに注意して, (i), (ii), (iii), (iv) を考える.

(i) $m = 2l > n$ のとき $m > 0$ ということに注意すると

$$l + m > l + n, \quad l + m > m + 1 > n + 1, \quad l + m > 0 \quad (n \neq 0 \text{ のとき})$$

$$l + m > l, \quad l + m > m + 1 > 0, \quad l + m > 0 \quad (n = 0 \text{ のとき})$$

よって, (4.9) より $\lambda_{1,0}\mu_{1,0} = 0$ となる. しかしこれは $\lambda_{1,0} \neq 0, \mu_{1,0} \neq 0$ に矛盾.

(ii) $n = 2l > m$ のとき $n > 0$ ということに注意すると

$$\begin{aligned} l+n > l+m, l+n > n+1 > m+1, l+n > 0 & \quad (m \neq 0 \text{ のとき}) \\ l+n > l, l+n > n+1 > 0, l+n > 0 & \quad (m = 0 \text{ のとき}) \end{aligned}$$

よって, (4.9) より $\lambda_{1,0}\lambda_{2,0} = 0$ となる. しかしこれは $\lambda_{1,0} \neq 0, \lambda_{2,0} \neq 0$ に矛盾.

(iii) $m = n > 2l$ のとき (4.7) より, $p_1 + q_1$ は $t = t_0$ で高々 $2l$ 位の極となる. よって,

$$\mu_{1,0} = -\lambda_{2,0}, \mu_{1,1} = -\lambda_{2,1}, \dots, \mu_{1,m-2l-1} = -\lambda_{2,m-2l-1}$$

となり,

$$p_1 - 2q_2 = \frac{\mu_{1,0} - 2\lambda_{2,0}}{T^m} + \dots$$

の初項の係数 $\mu_{1,0} - 2\lambda_{2,0}$ は $3\mu_{1,0}$ に等しい. 従って $p_1 - 2q_2$ は $t = t_0$ で正確に m 位の極となる.

このことと, $m+l > 2l+1 > 0$ に注意して

$$(4.9) \rightarrow \begin{matrix} (p_1 + q_2)' & = & 2q_1(p_1 - 2q_2) & + & 2\theta_1 \\ 2l+1 & & m+l & & 0 \end{matrix} \quad (4.10)$$

を考えると, $\lambda_{1,0}\mu_{1,0} = 0$ となる. しかしこれは $\lambda_{1,0} \neq 0, \mu_{1,0} \neq 0$ に矛盾.

(iv) $m = 2l = n$ のとき $l \geq 2$ より

$$l+n > n+1, l+n > 0 \quad (4.11)$$

となる. これと (4.2)

$$q_2' = \begin{matrix} -4q_1q_2 - 4q_2p_2 + 2\theta_1 + 2\theta_2 \\ n+1 \quad l+n \quad n+r \quad 0 \end{matrix}$$

より $l = r$ がわかる. このとき, (4.1), (4.2), (4.3), (4.4) より

$$\begin{aligned} \mu_{1,0} - \lambda_{1,0}^2 + \lambda_{2,0} &= 0, \quad 2\lambda_{1,0}\mu_{1,0} + 4\lambda_{2,0}\mu_{2,0} = 0, \\ -4\lambda_{1,0}\lambda_{2,0} - 4\lambda_{2,0}\mu_{2,0} &= 0, \quad 2\mu_{2,0}^2 - \mu_{1,0} + 4\lambda_{1,0}\mu_{2,0} = 0 \end{aligned}$$

が成り立つが, この方程式を解くと $(\lambda_{1,0}, \mu_{1,0}, \lambda_{2,0}, \mu_{2,0}) = (0, 0, 0, 0)$ で矛盾.

以上より (i),(ii),(iii),(iv) のいずれの場合も矛盾するので $l \geq 2$ ではない.

命題 4.2. p_1, q_2 は $t = t_0$ で高々 2 位の極. すなわち $m \leq 2$ かつ $n \leq 2$.

証明. $m \geq 3$ または $n \geq 3$ なら矛盾することを示す.

$m \geq 3$ のとき, $l \leq 1$ および (4.7) より $m = n$ がわかる. 従って命題 4.1 の証明の (iii) と同じ理由で $p_1 + q_2$ は $t = t_0$ で高々 $2l$ の極, $p_1 - 2q_2$ は $t = t_0$ で正確に $m(=n)$ 位の極になる. この結果と $m+l > 2l+1$ および

$$(4.9) \rightarrow \begin{matrix} (p_1 + q_2)' & = & 2q_1(p_1 - 2q_2) & + & 2\theta_1 \\ 2l+1 & & m+l & & 0 & (l \neq 0) \\ 0 & & m & & 0 & (l = 0) \end{matrix} \quad (4.12)$$

より $l \neq 0, m + l = 0$ がわかる . また (4.4)

$$\begin{array}{cccccc} p'_2 & = & 2p_2^2 & - & p_1 & + & 4q_1p_2 & & (4.13) \\ r+1 & & 2r & & m & & l+r & & (r \neq 0) \\ 0 & & 0 & & m & & l & & (r=0) \end{array}$$

より $m = 2r$ がわかる . ($\because r \leq 1$ ならば $m > r + 1 \geq 2r, m > l + r$ となるので $\mu_{1,0} = 0$ が成り立つがこれは矛盾 . $r \geq 2$ ならば $2r > r + 1 \geq l + r$ となるので $m = 2r$ が成り立つ .)

ここで $m + l = 0, m = 2r$ と (4.3)

$$\begin{array}{cccccc} p'_1 & = & 2q_1p_1 & + & 4q_2p_2 & - & 2\theta_2 \\ m+1 & & m+l & & n+r & & 0 \end{array}$$

より $r = 1$ が得られるが , これは $m = 2r = 2 < 3$ ということになるので矛盾 .

従って $m \geq 3$ ではない . 同様にして $n \leq 2$ も示せる .

命題 4.3. p_2 は $t = t_0$ で高々 1 位の極 . すなわち $r \leq 1$ である .

証明 . $r \geq 2$ なら矛盾することを示す .

$l \leq 1, m \leq 2$ より $2r > r + 1 \geq l + r, 2r > m$ となる . これと (4.13) から $\mu_{2,0}^2 = 0$ が得られるが , これは $\mu_{2,0} \neq 0$ に矛盾 .

以上の 3 つの命題をあわせると定理 4.1 の (1) が得られる .

定理 4.1 の (2) の証明

定理 4.1 の (2) もいくつかの命題にわけて示す .

命題 4.1, 4.2, 4.3 より , (4.1), (4.2), (4.3), (4.4) の解は (4.5) の形をしているとしてよい . (このときの $\alpha_{1,0}, \alpha_{2,0}, \beta_{1,0}, \beta_{2,0}$ は 0 でもよい) . これらを (4.1), (4.2), (4.3), (4.4) に代入して $T^k (k \in \mathbb{Z})$ の係数を比較すると ,

$$\left\{ \begin{array}{l} (n-1)\alpha_{1,n} = \beta_{1,n} - \sum_{k=0}^n \alpha_{1,k}\alpha_{1,n-k} + \alpha_{2,n} - t_0\delta_{n,2} - \delta_{n,3} \\ (n-2)\alpha_{2,n} = -4 \sum_{k=0}^n \alpha_{1,k}\alpha_{2,n-k} + \sum_{k=0}^n \alpha_{2,k}\beta_{2,n-k} + 2(\theta_1 + \theta_2)\delta_{n,3} \\ (n-2)\beta_{1,n} = 2 \sum_{k=0}^n \alpha_{1,k}\beta_{1,n-k} + 4 \sum_{k=0}^n \alpha_{2,k}\beta_{2,n-k} - 2\theta_2\delta_{n,3} \\ (n-1)\beta_{2,n} = 2 \sum_{k=0}^n \beta_{2,k}\beta_{2,n-k} - \beta_{1,n} + 4 \sum_{k=0}^n \alpha_{1,k}\beta_{2,n-k} \end{array} \right. \quad (4.14)$$

が得られる . ただし $n \geq 0, n \in \mathbb{Z}$ で , $\delta_{i,j}$ はクロネッカーデルタである . ここから次の命題が得られる .

命題 4.4. $(\alpha_{1,0}, \alpha_{2,0}, \beta_{1,0}, \beta_{2,0})$ は (4.6) のいずれかである .

また $V_n = {}^t[\alpha_{1,n}, \alpha_{2,n}, \beta_{1,n}, \beta_{2,n}] (n = 0, 1, 2, \dots)$ と置いたとき , V_n は漸化式

$$A_n V_n = B_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (4.15)$$

$$A_n = \begin{bmatrix} n-1+2\alpha_{1,0} & -1 & -1 & 0 \\ 4\alpha_{2,0} & n-2+4\alpha_{1,0}+4\beta_{2,0} & 0 & 4\alpha_{2,0} \\ -2\beta_{1,0} & -4\beta_{2,0} & n-2-2\alpha_{1,0} & -4\alpha_{2,0} \\ -4\beta_{2,0} & 0 & 1 & n-1-4\alpha_{1,0}-4\beta_{2,0} \end{bmatrix}$$

$$B_n = \begin{bmatrix} -\sum_{k=1}^{n-1} (\alpha_{1,k}\alpha_{1,n-k}) - \delta_{2,n}t_0 - \delta_{3,n} \\ -4\sum_{k=1}^{n-1} (\alpha_{1,k}\alpha_{2,n-k}) - 4\sum_{k=1}^{n-1} (\alpha_{2,k}\beta_{2,n-k}) + 2\delta_{3,n}(\theta_1 + \theta_2) \\ 2\sum_{k=1}^{n-1} (\alpha_{1,k}\beta_{1,n-k}) + 4\sum_{k=1}^{n-1} (\alpha_{2,k}\beta_{2,n-k}) - 2\delta_{3,n}\theta_2 \\ 2\sum_{k=1}^{n-1} (\beta_{2,k}\beta_{2,n-k}) + 4\sum_{k=1}^{n-1} (\alpha_{1,k}\beta_{2,n-k}) \end{bmatrix}$$

を満たす .

証明 . (4.14) で $n = 0$ とすると

$$\begin{aligned} -\alpha_{1,0} &= \beta_{1,0} - \alpha_{1,0}^2 + \alpha_{2,0}, & -2\alpha_{2,0} &= -4(\alpha_{1,0} + \beta_{2,0})\alpha_{2,0}, \\ -2\beta_{1,0} &= 2(\alpha_{1,0}\beta_{1,0} + 2\alpha_{2,0}\beta_{2,0}), & -\beta_{2,0} &= 2\beta_{2,0}^2 - \beta_{1,0} + 4\alpha_{1,0}\beta_{2,0} \end{aligned}$$

これを解けば (4.6) が得られる . また (4.14) で添え字が n のものを右辺 , そうでないものを左辺に持っていけば (4.15) が得られる .

命題 4.5. \mathcal{N} は定理 4.1 の (2) の表で与えられるものである .

証明 . やりかたはどれも同じなので代表して $(\alpha_{1,0}, \alpha_{2,0}, \beta_{1,0}, \beta_{2,0}) = (1, 0, 0, 0)$ のときを示す .

$(\alpha_{1,0}, \alpha_{2,0}, \beta_{1,0}, \beta_{2,0})$ が $(1, 0, 0, 0)$ のとき $\det(A_n)$ は

$$\det(A_n) = \begin{vmatrix} n+1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & n+2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n-4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & n-5 \end{vmatrix} = (n+2)(n+1)(n-4)(n-5)$$

となるので , $n = 4, 5$ のときパラメータをもつことがわかる . これを踏まえて計算を行う .

$n = 1, 2, 3$ のとき $\det(A_n) \neq 0$ と (4.15) より V_1, V_2, V_3 は

$$V_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad V_2 = \begin{bmatrix} -t_0/3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad V_3 = \begin{bmatrix} (2\theta_1 + 12\theta_2 - 5)/20 \\ 2(\theta_1 + \theta_2)/5 \\ 2\theta_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

ということがわかる . また A_4 と B_4 は

$$A_4 = \begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B_4 = \begin{bmatrix} -t_0^2/9 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

だから $\text{rank}A_4 = \text{rank}[A_4B_4] = 3$ となるので, $A_4V_4 = B_4$ は $4 - \text{rank}A_4 (= 1)$ 個のパラメータを含む解

$$V_4 = \begin{bmatrix} (9a - t_0^2)/45 \\ 0 \\ a \\ a \end{bmatrix} \quad (a \text{ は任意パラメータ})$$

を持つことがわかる. 同様にすると A_5 と B_5 は

$$A_5 = \begin{bmatrix} 6 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_5 = \begin{bmatrix} (2\theta_1 + 12\theta_2 - 5)/30 \\ 8(\theta_1 + \theta_2)t_0/15 \\ -4\theta_2t_0/3 \\ -4\theta_2t_0/3 \end{bmatrix}$$

だから $\text{rank}A_5 = \text{rank}[A_5B_5] = 3$ となるので, $A_5V_5 = B_5$ は $4 - \text{rank}A_5 (= 1)$ 個のパラメータを含む解

$$V_5 = \begin{bmatrix} (6\theta_1 - 36\theta_2 - 7)/252 \\ 8(\theta_1 + \theta_2)t_0/105 \\ -4\theta_2t_0/3 \\ b \end{bmatrix} \quad (b \text{ は任意パラメータ})$$

持つことがわかる. $n \geq 6$ のとき, $\det(A_n) \neq 0$ より, V_n にパラメータが入らないことがわかる.

これらより \mathcal{N} は 2 となり, 定理 4.1 の (2) の表と一致する.

以降 (ϕ) パターンの解は $(q_1^\phi, q_2^\phi, p_1^\phi, p_2^\phi)$ というように表す.

命題 4.6. q_1, q_2, p_1, p_2 の $t = t_0$ で極を持つ解のローラン展開は次のようになる.

(ϕ) パターン

$\alpha_{1,1} = a_0, \alpha_{2,2} = b_0, \beta_{1,2} = c_0, \beta_{2,1} = d_0$ と置くと, その他の $\alpha_{1,k}, \alpha_{2,k}, \beta_{1,k}, \beta_{2,k}$ は一意的に定まる.

$$\begin{cases} q_1^\phi = a_0 + (-a_0^2 + c_0 + b_0 - t_0)T + \left(a_0^3 - 3a_0b_0 + a_0t_0 + \theta_1 - \frac{1}{2}\right)T^2 + \dots \\ q_2^\phi = b_0 + (-4a_0b_0 + 4b_0d_0 + 2\theta_1 + 2\theta_2)T \\ \quad + 2\{5a_0^2b_0 + 4a_0c_0b_0 + 2d_0^2b_0 - b_0^2 - 2(\theta_1 + \theta_2)a_0 + b_0t_0 - 2(\theta_1 + \theta_2)d_0\}T^2 + \dots \\ p_1^\phi = c_0 + (2a_0c_0 + 4b_0d_0 - 2\theta_2)T \\ \quad + \{a_0^2c_0 + 4a_0b_0d_0 - 4d_0^2b_0 - c_0b_0 + c_0^2 - 2\theta_2a_0 - c_0t_0 + 4(\theta_1 + \theta_2)d_0\}T^2 + \dots \\ p_2^\phi = d_0 + (2d_0^2 + 4a_0d_0 - c_0)T + (6a_0^2d_0 + 12a_0d_0^2 + 4d_0^3 - 3a_0c_0 - 2d_0t_0 + \theta_2)T^2 + \dots \end{cases}$$

(a) パターン

$\alpha_{1,1} = a_1, \beta_{1,2} = b_1, \alpha_{2,4} = c_1$ と置くと, その他の $\alpha_{1,k}, \alpha_{2,k}, \beta_{1,k}, \beta_{2,k}$ は一意的に定まる.

$$\begin{cases} q_1^a = a_1 + (-a_1^2 + b_1 - t_0)T + \left(a_1^3 + a_1t_0 + \theta_1 - \frac{1}{2}\right)T^2 + \dots \\ q_2^a = -2(\theta_1 + \theta_2)T + c_1T^2 + \dots \\ p_1^a = b_1 + 2(a_1b_1 + 2\theta_1 + \theta_2)T + (a_1^2b_1 + b_1^2 - c_1 - b_1t_0 + 8a_1\theta_1 + 6a_1\theta_2)T^2 + \dots \\ p_2^a = -\frac{1}{2T} - a_1 + \frac{(2t_0 - 3b_1)T}{3} + \frac{(2a_1^3 - 6a_1b_1 + 2a_1t_0 - 6\theta_1 - \theta_2 + 1)T^2}{4} + \dots \end{cases}$$

(b) パターン

$\beta_{1,4} = a_2, \beta_{2,5} = b_2$ と置くと, その他の $\alpha_{1,k}, \alpha_{2,k}, \beta_{1,k}, \beta_{2,k}$ は一意的に定まる.

$$\begin{cases} q_1^b = \frac{1}{T} - \frac{t_0 T}{3} + \frac{(2\theta_1 + 12\theta_2 - 5)T^2}{20} + \frac{(9a_2 - t_0^2)T^3}{45} + \frac{(6\theta_1 - 36\theta_2 - 7)t_0 T^4}{252} + \dots \\ q_2^b = \frac{2(\theta_1 + \theta_2)T}{5} + \frac{8t_0(\theta_1 + \theta_2)T^3}{105} + \dots \\ p_1^b = 2\theta_2 T + a_2 T^2 - \frac{4t_0\theta_2 T^3}{3} + \dots \\ p_2^b = \theta_2 T^2 + a_2 T^3 + b_2 T^4 + \dots \end{cases}$$

(c) パターン

$\beta_{1,4} = a_3, \alpha_{2,8} = b_3$ と置くと, その他の $\alpha_{1,k}, \alpha_{2,k}, \beta_{1,k}, \beta_{2,k}$ は一意的に定まる.

$$\begin{cases} q_1^c = \frac{1}{T} - \frac{t_0 T}{3} + \dots \\ q_2^c = -\frac{2(\theta_1 + \theta_2)T}{5} - \frac{8t_0(\theta_1 + \theta_2)T^3}{105} + \dots \\ p_1^c = -2(\theta_1 + \theta_2)T + a_3 T^2 + \dots \\ p_2^c = -\frac{5}{2T} + \frac{10t_0 T}{21} + \dots \end{cases}$$

(d) パターン

$\alpha_{1,1} = a_4, \beta_{1,2} = b_4, \beta_{2,4} = c_4$ と置くと, その他の $\alpha_{1,k}, \alpha_{2,k}, \beta_{1,k}, \beta_{2,k}$ は一意的に定まる.

$$\begin{cases} q_1^d = \frac{1}{2T} + a_4 - \frac{(6a_4^2 - 3b_4 + 2t_0)T}{3} + \dots \\ q_2^d = -\frac{1}{4T^2} + \frac{a_4}{T} - 3a_4^2 + b_4 - \frac{t_0}{3} + \dots \\ p_1^d = b_4 + 4a_4 b_4 T + \dots \\ p_2^d = b_4 T + (6a_4 b_4 - 2\theta_2)T^2 + c_4 T^3 + \dots \end{cases}$$

(e) パターン

$\alpha_{1,4} = \left(\frac{t_0}{3}\right)^2 a_5, \beta_{2,8} = b_5$ と置くと, その他の $\alpha_{1,k}, \alpha_{2,k}, \beta_{1,k}, \beta_{2,k}$ は一意的に定まる.

$$\begin{cases} q_1^e = -\frac{1}{T} + \frac{t_0 T}{3} + \dots \\ q_2^e = -\frac{2(\theta_1 + \theta_2)T}{5} - \frac{8t_0(\theta_1 + \theta_2)T^3}{105} + \dots \\ p_1^e = \frac{2}{T^2} + \frac{2t_0}{3} + \dots \\ p_2^e = -\frac{1}{2T} - \frac{4t_0 T}{21} + \dots \end{cases}$$

(f) パターン

$\alpha_{1,4} = a_6, \beta_{2,5} = b_6$ と置くと, その他の $\alpha_{1,k}, \alpha_{2,k}, \beta_{1,k}, \beta_{2,k}$ は一意的に定まる.

$$\begin{cases} q_1^f = \frac{1}{T} + \frac{t_0 T}{3} + \dots \\ q_2^f = \frac{2(\theta_1 + \theta_2)T}{5} + \frac{8t_0(\theta_1 + \theta_2)T^3}{105} + \dots \\ p_1^f = \frac{2}{T^2} + \frac{2t_0}{3} + \dots \\ p_2^f = \frac{2}{T} - \frac{2t_0 T}{3} + \dots \end{cases}$$

(g) パターン

$\alpha_{1,4} = \left(\frac{t_0}{3}\right)^2 a_7, \beta_{2,4} = \left(\frac{t_0}{3}\right)^2 b_7$ と置くと, その他の $\alpha_{1,k}, \alpha_{2,k}, \beta_{1,k}, \beta_{2,k}$ は一意的に定まる.

$$\begin{cases} q_1^g = \frac{(1-2\theta_1)T^2}{4} + \frac{t_0^2 a_7 T^3}{9} + \dots \\ q_2^g = -\frac{1}{T^2} + \frac{2t_0}{3} + \dots \\ p_1^g = \frac{1}{T^2} + \frac{t_0}{3} + \dots \\ p_2^g = \frac{1}{2T} + \frac{t_0 T}{3} + \dots \end{cases}$$

(h) パターン

$\alpha_{1,1} = -a_8, \alpha_{1,2} = b_8, \beta_{1,4} = c_8$ と置くと, その他の $\alpha_{1,k}, \alpha_{2,k}, \beta_{1,k}, \beta_{2,k}$ は一意的に定まる.

$$\begin{cases} q_1^h = -\frac{1}{2T} - a_8 + b_8 T + \dots \\ q_2^h = -\frac{1}{4T^2} + \frac{a_8}{T} - a_8^2 - b_8 + \frac{t_0}{3} + \dots \\ p_1^h = \frac{1}{T^2} + 2a_8^2 + b_8 + \frac{2t_0}{3} + \dots \\ p_2^h = \frac{1}{T} + 2a_8 + \dots \end{cases}$$

証明. 命題 4.4 の証明の計算をさらに行うことですべての係数は求まる. (初項の係数さえ求められれば以降の係数は帰納的に求まっていく.)

4.2 II 型行列パルヴェ方程式の解とベックルンド変換

命題 4.7. [吉田] [10] II 型行列パルヴェ方程式のベックルンド変換は次のように与えられる.

$$T_A : \begin{cases} u_1 = q_1 \\ u_2 = q_2 \\ v_1 = p_1 \\ v_2 = p_2 - \frac{\theta_1 + \theta_2}{q_2} \\ K = H \\ \sigma_1 = \theta_1 \\ \sigma_2 = -2\theta_1 - \theta_2 \end{cases} \quad T_B : \begin{cases} u_1 = -q_1 \\ u_2 = q_2 \\ v_1 = -p_1 + 2q_1^2 - 2q_2 + 2t \\ v_2 = p_2 + 2q_1 - \frac{\theta_1 + \theta_2}{q_2} \\ K = H + 2q_1 \\ \sigma_1 = -\theta_1 + 1 \\ \sigma_2 = -\theta_2 - 1 \end{cases}$$

$$T_{CA} : \begin{cases} u_1 = q_1 - \frac{2\theta_1 p_1}{p_1^2 + 4q_2 p_2^2 - 4(\theta_1 + \theta_2)p_2} \\ u_2 = q_2 - \left\{ \frac{2\theta_1 p_1}{p_1^2 + 4q_2 p_2^2 - 4(\theta_1 + \theta_2)p_2} \right\}^2 + \frac{4\theta(2q_2 p_2 - \theta_2)}{p_1^2 + 4q_2 p_2^2 - 4(\theta_1 + \theta_2)p_2} \\ v_1 = p_1 \\ v_2 = p_2 - \frac{4\theta_1 p_2^2}{p_1^2 + 4q_2 p_2^2 - 4\theta_2 p_2} \\ K = H \\ \sigma_1 = -\theta_1 \\ \sigma_2 = 2\theta_1 + \theta_2 \end{cases}$$

命題 4.8. $T_C = T_{CA} \circ T_A$ と置くと T_A, T_B, T_C について以下が成り立つ.

$$T_A^2 = T_B^2 = T_C^2 = 1, T_A \circ T_B = T_B \circ T_A, T_A \circ T_C = T_C \circ T_A$$

注意 4.1. $T_B \circ T_C \neq T_C \circ T_B$

以下 $T_i \circ T_j (i, j \in \{A, B, C\})$ を T_{ij} と表す .

($T_A^2 = 1, T_A \circ T_C = T_C \circ T_A$ だから , この記法を用いても $T_C = T_{CA} \circ T_A$ と矛盾しない .)

ここで , II 型行列パウルヴェ方程式の解はそれぞれ無関係でなく , 正則な解つまり (ϕ) パターンの解にある適当なベックルンド変換を数回施すことで他の $(a) \sim (h)$ パターンの解を得ることができる .

その関係は以下の定理で与えられる .

定理 4.2. II 型行列パウルヴェ方程式の解はそれぞれ無関係ではなく , 以下のような関係式で結びつけることができる .

$(\phi) \rightarrow (a)$

$$T_A(q_1^\phi, q_2^\phi, p_1^\phi, p_2^\phi) \Big|_{\substack{a_0=a_1 \\ b_0=0 \\ c_0=b_1 \\ d_0=-a_1-\frac{c_1}{4(\theta_1+\theta_2)} \\ \theta_1=\sigma_1 \\ \theta_2=-2\sigma_1-\sigma_2}} = (q_1^a, q_2^a, p_1^a, p_2^a) \Big|_{\substack{\theta_1=\sigma_1 \\ \theta_2=\sigma_2}}$$

$(\phi) \rightarrow (c)$

$$\beta_3 = -\frac{5t_0\theta_1}{84\theta_2} + \frac{71t_0}{84} - \frac{59t_0}{504\theta_2} - \left(\frac{a_3}{2\theta_2}\right)^2 + \frac{19t_0\theta_2}{21\theta_1} - \frac{59t_0}{504\theta_1} - \frac{a_3^2+25b_3}{4\theta_1\theta_2} \text{ と置く}$$

$$T_{CA}(q_1^\phi, q_2^\phi, p_1^\phi, p_2^\phi) \Big|_{\substack{a_0=-\frac{a_3}{2\theta_2} \\ b_0=\beta_3 \\ c_0=0 \\ d_0=0 \\ \theta_1=-\sigma_1 \\ \theta_2=2\sigma_1+\sigma_2}} = (q_1^c, q_2^c, p_1^c, p_2^c) \Big|_{\substack{\theta_1=\sigma_1 \\ \theta_2=\sigma_2}}$$

$(\phi) \rightarrow (d)$

$$\alpha_4 = -6a_4 + \frac{\theta_2}{b_4} + \frac{2b_4^2}{\theta_1} + \frac{(6a_4^2 - \frac{5t_0}{6})b_4}{\theta_1} - \frac{8a_4\theta_2 + c_4}{2\theta_1} + \frac{\theta_2^2}{2b_4\theta_1},$$

$$\delta_4 = -\left\{ \frac{4\theta_1}{b_4^2} - \frac{16a_4}{b_4} + \frac{4\theta_2}{b_4^2} + \frac{4b_4}{\theta_1} + \frac{(36a_4^2 - 5t_0)}{3\theta_1} - \frac{8a_4\theta_2 + c_4}{b_4\theta_1} + \frac{\theta_2^2}{b_4^2\theta_1} \right\}^{-1} \text{ と置く}$$

$$T_{CA}(q_1^\phi, q_2^\phi, p_1^\phi, p_2^\phi) \Big|_{\substack{a_0=\alpha_4 \\ b_0=\frac{\theta_1+\theta_2}{d}-\frac{c}{2d} \\ c_0=b_4 \\ d_0=\delta_4 \\ \theta_1=-\sigma_1 \\ \theta_2=2\sigma_1+\sigma_2}} = (q_1^d, q_2^d, p_1^d, p_2^d) \Big|_{\substack{\theta_1=\sigma_1 \\ \theta_2=\sigma_2}}$$

$(c) \rightarrow (b)$

$$T_A(q_1^c, q_2^c, p_1^c, p_2^c) \Big|_{\substack{b_3=\frac{59(\theta_1+\theta_2)t_0}{3150} - \frac{504(\theta_1+\theta_2)}{3150} - \frac{6(\theta_1+36\theta_2)(\theta_1+\theta_2)t_0}{3150} \\ \theta_1=\sigma_1 \\ \theta_2=-2\sigma_1-\sigma_2}} = (q_1^b, q_2^b, p_1^b, p_2^b) \Big|_{\substack{\theta_1=\sigma_1 \\ \theta_2=\sigma_2}}$$

$(b) \rightarrow (e)$

$$\beta_5 = \frac{-1}{12685968(\theta_1+\theta_2)}(15832075t_0 + 50059409400b_5 + 22054300t_0^4 + 491073800t_0^4a_5 + 44898700t_0^4a_5^2 + 557120592t_0\theta_1\theta_2 + 751966740t_0\theta_1 + 354669840t_0\theta_2 + 158760000t_0(\theta_1)^2 + 185225292t_0(\theta_2)^2) \text{ と置く}$$

$$T_B(q_1^b, q_2^b, p_1^b, p_2^b) \Big|_{\substack{a_2=-\frac{5t_0^2a_5}{9} + \frac{t_0^2}{9} \\ b_2=\beta_5 \\ \theta_1=-\sigma_1+1 \\ \sigma_2=-\sigma_2-1}} = (q_1^e, q_2^e, p_1^e, p_2^e) \Big|_{\substack{\theta_1=\sigma_1 \\ \theta_2=\sigma_2}}$$

(b) \rightarrow (f)

$$T_{BA}(q_1^b, q_2^b, p_1^b, p_2^b) \Big|_{\substack{a_2 = \frac{5t_0^2 a_6 + t_0^2}{9} \\ b_2 = b_6 + \frac{13t_0 \theta_1}{21} + \frac{2t_0 \theta_2}{7} + \frac{35t_0}{126} \\ \theta_1 = -\sigma_1 + 1 \\ \theta_2 = 2\sigma_1 + \sigma_2 - 1}} = (q_1^f, q_2^f, p_1^f, p_2^f) \Big|_{\substack{\theta_1 = \sigma_1 \\ \theta_2 = \sigma_2}}$$

(d) \rightarrow (h)

$$\gamma_9 = -40a_9^4 - 88a_9^2 b_9 + \frac{16}{3}a_9^2 t_0 - 12\theta_1 a_9 - 8\theta_2 a_9 + 10a_9 - 6b_9^2 - \frac{16}{3}b_9 t_0 + 5c_9 + \frac{8}{9}t_0^2 \text{ と置く}$$

$$T_{BA}(q_1^d, q_2^d, p_1^d, p_2^d) \Big|_{\substack{a_4 = a_9 \\ b_4 = 2a_9^2 - b_9 + \frac{2}{3}t_0 \\ c_4 = \gamma_9 \\ \theta_1 = -\sigma_1 \\ \theta_2 = 2\sigma_1 + \sigma_2 - 1}} = (q_1^h, q_2^h, p_1^h, p_2^h) \Big|_{\substack{\theta_1 = \sigma_1 \\ \theta_2 = \sigma_2}}$$

(h) \rightarrow (g)

$$T_A(q_1^h, q_2^h, p_1^h, p_2^h) \Big|_{\substack{a_8 = -\frac{(5a_9 - 5b_9 + 7)t_0^2}{72\theta_1} \\ b_8 = -2a_9^2 - \frac{t_0}{3} \\ c_8 = \frac{(2a_9 - b_9 + 2)t_0^2}{9} \\ \theta_1 = -\sigma_1 \\ \theta_2 = 2\sigma_1 + \sigma_2}} = (q_1^g, q_2^g, p_1^g, p_2^g) \Big|_{\substack{\theta_1 = \sigma_1 \\ \theta_2 = \sigma_2}}$$

4.3 II 型行列パンルヴェ方程式の初期値空間

2章でも述べたように、本論文の目的はII型行列パンルヴェ方程式の初期値空間つまり、 $t = t_0$ の近傍で定義された解と1対1に対応する空間を構成することである

その構成方法は2種類あり1つは岡本氏のブローアップによる方法、もう1つは高野氏らのベックルンド変換による方法である。

ここでは高野氏に倣い、ベックルンド変換を用いて初期値空間がどのように構成されるかを示す。

定理 4.3.

$$\begin{aligned} (q_1^\phi, q_2^\phi, p_1^\phi, p_2^\phi) &\in W_\phi = \mathbb{C}^4, (q_1^a, q_2^a, p_1^a, p_2^a) \in W_a = \mathbb{C}^4 \\ (q_1^b, q_2^b, p_1^b, p_2^b) &\in W_b = \mathbb{C}^4, (q_1^c, q_2^c, p_1^c, p_2^c) \in W_c = \mathbb{C}^4 \\ (q_1^d, q_2^d, p_1^d, p_2^d) &\in W_d = \mathbb{C}^4, (q_1^e, q_2^e, p_1^e, p_2^e) \in W_e = \mathbb{C}^4 \\ (q_1^f, q_2^f, p_1^f, p_2^f) &\in W_f = \mathbb{C}^4, (q_1^g, q_2^g, p_1^g, p_2^g) \in W_g = \mathbb{C}^4 \\ (q_1^h, q_2^h, p_1^h, p_2^h) &\in W_h = \mathbb{C}^4, (q_1^b, q_2^b, p_1^b, p_2^b) \in W_b = \mathbb{C}^4 \\ (q_1^h, q_2^h, p_1^h, p_2^h) &\in W_h = \mathbb{C}^4 \end{aligned}$$

を次の関係式

$$\begin{cases}
q_1^a = q_1^\phi, & q_2^a = q_2^\phi, \\
p_1^a = p_1^\phi, & p_2^a = p_2^\phi - \frac{\theta_1 + \theta_2}{q_2^\phi}
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
q_1^b = q_1^\phi + \frac{2\theta_1 p_1^\phi}{(p_1^\phi)^2 + 4q_2^\phi (p_2^\phi)^2 - 4(\theta_1 + \theta_2)p_2^\phi}, \\
q_2^b = q_2^\phi - \left\{ \frac{2\theta_1 p_1^\phi}{(p_1^\phi)^2 + 4q_2^\phi (p_2^\phi)^2 - 4(\theta_1 + \theta_2)p_2^\phi} \right\}^2 + \frac{4\theta_1(2q_2^\phi p_2^\phi - \theta_2)}{(p_1^\phi)^2 + 4q_2^\phi (p_2^\phi)^2 - 4(\theta_1 + \theta_2)p_2^\phi}, \\
p_1^b = p_1^\phi, & p_2^b = \left\{ \frac{q_2^\phi}{q_2^\phi p_2^\phi - \theta_1 - \theta_2} + \frac{4\theta_1}{(p_1^\phi)^2 + 4q_2^\phi (p_2^\phi)^2 - 4(\theta_1 + \theta_2)p_2^\phi} \right\}^{-1}
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
q_1^c = q_1^\phi + \frac{2\theta_1 p_1^\phi}{(p_1^\phi)^2 + 4q_2^\phi (p_2^\phi)^2 - 4(\theta_1 + \theta_2)p_2^\phi}, \\
q_2^c = q_2^\phi - \left\{ \frac{2\theta_1 p_1^\phi}{(p_1^\phi)^2 + 4q_2^\phi (p_2^\phi)^2 - 4(\theta_1 + \theta_2)p_2^\phi} \right\}^2 + \frac{4\theta_1(2q_2^\phi p_2^\phi - \theta_2)}{(p_1^\phi)^2 + 4q_2^\phi (p_2^\phi)^2 - 4(\theta_1 + \theta_2)p_2^\phi}, \\
p_1^c = p_1^\phi, & p_2^c = p_2^\phi - \frac{4\theta_1 (p_2^\phi)^2}{(p_1^\phi)^2 + 4q_2^\phi (p_2^\phi)^2 - 4\theta_2 p_2^\phi}
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
q_1^d = q_1^\phi + \frac{2\theta_1 p_1^\phi}{(p_1^\phi)^2 + 4q_2^\phi (p_2^\phi)^2 - 4(\theta_1 + \theta_2)p_2^\phi}, \\
q_2^d = q_2^\phi - \left\{ \frac{2\theta_1 p_1^\phi}{(p_1^\phi)^2 + 4q_2^\phi (p_2^\phi)^2 - 4(\theta_1 + \theta_2)p_2^\phi} \right\}^2 + \frac{4\theta_1(2q_2^\phi p_2^\phi - \theta_2)}{(p_1^\phi)^2 + 4q_2^\phi (p_2^\phi)^2 - 4(\theta_1 + \theta_2)p_2^\phi}, \\
p_1^d = p_1^\phi, & p_2^d = p_2^\phi - \frac{4\theta_1 (p_2^\phi)^2}{(p_1^\phi)^2 + 4q_2^\phi (p_2^\phi)^2 - 4\theta_2 p_2^\phi}
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
q_1^e = -q_1^\phi - \frac{2\theta_1 p_1^\phi}{(p_1^\phi)^2 + 4q_2^\phi (p_2^\phi)^2 - 4(\theta_1 + \theta_2)p_2^\phi}, \\
q_2^e = q_2^\phi + p_2^\phi (q_2^\phi p_2^\phi - \theta_1 - \theta_2) \left\{ \frac{4\theta_1}{(p_1^\phi)^2 + 4q_2^\phi (p_2^\phi)^2 - 4(\theta_1 + \theta_2)p_2^\phi} \right\}^2 + \frac{4\theta_1(2q_2^\phi p_2^\phi - \theta_1 - \theta_2)}{(p_1^\phi)^2 + 4q_2^\phi (p_2^\phi)^2 - 4(\theta_1 + \theta_2)p_2^\phi}, \\
p_1^e = -p_1^\phi + 2(q_1^\phi)^2 - 2q_2^\phi + 2t \\
\quad - p_2^\phi (q_2^\phi p_2^\phi - \theta_1 - \theta_2) \left\{ \frac{8\theta_1}{(p_1^\phi)^2 + 4q_2^\phi (p_2^\phi)^2 - 4(\theta_1 + \theta_2)p_2^\phi} \right\}^2 + \frac{8\theta_1(q_1^\phi p_1^\phi - 2q_2^\phi p_2^\phi + 2\theta_1 + \theta_2)}{(p_1^\phi)^2 + 4q_2^\phi (p_2^\phi)^2 - 4(\theta_1 + \theta_2)p_2^\phi}, \\
p_2^e = p_2^\phi + 2q_1^\phi - \frac{4\theta_1 (p_2^\phi)^2}{(p_1^\phi)^2 + 4q_2^\phi (p_2^\phi)^2 - 4\theta_2 p_2^\phi} + \frac{4\theta_1 p_1^\phi}{(p_1^\phi)^2 + 4q_2^\phi (p_2^\phi)^2 - 4(\theta_1 + \theta_2)p_2^\phi}
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
q_1^f = q_1^\phi + \frac{2\theta_1 p_1^\phi}{(p_1^\phi)^2 + 4q_2^\phi (p_2^\phi)^2 - 4(\theta_1 + \theta_2)p_2^\phi}, \\
q_2^f = q_2^\phi - \left\{ \frac{2\theta_1 p_1^\phi}{(p_1^\phi)^2 + 4q_2^\phi (p_2^\phi)^2 - 4(\theta_1 + \theta_2)p_2^\phi} \right\}^2 + \frac{4\theta_1(2q_2^\phi p_2^\phi - \theta_2)}{(p_1^\phi)^2 + 4q_2^\phi (p_2^\phi)^2 - 4(\theta_1 + \theta_2)p_2^\phi}, \\
p_1^f = p_1^\phi, & p_2^f = \left\{ \frac{q_2^\phi}{q_2^\phi p_2^\phi - \theta_1 - \theta_2} + \frac{4\theta_1}{(p_1^\phi)^2 + 4q_2^\phi (p_2^\phi)^2 - 4(\theta_1 + \theta_2)p_2^\phi} \right\}^{-1}
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
q_1^f = -q_1^b, & q_2^f = q_2^b, \\
p_1^f = -p_1^b + 2(q_1^b)^2 - 2q_2^b + 2t, & p_2^f = 2q_1^b + p_2^b
\end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
q_1^f = -q_1^\phi - \frac{2\theta_1 p_1^\phi}{(p_1^\phi)^2 + 4q_2^\phi (p_2^\phi)^2 - 4(\theta_1 + \theta_2)p_2^\phi}, \\
q_2^f = q_2^\phi + p_2^\phi (q_2^\phi p_2^\phi - \theta_1 - \theta_2) \left\{ \frac{4\theta_1}{(p_1^\phi)^2 + 4q_2^\phi (p_2^\phi)^2 - 4(\theta_1 + \theta_2)p_2^\phi} \right\}^2 + \frac{4\theta_1 (2q_2^\phi p_2^\phi - \theta_1 - \theta_2)}{(p_1^\phi)^2 + 4q_2^\phi (p_2^\phi)^2 - 4(\theta_1 + \theta_2)p_2^\phi}, \\
p_1^f = -p_1^\phi + 2(q_1^\phi)^2 - 2q_2^\phi + 2t \\
\quad - p_2^\phi (q_2^\phi p_2^\phi - \theta_1 - \theta_2) \left\{ \frac{8\theta_1}{(p_1^\phi)^2 + 4q_2^\phi (p_2^\phi)^2 - 4(\theta_1 + \theta_2)p_2^\phi} \right\}^2 + \frac{8\theta_1 (q_1^\phi p_1^\phi - 2q_2^\phi p_2^\phi + 2\theta_1 + \theta_2)}{(p_1^\phi)^2 + 4q_2^\phi (p_2^\phi)^2 - 4(\theta_1 + \theta_2)p_2^\phi}, \\
p_2^f = p_2^\phi + 2q_1^\phi - \frac{4\theta_1 (p_2^\phi)^2}{(p_1^\phi)^2 + 4q_2^\phi (p_2^\phi)^2 - 4\theta_2 p_2^\phi} + \frac{4\theta_1 p_1^\phi}{(p_1^\phi)^2 + 4q_2^\phi (p_2^\phi)^2 - 4(\theta_1 + \theta_2)p_2^\phi} \\
q_1^g = q_1^f + \frac{2\theta_1 p_1^f}{(p_1^f)^2 + 4q_2^f (p_2^f)^2 - 4(\theta_1 + \theta_2)p_2^f}, \\
q_2^g = q_2^f - \left\{ \frac{2\theta_1 p_1^f}{(p_1^f)^2 + 4q_2^f (p_2^f)^2 - 4(\theta_1 + \theta_2)p_2^f} \right\}^2 + \frac{4\theta_1 (2q_2^f p_2^f - \theta_2)}{(p_1^f)^2 + 4q_2^f (p_2^f)^2 - 4(\theta_1 + \theta_2)p_2^f}, \\
p_1^g = p_1^f, \quad p_2^g = p_2^f - \frac{4\theta_1 (p_2^f)^2}{(p_1^f)^2 + 4q_2^f (p_2^f)^2 - 4\theta_2 p_2^f} \\
q_1^h = -q_1^\phi - \frac{2\theta_1 p_1^\phi}{(p_1^\phi)^2 + 4q_2^\phi (p_2^\phi)^2 - 4(\theta_1 + \theta_2)p_2^\phi}, \\
q_2^h = q_2^\phi + p_2^\phi (q_2^\phi p_2^\phi - \theta_1 - \theta_2) \left\{ \frac{4\theta_1}{(p_1^\phi)^2 + 4q_2^\phi (p_2^\phi)^2 - 4(\theta_1 + \theta_2)p_2^\phi} \right\}^2 + \frac{4\theta_1 (2q_2^\phi p_2^\phi - \theta_1 - \theta_2)}{(p_1^\phi)^2 + 4q_2^\phi (p_2^\phi)^2 - 4(\theta_1 + \theta_2)p_2^\phi}, \\
p_1^h = -p_1^\phi + 2(q_1^\phi)^2 - 2q_2^\phi + 2t \\
\quad - p_2^\phi (q_2^\phi p_2^\phi - \theta_1 - \theta_2) \left\{ \frac{8\theta_1}{(p_1^\phi)^2 + 4q_2^\phi (p_2^\phi)^2 - 4(\theta_1 + \theta_2)p_2^\phi} \right\}^2 + \frac{8\theta_1 (q_1^\phi p_1^\phi - 2q_2^\phi p_2^\phi + 2\theta_1 + \theta_2)}{(p_1^\phi)^2 + 4q_2^\phi (p_2^\phi)^2 - 4(\theta_1 + \theta_2)p_2^\phi}, \\
p_2^h = p_2^\phi + 2q_1^\phi - \frac{4\theta_1 (p_2^\phi)^2}{(p_1^\phi)^2 + 4q_2^\phi (p_2^\phi)^2 - 4\theta_2 p_2^\phi} + \frac{4\theta_1 p_1^\phi}{(p_1^\phi)^2 + 4q_2^\phi (p_2^\phi)^2 - 4(\theta_1 + \theta_2)p_2^\phi}
\end{array} \right.$$

で貼り合わせたものを W とする．また， V を II 型パンルヴェ方程式の $t = t_0$ の近傍で定義された解全体とする．

そのとき写像 Φ を

$$\Phi(q_1, q_2, p_1, p_2) = \left\{ \begin{array}{l}
(q_1^\phi(t_0), q_2^\phi(t_0), p_1^\phi(t_0), p_2^\phi(t_0)) \in W_\phi, (q_1, q_2, p_1, p_2) : (\phi) \text{ タイプ} \\
(q_1^a(t_0), q_2^a(t_0), p_1^a(t_0), p_2^a(t_0)) \in W_a, (q_1, q_2, p_1, p_2) : (a) \text{ タイプ} \\
(q_1^b(t_0), q_2^b(t_0), p_1^b(t_0), p_2^b(t_0)) \in W_b, (q_1, q_2, p_1, p_2) : (b) \text{ タイプ} \\
(q_1^c(t_0), q_2^c(t_0), p_1^c(t_0), p_2^c(t_0)) \in W_c, (q_1, q_2, p_1, p_2) : (c) \text{ タイプ} \\
(q_1^d(t_0), q_2^d(t_0), p_1^d(t_0), p_2^d(t_0)) \in W_d, (q_1, q_2, p_1, p_2) : (d) \text{ タイプ} \\
(q_1^e(t_0), q_2^e(t_0), p_1^e(t_0), p_2^e(t_0)) \in W_e, (q_1, q_2, p_1, p_2) : (e) \text{ タイプ} \\
(q_1^f(t_0), q_2^f(t_0), p_1^f(t_0), p_2^f(t_0)) \in W_f, (q_1, q_2, p_1, p_2) : (f) \text{ タイプ} \\
(q_1^g(t_0), q_2^g(t_0), p_1^g(t_0), p_2^g(t_0)) \in W_g, (q_1, q_2, p_1, p_2) : (g) \text{ タイプ} \\
(q_1^h(t_0), q_2^h(t_0), p_1^h(t_0), p_2^h(t_0)) \in W_h, (q_1, q_2, p_1, p_2) : (h) \text{ タイプ}
\end{array} \right.$$

としたとき， Φ は W と V の 1 対 1 写像になる．

証明・(i) $(q_1, q_2, p_1, p_2), (\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \tilde{p}_1, \tilde{p}_2)$ が同じタイプの解

やり方は同じなので代表して「 $(q_1, q_2, p_1, p_2), (\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \tilde{p}_1, \tilde{p}_2)$ が (a) タイプのとき, $(q_1, q_2, p_1, p_2 \neq (\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \tilde{p}_1, \tilde{p}_2)$ ならば $(q_1(t_0), q_2(t_0), p_1(t_0), p_2(t_0)) \neq (\tilde{q}_1(t_0), \tilde{q}_2(t_0), \tilde{p}_1(t_0), \tilde{p}_2(t_0))$ 」を示そう.

$$\begin{cases} q_1 = Q_1 \\ q_2 = Q_2 \\ p_1 = P_1 \\ p_2 = P_2 + \frac{\theta_1 + \theta_2}{Q_2} \end{cases} \quad \begin{cases} \tilde{q}_1 = \tilde{Q}_1 \\ \tilde{q}_2 = \tilde{Q}_2 \\ \tilde{p}_1 = \tilde{P}_1 \\ \tilde{p}_2 = \tilde{P}_2 + \frac{\theta_1 + \theta_2}{\tilde{Q}_2} \end{cases}$$

とすると

$$\begin{cases} Q_1 = q_1 = a_1 + \dots \\ Q_2 = q_2 = 0 - 2(\theta_1 + \theta_2)T + \dots \\ P_1 = p_1 = b_1 + \dots \\ P_2 = p_2 - \frac{\theta_1 + \theta_2}{q_2} = -a_1 - \frac{c_1}{4(\theta_1 + \theta_2)} + \dots \end{cases} \quad \begin{cases} \tilde{Q}_1 = \tilde{q}_1 = \tilde{a}_1 + \dots \\ \tilde{Q}_2 = \tilde{q}_2 = 0 - 2(\theta_1 + \theta_2)T + \dots \\ \tilde{P}_1 = \tilde{p}_1 = \tilde{b}_1 + \dots \\ \tilde{P}_2 = \tilde{p}_2 - \frac{\theta_1 + \theta_2}{\tilde{q}_2} = -\tilde{a}_1 - \frac{\tilde{c}_1}{4(\theta_1 + \theta_2)} + \dots \end{cases}$$

となる. ここで Q_1, Q_2, P_1, P_2 がみたす微分方程式は

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}P_1^2 - 2P_2(Q_2P_2 + \theta_1 + \theta_2) - P_1(Q_1^2 - Q_2 + t) - 2Q_1(Q_2P_2 + \theta_1 + \theta_2) - 2\theta_1Q_1 - 2Q_1Q_2P_2$$

をハミルトニアンとするハミルトン系

$$\begin{cases} Q_1' = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_1} = P_1 - Q_1^2 + Q_2 - t \\ Q_2' = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_2} = -4Q_1Q_2 - 4Q_2P_2 - 2(\theta_1 + \theta_2) \\ P_1' = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q_1} = 2Q_1P_1 + 4Q_2P_2 + 2(2\theta_1 + \theta_2) \\ P_2' = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q_2} = 2P_2^2 - P_1 + 4Q_1P_2 \end{cases} \quad (4.16)$$

であり, さらに Q_1, Q_2, P_1, P_2 は正則だから $Q_1(t_0), Q_2(t_0), P_1(t_0), P_2(t_0)$ は有界な数である. これらを $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \delta_0$ とおくとコーシーの存在定理より

$$\begin{aligned} Q_1(t_0) &= \alpha_0 \\ Q_2(t_0) &= \beta_0 \\ P_1(t_0) &= \gamma_0 \\ P_2(t_0) &= \delta_0 \end{aligned}$$

となる解はただ1つである。($\tilde{Q}_1, \tilde{Q}_2, \tilde{P}_1, \tilde{P}_2$ についても同様.)

よって $(q_1, q_2, p_1, p_2) \neq (\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \tilde{p}_1, \tilde{p}_2)$ ならば $(q_1(t_0), q_2(t_0), p_1(t_0), p_2(t_0)) \neq (\tilde{q}_1(t_0), \tilde{q}_2(t_0), \tilde{p}_1(t_0), \tilde{p}_2(t_0))$ である.

(ii) $(q_1, q_2, p_1, p_2), (\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \tilde{p}_1, \tilde{p}_2)$ が違うタイプの解

W_ϕ の元 $(\lambda_\phi, \mu_\phi, \nu_\phi, \eta_\phi)$ と W_a の元 $(\lambda_a, \mu_a, \nu_a, \eta_a)$ は

$$\begin{aligned}\lambda_\phi &= \lambda_a \\ \mu_\phi &= \mu_a \\ \nu_\phi &= \nu_a \\ \eta_\phi &= \eta_a + \frac{\theta_1 + \theta_2}{\mu_a}\end{aligned}$$

という関係式で貼り合わさっていた. よって $\mu_a = 0$ なら $(\lambda_\phi, \mu_\phi, \nu_\phi, \eta_\phi)$ と $(\lambda_a, \mu_a, \nu_a, \eta_a)$ は貼り合わない. このことに注意すると

$$\begin{aligned}\tilde{q}_1 &= \tilde{Q}_1 \\ \tilde{q}_2 &= \tilde{Q}_2 \\ \tilde{p}_1 &= \tilde{P}_1 \\ \tilde{p}_2 &= \tilde{P}_2 + \frac{\theta_1 + \theta_2}{\tilde{Q}_2}\end{aligned}$$

と置いたとき $\tilde{Q}_2 = 0$ であれば W_1 の元 $(q_1^\phi(t_0), q_2^\phi(t_0), p_1^\phi(t_0), p_2^\phi(t_0))$ と W_2 の元 $(q_1^a(t_0), q_2^a(t_0), p_1^a(t_0), p_2^a(t_0))$ は貼り合わないことがわかる. つまり $\Phi(q_1^\phi, q_2^\phi, p_1^\phi, p_2^\phi)$ と $\Phi(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \tilde{p}_1, \tilde{p}_2)$ は違う点となる.

ところで, $(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \tilde{p}_1, \tilde{p}_2)$ が (a) タイプの解なら

$$\tilde{q}_2 \longleftrightarrow = -2(\theta_1 + \theta_2)T + \dots$$

と展開できた. 従って $\tilde{Q}_2(t_0) = 0$ となることがわかる. 故に

$$\Phi(q_1, q_2, p_1, p_2) \neq \Phi(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \tilde{p}_1, \tilde{p}_2)$$

である.

定理 4.3 より W は V と 1 対 1 に対応することがわかった. この W を II 型行列パウルヴェ方程式の初期値空間という.

参考文献

- [1] K.Okamoto, Studies on the Painlevé equations III, Math.Ann., **275**(1986), P.221 – 255 .
- [2] 岡本和夫, パンルヴェ方程式序説, 上智大学数学講究録, **19**(1985) .
- [3] 岡本和夫, パンルヴェの超越函数, 月刊マセマティクス 7月号, (1980), P.516 – 521 .
- [4] 高野恭一, Painlevé 系の初期値空間について, 数理解析研究所講究録, **931**(1995), P.45 – 69 .
- [5] 野海正俊, パンルヴェ方程式とは?, 数学の楽しみ, **9**(1998), P.101 – 116 .
- [6] 野海正俊, パンルヴェ方程式 - 対称性からの入門 -, 朝倉書店 (すうがくの風景 4), (2000) .
- [7] 山田泰彦, パンルヴェ方程式とディンキン図形, 数学の楽しみ, **23**(2001), P.25 – 34 .
- [8] 渡辺文彦, 数理科学 9月号, (1996), P.37 – 45 .
- [9] 野田真司, $A_4^{(1)}$ 型笹野系の有理解の分類, 三重大学教育学部修士論文, (2011) .
- [10] 吉田和史, 結合型パンルヴェ第 II 方程式のベックルンド変換とソリトン解, 三重大学教育学部修士論文, (2011) .