人文論叢(三重大学)第3号 1986

ゲーデルの不完全性定理

山 岡 悦 郎

要旨 20世紀前半最大の数学者ヒルベルトが、そのメタ数学的研究において、形式主義の立場から、数学理論の無矛盾性の有限の立場からの証明に躍起になっていた時に、大きく立ちふさがったのが当時25才のゲーデルであった。ゲーデルは、極めて斬新な方法を用いて、(第一)不完全性定理において、自然数論を含むω－無矛盾な公理体系では肯定も否定も共に証明できないところの決定不能命題Pが存在することを証明し、さらにその系として、無矛盾な公理体系(自然数論を含む)の無矛盾性の証明はその体系内では不可能であることを示したのである。

これらのゲーデルの結果は、数学界に対してショックを与えたのみならず、理論物理学者オッペンハイマーをして「人間の理性一般における限界の役割を明らかにした」と言わしめ、また、ある哲学者をして「深い実存的な衝撃をうけた」と言わしめたのである。

ゲーデルの晩年はむしろ哲学者と言った方がよいかもしれないし、彼自身、実在論者であることを口にしたこともあるが、第一及び第二不完全性定理そのものが彼自身の最も深遠な哲学的主張の一つであることは明らかであると思われる。認識論的視点から一言しておくならば、例えば、決定不能命題Pは真偽に関するパラドックスを生じさせる命題P^*と密接な関係があるということを指摘することができる。すなわち、P^*は自己の偽を主張する自己言及的命題であるが、決定不能命題Pは、ゲーデルの対角化定理によってその存在が証明されるところの、自己の証明不可能性を意味する命題(自己言及的命題)であると解釈できるのである。

1931年に発表されたゲーデルのいわゆる不完全性定理(1)は“自然数の理論を含む公理体系が無矛盾であれば、その理論に属し、肯定も否定も共に証明できないような決定不能命題(unentscheidbarer Satz)が存在する”という内容をもち(2)、またこの定理はその系として“自然数の理論を含む公理体系が無矛盾ならば、その体系の無矛盾性の証明はその体系の中では不可能である”という第二不完全性定理を導出した。これらの両定理、及びそれを導出するゲーデルの手法は今日の論理学及び数学基礎論研究の出発点をなすものであると考えられている。また、両定理のもつ哲学的重要性は、その内容を一読するだけで明らかであるのみならず、とりわけ不完全性定理は真理についての問題とも親近性をもっているということからもうかがい知ることができる。すなわち、上述の決定不能命題は“証明不可能”に関して自己に言及する命題であるが、真偽に関するパラドックスは“真偽”に関して自己に言及する命題から生ずるのである(3)。

このゲーデルの論文は、論理学及び数学の歴史において、明らかに不滅の金字塔をなすものではあるが、しかし、その先を急ぐあまり、その証明の概略を解説したものは数多くあっても、証明自体をゲーデルの線に添って解明するということにはあまり関心が払われていないように思われる。

本小論は論理学史研究の一環としてゲーデルの不完全性定理を取り上げたものであって、実質的に新しい結果は付け加わってはいない。その目的とするところは、なるべくゲーデル自身の証明の筋道に則しながら、省略された部分を補いつつ、不完全性定理の証明を明確なものとすることである。

1．形式的体系P

1.1　不完全性定理は、我々にとって直観的に理解できる、内容をもった自然数の理論と、それを形式化した形式的自然数論の間の対応関係に注目することによって証明される。その際、ゲーデルの取り上げる形式的体系Pは、ラッセルとホワイトヘッドの『数学原理』の体系を一部修正したものにペアノの自然数の公理体系を付加してえられる。そして、それは次の1.2～1.5によって定義される。

1.2　基本記号

(1)　対象記号：$\bar{0}$.

これは自然数0を表わす体系Pにおける記号である。一般に、自然数nを表わす体系Pにおける数記号を$\bar{n}$で記す。

(2)　変数記号：

1階の変数記号：x_1，y_1，z_1，・・・

2階の変数記号：x_2，y_2，z_2，・・・

・・・

n階の変数記号：x_n，y_n，z_n，・・・

（変数の数は可算個）[4]

(3)　関数記号：f.

数記号$\bar{n}$に対して、$f\bar{n}$は$\bar{n}$の後者を表わす。したがって、$\bar{n}=f\cdots f\bar{0}$　である。（ただし、fの個数はn）

(4)　関係記号：$\in$.

$a\in b$は、n階の対象aが$n+1$階の対象bの元であることを表わす。

(5)　論理記号：$\sim$，$\vee$，$\forall$.

命題S_1, S_2に対して、$\sim S_1$，$S_1\vee S_2$，$\forall x S_1$はそれぞれ、“S_1でない”、“S_1かまたはS_2である”、“全てのxについてS_1である”という命題を表わす。[5]

(6)　カッコ：(，　)，　{，}，　[，　].

1.3　項と論理式

（定義1）

1)　対象$\bar{0}$は1階の項である。

2)　1階の変数は1階の項である。

3)　tが1階の項ならば、ftも1階の項である。

4)　以上の1)～3)で1階の項であることがわかるものだけが1階の項(term)である。

5)　$n>1$の時、n階の項とはn階の変数のことである。

（定義2）

1)　aがn階の項でbが$n+1$階の項である時、

$a \in b$

という表現は論理式である。

2)　A，Bが共に論理式ならば、$\sim A$，$A \vee B$は共に論理式である。

3)　Aが論理式でxが変数の時、$\forall x A$ は論理式である。

4)　以上の1)～3)で論理式とわかるものだけが論理式 (formula) である。

1.4　体系Pの公理

A．ペアノ（自然数）の公理

1．$\sim (f\mathrm{x}_1 = \bar{o})$

2．$f\mathrm{x}_1 = f\mathrm{y}_1 \rightarrow \mathrm{x}_1 = \mathrm{y}_1$

3．$[\bar{o} \in \mathrm{x}_2 \wedge \forall \mathrm{x}_1 (\mathrm{x}_1 \in \mathrm{x}_2 \rightarrow f\mathrm{x}_1 \in \mathrm{x}_2)] \rightarrow \forall \mathrm{x}_1 (\mathrm{x}_1 \in \mathrm{x}_2)$

B．命題論理の公理図式

1．$p \vee p \rightarrow p$

2．$p \rightarrow p \vee q$

3．$p \vee q \rightarrow q \vee p$

4．$(p \rightarrow q) \rightarrow (r \vee p \rightarrow r \vee q)$

C．述語論理の公理図式

1．$\forall x F(x) \rightarrow F(t)$

2．$\forall x [b \vee F(x)] \rightarrow b \vee \forall x F(x)$

ただし、$F(x)$は任意の論理式、xは任意の変数であり、bにはxは自由変数として含まれていない。また、tはxと同じ階数の対象であって、$F(x)$の自由変数xに代入されることによって束縛変数となるような変数を含んでいないとする。(6)

D．還元性の公理図式

$$\exists y \forall x\, [x \in y \rightleftarrows F(x)]$$

ただし、xがn階の変数の時は、yは$n+1$階の変数であり、yは$F(x)$の中に自由変数として含まれていないとする。

E．外延性の公理

$$\forall \mathrm{x}_n (\mathrm{x}_n \in \mathrm{x}_{n+1} \rightleftarrows \mathrm{x}_n \in \mathrm{y}_{n+1}) \rightarrow \mathrm{x}_{n+1} = \mathrm{y}_{n+1}$$

1.5　体系Pの推論規則

1．論理式Aと論理式$A \rightarrow B$から論理式Bを推論することができる。

2．論理式$F(x)$から論理式$\forall x F(x)$を推論することができる。

論理式Cは、Aが論理式$B \rightarrow C$であれば、AとBの直接の結論 (unmittelbare Folge) と呼ばれる。また、Cが$\forall x F(x)$（xは任意の変数）であれば、Cは$F(x)$の直接の結論と呼ばれる。

2．ゲーデル数

2.1　ゲーデルは体系Pの基本記号、及びそれから構成される諸表現（基本記号の有限列、及び、有限列の有限列）に、下記の規則 2.2～2.4 に基づいて、一つの自然数を対応させる。そのようにして定まる数のことをゲーデル数(Gödel number) という。

2.2　基本記号には下段の奇数を対応させる。

$\bar{o}$　f　$\sim$　$\vee$　$\forall$　(　)

1　3　5　7　9　11　13

また、n階の変数にはP^n(Pは15以上の素数)を対応させる。

2.3　記号の有限列には、その記号のゲーデル数をx_1, …, x_nとした時、

$$2^{x_1}\cdot 3^{x_2}\quad\cdots P_n^{x_n}$$

を対応させる。(P_nはn番目の素数)

2.4 記号の有限列の有限列に対しては、その記号の有限列のゲーデル数をx_1, …, x_nとした時、

$$2^{x_1}\cdot 3^{x_2}\quad\cdots P_n^{x_n},$$

を対応させる。(P_nはn番目の素数)

2.5　ところで、証明は論理式の有限列と解することができるので、数記号、変数、項、論理式、証明などの表現は全てゲーデル数で表わすことができる。また逆に、ある自然数に対して、それがゲーデル数であるか否か、ゲーデル数であるとするとどのような表現のゲーデル数であるかを、上述の対応規則及び素因数分解の一意性により、一意的に確定することができる。従ってまた、体系Pの諸表現は自然数の上に定義される関数として、体系Pについての諸表現(たとえば、"論理式xは証明可能な論理式である"など)は関数と関数の間に成立する関係として表わすことができる。

2.6　以下においては、任意の表現Aに対して、Aのゲーデル数を「A⌝で表わす。

3．帰納的関数(関係)

3.1　帰納的関数(rekursive Funktion)とは、ゲーデルによれば、次の1)～4)によって定義される数論的関数のことである。[7]

1) 定数値関数$f(x_1, \cdots, x_n)=C$は帰納的である。

2) 後者関数$f(x)=x+1$は帰納的である。

3) m変数関数$f(x_1, \cdots, x_m)$とm個のn変数関数$g_1, \cdots, g_m$が共に帰納的であれば、次の代入によってえられるn変数関数$h(x_1, \cdots, x_n)$も帰納的である。

$$h(x_1, \cdots, x_n)=f(g_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, g_m(x_1, \cdots, x_n))$$

4) $n-1$変数関数fと$n+1$変数関数gが共に帰納的であれば、次の帰納的定義によってえられるn変数関数hもまた帰納的である。[8]

$$\begin{cases} h(0, x_2, \cdots, x_n)=f(x_2, \cdots, x_n) \\ h(k+1, x_2, \cdots, x_n)=g(k, h(k, x_2, \cdots, x_n), x_2, \cdots, x_n) \end{cases}$$

3.2　上述の1)、2)の基本的関数からはじめて帰納的関数hをうるのに加えられた3)、4)の操作の回数がnである時、$n+1$をhの次数(Stufe)という。従って、定数値関数と後者関数の次数は1である。また、恒等関数$h(x)=x$は次のように帰納的に定義されるので帰納的であり、それの次数は2である。

$$\begin{cases} h(0)=0 \\ h(x+1)=g(x, h(x))=h(x)+1 \end{cases}$$

3.3　加法$x+y$，乗法$x\cdot y$，y^x，$x!$などの関数は全て、適当な帰納的関数を用いて帰納的に定義されるので帰納的である。

3.4　自然数の間に成立する関係$R(x_1, \cdots, x_n)$は、もし、任意の自然数$x_1, \cdots, x_n$に対して、

$$R(x_1, \cdots, x_n) \Leftrightarrow [f(x_1, \cdots, x_n)=0]$$

が成立するような帰納的関数$f(x_1, \cdots, x_n)$が存在するならば、帰納的であると呼ばれる。[9]

3.5　以下の諸定理が成り立つ。

定理1　変数に帰納的関数を代入することによって帰納的関数(関係)からえられるところのあらゆる関数(関係)は帰納的である。

証明　帰納的関数の変数に帰納的関数を代入してえられるものも帰納的である、ということを示せば十分である。帰納的関係の場合はその結果から容易に示すことができる。また代入は一箇所の場合だけを示せば十分である。次にそれを示す。[10]

$$\begin{cases} h(x_1, \cdots, x_n, y_2, \cdots, y_m) = g(x_1, \cdots, x_n) \\ h_i(x_1, \cdots, x_n, y_2, \cdots, y_m) = y_i \ (i=2, \cdots, m) \end{cases}$$

と定義できるから、関数$g(x_1, \cdots, x_n)$, $y_2, \cdots, y_m$は全て$m+n-1$変数関数と考えることができる。したがって、関数$f(y, y_2, \cdots, y_m)$, $g(x_1, \cdots, x_n)$が共に帰納的であれば、恒等関数は全て帰納的である(3.2)から、$y_2, \cdots, y_m$も全て帰納的となり、3.1の 3)より、

$h(x_1, \cdots, x_n, y_2, \cdots, y_m) = f(g(x_1, \cdots, x_n), y_2, \cdots, y_m)$もまた帰納的となる。

(証明終わり)

定理II　RとSが共に帰納的関係であれば、(i) $\neg R$, (ii) $R \mathrm{or} S$もまた帰納的関係である。

(i)の証明　次のように定義される関数$g(x)$は3.1の 4)により帰納的である：

$$\begin{cases} g(0)=1 \\ g(x+1)=0 \end{cases}$$

また、条件より、$R(x_1, \cdots, x_n)$は帰納的であるから、$R(x_1, \cdots, x_n) \Leftrightarrow [f(x_1, \cdots, x_n)=0]$を満足する帰納的関数$f(x_1, \cdots, x_n)$が存在する。したがって、関数$g(f(x_1, \cdots, x_n))$も定理Iより帰納的である。また明らかに次が成立する：

$$\begin{cases} g(f(x_1, \cdots, x_n)) = 1 & (f(x_1, \cdots, x_n) = 0 \text{の時}) \\ g(f(x_1, \cdots, x_n)) = 0 & (f(x_1, \cdots, x_n) \geqq 1 \text{の時}) \end{cases}$$

したがって、$f(x_1, \cdots, x_n) \neq 0$、つまり、$\neg R(x_1, \cdots, x_n)$の時は、$g(f(x_1, \cdots, x_n)) = g(x_1, \cdots, x_n) = 0$となる帰納的関数$g(x_1, \cdots, x_n)$が存在する。また逆に、$g(x_1, \cdots, x_n) = 0$の時は、$g(f(x_1, \cdots, x_n)) > 0$、つまり、$f(x_1, \cdots, x_n) \neq 0$で$\neg R(x_1, \cdots, x_n)$となる。したがって、$\neg R(x_1, \cdots, x_n) \Leftrightarrow [g(x_1, \cdots, x_n)=0]$となる帰納的関数$g(x_1, \cdots, x_n)$が存在するから、$\neg R(x_1, \cdots, x_n)$は帰納的である。　(証明終わり)

(ii)の証明　次のように定義される関数$h(x, y)$は帰納的である($g(x)$は(i)で定義されたもの)：

$$\begin{cases} h(0, y) = 0 \\ h(x+1, y) = g(g(y)) \end{cases}$$

そして、次が成立するのも明らかである：

$$\begin{cases} h(0, y) = 0 & (x=0\text{の時}) \\ h(x, 0) = g(g(0)) = g(1) = 0 & (y=0\text{の時}) \\ h(x, y) = g(g(y)) = g(0) = 1 & (x \neq 0, \ y \neq 0\text{の時}) \end{cases}$$

すなわち、

$$\begin{cases} h(x, y) = 0 & (x=0\text{、あるいは、}y=0) \\ h(x, y) = 1 & (x \neq 0\text{、かつ、}y \neq 0) \end{cases}$$

他方において、$R(x_1, \cdots, x_n)$, $S(y_1, \cdots, y_m)$は共に帰納的関係であるから次を満足する帰納的関数f、dが存在する：

$$\begin{cases} R(x_1, \cdots, x_n) \Leftrightarrow [f(x_1, \cdots, x_n)=0] \\ S(y_1, \cdots, y_m) \Leftrightarrow [d(y_1, \cdots, y_m)=0] \end{cases}$$

したがって、$n+m$変数関数$h(f(x_1, \cdots, x_n), d(y_1, \cdots, y_m))=0$の時は、$f(x_1, \cdots, x_n)=0$あるいは、$d(y_1, \cdots, y_m)=0$、つまり、$n+m$項関係$R(x_1, \cdots, x_n)$ or $S(y_1, \cdots, y_m)$が成立し、逆に、$R(x_1, \cdots, x_n)$ or $S(y_1, \cdots, y_m)$が成立する時は、$f(x_1, \cdots, x_n)=0$、あるいは、$d(y_1, \cdots, y_m)=0$が成立して、その時は、$h(f(x_1, \cdots, x_n), d(y_1, \cdots, y_m))=0$となる。すなわち、次が成立する：

$$R(x_1, \cdots, x_n) \text{ or } S(y_1, \cdots, y_m) \Leftrightarrow [h(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m)=0]$$

また、$h(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m)$が帰納的であるのは明らか。したがって、$R$と$S$が帰納的であれば、$R$ or Sも帰納的である。（証明終わり）

なお、関係RとSが共に帰納的であれば、$R \& S$、$R \Rightarrow S$、$R \Leftrightarrow S$もまた帰納的関係となることは、定理IIより明らかである。

定理III 関数$\alpha(x)$, $\beta(y)$が帰納的であれば、関係$\alpha(x)=\beta(y)$もまた帰納的である。[11]

証明 $f(0)=0$, $f(x+1)=x$として定義される関数$f(x)$は帰納的である。また、

$$\begin{cases} x \dot{-} y = x - y & (x \geqq y) \\ x \dot{-} y = 0 & (x < y) \end{cases}$$

として定義される減法関数$x \dot{-} y$は$f(x)$を用いて次のように定義されるから帰納的である：

$$\begin{cases} x \dot{-} 0 = x \\ x \dot{-} (y+1) = f(x \dot{-} y) \end{cases}$$

ここで、$h(x, y)=x \dot{-} y$とすると、$h(y, x)=y \dot{-} x$も明らかに帰納的である。さらに、次のように定義される関数$|x-y|$も帰納的である：

$$|x-y|=(x \dot{-} y)+(y \dot{-} x)$$

ところで、$g(g(|x-y|))$については次が成り立つ（$g(x)$は前述の関数）：

$$\begin{cases} g(g(|x-y|)) = g(g(0)) = g(1) = 0 & (x=y\text{の時}) \\ g(g(|x-y|)) = g(g(x-y)) = g(0) = 1 & (x>y\text{の時}) \\ g(g(|x-y|)) = g(g(y-x)) = g(0) = 1 & (x<y\text{の時}) \end{cases}$$

また、$g(g(|x-y|))$は帰納的関数であるから、$k(x, y)=g(g(|x-y|))$とおくと、

$$\begin{cases} k(x, y)=0 & (x=y\text{の時}) \\ k(x, y)=1 & (x \neq y\text{の時}) \end{cases}$$

が成立する。ここで、$x=\alpha(x)$、$y=\beta(y)$とおけば、次が成立するような帰納的関数$k(x, y)$が存在する：

$$\alpha(x)=\beta(y) \Leftrightarrow [k(x, y)=0]$$

（証明終わり）

定理III′ 関数$\alpha(x)$, $\beta(y)$が共に帰納的であれば、関係$\alpha(x)<\beta(y)$, $\alpha(x) \leqq \beta(y)$もまた帰納的である。

証明 $\alpha(x)<\beta(y)$の場合だけを示せば十分である。減法$x \dot{-} y$を用いる。つまり、

$$\alpha(x)<\beta(y) \Leftrightarrow [g(\beta(y) \dot{-} \alpha(x))=0]$$

となる帰納的関数gが存在するから、関係$\alpha(x)<\beta(y)$は帰納的である。（証明終わり）

定理IV 関数$\alpha(x)$と関係$R(x, y)$が共に帰納的であれば、

(i)　$S(\mathrm{x},\mathrm{y}) \Leftrightarrow (\mathrm{E}x)[x \leqq \alpha(\mathrm{x})\ \&\ R(x,\mathrm{y})]$ として定義される関係Sもまた帰納的である。

(ii)　$T(\mathrm{x},\mathrm{y}) \Leftrightarrow (x)[x \leqq \alpha(\mathrm{x}) \Rightarrow R(x,\mathrm{y})]$として定義される関係$T$もまた帰納的である。

(iii)　$\beta(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \varepsilon x[x \leqq \alpha(\mathrm{x})\ \&\ R(x,\mathrm{y})]$として定義される関数$\beta$もまた帰納的である。[12]

ここで、$\varepsilon xF(x)$は、$F(x)$が成立する時はそのxのうち最小の数、$F(x)$が成立しない時は0を表わす。[13]

(i)の証明　関係Rは帰納的であるから、$R(x,\mathrm{y}) \Leftrightarrow [f(x,\mathrm{y})=0]$となるような帰納的関数$f$が存在する。ここで、$m(x,\mathrm{y}) = g(g(f(x,\mathrm{y})))$とおくと($g$は定理IIの(i)で定義したもの)、

$$m(x,\ \mathrm{y}) = \begin{cases} 0 & (f(x,\ \mathrm{y})=0\text{の時}) \\ 1 & (f(x,\ \mathrm{y})>0\text{の時}) \end{cases}$$

また、$g(g(f(x,\mathrm{y})))$は帰納的である。つまり、$m(x,\mathrm{y})$は帰納的であり、$R(x,\mathrm{y}) \Leftrightarrow [m(x,\mathrm{y})=0]$ が成立する。ここで、ふたたび、

$$\begin{cases} \pi(0,\ \mathrm{y}) = m(0,\ \mathrm{y}) \\ \pi(k+1,\ \mathrm{y}) = \pi(k,\mathrm{y}) \cdot m(k+1,\ \mathrm{y}) \end{cases}$$

とすると、(数学的帰納法によって示されるように)、

$$\pi(x,\mathrm{y}) = m(0,\mathrm{y}) \cdot m(1,\mathrm{y}) \cdot m(2,\mathrm{y}) \cdots m(x,\mathrm{y})$$

となる。したがって、

$$\begin{cases} \pi(x,\mathrm{y}) = 0 & (m(0,\mathrm{y}),\cdots,\ m(x,\mathrm{y})\text{のうちのいくつかが0の時}) \\ \pi(x,\mathrm{y}) = 1 & (m(0,\mathrm{y}),\cdots,\ m(x,\mathrm{y})\text{の全てが0でない時}) \end{cases}$$

となる。言いかえると次のようになる：

$$\begin{cases} \pi(x,\mathrm{y}) = 0 & (R(n,\ \mathrm{y})\text{が成立する自然数}n \leqq x\text{ が存在する時}) \\ \pi(x,\mathrm{y}) = 1 & (R(n,\ \mathrm{y})\text{が成立する自然数}n \leqq x\text{ が存在しない時}) \end{cases}$$

また、条件より、$\alpha(\mathrm{x})$は帰納的であり、$x \cdot y$も帰納的であるから、$\pi(x,\mathrm{y})$も帰納的である。したがって、$\pi(\alpha(\mathrm{x}),\mathrm{y})$ は帰納的である。したがってまた、

$$(\mathrm{E}x)[x \leqq \alpha(\mathrm{x})\ \&\ R(x,\mathrm{y})] \Leftrightarrow [\pi(\alpha(\mathrm{x}),\mathrm{y})=0]$$

となるような帰納的関数$\pi(\alpha(\mathrm{x}),\mathrm{y})$ が存在し、

$$S(\mathrm{x},\mathrm{y}) \Leftrightarrow (\mathrm{E}x)[x \leqq \alpha(\mathrm{x})\ \&\ R(x,\mathrm{y})]$$

は帰納的となる。　(証明終わり)

(ii)の証明　(i)で証明された結果を用いると、関数$\alpha(\mathrm{x})$ と関係$R(x,\mathrm{y})$ が共に帰納的であれば、

$$\neg(\mathrm{E}x)[x \leqq \alpha(\mathrm{x})\ \&\neg R(x,\mathrm{y})]$$

もまた帰納的である。ところが、これは、

$$(x)[x \leqq \alpha(\mathrm{x}) \Rightarrow R(x,\mathrm{y})]$$

にほかならない。　(証明終わり)

(iii)の証明　関数$h(x,\mathrm{y})$を次のように定義する：

$$\begin{cases} h(0,\mathrm{y}) = 0 \\ h(k+1,\mathrm{y}) = (k+1)[\pi(k,\mathrm{y}) \dot{-} \pi(k+1,\mathrm{y})] + h(k,\mathrm{y})[g(\pi(k,\mathrm{y}) \dot{-} \pi(k+1,\mathrm{y}))] \end{cases}$$

関数$h(x,\mathrm{y})$は明らかに帰納的である。また、$0 \leqq \pi(k+1,\mathrm{y}) \leqq \pi(k,\mathrm{y}) \leqq 1$ であるから次が成立する：

$$\begin{cases} h(k+1, y)=k+1 & (\pi(k,y)=1\text{、かつ、}\pi(k+1,y)=0\text{の時}) \\ h(k+1, y)=h(k, y) & (\text{そうでない時}) \end{cases}$$

そして、$\pi(k,y)=1$ と $\pi(k+1,y)=0$ が共に成立するのは、$\neg R(1,y), \cdots, \neg R(k,y)$ で、かつ、$R(k+1,y)$ の時かつこの時に限る。すなわち、$k+1$ が $R(x,y)$ なる x の最小値 x' である時かつその時に限るのである。したがって、そのような x' が存在して $x'>1$ であれば、$h(0, y)=\cdots=h(x'-1,y)=0$ であり、また、全ての $x \geqq x'$ に対して、明らかに、$h(x,y)=x'$ である。他方、$x'=0$、すなわち、x' が存在しない時は、全ての $h(x,y)$ は0である。したがって、$h(\alpha(x),y)$ は、もしそれが存在するとすれば $R(x,y)$ であるような最小の $x \leqq \alpha(x)$ であり、存在しなければ0である。すなわち、

$$h(\alpha(x), y)=\varepsilon x[x \leqq \alpha(x) \,\&\, R(x,y)]$$

となるので、$h(\alpha(x),y)=\beta(x,y)$ とすればよい。　　　　(証明終わり)

4．体系Pの算術化

4.1　すでに述べたように、ゲーデル数の概念によって、体系Pの諸表現および体系Pについてのメタ論理(数学)的諸表現は、自然数の上に定義された関数および関数と関数の間の関係として表現される。そして、ゲーデルは、そのような算術化 (arithmetization) を、以下に記す46個の関数や関係の定義を与えることを通じて行なう。また、それらの関数や関係は先行の関数や関係を用いて定義されており、すでに述べられたこと(証明された定理その他)に照らし合わせると、最後(46番目)のもの以外のものは全て、帰納的であることは容易にわかる。

1．$x \mid y \Leftrightarrow (\mathrm{E}z)[z \leqq x \,\&\, x=y \cdot z]$

は“xはyで割り切れる”を表わす。

2．$\mathrm{Prim}(x) \Leftrightarrow \neg(\mathrm{E}z)[z \leqq x \,\&\, z \neq 1 \,\&\, z \neq x \,\&\, x \mid z] \,\&\, x>1$

は“xは素数である”を表わす。

3．$$\begin{cases} 0\mathrm{Pr}\,x=0 \\ (n+1)\mathrm{Pr}\,x=\varepsilon y[y \leqq x \,\&\, \mathrm{Prim}(y) \,\&\, x \mid y \,\&\, y>n\mathrm{Pr}\,x] \end{cases}$$

$n\mathrm{Pr}x$は“xに含まれる素数で小さい方から並べてn番目の素数である”を表わす。

4．$$\begin{cases} 0!=1 \\ (n+1)!=(n+1)\cdot n! \end{cases}$$

5．$$\begin{cases} \mathrm{Pr}(0)=0 \\ \mathrm{Pr}(n+1)=\varepsilon y[y \leqq \{\mathrm{Pr}(n)\}!+1 \,\&\, \mathrm{Prim}(y) \,\&\, y>\mathrm{Pr}(n)] \end{cases}$$

$\mathrm{Pr}(n)$は“n番目の素数である”を表わす。[14]

6．$n\mathrm{Gl}x=\varepsilon y[y \leqq x \,\&\, x \mid (n\mathrm{Pr}x)^y \,\&\, \neg\{x \mid (n\mathrm{Pr}x)^{y+1}\}]$

$n\mathrm{Gl}x$ は、$x=2^{x_1}\cdot 3^{x_2}\cdots \mathrm{P}_n^{x_n}\cdots$ とした時、x_nを表わす。

7．$l(x)=\varepsilon y[y \leqq x \,\&\, y\mathrm{Pr}x>0 \,\&\, {}_{(y+1)}\mathrm{Pr}x=0]$

$l(x)$は、xがある表現のゲーデル数である時、その表現の長さを表わす。

8．$x * y=\varepsilon z\{z \leqq [\mathrm{Pr}(l(x)+l(y))]^{x+y} \,\&\, (n)[n \leqq l(x) \Rightarrow n\mathrm{Gl}z=n\mathrm{Gl}x] \,\&\, (n)[0<n \leqq l(y) \Rightarrow {}_{(n+l(x))}\mathrm{Gl}z=n\mathrm{Gl}y]\}$

$x * y$は二つの有限列x、yの接合(Aneinanderfügen)という操作の結果を表わす。より詳しく言えば、任意の表現A、Bに対して、A、Bのゲーデル数をそれぞれx、yとした時、

$x * y$ は A の後に B を続けてできる新しい表現のゲーデル数を表わす。[15]

9．$R(x) = 2^x$

は、ゲーデル数が x の表現のみを一つの表現とする列のゲーデル数を表わす.

10．$E(x) = R(11) * x * R(13)$

は、ゲーデル数が x の表現をカッコで囲んでできる新しい表現のゲーデル数を表わす。

11．$n\mathrm{Var}x \Leftrightarrow (\mathrm{E}z)[13 < z \leqq x \,\&\, \mathrm{Prim}(z) \,\&\, x = z^n] \,\&\, n \neq 0$

$n\mathrm{Var}x$ は"ゲーデル数が x の表現は n 階の変数である"を表わす。

12．$\mathrm{Var}(x) \Leftrightarrow (\mathrm{E}n)[n \leqq x \,\&\, n\mathrm{Var}x]$

$\mathrm{Var}(x)$ は"ゲーデル数が x の表現は変数である"を表わす。

13．$\mathrm{Neg}(x) = R(5) * E(x)$

は、ゲーデル数が x の論理式の否定のゲーデル数を表わす。

14．$x\mathrm{Dis}y = E(x) * R(7) * E(y)$

は、x と y をそれぞれ論理式 A、B のゲーデル数とする時、論理式 $A \vee B$ のゲーデル数を表わす。

15．$x\mathrm{Gen}y = R(x) * R(9) * E(y)$

は、y が論理式 A のゲーデル数で、x が変数 v のゲーデル数である時、論理式 $\forall v A$ のゲーデル数を表わす。

16．$\begin{cases} 0Nx = x \\ (n+1)Nx = R(3) * nNx \end{cases}$

nNx は、ゲーデル数が x の表現の前に記号 f を n 個つけてえられる新しい表現のゲーデル数を表わす。

17．$Z(n) = nN[R(1)]$

は数 n に対する数記号のゲーデル数である。

18．$\mathrm{Typ}_1'(x) \Leftrightarrow (\mathrm{E}m, n)\{m, n \leqq x \,\&\, [m = 1 \text{ or } {}_1\mathrm{Var}m] \,\&\, x = nN[R(m)]\}$

$\mathrm{Typ}_1'(x)$ は"ゲーデル数 x の表現は1階の項である"を表わす。

19．$\mathrm{Typ}_n(x) \Leftrightarrow [n = 1 \,\&\, \mathrm{Typ}_1'(x)] \text{ or } [n > 1 \,\&\, (\mathrm{E}v)\{v \leqq x \,\&\, n\,\mathrm{Var}v \,\&\, x = R(v)\}]$

$\mathrm{Typ}_n(x)$ は"ゲーデル数 x の表現は n 階の項である"を表わす。

20．$\mathrm{Elf}(x) \Leftrightarrow (\mathrm{E}y, z, n)[y, z, n \leqq x \,\&\, \mathrm{Typ}_n(y) \,\&\, \mathrm{Typ}_{n+1}(z) \,\&\, x = z * E(y)]$

$\mathrm{Elf}(x)$ は"ゲーデル数 x の表現は基本論理式である"を表わす。

21．$\mathrm{Op}(x, y, z) \Leftrightarrow x = \mathrm{Neg}(y) \text{ or } x = y\mathrm{Dis}z \text{ or } (\mathrm{E}v)[v \leqq x \,\&\, \mathrm{Var}(v) \,\&\, x = v\mathrm{Gen}y]$

$\mathrm{Op}(x, y, z)$ は"ゲーデル数 x の論理式は、否定、選言、generalization のうちの一つによって、ゲーデル数 y の論理式または、ゲーデル数 y の論理式とゲーデル数 z の論理式からえられる"を表わす。

22．$\mathrm{FR}(x) \Leftrightarrow (n)\{0 < n \leqq l(x) \Rightarrow \mathrm{Elf}(n\mathrm{Gl}x) \text{ or } (\mathrm{E}p, q)[0 < p, q < n \,\&\, \mathrm{Op}(n\mathrm{Gl}x, p\mathrm{Gl}x, q\mathrm{Gl}x)]\} \,\&\, l(x) > 0$

$\mathrm{FR}(x)$ は"ゲーデル数 x の表現は、それのおのおのが基本論理式であるか、あるいは否定、選言、generalizationの諸操作を通じて先行の論理式からえられるような論理式の列である"を表わす。

23．$\mathrm{Form}(x) \Leftrightarrow (\mathrm{E}n)\{n \leqq (\mathrm{Pr}[l(x)]^2)^{x \cdot [l(x)]^2} \,\&\, \mathrm{FR}(n) \,\&\, x = [l(n)]\mathrm{Gl}n\}$

$\mathrm{Form}(x)$ は"ゲーデル数 x の表現は論理式である"を表わす。[16]

24. $v\mathrm{Geb}n, x \Leftrightarrow \mathrm{Var}(v)\,\&\, \mathrm{Form}(x)\,\&\,(\mathrm{E}a, b, c)\,[a, b, c \leqq x \,\&\, x = a * (v\mathrm{Gen}b) * c \,\&\, \mathrm{Form}(b)\,\&\, l(a)+1 \leqq n \leqq l(a) + l(v\mathrm{Gen}b)]$

$v\mathrm{Geb}n, x$は“ゲーデル数vの変数はゲーデル数xの論理式においてn番目の場所で束縛されている”を表わす。

25. $v\mathrm{Fr}n, x \Leftrightarrow \mathrm{Var}(v)\,\&\, \mathrm{Form}(x)\,\&\, v = n\mathrm{Gl}x \,\&\, n \leqq l(x) \,\&\, \neg\{v\mathrm{Geb}n, x\}$

$v\mathrm{Fr}n, x$は“ゲーデル数vの変数はゲーデル数xの論理式においてn番目の場所で自由である”を表わす。

26. $v\mathrm{Fr}x \Leftrightarrow (\mathrm{E}n)\,[n \leqq l(x) \,\&\, v\mathrm{Fr}n, x]$

$v\mathrm{Fr}x$は“ゲーゲル数vの変数はゲーデル数xの論理式において自由変数として現われる”を表わす。

27. $\mathrm{Su}x\binom{n}{y} = \varepsilon z\{z \leqq [\mathrm{Pr}(l(x)+l(y))]^{x+y} \,\&\, (\mathrm{E}u, v)[\,u, v \leqq x \,\&\, x = u * \mathrm{R}(n\mathrm{Gl}x) * v \,\&\, z = u * y * v \,\&\, n = l(u)+1]\}$

は、ゲーデル数xの論理式のn番目の場所にゲーデル数yの項を代入してえられる論理式のゲーデル数を表わす。(ただし、$0 < n \leqq l(x)$)

28. $\begin{cases} 0\mathrm{St}v, x = \varepsilon n\{n \leqq l(x)\,\&\, v\mathrm{Fr}n, x \,\&\, \neg(\mathrm{E}p)\,[n < p \leqq l(x) \,\&\, v\mathrm{Fr}p, x]\} \\ (k+1)\mathrm{St}v, x = \varepsilon n\{n < k\mathrm{St}v, x \,\&\, v\mathrm{Fr}n, x \,\&\, \neg(\mathrm{E}p)[n < p < k\mathrm{St}v, x \,\&\, v\mathrm{Fr}p, x]\} \end{cases}$

ゲーデル数xの論理式Aに含まれるゲーデル数vの自由変数だけを右から数えて$k+1$番目のものが、そのAの左から数えてn番目のものである時は、$k\mathrm{St}v, x = n$ である。また、Aにゲーデル数vの自由変数がk個しか含まれていない時は、$k\mathrm{St}v, x = 0$である。

29. $\mathrm{A}(v, x) = \varepsilon n\{n \leqq l(x) \,\&\, n\mathrm{St}v, x = 0\}$

は、ゲーデル数xの論理式においてゲーデル数vの変数が自由であるような場所の数を表わす。

30. $\begin{cases} \mathrm{Sb}_0\left(x\,{}^{v}_{y}\right) = x \\ \mathrm{Sb}_{k+1}\left(x\,{}^{v}_{y}\right) = \mathrm{Su}\left[\mathrm{Sb}_k\left(x\,{}^{v}_{y}\right)\right]\binom{k\mathrm{St}v, x}{y} \end{cases}$

$\mathrm{Sb}_k\left(x\,{}^{v}_{y}\right)$は、ゲーデル数$x$の論理式に含まれるゲーデル数$v$の自由変数のうち、右から数えて$k$個のものにゲーデル数$y$の項を代入してえられる表現のゲーデル数を表わす。

31. $\mathrm{Sb}\left(x\,{}^{v}_{y}\right) = \mathrm{Sb}_{\mathrm{A}(v,x)}\left(x\,{}^{v}_{y}\right)$

は，ゲーデル数xの論理式に含まれる全てのゲーデル数vの自由変数にゲーデル数yの項を代入してえられる表現のゲーデル数を表わす。

32. $x\,\mathrm{Imp}\,y = [\mathrm{Neg}(x)]\mathrm{Dis}\,y$

$x\,\mathrm{Con}\,y = \mathrm{Neg}\,\{[\mathrm{Neg}(x)]\mathrm{Dis}(\mathrm{Neg}(y))\}$

$x\,\mathrm{Aeq}\,y = (x\,\mathrm{Imp}\,y)\mathrm{Con}(y\,\mathrm{Imp}\,x)$

$v\,\mathrm{Ex}\,y = \mathrm{Neg}\,\{v\,\mathrm{Gen}[\mathrm{Neg}(y)]\}$

33. $n\,\mathrm{Th}\,x = \varepsilon y\,\{y \leqq x^{(x^n)} \,\&\, (k)[k \leqq l(x) \Rightarrow (k\mathrm{Gl}x \leqq 13 \,\&\, k\mathrm{Gl}y = k\mathrm{Gl}x) \text{ or } (k\mathrm{Gl}x > 13 \,\&\, k\mathrm{Gl}y = k\mathrm{Gl}x \cdot [1\mathrm{Pr}(k\mathrm{Gl}x)]^n)]\}$

は、ゲーデル数xの論理式の変数をn階高くしてえられる表現のゲーデル数を表わす。[17]

ここで、ペアノの公理1〜3に対応するゲーデル数をそれぞれ、z_1, z_2, z_3とする。

34. $\mathrm{Z{-}Ax}(x) \Leftrightarrow (x = z_1 \text{ or } x = z_2 \text{ or } x = z_3)$

$\mathrm{Z{-}Ax}(x)$は“ゲーデル数xの論理式は自然数の公理である”を表わす。

35. $\mathrm{A_1{-}Ax}(x) \Leftrightarrow (\mathrm{E}y)[y \leqq x \,\&\, \mathrm{Form}(y) \,\&\, x = (y\,\mathrm{Dis}\,y)\mathrm{Imp}\,y]$

$A_1-Ax(x)$ “ゲーデル数 x の表現は命題論理の公理図式の１から代入によってえられる論理式である”を表わす。同様にして、$A_2-Ax(x)$, $A_3-Ax(x)$, $A_4-Ax(x)$が、命題論理の公理図式２～４に対して定義される。

36. $A-Ax(x) \Leftrightarrow A_1-Ax(x)$ or $A_2-Ax(x)$ or $A_3-Ax(x)$ or $A_4-Ax(x)$

$A-Ax(x)$ は“ゲーデル数 x の表現は命題論理の公理図式から代入によってえられる論理式である”を表わす。

37. $Q(z, y, v) \Leftrightarrow \neg(En, m, w)[n \leqq l(y) \,\&\, m \leqq l(z) \,\&\, w \leqq z \,\&\, w = m\,\mathrm{Gl}\,z \,\&\, w\,\mathrm{Geb}\,n,y \,\&\, v\,\mathrm{Fr}\,n,y]$

$Q(z, y, v)$は“ゲーデル数 z の項はゲーデル数 y の論理式におけるゲーデル数 v の自由変数に代入したら束縛変数を増やすことになるような変数を含んでいない”を表わす。

38. $L_1-Ax(x) \Leftrightarrow (Ev,y,z,n)\{v,y,z,n \leqq x \,\&\, n\,\mathrm{Var}\,v \,\&\, \mathrm{Typ}_n(z) \,\&\, \mathrm{Form}(y) \,\&\, Q(z,y,z) \,\&\, x = (v\,\mathrm{Gen}\,y)\mathrm{Imp}[\mathrm{Sb}(y^{v}_{z})]\}$

$L_1-Ax(x)$は“ゲーデル数 x の表現は述語論理の公理図式の１から代入によってえられる論理式である”を表わす。

39. $L_2-Ax(x) \Leftrightarrow (Ev,q,p)\{v,q,p \leqq x \,\&\, \mathrm{Var}(v) \,\&\, \mathrm{Form}(p) \,\&\, \neg\{v\,\mathrm{Fr}\,p\} \,\&\, \mathrm{Form}(q) \,\&\, x = [v\,\mathrm{Gen}(p\,\mathrm{Dis}\,q)]\mathrm{Imp}[p\,\mathrm{Dis}\,(v\,\mathrm{Gen}\,q)]\}$

$L_2-Ax(x)$は“ゲーデル数 x の表現は述語論理の公理図式の２から代入によってえられる論理式である”を表わす。

40. $R-Ax(x) \Leftrightarrow (Eu,v,y,n)[u,v,y,n \leqq x \,\&\, n\,\mathrm{Var}\,v \,\&\, {}_{(n+1)}\mathrm{Var}\,u \,\&\, \neg\{u\,\mathrm{Fr}\,y\} \,\&\, \mathrm{Form}(y) \,\&\, x = u\,\mathrm{Ex}\,\{v\,\mathrm{Gen}[[R(u)*E(R(v))]\mathrm{Aeq}\,y]\}]$

$R-Ax(x)$ は“ゲーデル数 x の表現は還元性の公理図式から代入によってえられる論理式である”を表わす。

41. $M-Ax(x) \Leftrightarrow (En)[n \leqq x \,\&\, x = n\,\mathrm{Th}\,z_4]$

$M-Ax(x)$は“ゲーデル数 x の論理式は外延性の公理である”を表わす。ただし、z_4は外延性の公理Eにおいて$n=1$の時のゲーデル数。

42. $Ax(x) \Leftrightarrow Z-Ax(x)$ or $A-Ax(x)$ or $L_1-Ax(x)$ or $L_2-Ax(x)$ or $R-Ax(x)$ or $M-Ax(x)$

$Ax(x)$は“ゲーデル数 x の論理式は公理である”を表わす。

43. $\mathrm{Fl}(x,y,z) \Leftrightarrow y = z\,\mathrm{Imp}\,x$ or $(Ev)[v \leqq x \,\&\, \mathrm{Var}(v) \,\&\, x = v\,\mathrm{Gen}\,y]$

論理式A, B, Cのゲーデル数をそれぞれ、x, y, z とする時、$\mathrm{Fl}(x,y,z)$は“AはBまたはBとCの直接の結論である”を表わす。

44. $\mathrm{Bw}(x) \Leftrightarrow (n)\{0 < n \leqq l(x) \Rightarrow Ax(n\,\mathrm{Gl}\,x)$ or $(Ep,q)[0 < p,q < n \,\&\, \mathrm{Fl}(n\,\mathrm{Gl}\,x,\ p\,\mathrm{Gl}\,x,\ q\,\mathrm{Gl}\,x)]\} \,\&\, l(x) > 0$

$\mathrm{Bw}(x)$は“ゲーデル数 x の表現は証明である”を表わす。

45. $x\,B\,y \Leftrightarrow \mathrm{Bw}(x) \,\&\, [l(x)]\mathrm{Gl}\,x = y$

$x\,B\,y$は“ゲーデル数 x の表現はゲーデル数 y の論理式の証明である”を表わす。

46. $\mathrm{Bew}(x) \Leftrightarrow (Ey)\,y\,B\,x$

$\mathrm{Bew}(x)$は“ゲーデル数 x の表現は証明可能な論理式である”を表わす。

5．定　理　V

5.1　定理Ⅴは“ある帰納的関係が自然数の間に成立する（あるいは、成立しない）時、その関係に対応するところの形式的体系Pにおける論理式（あるいは、それの否定）が証明できる”ということを主張するものであって、不完全性定理の証明において重要な役割りを果たす。

5.2　以下において、任意の論理式Aに対して、$\vdash A$とはBew(「A」)のことであり、“Aは証明できる”を意味する。

5.3　**定理Ⅴ**　帰納的関係 $R(x_1,\cdots, x_n)$ に対応する形式的体系における論理式を$r(x_1, \cdots, x_n)$とする時、任意の自然数$n_1,\cdots, n_n$に対して次が成立する：

$$\begin{cases} R(n_1,\cdots, n_n) \Rightarrow \vdash r(\bar{n}_1, \cdots, \bar{n}_n) \\ \neg R(n_1,\cdots, n_n) \Rightarrow \vdash \sim r(\bar{n}_1,\cdots, \bar{n}_n) \end{cases}$$

証明　$R(x_1,\cdots, x_n)$は帰納的関係であるから、

$$R(x_1,\cdots, x_n) \Leftrightarrow [\phi(x_1,\cdots, x_n)=0]$$

となる帰納的関数 $\phi(x_1,\cdots, x_n)$ が存在する。したがって、定理Ⅴを証明するには次の補助定理を証明すればよい。なぜなら、補助定理が証明されると、任意の自然数 $n_1,\cdots, n_n$ と0に対して、

$$\begin{cases} \phi(n_1,\cdots, n_n) = 0 \Rightarrow \vdash \bar{\phi}(\bar{n}_1,\cdots, \bar{n}_n) = \bar{0} \\ \phi(n_1,\cdots, n_n) \neq 0 \Rightarrow \vdash \bar{\phi}(\bar{n}_1,\cdots, \bar{n}_n) \neq \bar{0} \end{cases}$$

となるからである。[18]

補助定理　帰納的関数 $\phi(x_1,\cdots, x_n)$ に対応する形式的体系における項を$\bar{\phi}(x_1,\cdots, x_n)$とする時、任意の自然数 $l, n_1,\cdots, n_n$ に対して次が成立する：

$$\phi(n_1,\cdots, n_n) = l \Rightarrow \vdash \bar{\phi}(\bar{n}_1,\cdots, \bar{n}_n) = \bar{l}$$

証明　ϕの次数についての数学的帰納法による。

Ⅰ．次数1の時。

(α)　$\phi(x_1,\cdots, x_n)=k$,　つまり、定数値関数の時。

任意の数記号$\bar{x}$に対して、$\vdash(\bar{x}=\bar{x})$であるから、任意の自然数k, lに対して，

$$k=l \Rightarrow \vdash \bar{k}=\bar{l}$$

となるから、この場合成立する。

(β)　$\phi(x) = x+1$、つまり、後者関数の時。

任意の自然数n_1, lに対して、

$$\begin{aligned} n_1+1=l &\Rightarrow \vdash \overline{n_1+1}=\bar{l} \\ &\Rightarrow \vdash \bar{n}_1+\bar{1}=\bar{l} \\ &\Rightarrow \vdash f\bar{n}_1=\bar{l} \end{aligned}$$

となるから、[19] この場合も成立する。

Ⅱ．次数mの時成立すると仮定して、次数 $m+1$の時も成立することを示す。

(α)　ϕがそれよりも次数の低い帰納的関数の3.1の3)による代入からえられる時。

$\phi(x_1,\cdots, x_n)$ がそれよりも次数の低い関数 $g_i(x_1,\cdots, x_n)$ を $h(x_1, \cdots, x_k)$に代入することによってえられ、かつ、g_iおよびhについては補助定理が成立しているとする。すなわち、

$$\phi(x_1,\cdots, x_n) = h(g_1(x_1,\cdots,x_n),\cdots, g_k(x_1,\cdots, x_n))$$

であって、任意の自然数 $l, l_1,\cdots, l_k, n_1,\cdots, n_n$ に対して、

$$\begin{cases} g_1(n_1,\cdots,n_n)=l_1 \Rightarrow \vdash \bar{g}_1(\bar{n}_1,\cdots,\bar{n}_n)=\bar{l}_1 \\ \quad\cdots \\ g_k(n_1,\cdots,n_n)=l_k \Rightarrow \vdash \bar{g}_k(\bar{n}_1,\cdots,\bar{n}_n)=\bar{l}_k \\ h(l_1,\cdots,l_k)=l \Rightarrow \vdash \bar{h}(\bar{l}_1,\cdots,\bar{l}_k)=\bar{l} \end{cases}$$

が成立しているとする。すると、その時は、任意の自然数 $l, l_1,\cdots, l_k, n_1,\cdots, n_n$ に対して、

$$\begin{aligned} \phi(n_1,\cdots,n_n) &= h(g_1(n_1,\cdots,n_n),\cdots,g_k(n_1,\cdots,n_n)) \\ &= h(l_1,\cdots,l_k)=l \\ &\Rightarrow \vdash \bar{h}(\bar{l}_1,\cdots,\bar{l}_k)=\bar{l} \\ &\Rightarrow \vdash \bar{h}(\bar{g}_1(\bar{n}_1,\cdots,\bar{n}_n),\cdots,\bar{g}_k(\bar{n}_1,\cdots,\bar{n}_n))=\bar{l} \\ &\Rightarrow \vdash \bar{\phi}(\bar{n}_1,\cdots,\bar{n}_n)=\bar{l} \end{aligned}$$

となる。したがって、ϕ が代入によってえられる時は次数 $m+1$ の時も成立する。

(β) ϕ がそれよりも次数の低い帰納的関数 h と g から、3.1の4)の帰納的定義に基づいてえられ、かつ、h と g については補助定理が成立している時。すなわち、ϕ が、

$$\begin{cases} \phi(0,x_2,\cdots,x_n)=h(x_2,\cdots,x_n) \\ \phi(k+1,x_2,\cdots,x_n)=g(k,\phi(k,x_2,\cdots,x_n),x_2,\cdots,x_n) \end{cases}$$

によって定義され、かつ、任意の自然数 $l_1, l_2, n_1,\cdots,n_{n+1}$ に対して、次が成立している時：

$$\begin{cases} h(n_2,\cdots,n_n)=l_1 \Rightarrow \vdash \bar{h}(\bar{n}_2,\cdots,\bar{n}_n)=\bar{l}_1 \\ g(n_1,\cdots,n_{n+1})=l_2 \Rightarrow \vdash \bar{g}(\bar{n}_1,\cdots,\overline{n_{n+1}})=\bar{l}_2 \end{cases}$$

この場合、証明すべきは、任意の自然数 $l, n_1,\cdots, n_n$ に対して、

$$\phi(n_1,\cdots,n_n)=l \Rightarrow \vdash \bar{\phi}(\bar{n}_1,\cdots,\bar{n}_n)=\bar{l}$$

である。n_1についての数学的帰納法による。

(1) $n_1=0$ の時

任意の自然数 $l_1, n_2,\cdots, n_n$ に対して、

$$\begin{aligned} \phi(0,n_2,\cdots,n_n) &= h(n_2,\cdots,n_n)=l_1 \\ &\Rightarrow \vdash \bar{h}(\bar{n}_2,\cdots,\bar{n}_n)=\bar{l}_1 \\ &\Rightarrow \vdash \bar{\phi}(\bar{0},\bar{n}_2,\cdots,\bar{n}_n)=\bar{l}_1 \end{aligned}$$

となるから、[20] この場合は成立する。

(2) $n_1=k$ の時成立すると仮定する。すなわち、任意の自然数 $k, l_3, n_2,\cdots, n_n$ に対して、

$$\phi(k,n_2,\cdots,n_n)=l_3 \Rightarrow \vdash \bar{\phi}(\bar{k},\bar{n}_2,\cdots,\bar{n}_n)=\bar{l}_3$$

であると仮定する。したがって、$\phi(k, n_2,\cdots, n_n)=l_3$ とすると、仮定より、$\bar{\phi}(\bar{k}, \bar{n}_2,\cdots, \bar{n}_n)=\bar{l}_3$ は証明できる。よって、任意の自然数 $k, l_3, l_4, n_2,\cdots n_n$ に対して、

$$\begin{aligned} \phi(k+1,n_2,\cdots,n_n) &= g(k,\phi(k,n_2,\cdots,n_n),n_2,\cdots,n_n) \\ &= g(k,l_3,n_2,\cdots,n_n)=l_4 \\ &\Rightarrow \vdash \bar{g}(\bar{k},\bar{l}_3,\bar{n}_2,\cdots,\bar{n}_n)=\bar{l}_4 \\ &\Rightarrow \vdash \bar{g}(\bar{k},\bar{\phi}(\bar{k},\bar{n}_2,\cdots,\bar{n}_n),\bar{n}_2,\cdots,\bar{n}_n)=\bar{l}_4 \\ &\Rightarrow \vdash \bar{\phi}(\overline{k+1},\bar{n}_2,\cdots,\bar{n}_n)=\bar{l}_4 \end{aligned}$$

となるから、$k+1$の時も成立する。したがって、$\phi(x_1,\cdots,x_n)$ が帰納的定義によってえられる時は、次数 $m+1$ の時も成立する。以上から、次数が $m+1$ の時も成立することが示され、これでもって補助定理、したがって定理Ⅴの証明が終わった。

6．不完全性定理

6.1　体系Pにおいて、論理式の有限集合Kを公理として付け加えた場合を考える。そして、$\kappa=\{\ulcorner A\urcorner \mid A\epsilon K\}$とする時、$\mathrm{Flg}(\kappa)$は次のように定義される集合である：

そこに含まれる元は、

(1)　Kに属する論理式のゲーデル数か、

(2)　体系Pの公理のゲーデル数か、

(3)　すでに証明された論理式（(1)、(2)を含む）のうちの一つ、ないし二つから推論規則のどちらかによって導出される論理式のゲーデル数か

のいずれかである。

すなわち、$\mathrm{Flg}(\kappa)$は、K（あるいは、ゲーデル数化すればκ）から証明できる論理式のゲーデル数の集合である。

6.2　集合κと元xの間の一項関係$x\epsilon\kappa$が帰納的であれば、"κは帰納的集合である"と呼ばれる。したがって、6.1で定義された有限集合κは帰納的集合である。なぜなら、$\kappa=\{n_1,\cdots,n_n\}$（$n_1,\cdots,n_n$は全て自然数）とすると、$x\epsilon\kappa$とは、$x=n_1$ or $x=n_2$ or $\cdots$ or $x=n_n$のことであるから。[21]

6.3　次のように定義される関係$x\mathrm{B}\kappa y$は6.2より帰納的である：

$$\begin{cases} \mathrm{Bw}\kappa(x) \Leftrightarrow (n)[n\leqq l(x)\Rightarrow \mathrm{Ax}(n\mathrm{Gl}x) \text{ or } (n\mathrm{Gl}x)\epsilon\kappa \text{ or } (\mathrm{E}p,q)\{0<p,q<n \ \&\ \mathrm{Fl}(n\mathrm{Gl}x, p\mathrm{Gl}x, \\ \qquad\qquad q\mathrm{Gl}x)\}]\ \&\ l(x)>0 \\ x\mathrm{B}\kappa y \Leftrightarrow \mathrm{Bw}\kappa(x)\ \&\ [l(x)]\mathrm{Gl}x=y \end{cases}$$

また、関係$\mathrm{Bew}\kappa(x)$は次のように定義される：

$$\mathrm{Bew}\kappa(x)\Leftrightarrow(\mathrm{E}y)\,y\mathrm{B}\kappa x$$

したがって、$x\mathrm{B}\kappa y$は"xはあるκからの証明のゲーデル数で、yはそのκからの証明の最後の論理式のゲーデル数である"を意味し、$\mathrm{Bew}\kappa(x)$は"xはκから証明できる論理式のゲーデル数である"を意味する。したがってまた、次が成り立つことは明らかである：

$$\begin{cases} (x)[\mathrm{Bew}\kappa(x)\Leftrightarrow x\epsilon\,\mathrm{Flg}(\kappa)] \\ (x)[\mathrm{Bew}(x)\Rightarrow \mathrm{Bew}\kappa(x)] \end{cases}$$

6.4　次のような集合記号a（つまり、一変数の論理式$F(x)$に対して、$a=\ulcorner F(x)\urcorner$）が存在しないならば、"$\kappa$は$\omega$-無矛盾($\omega$-widerspruchsfrei)である"と呼ばれる：

$$(n)[\mathrm{Sb}(a^{v}_{Z(n)})\ \epsilon\ \mathrm{Flg}(\kappa)]\ \&\ [\mathrm{Neg}(v\mathrm{Gen}\,a)]\ \epsilon\ \mathrm{Flg}(\kappa)$$

（vはaの自由変数）

逆に、上のようなaが存在するならば、"κはω-矛盾する"と呼ばれる。また、κが矛盾するとは、例えば、次が成立することである：

$$[v\,\mathrm{Gen}\,a]\ \epsilon\ \mathrm{Flg}(\kappa)\ \&\ [\mathrm{Neg}(v\,\mathrm{Gen}\,a)]\ \epsilon\ \mathrm{Flg}(\kappa)$$

したがって、κが矛盾するならばそれは必ずω-矛盾でもあり、また、κがω-無矛盾であればそれは必ず無矛盾でもある。

6.5　**定理Ⅵ（不完全性定理）**　論理式の、ω-無矛盾な帰納的集合κに対して、$v\,\mathrm{Gen}\,r$も$\mathrm{Neg}(v\,\mathrm{Gen}\,r)$も共に$\mathrm{Flg}(\kappa)$に属さないような帰納的集合記号$r$が存在する。（$v$は$r$の自由変数）

証明　κを任意の、論理式の帰納的集合で、かつ、ω-無矛盾であるとする。まず、関係$Q(x,y)$を次のように定義する：

$Q(x, y) \Leftrightarrow \neg\{xB\kappa\,[\mathrm{Sb}(y^{19}_{Z(y)})]\}$

$xB\kappa y$は6.3の記述より帰納的であり、$\mathrm{Sb}(y^{19}_{Z(y)})$ は4の17、31、定理Ⅰより帰納的である。したがって、$Q(x, y)$は、定理Ⅰ、定理Ⅱより帰納的となる。すると、定理Ⅴと6.3における$(x)[\mathrm{Bew}(x) \Rightarrow \mathrm{Bew}\kappa(x)]$ より、次のような関係記号q(つまり、二変数の論理式$\overline{Q}$に対して、$q=\ulcorner\overline{Q}\urcorner$)が存在する：

$$\begin{cases} \neg\{xB\kappa\,[\mathrm{Sb}(y^{19}_{Z(y)})]\} \Rightarrow \mathrm{Bew}\kappa\,[\mathrm{Sb}(q^{17}_{Z(x)}{}^{19}_{Z(y)})] & (1) \\ xB\kappa\,[\mathrm{Sb}(y^{19}_{Z(y)})] \Rightarrow \mathrm{Bew}\kappa\,[\mathrm{Neg}\,\mathrm{Sb}(q^{17}_{Z(x)}{}^{19}_{Z(y)})] & (2) \end{cases}$$

ここで、

$$\begin{cases} p = {}_{17}\mathrm{Gen}q \\ r = \mathrm{Sb}(q^{19}_{Z(p)}) \end{cases}$$

とおく。pは自由変数19をもつ集合記号であり、rは自由変数17をもつ集合記号である。すると、次が成立する：

$$\mathrm{Sb}(p^{19}_{Z(p)}) = \mathrm{Sb}([{}_{17}\mathrm{Gen}\,q]^{19}_{Z(p)}) = {}_{17}\mathrm{Gen}\,\mathrm{Sb}(q^{19}_{Z(p)}) = {}_{17}\mathrm{Gen}\,r \qquad (3)$$

$$\mathrm{Sb}(q^{17}_{Z(x)}{}^{19}_{Z(p)}) = \mathrm{Sb}(r^{17}_{Z(x)}) \qquad (4)$$

ここで、(1)と(2)において、yにpを代入すると、(3)と(4)を考慮すれば、次が成立する：

$$\neg\{xB\kappa({}_{17}\mathrm{Gen}\,r)\} \Rightarrow \mathrm{Bew}\kappa\,[\mathrm{Sb}(r^{17}_{Z(x)})] \qquad (5)$$

$$xB\kappa({}_{17}\mathrm{Gen}r) \Rightarrow \mathrm{Bew}\kappa\,[\mathrm{Neg}\,\mathrm{Sb}(r^{17}_{Z(x)})] \qquad (6)$$

以上から次がえられる：

Ⅰ　${}_{17}\mathrm{Gen}\,r$はκから証明できない。

［証明］${}_{17}\mathrm{Gen}\,r$がκから証明できるとすると、$\mathrm{Bew}\kappa\,(x) \Leftrightarrow (Ey)yB\kappa x$より、$nB\kappa({}_{17}\mathrm{Gen}r)$となる自然数$n$が存在する。すると、(6)より、$\mathrm{Bew}\kappa[\mathrm{Neg}\,\mathrm{Sb}(r^{17}_{Z(n)})]$が成り立つが、他方において、${}_{17}\mathrm{Gen}\,r$が$\kappa$から証明できることより、$\mathrm{Sb}(r^{17}_{Z(n)})$ がκから証明できることが導かれ、κは矛盾することになる。したがって、また、ω－矛盾となるから。

Ⅱ　$\mathrm{Neg}({}_{17}\mathrm{Gen}\,r)$は$\kappa$から証明できない。

［証明］　上のⅠで示されたように、${}_{17}\mathrm{Gen}\,r$はκから証明できない。したがって、ふたたび、$\mathrm{Bew}\kappa(x) \Leftrightarrow (Ey)yB\kappa x$より、任意の自然数$n$に対して、$(n)\,\neg\{nB\kappa({}_{17}\mathrm{Gen}\,r)\}$ が成立する。このことと(5)から、$(n)\mathrm{Bew}\kappa[\mathrm{Sb}(r^{17}_{Z(n)})]$ が導かれる。したがって、もし、$\mathrm{Neg}({}_{17}\mathrm{Gen}\,r)$ がκから証明できるとすると、

$$(n)[\mathrm{Sb}(r^{17}_{Z(n)}) \in \mathrm{Flg}(\kappa)]\ \&\ [\mathrm{Neg}({}_{17}\mathrm{Gen}\,r)] \in \mathrm{Flg}(\kappa)$$

となり、κはω－矛盾することになるから。

（定理Ⅵの証明終わり）

6.6　ところで、この決定不能命題のゲーデル数${}_{17}\mathrm{Gen}\,r$はどのような内容をもつ論理式のゲーデル数なのであろうか。

定理Ⅵにおいて、17、19をそれぞれ変数x、yのゲーデル数とし、$q=\ulcorner\overline{Q}(x, y)\urcorner$とおくと、

$$p = {}_{17}\mathrm{Gen}\,q = \ulcorner\forall x\overline{Q}(x, y)\urcorner \qquad (1)$$

$$r = \mathrm{Sb}(q^{19}_{Z(p)}) = \ulcorner Q(x, \bar{p})\urcorner \qquad (2)$$

$$\mathrm{Sb}(p^{19}_{Z(p)}) = {}_{17}\mathrm{Gen}\,r = \ulcorner\forall x\overline{Q}(x, \bar{p})\urcorner \qquad (3)$$

となる。他方、$Q(x, y)$の定義と(3)より、

$$Q(x, p) \Leftrightarrow \neg \{x\mathrm{B}_{\kappa}\mathrm{Sb}(p^{19}_{Z(p)})\}$$
$$\Leftrightarrow \neg \{x\mathrm{B}_{\kappa}\ulcorner \forall x\overline{Q}(x, \bar{p})\urcorner\}$$

となるが、$Q(x, y)$は明らかに帰納的である。したがって、関係$x\mathrm{B}_{\kappa}y$に対応する形式的体系における論理式を$x\mathrm{b}_{\kappa}y$とし、表現Aのゲーデル数の数記号を『A』とする(つまり、『A』$=\overline{\ulcorner A\urcorner}$)と、定理Vより、

$$\overline{Q}(x, \bar{p}) \rightleftarrows \sim \{x\mathrm{b}_{\kappa}『\forall x\overline{Q}(x, \bar{p})』\}$$

が証明できる。したがって、また、

$$\forall x\overline{Q}(x, \bar{p}) \rightleftarrows \forall x \sim \{x\mathrm{b}_{\kappa}『\forall x\overline{Q}(x, \bar{p})』\} \tag{4}$$

が証明できる。ここで、$\mathrm{Bew}_{\kappa}(x)$の定義(6.3)に対応して、関係$\mathrm{Bew}_{\kappa}(x)$に対応する形式的体系における論理式$\mathrm{bew}_{\kappa}(x)$を次のように定義する：

$$\mathrm{bew}_{\kappa}(x) \rightleftarrows (\exists y)y\,\mathrm{b}_{\kappa}x$$

すると、(4)より、

$$\forall x\overline{Q}(x, \bar{p}) \rightleftarrows \sim\mathrm{bew}_{\kappa}『\forall x\overline{Q}(x, \bar{p})』 \tag{5}$$

が証明できることがわかる。すなわち、(5)が証明できるような、自由変数を含まない閉論理式$\forall x\,\overline{Q}(x, \bar{p})$が存在するのである。

さて、(3)からわかるように、${}_{17}\mathrm{Gen}\,r$は論理式$\forall x\overline{Q}(x, \bar{p})$のゲーデル数であるが、この論理式は、(5)からわかるように、論理式$\sim\mathrm{bew}_{\kappa}$『$\forall x\overline{Q}(x, \bar{p})$』と同値であり、同じ内容をもつと解することができる。また、論理式$\sim\mathrm{bew}_{\kappa}$『$\forall x\,\overline{Q}(x, \bar{p})$』は関係$\neg\{\mathrm{Bew}_{\kappa}\ulcorner\forall x\overline{Q}(x, \bar{p})\urcorner\}$に対応しており、この関係は、“$\forall x\overline{Q}(x, \bar{p})$は証明できない”ということを意味している。すなわち、$\forall x\overline{Q}(x, \bar{p})$という論理式は、“$\forall x\overline{Q}(x, \bar{p})$は証明できない”という命題を表現しており、自己自身の証明不可能性を主張する論理式なのである。

註

(1) Gödel, K.：Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter System I, *Monatshefte fur Mathematik und Physik,* 38(1931), 173—198.

(2) デーデルの原論文では、後述するように、無矛盾のかわりにω－無矛盾という条件がつけられている。これを無矛盾という条件に弱めたのはロッサーである。

Rosser, J.B.：Extentions of some theorems of Gödel and Church, *Journal of Symbolic Logic*, vol. 1 (1936), pp.87—91.

(3) 決定不能命題Pは、後述するように、“Pは証明不可能である”という内容をもつが、真偽に関するパラドックスを生じさせる命題Pは“Pは偽である”という内容をもつ。

(4) 各自然数を1階の対象、自然数の集合のそれぞれを2階の対象、2階の対象の集合のそれぞれを3階の対象、以下、n階の対象の集合のそれぞれを$n+1$階の対象と呼ぶ。そして、n階の変数とはn階の対象を表わす変数のことである。

(5) 他の論理記号（$\wedge$, $\rightarrow$, $\rightleftarrows$, $\exists$）は通常の方法で定義される。等号については、n階の項a，bに対して

$$(a=b) \rightleftarrows \forall \mathrm{x}_{n+1}[a \in \mathrm{X}_{n+1} \rightarrow b \in \mathrm{X}_{n+1}]$$

として定義される。

(6) 自由変数、束縛変数は通常の方法で定義される。

(7) 以下の定義からわかるように、ゲーデルのいう帰納的関数は、今日でいう原始帰納的関数のことである。また、この定義には、射影関数：$f(x_1, \cdots, x_n)=x_i$（$1 \leqq i \leqq n$）が付加さ

れねばならない。

(8) このようにして定義される関数はただ一つに定まる。

M．デーヴィス(渡辺他訳)：計算の理論、岩波書店、(1966)、70～72ページ。

(9) 形式的体系内での論理記号（$\sim$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\rightleftarrows$, $\forall$, $\exists$, $=$）に対して、内容的な考察をする場合の論理的記号として次を用いる：

$\neg$, &, or, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, ( ), E, $=$

(10) 帰納的関係の場合は次のようになる：

関係Rが帰納的であるとする。すなわち、$R(y, x_2, \cdots, x_n) \Leftrightarrow [f(y, x_2, \cdots, x_n)=0]$となるような帰納的関数$f$が存在するとする。ここで、$y=h(z_1, \cdots, z_m)$ が帰納的関数であるとすると、関数の場合が成立するなら、

$$R(h(z_1, \cdots, z_m), x_2, \cdots, x_n) \Leftrightarrow [f(h(z_1, \cdots, z_m), x_2, \cdots, x_n)=0]$$

となり、ここでもfは帰納的であるから。

(11) x, yはそれぞれ有限のn変数$x_1, \cdots, x_n$, m変数$y_1, \cdots, y_m$ に対する省略記号である。

(12) nが自然数である時は、$(Ex)[x \leqq n$ & $R(x)]$, および, $(x)[x \leqq n \Rightarrow R(x)]$はそれぞれ、$R(0)$ or $R(1)$ or…or $R(n)$, $R(0)$ & $R(1)$ &…& $R(n)$を意味する。

(13) 定理Ⅳの証明の要点はゲーデルに基づく。

(14) $\{\mathrm{Pr}(n)\}!+1$ の記述は、“pが素数の時は、$p<q \leqq p!+1$となるような素数 q が存在する”という整数論の定理に基づく。

(15) $z \leqq [\mathrm{Pr}(l(x)+l(y))]^{x+y}$の記述について。

$x=2^{x_1} \cdot 3^{x_2} \cdots \mathrm{P}_n^{x_n}$, $y=2^{y_1} \cdot 3^{y_2} \cdots \mathrm{P}_m^{y_m}$とすると、($\mathrm{P}_n$, P_mはそれぞれ、n番目、m番目の素数)、$l(x)=n, l(y)=m$となる。また、$x*y$の定義項の条件を満足するzを求めると、$z=2^{x_1} \cdots \mathrm{P}_n^{x_n} \cdot \mathrm{P}_{n+1}^{y_1} \cdots \mathrm{P}_{n+m}^{y_m}$となる。ここで、$\mathrm{Pr}\{l(x)+l(y)\}$を求めると、$\mathrm{Pr}\{l(x)+l(y)\}=\mathrm{P}_{n+m}$である。ところで、$\mathrm{P}_{n+m}$の$\{(x_1+\cdots+x_n)+(y_1+\cdots+y_m)\}$乗は$z$より大きく、前者は$\mathrm{P}_{n+m}$の$\{(2^{x_1} \cdots \mathrm{P}_n^{x_n})+(2^{y_1} \cdots \mathrm{P}_m^{y_m})\}$乗($=\{\mathrm{P}_{n+m}\}^{x+y}$)よりも小さい。すなわち、$[\mathrm{Pr}(l(x)+l(y))]^{x+y}>z$が成立する。したがって、$x*y$の定義項における条件を満足する$z$は、$z<[\mathrm{Pr}(l(x)+l(y))]^{x+y}$の範囲において、したがって、また、$z \leqq [\mathrm{Pr}(l(x)+l(y))]^{x+y}$ の範囲に存在する。

(16) $n \leqq (\mathrm{Pr}[l(x)]^2)^{x \cdot [l(x)]^2}$ の記述について。

$\mathrm{Fr}(n)$ & $x=[l(n)]\mathrm{Gl}\,n$であるから、$n=2^{x_1} \cdots \mathrm{P}_n^{x_n}$とおく($\mathrm{P}n$は$n$番目の素数)と、$x=x_n$となる。$x_k$は基本論理式であるか、あるいは否定、選言、あるいは generalization の諸操作を通じて先行の論理式からえられる論理式である。($1 \leqq k \leqq n$)　また、$x_1, \cdots, x_n$は全てx_nの部分論理式である。そして、x_nの部分論理式の個数については次が成立する：

長さ1の部分論理式は、せいぜい$l(x_n)$個である。

長さ2の部分論理式は、せいぜい$\{l(x_n)-1\}$個である。

・・・

長さ$l(x_n)$の部分論理式は、せいぜい1個である。

したがって、x_nに含まれる部分論理式は長さ1から長さ$l(x_n)$までのものであるので、その最大の可能性の個数を全て合計すると、$\frac{1}{2}\{l(x_n)[l(x_n)+1]\} \leqq [l(x_n)]^2$ しか存在しない。また、nの素数P_k（$1 \leqq k \leqq n$）はどれも$\mathrm{Pr}[l(x)]^2$より小さいのは明らかである。ゆえに、$\mathrm{P}n \leqq \mathrm{Pr}[l(x_n)]^2$である。他方において次が成立する：

$n=2^{x_1} \cdots \mathrm{P}_n^{x_n} \leqq \mathrm{P}_n^{x_1} \cdots \mathrm{P}_n^{x_n}=\mathrm{P}_n^{x_1+\cdots+x_n} \leqq \mathrm{P}_n^{x_n \cdot [l(x_n)]^2}$

また、$\mathrm{P}n \leqq \mathrm{Pr}[l(x_n)]^2$であるから、次が成立する：

$$P_n^{x_n \cdot [l(x_n)]^2} \leqq (\Pr[l(x_n)]^2)^{x_n \cdot [l(x_n)]^2}$$

したがって、結局のところ、$n \leqq (\Pr[l(x_n)]^2)^{x_n \cdot [l(x_n)]^2}$、すなわち、$n \leqq (\Pr[l(x)]^2)^{x \cdot [l(x)]^2}$ が成立する。

(17) $y \leqq x^{(x^n)}$の記述について

素数2，…，P_eについて、2のM_1^{A1}乗からP_eのM_e^{Ae}乗までかけあわせたものをxとする。すなわち、xの各項は全て変数であって、その変数のゲーデル数をM_k^{Ak}（$1 \leqq k \leqq e$）とするのである。M_k^{Ak}はA_k階の変数を表わす。（$A_k \geqq 1$かつ、$M_k > 15$）　yの値はxの各項が全て変数の時最大となるので、この場合だけを考えればよい。そして、それぞれの変数がnだけ階数が高まったとする。その時、yは、2の$M_1^{(A1+n)}$乗からP_eの$M_e^{(Ae+n)}$乗までかけあわせたものとなる。ところで、$P_k \geqq 2, A_k \geqq 1, M_k > 15$（$1 \leqq k \leqq e$）の条件下では、2の$M_1^{A1}$乗から$Pe$の$M_e^{Ae}$乗までかけあわせたものは、明らかに、$M_e$より大きい。このことから、$y < x^{(x^n)}$を示すことは容易である。したがって、$n\mathrm{Th}x$の定義項における条件を満足する$y$は$y \leqq x^{(x^n)}$の範囲において存在する。

(18) 任意の自然数m，nに対して次が成立することを、mに関する数学的帰納法を用いて証明することができる：

$$m \neq n \Rightarrow \vdash \bar{m} \neq \bar{n} \tag{1}$$

したがって、補助定理が成立するなら、$l=0$とし、かつ、(1)において、$m = \phi(n_1, \cdots, n_n)$, $n=0$とすると、

$$\begin{cases} \phi(n_1, \cdots, n_n) = 0 \Rightarrow \vdash \bar{\phi}(\bar{n}_1, \cdots, \bar{n}_n) = \bar{0} \\ \phi(n_1, \cdots, n_n) \neq 0 \Rightarrow \vdash \bar{\phi}(\bar{n}_1, \cdots, \bar{n}_n) \neq \bar{0} \end{cases}$$

が成立する。

(19) 一般に、任意の自然数m，nに対して、$\overline{m+n} = \bar{m} + \bar{n}$，$\overline{m \cdot n} = \bar{m} \cdot \bar{n}$が成立することは、形式的自然数論における加法、乗法の帰納的定義から、数学的帰納法を用いて証明することができる。

(20) hに対応する$n-1$変数の項$\bar{h}$、および、gに対応する$n+1$変数の項$\bar{g}$が与えられるならば、

$$\begin{cases} \bar{\phi}(\bar{0}, x_2, \cdots, x_n) = \bar{h}(x_2, \cdots, x_n) \\ \bar{\phi}(fx, x_2, \cdots, x_n) = \bar{g}(x, \bar{\phi}(x, x_2, \cdots, x_n), x_2, \cdots x_n) \end{cases}$$

のどちらも証明できるような、ϕに対応するn変数の項$\bar{\phi}$が存在することは前提されている。これの証明については次を参照：

前原昭二：　数学基礎論入門、朝倉書店、(1977)、80−83ページ。

(21) 帰納的集合については次を参照：

前原昭二：前掲書、123ページ。

M．デーヴィス：前掲書、76ページ。

栗原俊彦、中村昭：論理数学Ｉ、共立出版、(1975)、106ページ。

参考文献(註で言及したものはのぞく)

(1) G.S. Boolos & R.C. Jeffrey : *Computability and Logic*, Cambridge Univ. Pr., 1974.

(2) K. Gödel : On undecidable propositions of formal mathematical systems, Lecture notes by S.C. Kleene and J.B. Rosser, Inst. for Advanced Study, Princeton, N. J. 1934. (Reprinted in *The Undecidable* (ed. by M. Davis, Raven Pr., 1965, pp.39−74.))

(3) S.C. Kleene : *Introduction to Metamathematics*, North-Holland Pub. Co., 1967.
(4) 廣瀬　健：計算論、朝倉書店、1975.

Gödel's incompleteness theorem

Etsuro YAMAOKA

By Gödel's incompleteness theorem the following statement is generally meant : In any formal system adequate for number theory there exists an undecidable formula, that is, a formula that is not provable and whose negation is not provable. And a corollary to the theorem is that the consistency of a formal system adequate for number theory can not be proved within the system. Sometimes it is this corollary that is referred to as Gödel's second incompleteness theorem.

Both of these Gödel's results are shattering, not only in mathematics, but also in philosophy. From a philosphical point of view, the former theorem is directly concerned with the problem of truth. That is, the undecidable formula P in the former, which means that P is unprovable, is parallel to the proposition $\overset{*}{P}$, which says that $\overset{*}{P}$ is false.