

カメラパラメータ較正誤差と視線方向伝播誤差の定式化*

野村 由司彦^{*1}, 藤本 貴史^{*2}, 張 滌 利^{*3}

A Formulization of Camera-Parameter Calibration Errors and Resultant Visual-Line Estimation Errors

Yoshihiko NOMURA^{*4}, Takashi FUJIMOTO and Dili ZHANG^{*4} Department of Mechanical Engineering, Mie University,
1577 Kurimamachiya-cho, Tsu-shi, Mie, 514-8507 Japan

The 3-D information obtained from cameras' 2D images is given as a visual line by using calibrated parameter values, and we should evaluate the calibration accuracy with respect to the visual line direction error. In this paper, the visual line direction error was examined, based on an evaluation criterion where the calibrated principal point coordinates are taken as the references of the visual line. Many important characteristics with the calibrated parameter value errors and their resulting visual line direction errors were found out by conducting a large amount of simulations under various conditions such as the depth ratios of calibration chart, and the principal distances of cameras. Finally, the error characteristics were analytically proved, and some formulae were derived. The formulae enable us to estimate calibration errors for any calibration conditions in advance.

Key Words: Formulization, Camera Parameter, Calibration, Error Analysis, Fiducial-mark Setup, Visual line

1. 緒 言

カメラパラメータを用いることにより、カメラで撮影した対象の像の画像座標はカメラから対象に向かう視線方向の情報に変換することができる。このカメラパラメータには、カメラの光軸と撮像面との交点である主点の座標、投影中心と撮像面間の距離である画面距離、撮像面上の1画素の高さと幅、画像歪曲などがある。これらはカメラの位置・姿勢などの外部パラメータとの対比で、内部パラメータとよばれている。ただし、通常、カメラパラメータと呼んで内部パラメータをさすので、本論文でもその呼び方にしよう。

さて、複数の観測点で視線方向の情報が得られれば、観測点が二つの場合における3角測量のように、それらを融合させて対象の3次元位置が推定できる。その際、3次元位置が高精度に計測でき、しかも、求めた3次元位置の誤差が必要精度を満たしているか否か判断できる必要がある。そのためには、以下の要求を満たさねばならない。

「要求1」 視線方向を与える基礎になるカメラパラメータが高精度に較正でき、かつカメラパラメータ較正值のカメラパラメータ真値に対する誤差が評価できる。(以下、このカメラパラメータ較正

値の真値に対する誤差を、“較正值の誤差”，あるいは単に“較正誤差”とよぶ)

「要求2」 カメラパラメータ較正值の誤差に起因する3次元推定誤差が評価できる。

まず、「要求1」のカメラパラメータ較正の高精度化と較正誤差定量化について、従来の研究を概観する。基本的なものとして、較正誤差の分散が較正用の基準点の個数に反比例し、基準点の画像座標観測誤差の分散に比例する関係が示されている[1, 4-7]。さらに、ここから一步進め、文献2は基準点を配置したチャートを傾ける方式を前提として、焦点距離(本論文の画面距離に相当)の推定誤差を最小化する観点から最適な傾きを求めた。後述する著者らの研究[4-6]も同じ観点である。文献2に関連して、文献3は、画面距離と同時にカメラパラメータを較正する“同時較正”を前提として、悪条件下での推定モデル(推定するパラメータの個数や種類)の選択方法を示した。

次に、「要求2」の3次元推定誤差の評価について従来の研究を概観する。カメラパラメータ較正值の精度を3次元位置に関係付けて評価することは直接的で、わかりやすい。例えば、文献7では、較正精度の測度として、較正パラメータと観測画像座標からステレオ三角測量で復元した3次元位置の推定値と実測値との差を用いることが提案され、その上で、特定の条件に限られるが、3次元位置の推定誤差を較正依存誤差と較正非依存誤差に分けて定式化している。この他にも、3次元位置に関係付けている論文は多い。しかしその

* 原稿受付 2004年9月6日。

*1 正員, 三重大学工学部(〒514-8507 津市栗真町屋町1577)。

*2 三重大学大学院工学研究科。

*3 Agfa Monotype Corp.(Ballardvale Street, Wilmington, MA 01887-1069, USA)。

E-mail: nomura@mach.mie-u.ac.jp

場合、視線方向の誤差に因る3次元位置の推定誤差は対象までの距離に比例して増大してしまう¹。これに対して、文献9,10は画像上で評価することを述べている²。これは距離不変性が確保できる利点があり、本論文の視線方向の誤差と等価で、重要な点に着眼しているが、単に較正結果の良否を評価するのに用いただけであった。

これらに対して、筆者らは、同一の基準点を遠・近の2平面に配置してカメラパラメータを較正する2平面較正法を前提として、「要求1」については、さまざまな較正条件とカメラパラメータ較正值の誤差の関係を明らかにし、「要求2」については、カメラパラメータ較正值そのものでなく、視線方向の誤差を評価することの重要性を指摘するとともに、シミュレーションにより較正条件と視線方向の誤差の関係を求めてきた[4-6]。しかし、そこで定式化した視線方向の誤差(付録III参照)は、主点座標の誤差を過大評価しており、特に画面距離の大きい場合に問題が顕在化していた(本論文4.2.2参照)。そのような過大評価をせず、視線方向の誤差を的確に評価する方法を提案したことが、本論文の第一の要点である。第二の要点は、遠・近2平面較正法について、基準点画像座標の観測誤差を誤差発生源として、較正条件との対応で、カメラパラメータ較正值の誤差との関係、ならびに視線方向の誤差の関係を定式化するとともに、諸特性を解明したことにある。

本論文の結果を用いることにより、2平面較正法を用いてカメラパラメータを較正する場合について、予め3次元計測値の誤差を見積もり、要求精度との対応で較正条件を適切に決定することも可能になるし、実際に得られた3次元位置計測値についてその誤差を評価することも可能になる。

2. カメラパラメータ較正法

本論文では、代表的な較正法を取り上げ、その方法によって較正されたカメラパラメータの含んでいる誤差が視線方向の誤差として伝播する問題について検討する。本章では、その準備として、視線方向の伝播

¹ カメラパラメータ較正誤差は視線方向の誤差となる。視線に垂直な方向での3次元位置の誤差は、その視線方向の誤差に距離を乗じたものとなるので、距離に比例することになる。

² 画像上での誤差は視線方向の誤差に変換され、視線方向の誤差は、3次元位置の誤差に変換できる(その変換の例を“付録II”で説明する)。このような意味で、「要求2」の3次元推定誤差の評価を行っているといえる。

誤差を定義するとともに、取り上げたカメラパラメータ較正法について説明する。

2.1 基準点の設定

基本的によく用いられている遠・近2平面較正法を前提として、以下のように基準点を設定する。

平面上に縦・横方向ともに等間隔で、全体として矩形様に基準点を配置する。この平面を基準点平面と呼ぶ。この基準点平面を、図1(a)のように近位置、および図1(b)のように基準点平面に垂直な方向に T_c だけ奥に平行移動させた遠位置とで撮像する。各基準点の順位は、基準点の横、縦方向の順位 i, j および基準点平面の移動回数 k で定め、

$$\left. \begin{array}{l} \text{近位置 } (k=0) \\ i=0, 1, 2, \dots, I_{near}-1. \quad j=0, 1, 2, \dots, J_{near}-1. \\ \text{遠位置 } (k=1) \\ i=0, 1, 2, \dots, I_{far}-1. \quad j=0, 1, 2, \dots, J_{far}-1. \end{array} \right\} \quad (1)$$

とする。ここで、表現の簡単化のため、 i, j, k を統合した順位として、

$$l = i + jI_k + kI_{near}J_{near} \quad (2)$$

も合わせて定義しておく。 L を基準点の総数とすると、 $l=0, 1, \dots, L-1$ である。

図2のように、3次元世界座標系 ${}^wX{}^wY{}^wZ$ の原点は基準点平面の中心に、座標軸 ${}^wX, {}^wY$ は近位置における基準点平面上に、残る座標軸 wZ は基準点平面に垂直にとる。一方、3次元カメラ座標系 ${}^cX{}^cY{}^cZ$ の原点はカメラの投影中心に、座標軸 ${}^cX, {}^cY$ は撮像面と平行に、座標軸 cZ は撮像面に垂直にとる。

すべての3次元座標は、基準点間隔で除して無次元化する。第 l 番目の基準点の3次元世界座標は、

$${}^w\mathbf{r}_l = [{}^wX_l \quad {}^wY_l \quad {}^wZ_l]^T = [i - (I_k - 1)/2 \quad j - (J_k - 1)/2 \quad kT_c]^T \quad (3)$$

と定められる。なお、 $I_0 = I_{near}$, $I_1 = I_{far}$, $J_0 = J_{near}$, $J_1 = J_{far}$ である。また、その3次元カメラ座標を ${}^c\mathbf{r}_l = [{}^cX_l \quad {}^cY_l \quad {}^cZ_l]^T$ と表す。

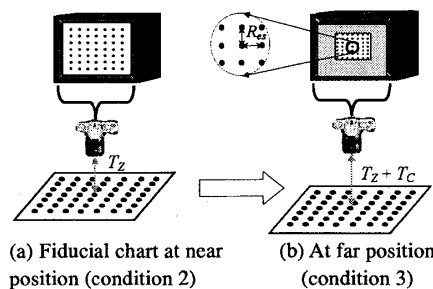
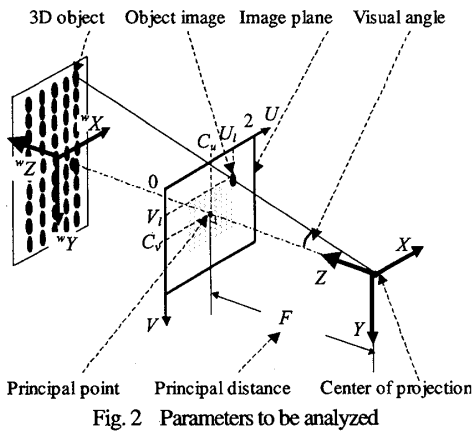


Fig. 1 Two plane calibration method



2.2 較正するカメラパラメータ

カメラの光軸と撮像面との交点である主点座標 $C \equiv [C_u C_v]^T$, 撮像面・投影中心間距離である画面距離 F , ならびに1画素の幅と高さの比, “幅/高さ” P , 合計4個の内部パラメータ $\mathbf{x}^{(in)} \equiv [C_u C_v F P]^T$ を較正する。なお, 画像座標と主点座標は, 撮像面の横方向画素数 n_u の半分 $n_u/2$ で除して正規化する。画面距離 F も $n_u/2$ 画素分の長さに対する倍率として定義する。これにより, 画像座標 U は $0 \sim 2$ に正規化でき, 画面距離は, 「水平方向視野」= $2 \times \tan^{-1}(1/F)$ なる意味をもつことになる。例えば, $F=1$ は視野 90 度 (広角レンズ), $F=4$ は視野 28 度 (標準レンズ) に相当する。

ただし, この4つの内部パラメータを較正するには, 6個の外部パラメータ $\mathbf{x}^{(ex)} \equiv [T_x T_y T_z \phi \theta \psi]^T$ も同時に較正しなければならない。ここで, $\mathbf{T} \equiv [T_x T_y T_z]^T$ はカメラ座標系に対する世界座標系の並進移動ベクトル, ϕ, θ, ψ はカメラ座標系に対する世界座標系の姿勢を表す回転行列 cR_w を与える3個の回転角度である。 $\mathbf{x}^{(in)}$ と $\mathbf{x}^{(ex)}$ をまとめ, 未知パラメータベクトル \mathbf{x} とする。

$$\mathbf{x} \equiv [\mathbf{x}^{(in)T} \mathbf{x}^{(ex)T}]^T = [C_u C_v F P T_x T_y T_z \phi \theta \psi]^T$$

2.3 カメラモデル

画像座標の推定値 $\mathbf{U}_{est} = [U_{est} V_{est}]^T$ は, 3次元世界座標 ${}^w\mathbf{r} = [{}^wX {}^wY {}^wZ]^T$ の関数であると同時に, 未知パラメータベクトル \mathbf{x} の関数であることから, これを陽に表したいときには $\mathbf{h}(\mathbf{x}, {}^w\mathbf{r})$ と表示する。 \mathbf{U}_{est} は, 対象点の3次元カメラ座標 ${}^c\mathbf{r} = [XYZ]^T$ に対する透視投影³,

$$\mathbf{U}_{est} \equiv \mathbf{h}(\mathbf{x}, {}^w\mathbf{r}) = \mathbf{C} + F \begin{bmatrix} X/Z \\ PY/Z \end{bmatrix} \quad (4)$$

および, ${}^c\mathbf{r}, {}^w\mathbf{r}$ 間の並進・回転関係,

$${}^c\mathbf{r} = {}^cR_w {}^w\mathbf{r} + \mathbf{T} \quad (5)$$

により関係付けられる。なお, 画像歪曲は重要なカメラパラメータの一つであり, 多くの場合, 画面距離や主点座標とともに較正されている[4~8, 11]。しかし, 歪曲は分離して較正することができる[12~14]。このように分離できるのであれば, 歪曲とそれ以外とに分けてそれぞれに適した方法で較正した方が精度を高めることができるし, 結果を簡潔に把握できる。このような理由から本論文では, 文献 2, 6 と同様に, 歪曲は較正の対象から除外する。

2.4 視線方向の誤差

まず, 横・縦方向で対象を望む視角の正接, すなわち対象への視線勾配ベクトル,

$$\mathbf{R/Z} \equiv [X/Z \ Y/Z]^T \quad (6)$$

を視線方向を表す変数とする。そして, この誤差, すなわち $\Delta(\mathbf{R/Z}) \equiv [\Delta(X/Z) \ \Delta(Y/Z)]^T$ の共分散行列,

$$\Sigma_{RZ} = \langle \Delta(\mathbf{R/Z}) \Delta(\mathbf{R/Z})^T \rangle = \begin{bmatrix} \sigma_{X/Z}^2 & \tau_{X/Z, Y/Z} \\ \tau_{X/Z, Y/Z} & \sigma_{Y/Z}^2 \end{bmatrix}$$

により, 「要求 2」のカメラパラメータ較正値の誤差が伝播して生じる3次元推定誤差の評価値とする。ただし, $\langle \cdot \rangle$ は期待値演算, $\sigma_{X/Z}^2, \sigma_{Y/Z}^2$ は, それぞれ $X/Z, Y/Z$ の分散, $\tau_{X/Z, Y/Z}$ は X/Z と Y/Z の共分散を表す。

2.5 カメラパラメータ較正法

すべての基準点の画像座標観測値 $\mathbf{U}_0 = [U_0 V_0]^T, \dots, \mathbf{U}_l = [U_l V_l]^T, \dots, \mathbf{U}_{L-1} = [U_{L-1} V_{L-1}]^T$ を, 一つのベクトル,

$$\mathbf{U}_{all} \equiv [\mathbf{U}_0^T \dots \mathbf{U}_l^T \dots \mathbf{U}_{L-1}^T]^T$$

にまとめる。それらに対する画像座標の推定値も,

$$\mathbf{U}_{est, all} \equiv [\mathbf{h}(\mathbf{x}, {}^w\mathbf{r}_0)^T \dots \mathbf{h}(\mathbf{x}, {}^w\mathbf{r}_l)^T \dots \mathbf{h}(\mathbf{x}, {}^w\mathbf{r}_{L-1})^T]^T$$

のようにまとめる。さて, 未知パラメータ \mathbf{x} は, \mathbf{x} の関数である推定値 $\mathbf{U}_{est, all}$ が観測値 \mathbf{U}_{all} に最もよく一致するように, 推定する。具体的には, 最小2乗法,

$$\text{すなわち } \|\mathbf{U}_{all} - \mathbf{U}_{est, all}\|^2 = \sum_{l=0}^{L-1} \{ (U_l - U_{est,l})^2 + (V_l - V_{est,l})^2 \}$$

の最小化により, 推定する。ただし, $\mathbf{U}_{est, all}$ は \mathbf{x} の非線形関数であるため, 例えば, l 番目の成分 $\mathbf{h}(\mathbf{x}, {}^w\mathbf{r}_l)$ は, n 番目の近似値 $\hat{\mathbf{x}}^{(n)}$ の近傍で,

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}, {}^w\mathbf{r}_l) \doteq \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}^{(n)}, {}^w\mathbf{r}_l) + \frac{\partial \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}^{(n)}, {}^w\mathbf{r}_l)}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}^{(n)})$$

のように線形近似する。これに基づいて, 反復的に修正する。このときの n 次修正解は,

³ 複数のレンズをもつ通常のカメラにおいては, 3次元世界から見たときの主点, すなわち前側主点と, 撮像面から見たときの主点, すなわち後側主点を想定することにより, 式(4)のピンホールカメラモデルに対する透視投影関係を適用できる。

$$\Delta \hat{x}^{(n)} = \left(A^{(n)T} \Sigma_{U_{all}}^{-1} A^{(n)} \right)^{-1} A^{(n)T} \Sigma_{U_{all}}^{-1} \Delta U_{all}^{(n)} \quad (7)$$

となる。これにより $n+1$ 番目の近似値 $\hat{x}^{(n+1)}$ は

$$\hat{x}^{(n+1)} = \hat{x}^{(n)} + \Delta \hat{x}^{(n)}$$

と与えられる。ただし、

$$A^{(n)} \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial h(\hat{x}^{(n)}, r_0)}{\partial x} \\ \vdots \\ \frac{\partial h(\hat{x}^{(n)}, r_l)}{\partial x} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial h(\hat{x}^{(n)}, r_l)}{\partial x} = \left[\frac{\partial h(\hat{x}^{(n)}, r_l)}{\partial C_u} \quad \frac{\partial h(\hat{x}^{(n)}, r_l)}{\partial C_v} \quad \dots \quad \frac{\partial h(\hat{x}^{(n)}, r_l)}{\partial \psi} \right]$$

$$\Delta U_{all}^{(n)} \equiv U_{all} - U_{est,all}^{(n)}$$

$$U_{est,all}^{(n)} \equiv [h(\hat{x}^{(n)}, r_0)^T \dots h(\hat{x}^{(n)}, r_l)^T]^T$$

である。なお、観測の誤差を考慮して最小 2 乗推定を行うため、観測値 U_{all} の誤差の共分散行列 $\Sigma_{U_{all}}$ の逆行列を重みとして用いる。

3. 誤差解析

実際の較正に際しては、さまざまな誤差要因が関わってくる。例えば、基準点の位置には平面内誤差や平面外誤差が、また基準点平面の移動量や移動方向の誤差、さらには画像処理に伴う抽出誤差がある。しかし、これらが微小で互いに独立な偶然誤差であり、それらの大きさを見積もることができれば、それらと等価な基準点画像座標の誤差を考慮することができる。そしてそれらの総和をとればよい。このように偶発的な誤差を総体的に表すことができるという意味で、基準点画像座標観測誤差は重要な要因である。そこで、本論文では基準点画像座標観測値 U_{all} の誤差 $\Sigma_{U_{all}}$ の要因が伝播して生じるカメラパラメータ $x^{(n)} = [C_u, C_v, F, P]^T$ の較正值の誤差 $\Sigma_{\hat{x}^{(n)}}$ 、さらには $\Sigma_{\hat{x}^{(n)}}$ が伝播して生じる視線勾配 R/Z の誤差 Σ_{RZ} (これは較正依存誤差とよばれている) について検討する。なお、3 次元位置を実際に推定する際には、本論文で検討する較正依存誤差の他、較正非依存誤差を考えなければならない。これらの詳細については、付録 I を参照されたい。

3.1 パラメータ較正值の誤差

較正用基準点の観測値 U_{all} に関する誤差 (この誤差はそのばらつきの共分散行列 $\Sigma_{U_{all}}$ によりモデル化する) は内部パラメータ較正值 $\hat{x}^{(n)}$ に伝播する。その伝播誤差のばらつきの共分散行列、 $\Sigma_{\hat{x}^{(n)}}$ は、誤差の伝播側[15]を用い、

$$\Sigma_{\hat{x}^{(n)}} = \left(A^{(n)T} \Sigma_{U_{all}}^{-1} A^{(n)} \right)^{-1} \quad (8)$$

$$\Sigma_{\hat{x}^{(n)}} = \begin{bmatrix} \sigma_{C_u}^2 & \tau_{C_u, C_v} & \tau_{C_u, F} & \tau_{C_u, P} \\ \tau_{C_u, C_v} & \sigma_{C_v}^2 & \tau_{C_v, F} & \tau_{C_v, P} \\ \tau_{C_u, F} & \tau_{C_v, F} & \sigma_F^2 & \tau_{F, P} \\ \tau_{C_u, P} & \tau_{C_v, P} & \tau_{F, P} & \sigma_P^2 \end{bmatrix}, \quad A^{(n)} \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial h(\hat{x}^{(n)}, r_0)}{\partial x^{(n)}} \\ \vdots \\ \frac{\partial h(\hat{x}^{(n)}, r_l)}{\partial x^{(n)}} \end{bmatrix} \quad (9)$$

により与えられる。ここで、 $\sigma_{C_u}^2$ 、 $\sigma_{C_v}^2$ は主点座標 C_u と C_v の較正誤差の分散を、 σ_F^2 、 σ_P^2 は F 、 P の較正誤差の分散を、 τ は共分散、例えば $\tau_{C_u, F}$ は C_u と F の較正誤差の共分散を表す。

3.2 視線勾配 R/Z , CPP 基準と TPP 基準の違い

実用に際しては、 $x^{(n)}$ を予め較正し、その後、実際に撮像した対象の画像座標 U, V から、較正值 $\hat{x}^{(n)}$ を用いて、対象への視線勾配 R/Z を計算する。ここで、3.1 節に述べたように較正值 $\hat{x}^{(n)}$ は誤差を含む。そのため、たとえ U, V に誤差がなくとも、較正值 $\hat{x}^{(n)}$ の誤差 $\Sigma_{\hat{x}^{(n)}}$ が原因で R/Z にも誤差 (較正依存誤差) $\Sigma_{RZ}^{(calib)}$ が伝播する。本節ではこの $\Sigma_{RZ}^{(calib)}$ を定式化する。なお、主点座標と画面距離の較正值を C_u' (以下 CPP とよぶ) と F' 、真値を C_u と F 、誤差を ΔC_u と ΔF と表す。これらは次式で関係付けられる。

$$C_u' = C_u + \Delta C_u, \quad F' = F + \Delta F \quad (10)$$

ここで、視線勾配の基準方向の定め方に注意する必要がある。観測画像座標から対象への視線勾配の推定値を求める際には、視線勾配の基準方向として、較正した主点により定められる方向を用いる (図 3 の β_{est} 参照)。一方、対象への視線勾配の真値を定める際の基準方向にも、推定値と同様に主点の較正值を用いばよい (図 4 の β_{true} 参照)。これが、本論文で提案する視線勾配の評価原理である。これを定式化するため、次項で詳細に幾何学的関係を分析する。

これに対して、従来[6,7]はどのようにしていたのだろうか。簡単に伝播を定式化できるということで、式 (4) を用いて、 $\hat{x}^{(n)}$ の誤差から R/Z の誤差への伝播を求めていた (付録 III 参照)。この場合には、対象への視線勾配の真値を定める際の基準方向として主点座標の真値 (以下 TPP とよぶ) を用いたことになる (図 4 の α_{true} 参照)。そのため、基準方向の差に相当する α_{CC} (これは主に ΔC_u に対応する) が、そのまま誤差の過大評価につながったのである。

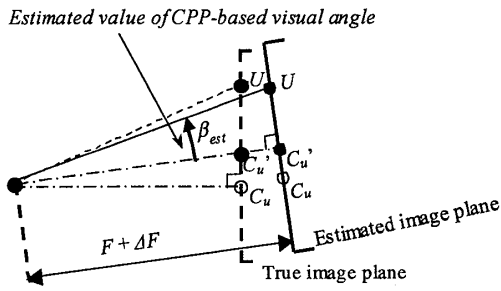


Fig. 3 Estimated values of CPP-based visual angle

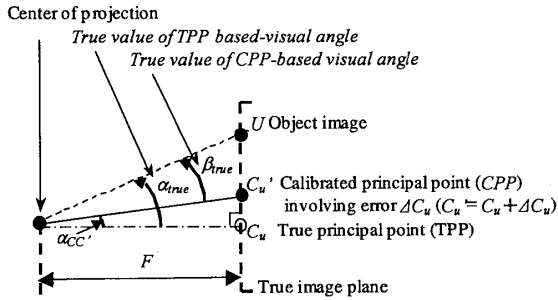


Fig. 4 Imaging geometry showing the true values of TPP-based visual angle and the CPP-based visual angle

3.3 CPP 基準の視線勾配誤差

主点座標較正值基準，つまり CPP 基準での視線勾配の評価法を，水平方向に例を取って説明する。この評価により，主点座標の誤差 ΔC_u に起因する α_{CC} による影響を著しく軽減できる。しかし，CPP に基づく基準軸と撮像面とが垂直でないことによる影響は残る（これは従来の TPP 基準でも同様。付録 III 参照）。したがって，以下では，この影響と F の誤差 ΔF による影響について考察することになる。

さて，対象を画像座標 U に観測したとき，CPP 基準の視線勾配の推定値 $(X/Z)_{CPP, est}$ は，主点座標の較正值 C'_u と F' を用いて求められる対象への視角の推定値 β_{est} の正接，

$$(X/Z)_{CPP, est} = \tan \beta_{est} = (U - C'_u) / F' = \{ U - (C_u + \Delta C_u) \} / (F + \Delta F) \quad (11)$$

となる(図 3 参照)。これに対して， $(X/Z)_{CPP}$ の真値 $(X/Z)_{CPP, true}$ ，すなわち CPP 基準での対象への視角の真値 β_{true} の正接は，

$$(X/Z)_{CPP, true} = \tan \beta_{true} = \tan(\alpha_{true} - \alpha_{CC}) \quad (12)$$

となる。ここで，

$$\tan \alpha_{true} = (U - C_u) / F \quad (13)$$

$$\tan \alpha_{CC} = \Delta C_u / F \quad (14)$$

よって， $(X/Z)_{CPP, est}$ の誤差は，式(11)と(12)から，

$$\Delta(X/Z)_{CPP, est} = (X/Z)_{CPP, est} - (X/Z)_{CPP, true}$$

$$\approx \{ (U - C_u)^2 / F^3 \} \Delta C_u + \{ (U - C_u) / F^2 \} \Delta F \quad (15)$$

で表される。同様に，画像座標 V に撮像される対象への $(Y/Z)_{CPP, est}$ の誤差は，

$$\Delta(Y/Z)_{CPP, est} \approx \{ (V - C_v)^2 / (F^3 P^3) \} \Delta C_v + \{ (V - C_v) / (F^2 P) \} \Delta F + \{ (V - C_v) / (F P^2) \} \Delta P \quad (16)$$

のように与えられる。最後に，式(15)，(16)をまとめて，CPP 基準での視線勾配の誤差ベクトル $\Delta(R/Z)_{CPP} = [\Delta(X/Z)_{CPP, est} \Delta(Y/Z)_{CPP, est}]^T$ とすると，その共分散行列は，

$$\Sigma_{RZ}^{(calib)} = \langle \Delta(R/Z)_{CPP} \Delta(R/Z)_{CPP}^T \rangle = \mathbf{G}_{CPP} \Sigma_{\hat{x}^{(m)}} \mathbf{G}_{CPP}^T \quad (17)$$

と定式化できる。ただし，

$$\mathbf{G}_{CPP} = \begin{bmatrix} -\frac{(U - C_u)^2}{F^3} & 0 & \frac{U - C_u}{F^2} & 0 \\ 0 & \frac{(V - C_v)^2}{F^3 P^2} & \frac{V - C_v}{F^2 P} & \frac{V - C_v}{F P^2} \end{bmatrix}_{\mathbf{x}^{(m)} = \hat{\mathbf{x}}^{(m)}} \quad (18)$$

4. 推定誤差のシミュレーション計算

4.1 前提

較正の誤差は，基準点の数と間隔，基準点平面の初期位置と姿勢，基準点平面の移動距離など，多数の条件に左右される。しかし多くの要因を検討することは困難なので，文献[4~6]と同様に以下のように標準的な前提を設けて，要因の個数を削減する。すなわち，(1)近位置，遠位置のいずれにおいても，基準点は縦横に等間隔で等しい個数配置する。つまり，

$$I_{near} = J_{near} = I_{far} = J_{far} \text{ とする。}$$

(2) 近位置で基準点平面を撮影する際，基準点群は最大となるように撮影する(図 1(a)参照)。これに関連して， $\phi, \theta, \phi = 0$ とする⁴。

(3) 遠位置では，基準点の像の間隔が設定値 R_{es} (最小識別間隔とよぶ) になるように撮像する。

これらの条件により，次式が成り立つ(図 5 参照)。

$$T_z = F / (M R_{es}), \quad I_{near} = J_{near} = I_{far} = J_{far} = 1 + 2(M R_{es}) \quad (19)$$

ここで次式のように遠・近の奥行比を定義しておく。

$$M \equiv (T_z + T_c) / T_z$$

(4) C_u, C_v, P は，いずれも，代表値として，1 とする。さらに，前提(2)および $C_u = C_v = 1$ により， $T_x, T_y = 0$ とな

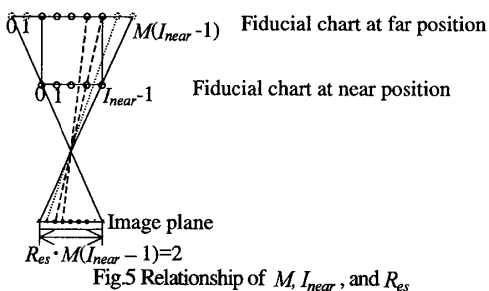
⁴ 実際には基準点が撮像面全体に広がって撮影されるように目視で調整するのであるが， ϕ, θ, ϕ は必ずしも 0 にはできない。 ϕ, θ, ϕ が 0 でないための影響は主に基準点数の減少として表れる。この基準点数の減少は画面距離 F の較正誤差の分散や視線勾配 RZ の誤差の分散を増加させる。その増加の割合は $2(\sin \phi + \sin \theta) / F + 2 \sin \phi$ 程度であり， ϕ, θ, ϕ のいずれが数度程度であれば無視できる。その計算例については文献[5]を参照されたたい。

る⁵。また、一般に基準点は円形であり、すべての基準点の大きさを等しくとるので、いずれの基準点でも画像座標観測誤差は等しく、等方的と考えられる。そこで、その誤差の共分散行列 Σ_{cal} は単位行列 I に定数 σ_j^2 を乗じた $\sigma_j^2 I$ とする。ここで、この画像座標観測誤差 σ_j^2 も最小識別間隔 R_{es} も較正誤差には大きな影響をもたらすが、

$$\text{較正誤差} \propto R_{es}^2 \sigma_j^2$$

なる形で定式化できる (5章で証明。[1, 4-7] などでも同様な結論)。したがって、本論文では、 $R_{es} = 0.04$ 、 $\sigma_j^2 = 1$ でシミュレーションを行い、結果を図示するが、このような比例関係を考慮すれば一般性は失わない。

以上により、値を変化させて調べなければならないパラメータは $T_x, T_y, T_z, \phi, \theta, \psi, M, I, J, R_{es}, C_u, C_v, F, P, \Sigma_{\text{cal}}$ から、 F と M だけに削減できる。すなわち、各画面距離 F 対応で奥行き比 M を様々に変化させて誤差を調べれば、基本的な誤差特性を知ることができる。その結果を以下に述べる。



4.2 誤差解析の結果

本節では、カメラパラメータ較正值自体の誤差、そして、その誤差が伝播して生じる視線勾配の誤差について検討する。

4.2.1 カメラパラメータ較正值の誤差

基準点の個数や間隔は縦、横の両方向に等しく取っているため、主点座標 C_u と C_v の較正誤差の分散はいずれも等しくなる。これらを σ_c^2 と表す。さて、 F を媒介変数として、奥行き比 M との対応で、式(8)に基づいて σ_c^2 、 σ_F^2 、 σ_P^2 をシミュレーション計算し、得られた結果を、図6に示す。この図から、次の特性が見出せる。

⁵ 前提(2)により、撮像面と平行して基準点平面が設定されるので、 C_u, C_v が1からずれると、それに伴って T_x, T_y も0からずれる (C_u, C_v, P には10%程度のカメラ個体差がある)。しかし、これらのずれは、(画面距離 F の較正の手がかりとなる) 基準点像の間隔の大きさ自体には影響しないので、 F の較正精度にも影響を及ぼさない。また、 C_u, C_v の1からのずれに応じて、視線勾配 RZ の誤差を与える式(17)の $(V-C_u)^2$ や $(U-C_v)^2$ は増減するが、それらの増減は4つのコーナーの総和を取るときに概ね相殺される。

(特性1) σ_c^2 は F^4 に比例する。

(特性2) σ_F^2 は F^2 に比例する。

(特性3) σ_F^2 を最小とする奥行き比 M は約1.6で不変。

奥行き比 M が小、すなわち基準点平面の移動量が小さいときには、基準点の像の移動量が小さくなることにより、 F の較正誤差が大きくなる。一方、 M が大、すなわち基準点平面の移動量が大いときには、移動後の基準点像の間隔が一定値 R_{es} であるという条件により、基準点の個数が少なくなり、 F の較正誤差が大きくなる。これら二つの効果のトレードオフにより、奥行き比には誤差を最も小さくする最適値が現れる。

(特性4) σ_P^2 は F に関係なく一定の値をとる。

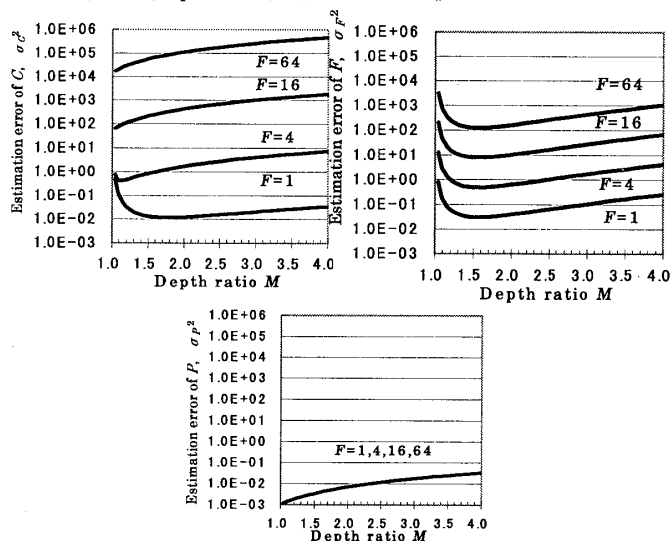


Fig. 6 Errors of calibrated parameter values of C, F , and P

4.2.2 視線勾配の誤差

視線勾配 RZ の較正依存誤差 $\Sigma_{RZ}^{(calib)}$ との対応でカメラパラメータ較正法について検討する。視線勾配の誤差は、撮像面のコーナーで最大となることから、評価点 U として左上のコーナー、 $U = [U \ V] = [0 \ 0]$ を用いる。このとき、 $(V-C_u)^2 = (U-C_v)^2 = 1$ である。さらに、 U 方向と V 方向の視線勾配の誤差を総合した評価値として、 $\Sigma_{RZ}^{(calib)}$ のトレース

$$\sigma_{RZ}^2 \equiv \text{trace} \Sigma_{RZ}^{(calib)} = \sigma_{XZ}^2 + \sigma_{YZ}^2 \quad (20)$$

を用いる。この定義の下、奥行き比 M との関係で、CPP 基準および TPP 基準で評価値 σ_{RZ}^2 を求め、それぞれを図7、図8に示す。これらの図から次の特性が見出せる(理由は5.2参照)。

- (1) 提案の CPP 基準では、図7のように σ_{RZ}^2 は F^2 に反比例して急減する。これに比べて、従来の TPP 基準では、図8のように σ_{RZ}^2 は全体として大幅に増大している。さらに、 σ_{RZ}^2 が F^2 に比例し

で急増する逆の傾向を示しており、 F が大きくなるほど過大に評価していることがわかる。

(2) 図8から、TPP基準での誤差特性には一貫性は見られず、錯綜している。この傾向は、図6左上の C の誤差特性に対応している。それに対して、CPP基準では、図7のようにいずれの F においても、 C の誤差特性の影響は強く現れず、 F の誤差特性に類似したものとなる。また、 σ_{RZ} を最小化する M の最適値 M_{opt} は約 1.6 と不変であり、実際の較正に際しては、どのような F をもつカメラでもこの値を用いればよいことがわかる。

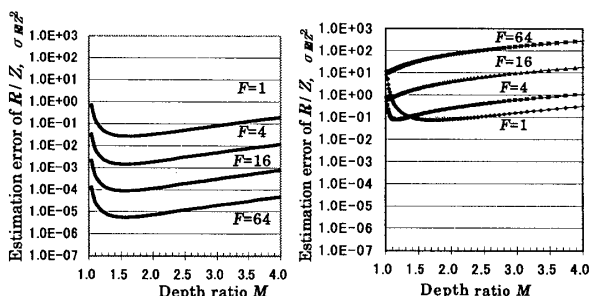


Fig. 7 Error of CPP-based visual line direction, R/Z

Fig. 8 Error of TPP-based visual line direction, R/Z

5. 推定誤差に関する理論的考察

5.1 画面距離の推定誤差に関する理論的考察

σ_F^2 は σ_z^2 との相関は高いが、それ以外との相関は極めて低い。したがって、 $U_{est} = [U_{est} \ V_{est}]^T$ に対する F と T_z のヤコビアンが重要である。したがって、これらのみに着目して、つまり $C_u, C_v, P, T_x, T_y, T_z, \phi, \theta, \psi$ のヤコビアンを取り除いた、 F と T_z のみによる部分的なヤコビアンを、3. で述べた手続きに適用して、誤差を解析的に調べる。

簡単のため、 $P=1$ とすると、 F と T_z のヤコビアンは、

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial U_{est}}{\partial F} & \frac{\partial U_{est}}{\partial T_z} \\ \frac{\partial V_{est}}{\partial F} & \frac{\partial V_{est}}{\partial T_z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X - FX \\ Z \\ Y - FY \\ Z \\ Z^2 \end{bmatrix} \quad (21)$$

となる。すべての基準点に関する式(21)のヤコビアンを縦に接続することにより、パラメータ推定に用いるヤコビアン A' ができる。ここですべての基準点を近位置と遠位置の Z , すなわち

$$T_z = F(MR_{es}), \quad T_z + T_c = F/R_{es} \quad (22)$$

に2分してまとめて表現すると、 $A'^T A'$ は、

$$A'^T A' = \begin{bmatrix} \frac{S_{near}}{T_z^2} + \frac{S_{far}}{(T_z + T_c)^2} & \frac{FS_{near}}{T_z^3} + \frac{FS_{far}}{(T_z + T_c)^3} \\ \frac{FS_{near}}{T_z^3} + \frac{FS_{far}}{Z_{far}^3} & \frac{F^2 S_{near}}{T_z^4} + \frac{F^2 S_{far}}{(T_z + T_c)^4} \end{bmatrix} \quad (23)$$

となる。ここで、簡単のため、 $I_{far}, I_{near}, J_{far}, J_{near}$ を奇数とすれば、

$$S_{near} \equiv J_{near} \sum_{-(I_{near}-1)/2}^{(I_{near}-1)/2} X^2 + I_{near} \sum_{-(J_{near}-1)/2}^{(J_{near}-1)/2} Y^2 \quad (24)$$

$$S_{far} \equiv J_{far} \sum_{-(I_{far}-1)/2}^{(I_{far}-1)/2} X^2 + I_{far} \sum_{-(J_{far}-1)/2}^{(J_{far}-1)/2} Y^2$$

と書ける。このとき、 σ_F^2 は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \sigma_F^2 &= [11\text{-entry of } (A'^T A')^{-1}] \cdot \sigma_U^2 \\ &= \frac{(M^4 S_{near} + S_{far})}{(M-1)^2 M^2 R_{es}^2} \cdot \frac{F^2 \sigma_U^2}{S_{near} S_{far}} \end{aligned} \quad (25)$$

ここで、式(19)から $S_{near} = S_{far}$ となり、いずれも

$$\begin{aligned} S_{near} &= 2J_{near} \sum_{-(I_{near}-1)/2}^{(I_{near}-1)/2} X^2 \\ &= \frac{4(2 + MR_{es})}{M^4 R_{es}^4} \left(\frac{1}{3} + \frac{MR_{es}}{2} + \frac{M^2 R_{es}^2}{6} \right) \end{aligned} \quad (26)$$

で与えられる。最後に、式(26)を式(25)に代入し、

$$\sigma_F^2 = \frac{(M^4 + 1)M^2}{(M-1)^2} \cdot \frac{F^2 R_{es}^2 \sigma_U^2}{4(2 + MR_{es})(1/3 + MR_{es}/2 + M^2 R_{es}^2/6)} \quad (27)$$

が導かれる。式(27)による理論値は、例えば $M=1.6$ の条件では、シミュレーションによる計算値と比べて5%程度小さめになっているだけであり、両者は概ね一致しているといえる。

一般に $MR_{es} \ll 2$ といえ、この場合にはさらに簡易化され、次式が導かれる。

$$\sigma_F^2 \approx 3/8 \{(M^4 + 1)M^2 / (M-1)^2\} F^2 R_{es}^2 \sigma_U^2 \quad (28)$$

5.2 視線勾配の推定誤差に関する理論的考察

式(17)に式(15),(16)を代入して、 σ_{RZ}^2 の近似値、

$$\begin{aligned} \sigma_{RZ}^2 &\approx \{(U-C_u)^4 F^6 + (V-C_v)^4 (F^6 P^6)\} \sigma_C^2 \\ &\quad + \{(U-C_u)^2 F^4 + (V-C_v)^2 (F^4 P^2)\} \sigma_F^2 \\ &\quad + \{(V-C_v)^2 (F^2 P^4)\} \sigma_P^2 \end{aligned} \quad (29)$$

が得られる。ただし、内部パラメータの較正値にはほとんど相関がないのでそれらの共分散は無視した。

さて、 $P=1, U-C_u=V-C_v=1$ のとき、式(29)は、

$$\sigma_{RZ}^2 \approx 2\sigma_C^2 F^6 + 2\sigma_F^2 F^4 + \sigma_P^2 F^2 \quad (30)$$

となるが、4.2.1 の諸特性を適用してこれを考察する。まず、特性2の $\sigma_F^2 \propto F^2$ から $\sigma_F^2 F^4 \propto 1/F^2$ となる。次に、特性1の $\sigma_C^2 \propto F^4$ から $\sigma_C^2 F^6 \propto 1/F^2$ となる。最後に、特性4から σ_P^2 は F に依らないので、 $\sigma_P^2 F^2 \propto 1/F^2$ となる。よって、いずれも同じく F^2 に反比例する特性をもち、

しかも, $F=1$, $M \geq 1.6$ のとき, σ_c^2 , $\sigma_p^2 \ll \sigma_f^2$ なので, 式(30)は第一項のみに単純化され, 次式となる.

$$\sigma_{RZ}^2 \cong 2\sigma_f^2/F^4 \quad (31)$$

5.3 推定誤差の見積もりの例

$M=M_{opt}$ ($=1.6$)で較正したとして, 推定誤差の見積もりを例示する. 画面距離 $f=16\text{mm}$, 1画素の幅 $s_u=0.013\text{mm}$, 撮像面の画素数 $n_u=512$ とする. これは視野 23.5° に相当する. このとき,

$$F=(f/s_u)/(n_u/2)=(16/0.013)/(512/2)=4.8$$

次に, $I_{near}=J_{near}=10$ とすると, 図5の関係式から,

$$R_{es}=2\{M(I_{near}-1)\}=2\{1.6(10-1)\}=0.14$$

となる. 最後に, $\alpha_u^2=1 \text{ pixel}^2$ なら, $\alpha_f^2=1/(512/2)^2=1.5 \times 10^{-5}$ となる. これらの値を式(27), (31)に代入し,

$$\sigma_f^2=9.1 \times 10^{-5} \therefore \sigma_f=9.5 \times 10^{-3}$$

$$\sigma_{RZ}^2 \cong 34 \times 10^{-7} \therefore \sigma_{RZ} \cong 5.8 \times 10^{-4}$$

と求められる.

6. 結 言

本論文では, まず, 実際に較正された主点座標を用いて視線勾配の基準方向を定めるという原理に基づいて, 視線勾配の誤差を定式化した. 次に, 遠位置での基準点像の間隔など, 較正条件に前提を設けることにより, 値を変えて調べなければならない要因を, 奥行比, 画面距離のみに絞ら込んだ. その上で, 基準点の画像座標の観測誤差が伝播して生じるカメラパラメータ較正值の誤差, さらにはカメラパラメータ較正值に基づいて計算されるカメラから対象への視線勾配の誤差について, さまざまな条件下でシミュレーション計算を行って調べた. 最後に, それを表す解析的な式を導き, 較正に関わる諸特性を解明した. この式を用いることにより, 較正の条件との対応で誤差が容易に見積もることができるようになった.

今後は, 本論文で定式化しなかった, 主点座標などのパラメータについても誤差特性を検討するとともに, 基準点の個数, 基準点配置, 撮像素子などが縦・横に同数でない場合など, より一般的な条件についても誤差特性を解明したい.

松井博和博士には, 研究の遂行に際してお手伝いいただいた. 謝意を表します.

文 献

- (1) S. W. Shih, Y. P. Hung and W. S. Lin: "Accuracy Assessment on Camera Calibration Method Not Considering Lens Distortion", Proc. CVPR, pp.755-757, 1992
- (2) K. Kanatani: "Statistical analysis of focal length calibration using vanishing points," IEEE Trans. Robotics Automation, 8-6, pp. 767-775, 1992

- (3) 松永力, 金谷健一, 平面パタンを用いる移動カメラの校正: 最適計算, 信頼性評価, および幾何学的AICによる安定化, 電子情報通信学会論文誌 A, Vol.J83-A, No. 6, pp. 694-701, 2000
- (4) D.Zhang, Y.Nomura, S.Fujii: "Error analysis and optimal setup on camera calibration", Proc. Asian Conference on Computer Vision, pp. II210- II214, 1995
- (5) 張濤利, 野村由司彦, 藤井省三, 逐次近似反復解法を用いたカメラ較正における誤差解析と基準点の最適設定, 日本機械学会論文集C編, 61巻, 586号 pp. 252~ 259, 1995
- (6) 張濤利, 野村由司彦, 藤井省三, カメラ主点距離較正の最適化, 電子情報通信学会論文誌 D-II, 79-D-II 巻, 9号 pp. 1643~ 1645, 1996
- (7) R.Y.Tsai: "A Versatile Camera Calibration Technique for High-Accuracy 3D Machine Vision Metrology Using Off-the-Shelf TV Cameras and Lenses", IEEE Journal of Robotics and Automation, Vol.RA-3, No.4, pp.323-344,1987
- (8) Z.Y. Zhang: "A flexible new technique for camera calibration," IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence, Vol. 22, No.11, pp. 1330-1334, Nov. 2000
- (9) J.Weng, P.Cohen, M.Herniou: "Camera Calibration with Distortion Models and Accuracy Evaluation", IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence, Vol. 14, No.10, pp.965-980, October 1992
- (10) H. A.Beyer: "Accurate Calibration of CCD Cameras" Proc. Computer Vision and Pattern Recognition '92, pp.96-101,1992
- (11) Y. Nomura, M. Sagara, H. Naruse, and A. Ide: "Simple calibration algorithm for high-distortion-lens camera," IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence, Vol. 14, No.11 pp. 1095-1099, Nov. 1992
- (12) 小野寺康浩, 金谷健一, カメラの位置決めをいらない画像の幾何学的補正法, 電子情報通信学会論文誌 D-II, J75-D-II 巻, 5号 pp.1009-1013, 1992
- (13) G.Q. Wei, S. Dema: "Implicit and explicit camera calibration - theory and experiments," IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence, Vol. 16, No. 5, pp. 469-480, May 1994
- (14) R. Swaminathan and S.K. Nayar: "Nonmetric calibration of wide-angle lenses and polycameras," IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence, Vol. 22, No. 10 pp. 1172-1178, Oct. 2000
- (15) 中川徹, 小柳義夫, 最小二乗法による実験データ解析, 東京大学出版会, 1995

付録 I 誤差解析計算の流れ

本論文の結果を用いるには, 3つの形態の誤差伝播を扱わねばならない. ここではそれらを対比的に説明する.

- (1) 本論文第一段の誤差伝播 (較正值の誤差, 図 A1(a)参照): 較正用基準点の観測値 U_{all} とその誤差の共分散行列 $\Sigma_{U_{all}}$ が伝播して生じる, 内部パラメータ較正值 $\hat{x}^{(p)} = C_u C_f P^T$ の誤差 $\Sigma_{x^{(p)}}$ である. 3.1節でこれを定式化し, 4.2.1項でシミュレーション結果を述べている.
- (2) 本論文第二段の誤差伝播 (較正依存誤差, 図 A1(b)参照): 画像座標に誤差はなくとも, 内部パラメータ較正值の誤差 $\Sigma_{x^{(p)}}$ が視線勾配 R/Z に伝播する. これは較正值に依存する誤差なので, 較正依存誤差といい, $\Sigma_{RZ}^{(calib)}$ と表す. 3.3節でこれを定式化し, 4.2.2項でシミュレーションの結果を述べている.

(3) 実用時の誤差伝播 (較正依存誤差と較正非依存誤差, 図 A (c)参照) : これは実用時の対象への視線勾配 R/Z の誤差であり, 二つの要因による誤差の和で表される. 一つは(2)で説明した較正依存誤差 $\Sigma_{RZ}^{(calib)}$, 他のは較正值に依存せず, 観測画像座標 U 自身の誤差 Σ_U が視線勾配 R/Z に伝播する誤差である. 後者は較正非依存誤差 $\Sigma_{RZ}^{(non-calib)}$ といひ,

$$\Sigma_{RZ}^{(non-calib)} = \text{diag}(F^{-1}, (FP)^{-1}) \Sigma_U \text{diag}(F^{-1}, (FP)^{-1}) \quad (A1)$$

で表される. ここで, $\text{diag}(\dots)$ は対角行列を表す.

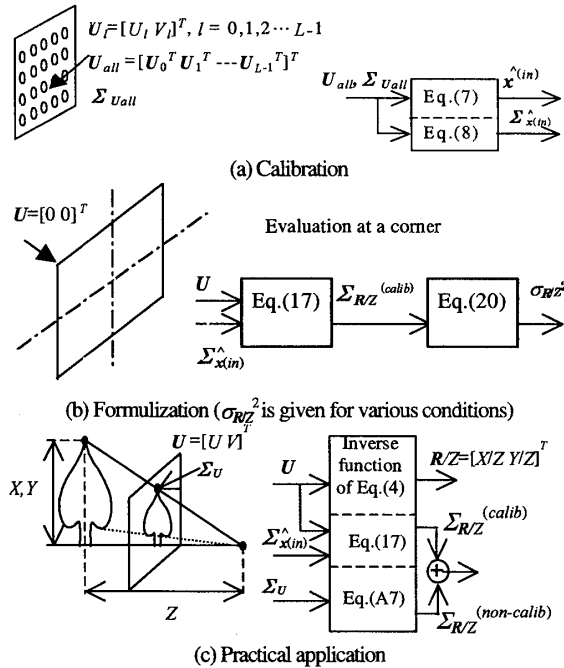


Fig. A1 Three processes of error propagation

付録 II 3次元位置推定誤差の導出例

本論文で定式化した視線勾配誤差の典型的な応用例として, 両眼平行ステレオによる三角測量を取り上げる (図 A2 参照). これは平行に設置された2台のカメラで対象を観測し, 得られた画像座標から3次元位置を推定するものである. この問題にとって本質的な水平面, すなわち XZ 平面で説明する. まず2台のカメラ1, 2で得られた画像座標 U_1, U_2 を式(4)に適用して視線勾配 $X_1/Z_1, X_2/Z_2$ を得る. これらの $X_1/Z_1, X_2/Z_2$ を用いると, 対象の3次元座標 Z_1, X_1 は,

$$Z_1 = \frac{b}{X_1/Z_1 - X_2/Z_2} \quad (A2)$$

$$X_1 = Z_1 \cdot (X_1/Z_1)$$

と与えられる. ここで, b は基線長である. これに誤差の伝播側を適用すると, 3次元位置推定誤差,

$$\sigma_{Z_1}^2 = \frac{b^2}{(X_1/Z_1 - X_2/Z_2)^4} (\sigma_{X_1/Z_1}^2 + \sigma_{X_2/Z_2}^2) \quad (A3)$$

$$\sigma_{X_1}^2 = Z_1^2 \sigma_{X_1/Z_1}^2$$

が得られる. なお, $\sigma_{X_1/Z_1}^2, \sigma_{X_2/Z_2}^2$ は25節で定義されている視線勾配誤差の分散である. これらは, 較正依存誤差のみを考慮するのであれば, 式(17)で与えられる $\Sigma_{RZ}^{(calib)}$ の (1, 1)成分である. 付言すると, σ_{RZ}^2 は $\sigma_{XZ}^2 + \sigma_{YZ}^2$ として式(20)で定義されている. その概略値は53節に例示したようにして求めることができるが, σ_{XZ}^2 と σ_{YZ}^2 が等しいので, σ_{RZ}^2 は σ_{RZ}^2 の $1/2$ として見積もることができる. なお, 較正非依存誤差も考慮するのであれば, 式(A1)の $\Sigma_{RZ}^{(non-calib)}$ も加えて, $\Sigma_{RZ}^{(calib)} + \Sigma_{RZ}^{(non-calib)}$ を考えればよい.

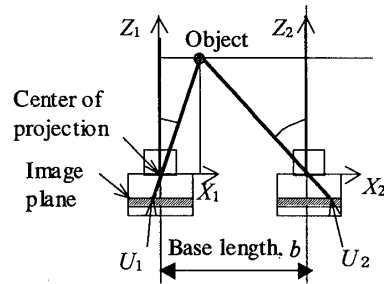


Fig. A2 Triangulation in standard binocular stereo

付録 III TPP基準の視線勾配誤差

文献[6,7]で用いたTPP基準での視線勾配の推定値 $(X/Z)_{TPP, est}$ の評価法を説明する. 3次元空間内の対象を座標 U に観測したとき, $(X/Z)_{TPP}$ の真値 $(X/Z)_{TPP, true}$ は, TPP基準での対象への視角の真値 α_{true} の正接であり,

$$(X/Z)_{TPP, true} = \tan \alpha_{true} = (U - C_u)/F \quad (A4)$$

となる(図4参照). これに対する推定値は式(11)に等しい(図3参照). よって, $(X/Z)_{TPP, est}$ の誤差は, 式(11)と(A4)から,

$$\Delta(X/Z)_{TPP, est} = (X/Z)_{TPP, est} - (X/Z)_{CPP, true} \cong (1/F) \Delta C_u + \{(U - C_u)/F^2\} \Delta F \quad (A5)$$

で表される. 同様に, 画像座標 V に撮像される対象への $(Y/Z)_{TPP, est}$ の誤差は, 次式のように与えられる.

$$\Delta(Y/Z)_{TPP, est} \cong (1/FP) \Delta C_v + \{(V - C_v)/(F^2 P)\} \Delta F + \{(V - C_v)/(FP^2)\} \Delta P \quad (A6)$$

式(A5), (A6)を $\Delta(R/Z)_{TPP} = [\Delta(X/Z)_{TPP, est} \Delta(Y/Z)_{TPP, est}]^T$ のようにまとめると, TPP基準での視線勾配の誤差 $\Delta(R/Z)_{TPP}$ の共分散行列は,

$$\Sigma_{RZ}^{(calib)} = \langle \Delta(R/Z)_{TPP} \Delta(R/Z)_{TPP}^T \rangle = \mathbf{G}_{TPP} \Sigma_{\hat{x}^{(in)}} \mathbf{G}_{TPP}^T \quad (A7)$$

と定式化できる. ただし,

$$\mathbf{G}_{TPP} \equiv \begin{bmatrix} \frac{1}{F} & 0 & \frac{U - C_u}{F^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{FP} & \frac{V - C_v}{F^2 P} & \frac{V - C_v}{FP^2} \end{bmatrix}_{\mathbf{x}^{(in)} = \hat{\mathbf{x}}^{(in)}} \quad (A8)$$