

水平軸風車のスパイラル渦における
複数平行平面の2次元速度データによる
3次元渦構造の同定に関する解析技術の研究

平成29年3月

中山 雄行

目次

第1章	緒言	1
1.1	はじめに一流れと人間社会	1
1.2	渦の定義・解析と風力発電	2
1.3	本研究の目的と内容	5
1.4	本論文の構成	6
第2章	渦の定義とトポロジー・渦特性を定める不変量	11
2.1	渦のトポロジー不変量	11
2.2	渦流の対称性を定める不変量	12
2.3	渦流の詳細なトポロジーを定める不変量	13
2.3.1	周方向流れのトポロジー不変量	15
2.3.2	半径方向流れのトポロジー不変量	15
2.4	渦空間の定義	16
2.5	旋回平面上の圧力極小を捉える渦定義	17
第3章	渦の解析	23
3.1	渦領域の同定	23
3.2	トポロジー不変量の評価	24
3.3	圧力極小の評価	25
3.4	渦の伸長の評価	26
3.5	詳細なトポロジーの同定	27
第4章	2次元 ∇v から3次元 ∇v を同定する解析理論	29
4.1	速度勾配テンソルの線型変換	29
4.2	未知の速度勾配テンソル成分の解法	33
4.3	連立方程式の補完	34
4.3.1	測定面の追加	35
4.3.2	同一アジマス角における測定面の追加	36
4.4	複数面の ∇v の線型変換において生じる条件	36
4.5	渦の速度構造モデル	40
4.6	複雑な渦構造のための定式化	42

4.6.1	数値計算手法を組み込んだ定式化	43
4.6.2	高次の定式化	46
4.7	解析理論のまとめ	51
第5章	速度場の測定	53
5.1	水平軸風車の運転条件	53
5.2	PIVによる測定	54
5.2.1	測定する面のアジマス角	54
5.2.2	後流の測定箇所	55
5.2.3	空間解像度	55
5.2.4	カメラの撮影範囲	55
5.2.5	フェーズロックによるシンクロ (PIVの同期)	56
5.3	スパイラル渦の追跡	56
第6章	速度データの統計処理	59
6.1	データフィッティングの目的と条件	59
6.2	データフィッティングのための渦領域の定義	59
6.3	フィッティング上の懸案	60
6.4	データフィッティングの方法	61
6.4.1	swirlityの極大性のみの仮定	61
6.4.2	有限領域のswirlity分布による極大性の評価と渦軸位置の補正	62
6.5	本フィッティング案の適用条件と検証	62
6.6	フィッティングのまとめ	62
第7章	スパイラル渦の数値解析	65
7.1	スパイラル渦の渦流解析	65
7.2	瞬間場の速度データの検査と自動処理	66
7.3	2次元の渦流解析によるアンサンブル平均のためのデータの選択	66
7.4	複素平面の2次元速度勾配テンソル $\nabla \mathbf{v}$ の導出	69
7.5	3次元速度勾配テンソルの構成	70
7.6	3次元渦流解析	72
第8章	スパイラル渦の解析結果	75
8.1	後流のスパイラル渦の同定と追跡	76
8.2	翼直後流におけるスパイラル渦のトポロジー構造と特性	81
8.3	次軌道のスパイラル渦のトポロジー構造と特性	85
8.4	次々次軌道のスパイラル渦のトポロジー構造と特性	90

8.5	スパイラル渦の特性	93
第 9 章	スパイラル渦の渦構造と解析の特性	95
9.1	スパイラル渦の速度構造	95
9.2	渦モデルの適合性	100
9.3	渦構造の同定について	102
9.4	3次元渦構造の解析技術	103
9.5	今後の解析の応用と展開	104
第 10 章	結 言	107
	謝 辞	115
	Appendix A	117

第1章 緒 言

1.1 はじめに一流れと人間社会

自然の営みの中で「流れ」は古くから親しまれてきた物理現象である。川のせせらぎは人々に安らぎを与え、万葉集、鴨長明の「方丈記」、16世紀のレオナルド・ダ・ヴィンチ (Leonardo da Vinci) の水の習作等、人は自然と触れ合い、讃えると共に、人生を流れに重ねて想いを馳せ、また自然現象の解明への好奇心を与えてきた。諸々の物理法則が発見され、そして、文明の利器を創造して社会に貢献する工学が流れを応用し、様々な機器、設備を社会に提供する時代へと時は流れても、この流れへの親しみは変わらず、逆に「流れ」に癒しを求める想いは強くなっている。これと同時に、流れ・流体を応用した航空、発電、エネルギー変換等の技術レベルは向上し、現代社会におけるそのニーズは増すばかりである。

流れの様相には幾つかのパターンがあるが、その中でも取り分け「渦」と呼ばれる流れは老若・時代を問わず非常に良く知られ、また注目される流れの様相である。古くから、例えば縄文時代の道具のモチーフ等に用いられ、また渦中という状況を言い表す言葉、台風・ハリケーン・サイクロンの気象現象、銀河、鳴門の渦等日常生活にも馴染みがあり、更には辞世の句にも詠まれる程思い入れが特に強い流れの現象である。流れと人間が接してきた時代は長く、また流れをサイエンティフィックに取り扱う流体力学の学問も歴史は長い。しかし、驚くべきことに、この長年親しまれて来た渦流れは、流体力学による統一的な定義がまだ確立していない。大小様々なスケールで生まれては消える乱流中の渦は流体運動の腱であり筋肉 (sinews and muscles) であると言われるが [1]、統一的な定義がないがために、渦のディスカッションではまずそこで呼ぶ「渦」の言葉の定義をした上で話を始めなければならない、ということも少なくない。乱流は現代物理学の難問、と言ったアインシュタインやファインマンの言葉、或いは20世紀に残された課題とも言われて来たことが如何に乱流の取り扱いが困難であるかを物語っているが、今世紀においても尚同様なことが言われ、理論は完成していない。乱流には渦が重要な役割を果たしている。レオナルド・ダ・ヴィンチの流れ (乱流渦と見られる) のスケッチが現在も流体力学の国際会議のポスターとなり、渦は今も尚自然科学者らの研究の重要なターゲットであることを象徴している。しかし、実社会における工学の世界では、様々な流動技術の融合や帰納的実験則・経験則より設計条件を定め、高度な機器や設備を提供してきた。流れを用いた発電技術やタービン、航空・宇宙分野の構造設計技術は非常にレベルの高いエンジニアリングの分野に挙げられる。しかし、その一方で、水族館の水系統でさえも渦の抑制やそのための十分な設計検証が難しく、最終的には現場調整という皮肉な事例も存在する。渦に関わる流動制御技術は、今後も実エンジニアリングにおいて重

要な課題である。

1.2 渦の定義・解析と風力発電

「渦流れ」は、渦モデルの提案 [2] や渦の定義等において長年研究が続けられ [3]、種々の渦の物理的性質に着目した渦定義が定義されてきた [4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15]。工学においてもこれらの一部が用いられている。これまで提案された渦定義の中で、例えば速度勾配テンソルが定める局所トポロジー・流れのパターンの分類 [5] は、様々な乱流のトポロジー解析や渦定義に用いられ、乱流研究、流体工学の双方に大いに貢献してきた。これは、局所的な流れ・速度場を速度勾配テンソルにより表したとき、流れの様相はこのテンソルの固有値を使って分類でき、また、この様相はガリレイ不変、即ち慣性座標系に依存しない流れの様相であることを用いている。流体力学でよく知られた渦度と歪み速度テンソルの固有値・固有ベクトルによる分類も従来用いられてきたが [16, 17]、歪み速度テンソルの固有空間と渦度ベクトルの方向との関連付けが必要であり、速度勾配テンソルの固有値の様な渦流れの判断、また吸込み渦や湧出し渦等の分類が容易ではない。速度勾配テンソルの固有値による分類では、各点におけるこの固有値の符号を求めるだけで吸込み渦／湧出し渦やよどみ流れを分類でき、一様等方性乱流やチャンネル乱流、混合層 [18, 19] 等、また航空分野を始めとする様々な分野で応用されてきた [6, 8]。また、ここ 10 年の研究で速度勾配テンソルの固有値による渦流れの様相・幾何 (トポロジー) と圧力極小との関連も指摘されて来た [11]。

更に、最近、速度勾配テンソルの固有値に対する明確な物理的解釈が与えられ [14]、本固有値による流れの分類には不明確な点があることが示され、それを補完する詳細な流れの様相 (幾何・トポロジー) を定める不変量 (物理量) が導かれた。ある平面上の流れの中の周方向速度を抽出し、この同一方向性 (旋回の有無) とその強さを定める物理量 *swirlity*、また半径方向速度も同様に抽出され、その同一方向性、即ち対象点の全周における吸込み／湧出し或いは吸込み・湧出しの混在流れを定め、その強さを示す物理量 *sourcity* が定義・提案された。また、これらの流れ、或いは渦流れ全体の対称性 (歪み) を定める物理量・不変量も併せて導出された。

よく知られた渦の物理特性には、その渦流れ自身の幾何から得られる圧力極小、また渦の伸張 (*vortex stretching*) による渦流れの強化等が挙げられる。特に、圧力極小に着目した渦の定義には Q [4]、 λ_2 [7] 定義が良く知られ、主要な渦定義 [11] となって多くの乱流の渦解析で応用されている。しかし、流れの詳細なトポロジーの分析・特定が可能になると、これらは渦 (旋回) 流れによる圧力極小を必ずしも明確に示しているものではないことが示された [15]。圧力極小の性質は渦流れの旋回平面上でこれを評価する必要がある。これらの定義は、渦流れのトポロジーによって生じる圧力極小ではあるが、旋回平面上における圧力極小を必ずしも定めていない。 Q 定義は、3次元の圧力のラプラシアンであり、歪み速度テンソルのノルムが渦度テンソルのノルムがより大きいことを定める条件であり、 λ_2 定義は渦流れによる圧力極小面の存在を規定しており、旋回平面上の圧力極小を評価していない。このため、前述した渦流れの詳細なトポロジーの考察により、

旋回平面上の渦流れによる圧力極小を定める定義が最近定義され、トポロジーとこのトポロジー (flow kinematics) による圧力極小との関連も明確にされた。これによると、渦流れの旋回の強さだけでなく、渦流れの歪み・対称性も同様に関わっていることが数学的に示される。渦流れの対称性はトポロジーの安定性に関わるが [20]、局所的な流れの対称性が圧力極小に関わるのは興味深い。また、この旋回平面上の圧力極小に基づく渦の定義は、渦の主要な定義である Δ 、 Q 、そして λ_2 定義を統一した定義として提案されている [15]。一様等方性乱流における渦では、この統一定義を用いて実際にこの性質が示され、また渦軸の直交性にも関わるということが明らかになった [21]。更に、swirlity、sourcity、渦流対称性の物理量を用いた詳細なトポロジーの解析により、渦のタイプの分類やトポロジーと渦の発達・減衰との関わりが示され [22, 23, 24, 25]、更にトポロジーにより渦の伸長の特性にも幾つかのタイプがあることが示された [25]。また、渦の伸張においても同様に、旋回平面上を基準とした座標系における定式化を行い、旋回平面に平行或いは垂直な渦度成分に対するそれぞれの伸張特性に分類し、かつ不変量で表現された。これにより、渦の伸張による旋回の強さに対する効果と旋回平面上の渦度の増減による渦軸が傾く影響を評価することが可能になった [25]。

これら近年の詳細なトポロジーに関わる物理量の導出やそれらに基づく分析、そしてトポロジーから導かれる主要な渦の特性、即ち圧力極小、渦の伸張との関連が明確になり、渦のトポジカルな自己安定性の分析に有益な解析が可能になって来た。

さて、前述した様に、旋回を伴う渦は、エネルギー技術に密接に関連している。発電分野において、光や微生物から直接電子を取り出す太陽光発電や微生物燃料電池を除くと、火力、水力、原子力、風力等を代表とする発電は殆どが流れを用いた発電である。火力、水力、原子力発電等の大規模施設における配管中の二次流れ、ガス巻き込み渦等は、施設の水系統や発電の健全性にも関わる。風力発電ではタービンを回すための配管系統はないが、タービン・風車（水平軸風車）からは翼端渦、また風車を支持するタワーからの渦等様々な渦の発生がある。これらは、複数の風車を設置するウインドファームにおいて、後流に設置された風車周りの流況に大きな影響を及ぼす。即ち、流れが整流されていないために発電の効率にも関わり、風車の振動や強度・健全性にも影響を与える可能性がある。また、風車の渦は、周辺環境への影響も考慮しなければならない。風力発電は、再生エネルギーの代表的な発電技術であり、渦に対する評価技術は社会においても重要な技術要素である。

一方、この翼端渦は、航空機や様々なタービンにも関わる、一つの重要な渦現象である。また、この渦自身が空間上・後流で軌道を描き、スパイラル状に流れるスパイラル渦となる [26]。このようなスパイラル渦は、航空機の離発着時の安定性等に関わる。また、風力発電の水平軸風車から発生する翼端渦も同様にスパイラル渦を構成し、ウインドファームの後流における風車周りの流れや発電効率において影響を及ぼす。この風車におけるスパイラル渦の特性、即ち渦が各翼から発生し、スパイラル軌道を描きながら後流に移動する様相を図 1.1 に示す。これらの問題では、翼端渦並びにこの渦が構成するスパイラル渦の安定性に関わる性質が重要である。この安定性に関する理論や解析は、流体物理学分野において詳細に研究されている [27, 28, 29, 30]。スパイラル渦

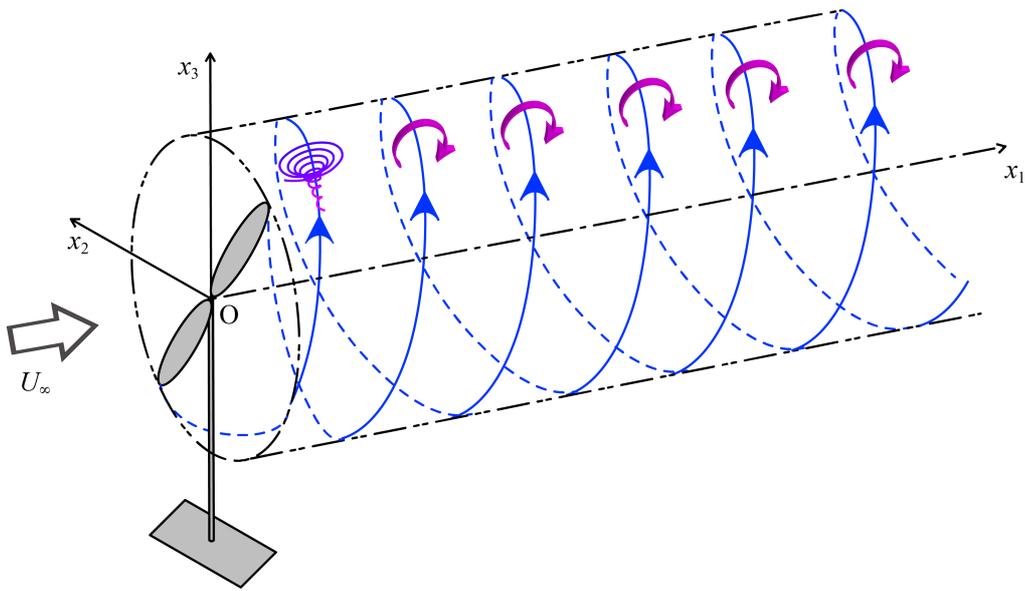


図 1.1: 風力発電におけるスパイラル渦。風車は、本研究における実験にて用いる 2 枚翼水平軸風車であり、また空間座標系を併せて示す。

の安定性では、曲率不安定性 (curvature instability) と楕円不安定性 (elliptic instability) の観点から解析されているが、渦の構造は Batchelor 渦等を仮定した上で行われている [29, 30]。実エンジニアリングでは、実在の渦の構造を元にした解析が要求されるが、この構造はまだ未解明である部分が多い。従って、実在渦の構造が解明されれば、これを元にして実フィールドにおけるタービン・風車等の渦の特性や安定性の分析が可能となり、この意義は大きい。即ち、風力発電では、発電の効率上複数のタービンを設置することが多くの場合要求されるが、タービンの翼端渦・スパイラル渦の強さや流況に応じた安定性の評価が可能となると、風車の間隔に関する設置基準の評価技術に資することができる。このためには、スパイラル渦の 3 次元の速度構造の同定が必要である。大気渦等の実在渦において渦構造に関する実験・分析も試みられているが [32, 33]、3 次元かつ渦流の半径方向、周方向流れのそれぞれの特性や物理特性等の詳細な分析も必要である。

しかし、実在翼端渦の渦構造を分析することは容易ではない。渦を始めとする流れの幾何・トポロジーの分析では、物理実験或いは CFD (Computational Fluid Dynamics) によるシミュレーションが必要であるが、実験では詳細な速度分布などのデータ取得は難しく、細かなデータ取得が可能な CFD では実フィールドにおける高レイノルズ数の乱流のシミュレーションは困難である。更に、実験における速度場の測定では、PIV (Particle Image Velocimetry: 粒子画像流速計測法) 等による測定が詳細なデータ取得に有効であり、3 次元の測定も可能となっているが、測定条件や信頼性の観点から 2 次元の測定に頼る場合も少なくない [34, 35, 36, 37, 38, 39, 40]。2 次元 (平面) の速度場の測定を行い、その平面の法線方向にずらした平面上の速度場を取得して 3 次元の特性を把握するアプローチもあるが、断層写真的な描像となり、これらから 3 次元の流線の構造を抽出・同定するのは困難である。また、複数の異なるアジマス角 (翼の周方向角度) にて

速度場を測定した3次元的速度場の測定も行われているが、アジマス面上の速度構造の分析にはなっても渦の3次元構造の分析は困難である。また、2次元にて渦構造を渦度により解析した例はあるが [34, 35]、2次元の渦度のみでスパイラル渦の構造や物理特性の評価は難しい。

渦や乱流に関わる工学や実設計では、渦・乱流の非線形性により、根本的な現象の解明や対策が難しく、理論的厳密さを幾分犠牲にした帰納的な手法で適用可能な設計条件を定める技術的手法には限界がある。それに加え、前述した様々な数値解析、実験上の条件が風力発電のスパイラル渦の根本的な技術の確立を困難にしている。更に、地形の変化だけでなく気温の変化により容易に変わりうる [41] 流況の中で、設定基準を検討するためには、様々な条件を想定し、それぞれの条件下でのスパイラル渦の構造と特性を分析する流動解析技術の確立が必要である。

1.3 本研究の目的と内容

風力発電の水平軸風車における翼端渦・スパイラル渦の渦構造の解明は、高出力や安定した発電、その健全性において重要であるが、そのためには物理実験による流れ場のシミュレーション（より現実の流れに近い条件での速度場の再現）とそのデータを用いた3次元の渦構造の解析が必要である。しかし、実験では、測定条件上2次元の流れ場における測定が望ましい場合が少なくない。このとき、測定する平面が同じ法線、即ち互いに平行である場合は、実験が容易になる。

本研究の目的は、水平軸風車のスパイラル渦において、2次元の速度データから3次元の渦構造を解明する技術を確立し、渦のトポロジカルな特性を分析可能なものにすると共に、スパイラル渦の安定性の解析等に必要な渦構造を同定可能とすることである。実フィールドの風力発電におけるスパイラル渦の流動問題について、これを物理・数学的な解析のアプローチに繋げ、明確な物理的評価に基づくスパイラル渦分析の流動技術の確立に資することを目的とする。

本研究における渦構造の解析法では、以下の項目を条件とする。即ち、

1. ガリレイ不変の渦構造を同定する
2. 後流や他の流れに依存しない、実際の渦の位置（ガリレイ不変の位置）を同定した上で、渦構造を特定する
3. 2次元の速度場のデータのみを用いる
4. 速度場のデータを測定する平面はそれぞれ平行とする

また、この解析では以下の項目を仮定できるものとする。

- スパイラル渦の速度構造は、測定する複数の箇所／アジマス角において同じ渦構造を有している

この仮定と条件の下で3次元の渦構造を特定する解析法を開発する。3次元の渦構造と渦の物理特性の評価には、3次元の速度勾配テンソルを必要とする。このテンソルの分布が解れば、ガリレ

イ不変の渦位置の同定、速度構造、また圧力極小や渦の伸長の特性を評価できる。このためには、複数の平行平面の2次元速度場のデータを基に3次元の速度勾配テンソルを同定する理論と技術が必要である。

そこで、本研究では、複数の平行平面の2次元速度場のデータから3次元の速度勾配テンソルを同定する解析の理論を構築し、数値解析のコードを開発する。本解析では、できるだけ厳密な理論と定式化を目指し、任意の次数で評価できる解法を検討する。

異なるアジマス角においてそれぞれ平行な平面の速度場を求めたとき、スパイラル渦が同じ速度構造を有しているならば、それぞれの平面における速度場は、スパイラル渦における異なる断面（渦軸に対して異なる角度の断面）における速度場と等価である。これを利用し、速度勾配テンソルの線型変換の関係式から、速度勾配テンソルの成分の未知項を求め、これより3次元の速度勾配テンソルの全成分を評価することができる。この定式化では、速度勾配テンソル成分の有限差分による評価やテイラー展開における次数の設定はあるが、定式化の基となる線型変換は厳密であり、偏微分方程式を近似解法で解くという解析法の性質とは異なる。

一方、相異なるアジマス角の平面上の速度場から導かれる2次元速度勾配テンソルを連立させて3次元速度勾配テンソルを求めるとき、各平面の節点は、各座標系において同じ座標であっても、座標変換における回転軸から離れた点では（速度勾配テンソルを合成する点として）ずれが生じる。この補正を含めた定式化についても検討する。この定式化を行うと、既存の渦モデルである Burgers [42], Vatistas [43], Batchelor [31], Rankine 渦といった主要な渦モデルの速度構造に対しては厳密にその構造を同定できる。しかし、もしこれらよりも速度構造が複雑で旋回平面の法線方向にも速度が複雑に変化する場合は、この法線方向の空間微分においてずれ（高次項の誤差）が生じる。そこで、この様な複雑な渦構造の場合も含めた定式化も行う。ここでは、旋回平面の法線方向に関する空間微分について、複数の隣接する平行平面で評価した速度勾配テンソルの成分の法線方向の微分を有限差分により展開し、定式化を行う。旋回平面の法線方向に関する空間微分は線型変換上の式からは評価が困難であるが、有限差分による数値手法を定式化に組み込むことにより、この懸案を解消する。これにより、任意の次数で定式化並びに解析が可能である。

本研究では、上記解析法と PIV による2次元速度場を測定する実験を組み合わせることで3次元の速度勾配テンソル並びに渦構造を分析し、本スパイラル渦のトポロジカルな特性と物理特性を考察した。実設計では、様々な条件下のスパイラル渦について、それぞれの条件下で2次元の速度場を測定して本解析を行うことにより、その乱流におけるスパイラル渦の速度構造と物理特性を評価し、トポロジカルな安定性、更なる後流における渦構造の特性の遷移を評価できる。

1.4 本論文の構成

本論文において、第2章では、渦の定義とトポロジー不変量（渦流れの幾何・トポロジーの特性を定める物理量）について記述する。即ち、スパイラル渦の解析に必要な渦の同定と渦のトポロジカルな特性、並びに渦のトポロジーから導かれる渦の物理特性を特定するための必要な理論

について説明する。

まず、ガリレイ不変の渦のトポロジーを示す不変量について示す。速度勾配テンソルの固有値による渦流れの同定・分類とその限界を示し、詳細な渦流れのトポロジーを定める不変量／物理量について記述する。既述した様に、渦の定義には様々なものが提案されているが、渦のトポロジー (Δ 定義 [5]) と圧力極小に着目した幾つかの定義、即ち、 Q 、 λ_2 、そして $\check{\lambda}_2$ 定義について説明する。

第2章に続き、第3章では、スパイラル渦のトポロジーと渦特性の解析内容について記述する。第2章で説明したトポロジー不変量と渦定義より、スパイラル渦の同定に用いる渦定義を定める。次に、トポロジーを定める不変量において、スパイラル渦のトポロジカルな特性の同定に用いるべき物理量について渦定義と同様に考察する。圧力極小や渦の伸長 (vortex stretching) による旋回の強化等の渦特有の性質はそのトポロジーの自己安定性に関わるため、これらの評価に必要な量は本解析に含める。本章では、これらの評価対象となる不変量や評価式を定める。

第4章は、本研究のコアの理論・技術である2次元速度勾配テンソルから3次元の同テンソルを同定する解析理論である。複数のアジマス角で速度場を計測するスパイラル渦は同じ速度構造を有している、という条件のみから2次元の速度場測定より3次元の速度勾配テンソルの導出につなげ、3次元のスパイラル渦の速度構造を同定する解析理論について記述し、線型変換、また数値手法のテクニックを用いて任意の次数で解析する理論をまとめる。

第5章では、本研究にて実施した実験における複数の平行平面の速度場の測定について記述する。本実験は、測定の信頼性が高い2次元のPIVを用いて速度場を測定する。測定する面は水平面とし、アジマス面 (アジマス角に平行な面) が水平面となるアジマス角 (翼・ブレードの周方向角度) を 0° とし、幾つかのアジマス角の水平面にて測定を行う。本実験では、アジマス角 0° 、 $\pm 45^\circ$ 等の面において測定し、異なるアジマス角の選定についても渦の解析によりその適性を調べることにした。

実験では、渦の確認を行いながら測定を行うが、本来渦の位置は実験中に判断することは難しい。速度ベクトル場や流線により渦流れを確認できたとしても、一様な流れや後流があると、渦は異なる位置に存在する様に見えるか、或いは渦が存在する様には見えない。従って、渦のトポロジーの様相は目視では確認できない。しかし、本実験では、PIVの速度場にて渦の存在を視認で確認し、その周辺を含めた速度場を測定することにより渦領域並びにその周辺の速度データを得る。従って、データ取得後には渦の有無やその位置を2次元の速度データより評価する必要がある。また、アンサンブル平均では、渦の位置を確認すると共に、その渦位置を合わせた上で平均処理を行う必要がある。この様なデータ処理や統計的な分析による速度勾配テンソル評価のための速度ベクトルのデータ作成を第6章に示す。即ち、測定したデータには必ず流れに乱れが存在するため、同じ条件で測定したとしても速度場のデータは同じではなく、これらのデータを用いて速度勾配テンソルを算出するためには統計処理が必要である。各々の速度の瞬間場において渦が測定されてもその位置が異なるため、複数のデータを用いて実際の速度場を捉える場合、それぞれの渦の位置を合わせた上で速度場のアンサンブル平均を評価するのが望ましい。しかし、前

述した様に、これは速度場だけで判断すると渦位置がずれて速度場を合わせることが懸念される。そこで、まず2次元の速度場のデータを用いて2次元の渦解析を行い、この面における渦の有無やその強さを示す物理量を数値計算で求め、渦の位置を評価する。更に、このとき、アンサンブル平均としてのデータの適性を併せてチェックする。アンサンブル平均のデータとして加える場合は、渦位置を合わせるようにして座標系を再設定した速度場のデータを作成し、平均速度場のデータとして用いる。このとき、速度場の実験データの処理ミス・不具合も併せてチェックし、信頼性のある瞬間速度場のデータのみをアンサンブル平均用に選択する様に配慮する。2次元データによる渦解析では、第2,3章で示したトポロジー不変量を2次元場にて求める。

第7章では、スパイラル渦の渦構造を解析するための手順とアルゴリズムについて記述する。第3,6章で示した渦解析と統計処理を含め、3次元の渦解析を含めた全体の解析の手順を示す。2次元の速度場データから選択した瞬間速度場のデータのアンサンブル平均を各測定面で行い、これらを元に3次元の速度勾配テンソルに関する連立方程式を解く。アンサンブル平均のためのデータの選択では、渦の特性が全ての平均データにおけるスパイラル渦の描像の傾向を有しているか、という点においてまず物理的条件の判断を行う。特に条件を定めない全ての瞬間速度場のデータを用い、更に渦位置のずれを調整しないアンサンブル平均の速度場のデータを構成すると、渦の旋回平面における旋回強さを示す不変量 $swirlity$ の極大領域を有する特性が確認できる。そこで、条件付きアンサンブル平均では、各瞬間速度場におけるこの極大点を中心とし、平均速度場のデータを構成する。また、乱れの影響による渦構造の変化に対する考慮、測定エラー (PIV における速度データ算出のエラー) による渦構造への影響もチェックし、選定する要領について記述する。その後は、3次元速度勾配テンソルより渦のトポロジー不変量、また渦の物理特性を定める物理量を評価し、これらの分布データを作成して可視化を行う。

第8章は解析結果である。各測定面における瞬間速度場の特徴等について分析し、各測定面のアンサンブル平均に基づいた3次元の渦構造について示す。渦構造では、トポロジー不変量と渦特性、即ち圧力極小と渦の伸長について、渦領域におけるこれらの等値面図を示す。3次元の渦構造では $swirlity$ の極大領域が明確に示される。一方、半径方向流れの強さに関する不変量の等値面図では、半径方向の歪み (引っ張り、圧縮) が小さく、半径方向の速度は旋回流れ/周方向速度に比べて小さいものと考えられる。また、渦流れの対称性は、渦中心では高い。これらのトポジカルな特性により、スパイラル渦は Rankine 渦の様な渦中心における剛体回転的な速度構造は有さず、Burgers, Batchelor, Vatistas 渦で示される様な周方向速度の半径方向の変化が渦中心で極大となる渦構造を有していることが示される。また、このトポロジーの特性が圧力極小や渦の伸長の特性を定めている。即ち、明確な圧力極小の特性を示しているが、その一方で、半径方向速度の特性から渦の伸長はあまり期待できない。これらの渦特性を後流の幾つかの領域で評価する。

第9章は、第8章で示した渦構造を元に、スパイラル渦のトポロジーの詳細な特性について分析する。そして、現在提案されている渦モデルとの適合性について考察し、渦モデルの適合性の判断において注意すべき点について記述する。

まず、本解析結果から得られた渦構造について、予想される渦モデルとその速度分布について

考察する。swirlity の極大特性、また渦流の高対称性を有することから、周方向速度の特徴を示す関数系について示す。半径方向速度の特性からは Vatisas の一つの渦モデルの関数系とは異なる性質がある可能性について議論する。また、今後の本解析技術の展開について記述する。

第 10 章は結言である。

第2章 渦の定義とトポロジー・渦特性を定める不変量

翼端渦・スパイラル渦の構造を分析するためには、まず主流・後流中のこの渦を同定することが必要である。渦は乱流現象等多くの流れの特性において重要な役割を果たしており、渦を対象とした研究が精力的に続けられているが、第1章で記述した通り、「渦」或いは「渦流れ」の統一的な定義はまだ確立されていない。しかし、渦の定義はこれまでに多数提案されており、渦流れのトポロジー、圧力極小等様々な渦の物理特性に着目した定義がある。流体力学で良く知られ、かつ乱流の研究等で用いられている渦度では、旋回を伴う渦領域の必要条件にはなるが、必ずしも旋回流れを示すものではなく、せん断流と渦流れとの区別が困難である。

本章では、これまでに提案されているトポロジーを定める物理量と渦の定義 [5, 14] に基づき、ガリレイ変換に不変の旋回を伴う渦流れを定めるトポロジー不変量について考察し、本研究において用いる詳細なトポロジーを定める物理量を定義する。また、旋回平面上の圧力極小を定める定義について説明する。

2.1 渦のトポロジー不変量

ローカル（局所）速度による局所流れのトポロジーについては、Chong らによりガリレイ不変の流れの分類がよく用いられている [5]。ここでは、速度勾配テンソルの固有値を用いた分類がなされ、多くの乱流についてこれを用いて解析がなされてきた。しかし、これら固有値の物理的解釈がなされておらず、近年この物理解釈が与えられ、固有値のみでは流れのトポロジーは一意的に定められないことが証明された [14]。本研究では、翼端渦の構造を一意に定め、かつ渦の特性を分析するために、速度勾配テンソルの固有値、並びにトポロジーを詳細・一意に定める物理量を用いるものとする。以降では、局所流れのトポロジーにおいて、渦流れのトポロジーを定める物理量 [14] についてまとめる。

ある（直交）座標系 x_i ($i = 1, 2, 3$) における速度場 v_i において、ある点周りのローカル速度（local velocity）は、テイラー展開の一次近似を用いて

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} x_j \quad (2.1)$$

の様に速度勾配テンソル $\nabla \mathbf{v} = \mathbf{A} = [a_{ij}] = [\partial v_i / \partial x_j]$ ($i, j = 1, 2, 3$) を用いて表すことができる。ここで、本式 (2.1) 以降では総和規約（summation convention）を用いる。このとき、局所流れが

示す流れの幾何・トポロジーは、 $\nabla \mathbf{v}$ の固有値 ε_i 並びに ε_i に関する固有ベクトル $\boldsymbol{\xi}_i$ ($i = 1, 2, 3$) により表すことができ、即ち流れの軌道は

$$\hat{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^3 d_i e^{\varepsilon_i t} \boldsymbol{\xi}^{(i)} \quad (2.2)$$

$$d_i \in \mathbf{R} : \text{Const. } (i = 1, 2, 3)$$

となる。ここで d_i ($i = 1, 2, 3$) は実定数である。この幾何（トポロジー）は、慣性座標系に依らないガリレイ不変のトポロジーである [5]。

このとき、速度勾配テンソル $\nabla \mathbf{v}$ が共役複素固有値 $\varepsilon_R \pm i\psi$ ($\psi > 0$) と実固有値 ε_a を有するとき、これらの固有ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{\xi}_{pl} \pm i\boldsymbol{\eta}_{pl}$ 並びに $\boldsymbol{\xi}_{axis}$ とすると、流れの軌道は次式となる。即ち、

$$\mathbf{x} = 2d_1 e^{\varepsilon_R t} \{ \boldsymbol{\xi}_{pl} \cos(\psi t + d_2) - \boldsymbol{\eta}_{pl} \sin(\psi t + d_2) \} + d_3 e^{\varepsilon_a t} \boldsymbol{\xi}_{axis} \quad (2.3)$$

と表される。式 (2.3) によると、解軌道、即ち局所流れの様相は、 $\boldsymbol{\xi}_{pl}$ と $\boldsymbol{\eta}_{pl}$ で張られる平面上において ψ の強さで旋回し、 ε_R の符号に応じて収束（吸込み）或いは発散し（湧出し）、そして（渦）軸 $\boldsymbol{\xi}_{axis}$ に沿って進む或いは近づく様相を示している。 ε_R の符号は吸込み渦と湧出し渦の分類の指標とされ [5, 11]、トポロジーの解析に長年用いられてきた [18, 19]。しかし、第3章にて記述する様に、実際は吸込みと湧出しが混ざった平均的な吸込み／湧出し渦の分類しかできないことが示されている。渦の圧力極小や渦の伸長の特性を解析するためには、より正確で詳細な渦のトポロジーの同定が必要であるため、本研究では速度勾配テンソル $\nabla \mathbf{v}$ の固有値以外のトポロジーの物理量も併せて用いる。

2.2 渦流の対称性を定める不変量

式 (2.3) によると、局所流れにおける渦流れは、ベクトル $\boldsymbol{\xi}_{pl}$ と $\boldsymbol{\eta}_{pl}$ で張られる平面上において旋回する。そこで、これらのベクトル $\boldsymbol{\xi}_{pl}$ と $\boldsymbol{\eta}_{pl}$ で張られる平面を旋回平面 \mathcal{P} と呼ぶ。

ここで、 $\boldsymbol{\xi}_{pl}$ と $\boldsymbol{\eta}_{pl}$ は共に行列 $(\nabla \mathbf{v} - \varepsilon_R \mathbf{E})^2$ (\mathbf{E} : 単位行列) の固有値 $-\psi^2$ に関する固有値であることに注意する。しかし、これらは互いに直交する、即ち $\boldsymbol{\xi}_{pl} \perp \boldsymbol{\eta}_{pl}$ となる様に特定できる。この性質と導出については別の章（第7章）で記述する。また、 $\nabla \mathbf{v}$ の固有方程式より、 $\boldsymbol{\xi}_{pl}$ と $\boldsymbol{\eta}_{pl}$ の長さの比が定められることに注意する。つまり、複素固有値に関する固有方程式より

$$c = \frac{|\boldsymbol{\xi}_{pl}|}{|\boldsymbol{\eta}_{pl}|} \quad (2.4)$$

を定義することができる。

さて、渦流れのトポロジーは、この c により変化する。この様相を図 2.1 に示す。図 2.1 によると、速度勾配テンソル $\nabla \mathbf{v}$ が同じ共役複素固有値 $\varepsilon_R \pm i\psi$ を有していても、 $\boldsymbol{\xi}_{pl}$ と $\boldsymbol{\eta}_{pl}$ の長さの

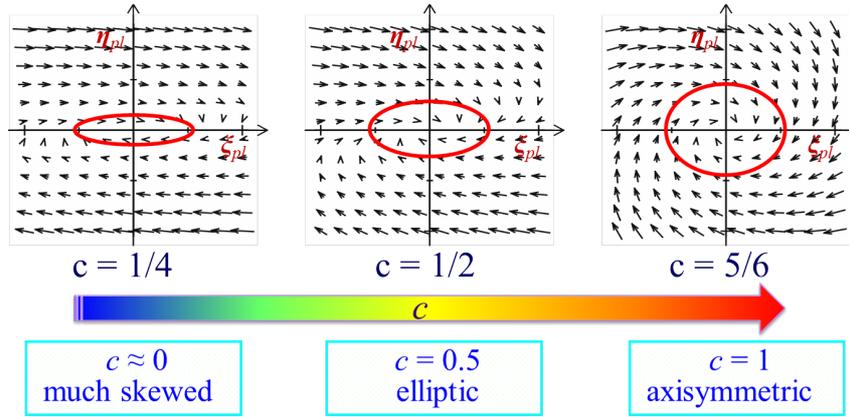


図 2.1: $\nabla \mathbf{v}$ の複素固有値 $\varepsilon_R \pm i\psi$ による渦流のトポロジーにおける c による流れの様相の変化。いずれの図も $(\varepsilon_R, \psi) = (-1, 2)$ であるが、 c により旋回のトポロジーが変化する。

比が大きい場合は、渦流は歪んだ楕円軌道を描き、また、この比が 1 に近づくと渦流は対称的な旋回軌道となる。

この様に、 c は渦流の対称性を定める不変量であり、また、トポロジーを一意的に定めるためにも必要な物理量である。

2.3 渦流の詳細なトポロジーを定める不変量

3次元の速度勾配テンソル $\nabla \mathbf{v}$ は少なくとも一つの実固有値 ε_a を有する。この実固有値 ε_a の実固有ベクトルを ξ_{axis} とすると、これに線形独立（非平行）なある平面における流れに注目し、周方向の流れについて分析する。

ここで、この平面と実固有ベクトル ξ_{axis} に関する座標系 \tilde{x}_i ($i = 1, 2, 3$) を定義する。まず二つの正規直交基底で該当平面を表すものとし、 \tilde{x}_3 軸は実固有ベクトル ξ_{axis} に平行になる様に定める。特に、 \tilde{x}_1 - \tilde{x}_2 平面に関する速度勾配テンソルの成分を $[\tilde{a}_{ij}] = [\partial \tilde{v}_i / \partial \tilde{x}_j]$ ($i, j = 1, 2$) とし、 \tilde{x}_1 - \tilde{x}_2 平面の速度を $\hat{\mathbf{v}} = (\hat{v}_1, \hat{v}_2)$ として表すと、 \hat{v}_i は

$$\begin{aligned} \hat{v}_i &= \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial \tilde{x}_j} \tilde{x}_j \\ &= \tilde{a}_{ij} \tilde{x}_j \quad (i, j = 1, 2) \end{aligned} \quad (2.5)$$

\hat{v}_i : \tilde{x}_1 - \tilde{x}_2 平面に関する速度成分

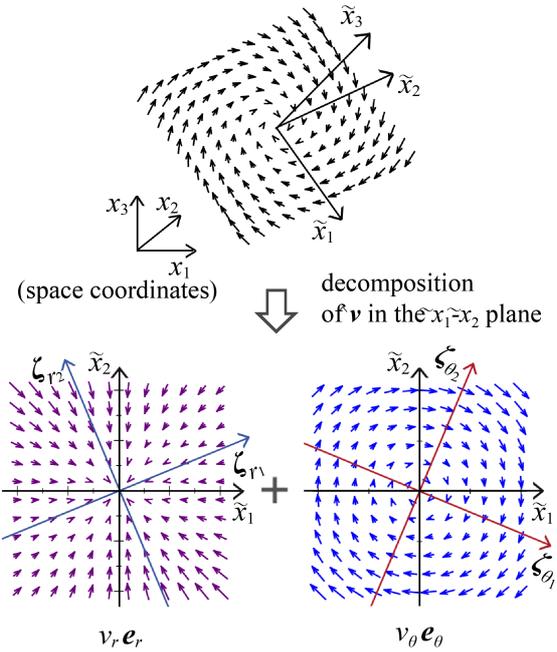


図 2.2: 詳細な流れのトポロジーの分析。 $\nabla \mathbf{v}$ の実固有値 ε_a の実固有ベクトル $\xi_{a, axis}$ に線形独立な平面の流れを半径方向速度 v_r 、周方向速度 v_θ に分解する。このとき、 v_r, v_θ はそれぞれの 2 次形式の固有値 $(\lambda_{r_i}, \lambda_{\theta_i}) \cdot$ 固有ベクトル $(\zeta_{r_i}, \zeta_{\theta_i})$ により表わされる。

となる。このとき、 $\hat{\mathbf{v}}$ を半径方向速度 v_r 、周方向速度 v_θ に分解し、

$$\hat{\mathbf{v}} = v_r \mathbf{e}_r + v_\theta \mathbf{e}_\theta \quad (2.6)$$

$$\mathbf{e}_r = 1/|\hat{\mathbf{x}}|(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \quad (2.7)$$

$$\mathbf{e}_\theta = 1/|\hat{\mathbf{x}}|(-\tilde{x}_2, \tilde{x}_1) \quad (2.8)$$

$$\hat{\mathbf{x}} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \quad (2.9)$$

$$|\hat{\mathbf{x}}| = \sqrt{\tilde{x}_i \tilde{x}_i} (i = 1, 2) \quad (2.10)$$

の様に表す (図 2.2 参照)。ここで、 $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta$ はそれぞれ半径方向、周方向の単位ベクトルを表す。以降では、周方向速度 v_θ 、半径方向速度 v_r についてそれぞれ分析する。

2.3.1 周方向流れのトポロジー不変量

周方向速度 v_θ は、 $\hat{\mathbf{v}}$ と \mathbf{e}_θ との内積 $(\hat{\mathbf{v}}, \mathbf{e}_\theta)$ により与えられる。式 (2.5) と (2.8) よりこれを計算すると、

$$\begin{aligned} v_\theta &= (\hat{\mathbf{v}}, \mathbf{e}_\theta) \\ &= \frac{1}{|\hat{\mathbf{x}}|} \{(\tilde{a}_{11}\tilde{x}_1 + \tilde{a}_{12}\tilde{x}_2)(-\tilde{x}_2) + (\tilde{a}_{21}\tilde{x}_1 + \tilde{a}_{22}\tilde{x}_2)\tilde{x}_1\} \\ &= \frac{1}{|\hat{\mathbf{x}}|} \{\tilde{a}_{21}\tilde{x}_1^2 + (\tilde{a}_{22} - \tilde{a}_{11})\tilde{x}_1\tilde{x}_2 - \tilde{a}_{12}\tilde{x}_2^2\} \\ &= \frac{1}{|\hat{\mathbf{x}}|} {}^t \hat{\mathbf{x}} \mathbf{Q}_\theta \hat{\mathbf{x}} \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\mathbf{Q}_\theta = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{21} & -(\tilde{a}_{11} - \tilde{a}_{22})/2 \\ -(\tilde{a}_{11} - \tilde{a}_{22})/2 & -\tilde{a}_{12} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

の様に v_θ は二次形式で表される。行列 \mathbf{Q}_θ はユニタリ行列であるから、二つの実固有値 λ_{θ_i} ($i = 1, 2$) を有し、本固有値とこれらの固有ベクトル $\boldsymbol{\zeta}_{\theta_i}$ ($i = 1, 2$) が v_θ の方向と強さを示す。式 (2.12) より、 λ_{θ_i} ($i = 1, 2; \lambda_{\theta_1} < \lambda_{\theta_2}$) は以下の式により与えられる。

$$\lambda_{\theta_1}, \lambda_{\theta_2} = \frac{\tilde{a}_{21} - \tilde{a}_{12}}{2} \pm \frac{\sqrt{(\tilde{a}_{11} - \tilde{a}_{22})^2 + (\tilde{a}_{12} + \tilde{a}_{21})^2}}{2} \quad (2.13)$$

ここで、swirlity ϕ は、本平面上の対象点周りの v_θ の同一方向性と相乗平均的強さを示し、

$$\phi := \text{sgn}(\lambda_{\theta_1} \lambda_{\theta_2}) \sqrt{|\lambda_{\theta_1} \lambda_{\theta_2}|} \quad (2.14)$$

ϕ : swirlity

により定義される物理量である [14]。ここで、記号 $:=$ は定義することを示す。また、 $\text{sgn}(\alpha)$ は $\alpha \in \mathbf{R}$ ($\alpha \neq 0$) の符号を示す。対象とする平面が速度勾配テンソル $\nabla \mathbf{v}$ の実固有値 ε_a の固有ベクトル $\boldsymbol{\xi}_a$ に対し線形独立、即ち非平行な任意の平面である場合、 $\lambda_{\theta_1} \lambda_{\theta_2}$ は

$$\lambda_{\theta_1} \lambda_{\theta_2} = Q - \frac{3}{4} \varepsilon_a^2 \quad (2.15)$$

の様に不変量で表され、 $\lambda_{\theta_1} \lambda_{\theta_2}$ 並びに ϕ は平面 ($\boldsymbol{\xi}_a$ に平行な平面を除く) に依存しない不変量である。

2.3.2 半径方向流れのトポロジー不変量

前項と同様に、対象平面における流れにおいて、式 (2.6) の半径方向速度 v_r について分析する。

v_r は、 $\hat{\boldsymbol{v}}$ と \boldsymbol{e}_r との内積 $(\hat{\boldsymbol{v}}, \boldsymbol{e}_r)$ により与えられる。即ち、式 (2.5) と (2.7) よりこれを求めると

$$\begin{aligned} v_r &= (\hat{\boldsymbol{v}}, \boldsymbol{e}_r) \\ &= \frac{1}{|\hat{\boldsymbol{x}}|} \{(\tilde{a}_{11}\tilde{x}_1 + \tilde{a}_{12}\tilde{x}_2)\tilde{x}_1 + (\tilde{a}_{21}\tilde{x}_1 + \tilde{a}_{22}\tilde{x}_2)\tilde{x}_2\} \\ &= \frac{1}{|\hat{\boldsymbol{x}}|} \{\tilde{a}_{11}\tilde{x}_1^2 + (\tilde{a}_{12} + \tilde{a}_{21})\tilde{x}_1\tilde{x}_2 + \tilde{a}_{22}\tilde{x}_2^2\} \\ &= \frac{1}{|\hat{\boldsymbol{x}}|} {}^t\hat{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{Q}_r\hat{\boldsymbol{x}} \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\boldsymbol{Q}_r = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & (\tilde{a}_{12} + \tilde{a}_{21})/2 \\ (\tilde{a}_{12} + \tilde{a}_{21})/2 & \tilde{a}_{22} \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

の様に、周方向速度 v_θ と同様な二次形式で表される。行列 \boldsymbol{Q}_r はユニタリ行列であるから、二つの実固有値 λ_{r_i} ($i = 1, 2; \lambda_{r_1} < \lambda_{r_2}$) を有し、これらの固有値と固有ベクトル $\boldsymbol{\zeta}_{r_i}$ ($i = 1, 2$) が v_r の方向と強さを示す。式 (2.17) より、 λ_{r_i} ($i = 1, 2$) は

$$\lambda_{r_1}, \lambda_{r_2} = \frac{\tilde{a}_{11} + \tilde{a}_{22}}{2} \pm \frac{\sqrt{(\tilde{a}_{11} - \tilde{a}_{22})^2 + (\tilde{a}_{12} + \tilde{a}_{21})^2}}{2} \quad (2.18)$$

により与えられる。ここで、sourcity σ は、本平面上の対象点周りの v_r の同一方向性と相乗平均的強さを示し、以下の式により定義される物理量である [14]。

$$\sigma := \text{sgn}(\lambda_{r_1}\lambda_{r_2})\sqrt{|\lambda_{r_1}\lambda_{r_2}|} \quad (2.19)$$

σ : sourcity

sourcity σ は、平面上の全周における吸込み・湧出し流れ、或いはこれらの混在した流れを分類することができる。半径方向速度の特性は渦構造の同定だけでなく、渦の伸長等の特性の分類を担うため、渦の解析において重要な物理量である [25]。

2.4 渦空間の定義

swirlity が正のとき、速度勾配テンソル $\nabla\boldsymbol{v}$ は複素固有値を有する。このとき、前章で示した流れの軌道は式 (2.3) によって示され、 $\boldsymbol{\xi}_{pl}$ と $\boldsymbol{\eta}_{pl}$ で張られる平面が旋回平面 \mathcal{P} となり、更には $\boldsymbol{\xi}_{pl} \perp \boldsymbol{\eta}_{pl}$ となる様に特定できる。ここで、旋回平面に注目した座標系を考えるが、このとき直交座標系を定めると流れの特性等を解析することが容易となる。そこで、 $\boldsymbol{\xi}_{pl}$ と $\boldsymbol{\eta}_{pl}$ 、また旋回平面 \mathcal{P} の法線ベクトルに平行な正規直交基底 $\tilde{\boldsymbol{e}}_i$ ($i = 1, 2, 3$) による座標系 \tilde{x}_i ($i = 1, 2, 3$) において速度勾配テンソル $\nabla\boldsymbol{v}$ の表現を考える。 $\tilde{\boldsymbol{e}}_1$ と $\tilde{\boldsymbol{e}}_2$ をそれぞれ $\boldsymbol{\xi}_{pl}$ と $\boldsymbol{\eta}_{pl}$ に平行にとり、 \tilde{x}_1 - \tilde{x}_2 平面を旋回平面とする。このときの速度勾配テンソル $\nabla\boldsymbol{v}$ を $\tilde{\boldsymbol{A}} (= [\tilde{a}_{ij}] (i, j = 1, 2, 3))$ とおくと、 $\tilde{\boldsymbol{A}}$ は

以下の形式により表される。

$$\check{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_R & c\psi & \check{a}_{13} \\ -\psi/c & \varepsilon_R & \check{a}_{23} \\ 0 & 0 & \varepsilon_a \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

これらの正規直交基底 \check{e}_i ($i = 1, 2, 3$) で表される空間を渦空間と呼ぶと、これは速度勾配テンソルの固有空間ではないことに注意する。即ち、基底 \check{e}_3 は実固有値 ε_a の固有ベクトル ξ_{axis} に平行ではないので、速度勾配テンソルの成分 \check{a}_{13} , \check{a}_{23} は一般に 0 ではない。

また、 \check{a}_{13} 並びに \check{a}_{23} は渦空間上の渦度ベクトル $\check{\omega} = [\check{\omega}_i]$ ($i = 1, 2, 3$) によって表すことができ、それぞれ

$$\check{a}_{13} = \check{\omega}_2 \quad (2.21)$$

$$\check{a}_{23} = -\check{\omega}_1 \quad (2.22)$$

である。このとき、 $\check{\omega}_1$ と $\check{\omega}_2$ は渦度ベクトルと基底との内積により求めることができる。即ち、これらの成分は、

$$\check{\omega}_1 = (\boldsymbol{\omega}, \check{e}_1) \quad (2.23)$$

$$\check{\omega}_2 = (\boldsymbol{\omega}, \check{e}_2) \quad (2.24)$$

から与えられる。或いは、速度勾配テンソルの共役複素固有ベクトルを用いると、

$$\check{\omega}_1 = (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\xi}_{pl})/|\boldsymbol{\xi}_{pl}| \quad (2.25)$$

$$\check{\omega}_2 = (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\eta}_{pl})/|\boldsymbol{\eta}_{pl}| \quad (2.26)$$

より求めることができる。従って、この渦度成分も不変量として考えることができる。

旋回平面 \mathcal{P} 上の渦度がゼロ、即ち $\check{\omega}_1 = \check{\omega}_2 = 0$ のとき、 $\check{a}_{13} = \check{a}_{23} = 0$ となり、このとき旋回平面 \mathcal{P} の法線ベクトル、或いは基底 \check{e}_3 が実固有値の固有ベクトル ξ_{axis} と平行になる。従って、渦軸とみなされる ξ_{axis} は、このとき旋回平面 \mathcal{P} に直交し、 $\xi_{axis} \perp \mathcal{P}$ である。

図 2.3 に示す様に、渦空間で渦流のトポロジーを考えると、渦度は旋回平面 \mathcal{P} の法線成分（旋回強さに関わる成分）と平行成分（渦軸の直交性等に関わる）に分類できてトポロジーの特性の分析が明確になる。また、同平面上の圧力極小を評価するときにも本空間を用いることができる。

2.5 旋回平面上の圧力極小を捉える渦定義

Δ 定義と同様に渦流れの主要な定義である Q 定義 [4] と λ_2 定義 [7] は、共に圧力極小に関連するものである。まずこれらの定義とトポロジーとの関連について示す。

Q 定義は、渦度テンソル ω_{ij} が歪み速度テンソル s_{ij} よりノルムが卓越、或いは圧力 p のラプラ

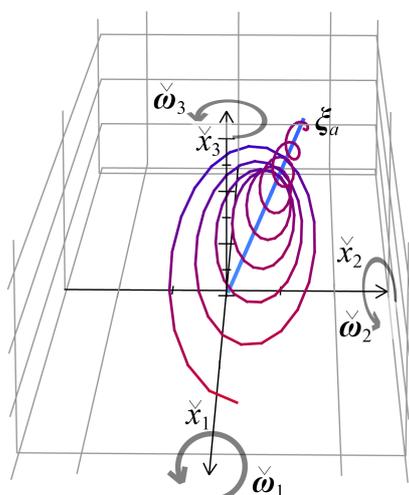


図 2.3: ξ_{pl} , η_{pl} また旋回平面 \mathcal{P} の法線ベクトルより定義された \check{x}_i 座標系 (渦空間) における局所トポロジーの渦流れ

シアンが正であることを定めている。渦度テンソル ω_{ij} と歪み速度テンソル s_{ij} のノルムの差は、速度勾配テンソル $\nabla \mathbf{v}$ の第二不変量を用いて表すことができる。即ち、 Q 定義の条件は、

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_i} &= \omega_{ij} \omega_{ij} - s_{ij} s_{ij} \\ &= 2Q > 0 \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$s_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.28)$$

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.29)$$

ρ : 密度

p : 圧力

ω_{ij} : 渦度テンソル

s_{ij} : 歪み速度テンソル

Q : $\nabla \mathbf{v}$ の第二不変量

と定められる。また、速度勾配テンソル $\nabla \mathbf{v}$ の複素固有値 $\varepsilon_R \pm i\psi$ とは

$$Q = \psi^2 - 3\varepsilon_R^2 \quad (2.30)$$

の関係がある [11, 14]。

ここで、速度勾配テンソル $\nabla \mathbf{v}$ が共役複素固有値 $\varepsilon_R \pm i\psi$ を有するとき、

$$\psi = \phi \quad (2.31)$$

であり、また、非圧縮性流体（連続の式を満たす）とすると、

$$\varepsilon_a = -2\varepsilon_R \quad (2.32)$$

である。このとき、式 (2.15) から式 (2.30) が導かれる [14]。

λ_2 定義では、渦流れによる圧力極小平面が存在することに着目し、Navier-Stokes 方程式から得られる圧力ヘシアン（ヘッセ行列）において、粘性項と歪みの非定常項を除外した圧力 p' に関する

$$-\frac{1}{\rho}p'_{,ij} = s_{ik}s_{kj} + \omega_{ik}\omega_{kj} \quad (2.33)$$

の固有値を判定する。ここで、下付添字のカンマの後のインデックスはその方向の偏微分を示す。式 (2.33) の固有値 λ_i ($i = 1, 2, 3; \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$) において、 $\lambda_2 < 0$ のとき固有値 λ_1, λ_2 の固有ベクトルで張られる平面（固有平面）で圧力極小となる。

しかし、 λ_2 定義が定める圧力極小平面は必ずしも旋回平面 \mathcal{P} ではない。以下では、旋回平面 \mathcal{P} 上の圧力極小について考える。渦空間における p' のヘッセ行列を

$$\begin{aligned} \check{\mathbf{H}} &= [\check{h}_{ij}] \\ &= [-\frac{1}{\rho}p'_{,ij}] \quad (i, j = 1, 2, 3) \end{aligned} \quad (2.34)$$

とおくと、圧力ヘシアン（ヘッセ行列）の式 (2.33) は、速度勾配テンソル $\nabla \mathbf{v} = \mathbf{A} = [a_{ij}] = [\partial v_i / \partial x_j]$ ($i, j = 1, 2, 3$) を用いて

$$\begin{aligned} \check{h}_{ij} &= -\frac{1}{\rho}p'_{,ij} \\ &= \frac{1}{2}(a_{ik}a_{kj} + a_{ki}a_{jk}) \end{aligned} \quad (2.35)$$

と表すことができる [15]。式 (2.35) について、行列を用いて本式を表すと

$$\check{\mathbf{H}} = \frac{1}{2}(\check{\mathbf{A}}\check{\mathbf{A}} + {}^t\check{\mathbf{A}}\check{\mathbf{A}}) \quad (2.36)$$

となる。これに式 (2.20) を代入して展開すると

$$\check{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_R^2 - \psi^2 & (c - 1/c)\varepsilon_R\psi & \iota_1 \\ (c - 1/c)\varepsilon_R\psi & \varepsilon_R^2 - \psi^2 & \iota_2 \\ \iota_1 & \iota_2 & \varepsilon_a^2 \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

$$\iota_1 := \frac{1}{2}(-\varepsilon_R\check{a}_{13} + c\psi\check{a}_{23}) \quad (2.38)$$

$$\iota_2 := \frac{1}{2}(-\frac{1}{c}\psi\check{a}_{13} - \varepsilon_R\check{a}_{23}) \quad (2.39)$$

が得られる。 \mathcal{P} 上の $p'(\check{p})$ の特性は、 $\check{\mathbf{H}}$ の \mathcal{P} に関わるブロック行列 $\check{\mathbf{H}}_{pl} = [\check{h}_{ij}]$ ($i, j = 1, 2$) によ

り定められ、 $\check{\mathbf{H}}_{pl}$ の固有値 $\check{\lambda}_i$ ($i = 1, 2; \check{\lambda}_1 \leq \check{\lambda}_2$) は

$$\check{\lambda}_1, \check{\lambda}_2 = (\varepsilon_R^2 - \psi^2) \mp \left| \left(c - \frac{1}{c} \right) \varepsilon_R \right| \psi \quad (2.40)$$

$\check{\lambda}_i$: 式 (2.35) に関する \mathcal{P} 上の圧力ヘシアン ($i = 1, 2$)

となる。ここで、旋回平面 \mathcal{P} 上の基底 $\check{\mathbf{e}}_i$ ($i = 1, 2$) において、これらがブロック行列 $\check{\mathbf{H}}_{pl} = [\check{h}_{ij}]$ ($i, j = 1, 2$) の固有値 $\check{\lambda}_1, \check{\lambda}_2$ のそれぞれの固有ベクトル $\check{\mathbf{e}}'_1, \check{\mathbf{e}}'_2$ に平行になるように $\check{\mathbf{e}}_3$ を軸として回転させると、この座標系における圧力ヘッセ行列 $\check{\mathbf{H}}'$ はこれらの新しい基底によって構成されたユニタリー行列によって変換され、以下の形式により表される。

$$\check{\mathbf{H}}' = \begin{bmatrix} \check{\lambda}_1 & 0 & \iota'_1 \\ 0 & \check{\lambda}_2 & \iota'_2 \\ \iota'_1 & \iota'_2 & \varepsilon_a^2 \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

$$\iota'_i := (\check{\mathbf{e}}'_i \cdot \boldsymbol{\iota}) \quad (i, j = 1, 2) \quad (2.42)$$

$$\boldsymbol{\iota} := (\iota_1, \iota_2) \quad (2.43)$$

$\check{\lambda}_1, \check{\lambda}_2 < 0$ のとき \check{p} が極小となり、この条件は簡潔に

$$c' |\varepsilon_R| < \psi \quad (2.44)$$

$$c' = \begin{cases} c & (1 \leq c) \\ \frac{1}{c} & (c < 1) \end{cases} \quad (2.45)$$

と与えられる [15]。式 (2.44) は、渦の強さに関する条件が与えられているが、渦流れの対称性が閾値を定めていることに注意する。即ち、渦流のトポロジー (対称性) が圧力極小に対して規定しており、強く歪んだ渦流れは旋回による圧力極小を有さない。

さて、前述した様に、 λ_2 定義 [7] は、圧力のヘッセ行列において歪み速度テンソルの非定常項や粘性項の影響を除外したトポロジー (flow kinematics) による圧力極小を定めているが、圧力極小平面の存在を評価基準としているだけで、旋回平面 \mathcal{P} 上の圧力特性は特定していないことに注意する。旋回平面に平行な渦度成分が無視できない場合などは、これにより特定する圧力極小平面は旋回平面 \mathcal{P} とは異なり、旋回と関連のない渦度成分や歪みにより影響される。

一方、 Q 定義 [4] は、3次元の圧力のラプラシアンであり、このような特定の面に対する圧力極小の評価は難しい。更に、渦流れの対称性等との関連付けは困難である。

尚、 $\check{\lambda}_2 < 0$ の定義 ($\check{\lambda}_2$ 定義) は、 λ_2 定義を満たすことが数学的に証明されており、圧力極小面の存在ではなく旋回平面 \mathcal{P} における圧力極小を特定するため $\check{\lambda}_2$ 定義は λ_2 定義より厳しい条件になる。また、 $\check{\lambda}_2$ 定義は、旋回平面 \mathcal{P} に垂直な渦度成分が歪み速度テンソルのノルムを卓越するという条件を満たしており、旋回平面 \mathcal{P} 上で渦度が歪み速度テンソルのノルムより強いという

観点では Q 定義を満たしている [15]。従って、本定義は、圧力極小に関するこれらの渦定義を満たすと共に、ヘシアン $\check{\lambda}_2$ は旋回平面 \mathcal{P} 上の圧力極小をトポロジーと関連付けて定めている。

これより、渦定義のみならず、渦流れによる旋回平面 \mathcal{P} 上の圧力極小の特性を評価する上で $\check{\lambda}_i$ を用いることは有効であると考えられる。

第3章 渦の解析

第2章で示した渦の定義、トポロジー不変量を用いて翼端渦・スパイラル渦の渦構造を解析する方法について示す。

また、本研究では、渦構造の解析の他、渦のトポロジーから導かれる渦特性についても併せて解析を行う。即ち、渦流れに伴う圧力極小、また渦の伸長 (vortex stretching) についても解析する。

これらの解析のためには、旋回平面上を特定し、本平面上の swirlity や sourcity、渦流の対称性を求め、これより圧力極小の特性を解析する。更に、渦の伸長では、旋回平面 \mathcal{P} 上の半径方向速度の特性が伸長の特性を分類するが、トポロジー不変量 (sourcity) がこれを評価する。

本章は、これらについて説明し、本研究において速度勾配テンソルを評価した後の渦の解析方法を定める。

3.1 渦領域の同定

第2章では幾つかの渦定義について説明したが、これらの定義は各点において渦定義を満たす閉領域を渦領域として同定するものである (local approach)。それぞれの渦定義を満たす領域が当該渦定義における「渦」となるが、必ずしも他の渦定義を満たす訳ではなく、他の渦定義では「渦」とみなされないこともある。例えば、swirlity が正、即ち $0 < \phi$ の領域は各点において渦流れである領域であるが、必ずしも圧力極小に関わる Q 、 λ_2 、また $\check{\lambda}_2$ 定義を満たさない。更に、渦流れの対称性の低い歪んだ渦流れは旋回平面上で圧力極小の性質を有しない [15]。

本研究において分析するスパイラル渦の速度構造はまだ報告例に乏しいため、できるだけ条件を加えずに渦領域を特定することが望ましい。そこで、本研究では、

$$\text{渦領域} \Leftrightarrow 0 < \phi \tag{3.1}$$

と定める。この条件は、速度勾配テンソル $\nabla \boldsymbol{v}$ が複素固有値を有するという Δ 定義を満たすことと等価である [14]。

一方で、圧力極小に関する $\check{\lambda}_2$ 定義は、スパイラル渦の特性を評価する際に用いる。以降では、各トポロジー不変量等の算出について記述する。

3.2 トポロジー不変量の評価

渦構造を同定するためのトポロジー不変量について、まず3次元速度勾配テンソル $\nabla \mathbf{v}$ の固有値と固有ベクトルは旋回平面 \mathcal{P} や渦流れの対称性 c を定める上で必要である。

但し、この固有値だけでは流れの詳細は特定されないため、これら以外のトポロジー不変量を評価する必要がある。

渦解析では、3次元の速度勾配テンソル $\nabla \mathbf{v}$ の固有方程式を解き、固有値並びに固有ベクトルを全て求める。また、本テンソルが共役複素固有値 $\varepsilon_R \pm i\psi$ を有する場合、共役複素固有ベクトルの実ベクトル ξ_{pl} 、虚ベクトル η_{pl} は、それぞれ直交する様に方向を定める [14] (第7章で示す)。このとき、渦流対称性の不変量 c が式 (2.4) より定められる。また、渦空間や渦軸と旋回平面との角度を評価するためには、全ての固有ベクトルの評価は必須である。以上より、下記に示す量は評価する必要がある。

1. ε_R (並びに ε_a)
2. ψ
3. c
4. $\xi_{pl}, \eta_{pl}, \xi_{axis}$

特に、 c は流れを一意に定めるために必要であり、また渦流の対称性は渦の発達や減衰と関わりがあると考えられる。

一方、速度勾配テンソル $\nabla \mathbf{v}$ の固有値だけでは、流れの詳細を定めるのが困難であるため、併せて以下のトポロジーに関する固有値と物理量を評価する。

1. λ_{θ_i} ($i = 1, 2$)
2. λ_{r_i} ($i = 1, 2$)
3. swirlity ϕ
4. sourcity σ

旋回平面 \mathcal{P} 上において、 $\lambda_{\theta_1}, \lambda_{\theta_2}$ は式 (2.13) 及び (2.20) より

$$\lambda_{\theta_1}, \lambda_{\theta_2} = -c\psi, -\frac{1}{c}\psi \quad (3.2)$$

となり、速度勾配テンソル $\nabla \mathbf{v}$ の共役複素固有値の虚部 ψ は swirlity と等しい。即ち、式 (2.14) 及び (3.2) より

$$\phi = \psi \quad (3.3)$$

である [14]。

次に、 $\lambda_{r_1}, \lambda_{r_2}$ は、旋回平面 \mathcal{P} 上において式 (2.18) 及び (2.20) より

$$\lambda_{r_1}, \lambda_{r_2} = \varepsilon_R \pm \frac{1}{2} \left| c - \frac{1}{c} \right| \psi \quad (3.4)$$

により与えられる。従って、sourcity σ は

$$\sigma = \text{sgn}(\iota) \sqrt{|\iota|} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \iota &= \lambda_{r_1} \lambda_{r_2} \\ &= \varepsilon_R^2 - \frac{1}{4} \left(c - \frac{1}{c} \right)^2 \psi^2 \end{aligned} \quad (3.6)$$

である。

ここで、式 (3.4) より

$$\varepsilon_R = \frac{\lambda_{r_1} + \lambda_{r_2}}{2} \quad (3.7)$$

であることに注意する。従って、 ε_R は平均的な半径方向速度の方向と大きさを示し、全周における吸込みや湧出し流れ、或いは吸込み／湧出しの混在する流れを特定することはできない。渦流における半径方向速度は、圧力極小だけでなく渦の伸長にも関わるため、 ε_R のみの分析ではなく、sourcity σ 等の評価を加えることが渦構造の同定のために必要である。

3.3 圧力極小の評価

旋回平面 \mathcal{P} 上における圧力ヘシアン $\check{\lambda}_i$ ($i = 1, 2$) ($i = 1, 2; \check{\lambda}_1 \leq \check{\lambda}_2$) は、式 (2.40) より各々について表すと

$$\check{\lambda}_1 = (\varepsilon_R^2 - \psi^2) - \left| \left(c - \frac{1}{c} \right) \varepsilon_R \right| \psi \quad (3.8)$$

$$\check{\lambda}_2 = (\varepsilon_R^2 - \psi^2) + \left| \left(c - \frac{1}{c} \right) \varepsilon_R \right| \psi \quad (3.9)$$

である。旋回平面 \mathcal{P} 上の圧力極小の条件並びに $\check{\lambda}_2$ 定義による渦の評価基準は式 (2.44) により定められているが、本研究では渦定義としてではなく旋回平面 \mathcal{P} 上の圧力極小の評価として圧力ヘシアンを用いる。 $\check{\lambda}_1 \leq \check{\lambda}_2$ であるから、本解析では圧力極小の有無とその強さを示す量として $\check{\lambda}_2$ のヘシアンを用いる。

3.4 渦の伸長の評価

Navier-Stokes 方程式から導かれる渦度方程式 [44]

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} = s_{ij} \omega_j + \nu \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial x_i \partial x_i} \quad (3.10)$$

ν : 動粘性係数

において、右辺第1項を渦空間で考える。このとき、旋回平面 \mathcal{P} 上で全周から吸込み流れがあると、渦の伸長による渦度の増分は旋回に関する渦度成分のみに集中され、効果的な渦の伸長が得られる。これは sourcity σ により伸長の分類が可能である [25]。

更に、式 (3.10) において、両辺に渦度 ω_i を乗じると

$$\frac{1}{2} \frac{D(\omega_i \omega_i)}{Dt} = \omega_i s_{ij} \omega_j + \nu \omega_i \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial x_i \partial x_i} \quad (3.11)$$

$$\frac{D}{Dt} f := \frac{\partial f}{\partial t} + v_j \frac{\partial f}{\partial x_j} \quad (3.12)$$

f : 任意の関数

が得られる [16]。式 (3.11) の右辺第一項 $\omega_i s_{ij} \omega_j$ は、エンストロフィーの生成項である。本研究では、エンストロフィーの生成項においても渦領域で評価する。この生成項を $\delta = \omega_i s_{ij} \omega_j$ と表すと、渦空間を用いて以下の様な簡潔な形式で表される [25]。

$$\begin{aligned} \delta &:= \omega_i s_{ij} \omega_j \\ &= \check{\lambda}_{r_1} \hat{\omega}_1^2 + \check{\lambda}_{r_2} \hat{\omega}_2^2 + \check{\lambda}_{r_3} \check{\omega}_3^2 \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\hat{\omega}_1 := (\check{\omega}_1 - \check{\omega}_2) / \sqrt{2} \quad (3.14)$$

$$\hat{\omega}_2 := (\check{\omega}_1 + \check{\omega}_2) / \sqrt{2} \quad (3.15)$$

δ : エンストロフィーの生成項

$\check{\omega}_i$: 渦空間における渦度ベクトル ($i = 1, 2, 3$)

この様に、渦の伸長は半径方向速度 v_r の特性（固有値）に依存する。渦流れにおいて、旋回平面 \mathcal{P} の全周からの吸込み流れによる歪みを受けて旋回強さに関する渦度を強化する、という渦の伸長の描像 [44] は、sourcity σ が $0 < \sigma$ のときに限られ、従って sourcity σ がこの特性を分類する [25]。

3.5 詳細なトポロジーの同定

ある平面上における半径・周方向速度 v_r, v_θ は、それぞれ $\lambda_{r_i}, \lambda_{\theta_i}$ ($i = 1, 2; \lambda_{r_1} < \lambda_{r_2}, \lambda_{\theta_1} < \lambda_{\theta_2}$) の固有ベクトル $\zeta_{r_i}, \zeta_{\theta_i}$ ($i = 1, 2$) の方向に従い強さが変わる。また、 ζ_{r_1}, ζ_{r_2} は二次形式の性質より直交し、 ζ_{θ_i} についても同様である。更に、 ζ_{r_i} と ζ_{θ_i} は $\pi/4$ だけ方向がずれ、 ζ_{θ_i} ($i = 1, 2$) は \tilde{e}_i に平行である [14]。

v_r, v_θ の対称性 (歪み度) は、 $\lambda_{r_i}, \lambda_{\theta_i}$ の比により表わすことができる。渦流れの場合、旋回平面 P 上の $\lambda_{r_i}, \lambda_{\theta_i}$ ($i = 1, 2$) は式 (3.2) と (3.4) より共に c が関わっている。従って、 c は渦流れ全体の対称性に関わる。また、速度勾配テンソル $\nabla \mathbf{v}$ が同じ固有値を有しても、 c により流れの様相は異なる。この例を図 3.1 に示す。図 3.1 では $\varepsilon_R < 0$ の場合のトポロジーを示す。 c が 1 に近い場合、 v_r, v_θ 共に流れの対称性が高く、 $\lambda_{r_i}, \lambda_{\theta_i}$ の二次形式は真円に近い楕円となり、また、 $\varepsilon_R < 0, 0 < \sigma$ であるので全周で吸込み流れを有する。 c が 1 から遠ざかる (0 に近い) 場合、 v_θ の二次形式の楕円は歪み、 v_r では双曲線かつ $\sigma < 0$ となり、吸込み流れ (ζ_{r_1} 方向) と湧出し流れ (ζ_{r_2} 方向) の双方が存在する様になる。 ε_R が吸込み渦と湧出し渦の区別が難しいことはこの例からも明らかである。

式 (3.5) と (3.6) が示す様に、全周の吸込み (湧出し) 流れを有する、即ち $0 < \sigma$ であるためには、相応に高い対称性が要求され、渦の強さに応じてその要求は高くなる。また、速度勾配テンソル $\nabla \mathbf{v}$ が定める流れの分類では、その固有値だけではなく、渦流の対称性を表す c を考慮しなければ一意に流れを特定することはできない。また、渦の伸長の特性を詳細に分析するためには、速度勾配テンソル $\nabla \mathbf{v}$ の固有値よりむしろ半径・周方向速度 v_r, v_θ の固有値・固有ベクトルが重要な物理量となる。

本研究における渦の解析では、この様な詳細なトポロジーの特性、また、物理特性として圧力極小、渦の伸長を併せて解析する。

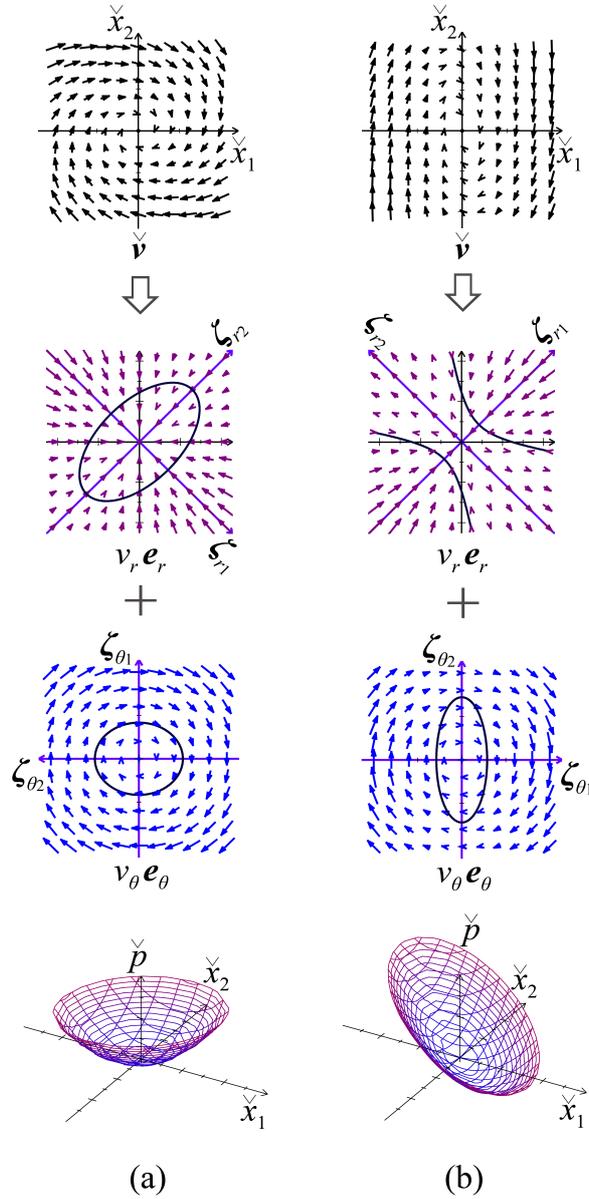


図 3.1: 旋回平面 \mathcal{P} における流れの様相 (\hat{v}) と分解した半径・周方向速度 $v_r \mathbf{e}_r, v_\theta \mathbf{e}_\theta$ の流れの様相と ${}^t \hat{\mathbf{x}} \mathbf{Q}_\theta \hat{\mathbf{x}}, {}^t \hat{\mathbf{x}} \mathbf{Q}_r \hat{\mathbf{x}}$ のコンターにおける c による変化。最下段の図は、各トポロジーにおける旋回平面 \mathcal{P} 上の圧力 \hat{p} の様相を示す。(a) と (b) は、共に同じ $\nabla \mathbf{v}$ の複素固有値 $\varepsilon_R \pm i\psi$ ($\varepsilon_R = -1, \psi = 3$) であるが、 c が異なる。ここで、(a) $c = 1.2$ 並びに $\sigma \cong 0.84$ 、また、(b) $c = 0.4$ 並びに $\sigma \cong -3.0$ である。速度場を示すベクトル図では、ベクトルの長さは各図において調整されている。

第4章 2次元 ∇v から3次元 ∇v を同定する解析理論

本章では、異なるアジマス角における2次元の速度データから3次元の速度勾配テンソルを評価する解析理論について記述する。各アジマス角において測定する2次元の速度データは互いに平行な平面とし、実験における測定のための平面の角度を変更する必要がないことを条件として3次元速度勾配テンソルを導出することを考える。

4.1 速度勾配テンソルの線型変換

本解析理論では、複数の異なるアジマス角における平面上で速度データ（2次元）を取得するとき、各々のアジマス角のスパイラル渦は同じ渦構造、状態であるものとする。このとき、スパイラル渦は、速度を測定する平面の法線ベクトルに対してある角度をもって通過するが、その角度はアジマス角に応じて異なる。測定する平面が水平面であるとする、アジマス面が水平面を示すアジマス角であるとき、スパイラル渦は測定面に垂直な方向に発生し、またこの測定面に垂直な方向に渦軸が通過する様な状態となる。一方、アジマス角が鉛直方向を示す箇所における水平面では、同渦は平面に平行に通過・発生する。この状況を図 4.1 に示す。以降では、図 4.1 に示すように翼が水平方向にあるときのアジマス角 θ を 0° とし、上流から下流に向かった方向から見て時計回りの方向を正としてアジマス角を定義する。

次に、速度勾配テンソルを評価するための空間座標系（直交座標系） x_i ($i = 1, 2, 3$) を定義する。速度勾配テンソル並びに渦解析を容易にするために、正規直交基底 e_i ($i = 1, 2, 3$) を用いた右手系の座標系とする。まず、上流から下流に向かう主流方向を e_1 即ち x_1 軸とし、 x_1 - x_2 平面がアジマス角 0° における水平面（アジマス面）を定義する様に e_2 即ち x_2 軸を定める。原点は、渦の中心とする。また、アジマス角 $\theta = 0^\circ$ における水平面に対して上向きの法線を e_3 即ち x_3 軸とすれば、図 4.1 に示す様な座標系が定義される。但し、アジマス角 $\theta = 0^\circ$ における水平面上の渦中心が原点である。本章で用いる座標系 x_i ($i = 1, 2, 3$) は、速度測定における空間座標系と平行であるが、原点がこのアジマス面における渦の中心であることに注意する。

本座標系において、速度場（ベクトル）を v_i ($i = 1, 2, 3$) とすると、速度場は x_1 - x_2 平面上において v_1 と v_2 成分が測定されることになる。平面上のある点において、アジマス角 $\theta = 0^\circ$ におけるその点の速度勾配テンソル ∇v を $\nabla v = \mathbf{A}(0) = [a_{ij}] = [\partial v_i / \partial x_j]$ ($i, j = 1, 2, 3$) の様に表す。また、速度勾配テンソル ∇v の成分において、測定した速度成分の平面上の空間微分に関するテ

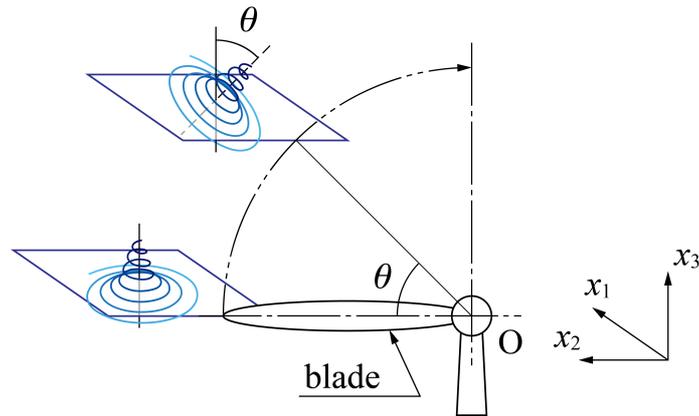


図 4.1: アジマス面 ($\theta = 0$) とアジマス角 θ における測定面と測定面を通るスパイラル渦。スパイラル渦は、その測定面におけるアジマス角 θ の分だけ傾いて測定面を通過する。(本理論で用いる座標系は、速度測定における空間座標系と平行な座標系であるが、原点が異なることに注意する。本理論では、アジマス角 $\theta = 0^\circ$ における水平面上の渦中心が原点である。)

ンソル成分はバーを付けて表すものとする、3次元の速度勾配テンソルは以下の形式

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}(0) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} & a_{13} \\ \bar{a}_{21} & \bar{a}_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \tag{4.1}
 \end{aligned}$$

で表される。即ち、 \bar{a}_{ij} ($i, j = 1, 2$) については、測定された速度場から有限差分等により直接評価することができる速度勾配テンソル成分であり、残りの5成分については未知となる。

次に、アジマス角 θ が $\theta \neq 0$ であるときの速度勾配テンソルについて考える。このとき、対象点において速度データを測定するとき、スパイラル渦は測定面の法線から角度が θ だけ時計回りにずれて渦軸が伸びる或いは通過する様な状態で速度を測定することになる。従って、 x_1 軸を回転軸として測定面が θ だけ反時計回りに回転した平面における座標系にて速度を測定することになる。即ち、基底 e_1 は変わらずに e_2 と e_3 が e_1 を軸に時計回りに θ だけ (図 4.1 において上流から下流方向を見たときには反時計回りに θ) 回転した座標系において、このスパイラル渦の速度場を測定している。この回転した3次元の座標系における速度勾配テンソルを $\mathbf{A}(\theta)$ の様に表すと、 $\mathbf{A}(\theta)$ とアジマス角 $\theta = 0$ における同テンソル $\mathbf{A}(0)$ との間には、線型変換の関係にて結び付けられる。

アジマス角 θ における ($\mathbf{A}(\theta)$ に関する) これらの正規直交基底を \mathbf{e}'_i ($i = 1, 2, 3$) とすると、これらの基底の成分は

$$\begin{aligned}\mathbf{e}'_1(\theta) &= \mathbf{e}_1 \\ &= (1, 0, 0)\end{aligned}\tag{4.2}$$

$$\mathbf{e}'_2(\theta) = (0, \cos \theta, -\sin \theta)\tag{4.3}$$

$$\mathbf{e}'_3(\theta) = (0, \sin \theta, \cos \theta)\tag{4.4}$$

となる。これらの基底から構成される行列を

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_\theta &= [\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2(\theta), \mathbf{e}'_3(\theta)] \\ &= [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}'_2(\theta), \mathbf{e}'_3(\theta)] \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{4.5}$$

とすると、 \mathbf{P}_θ はユニタリ行列であり

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_\theta^{-1} &= {}^t\mathbf{P}_\theta \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{4.6}$$

である。ここで、上付き添え字 t は転置を表す。このとき、 $\mathbf{A}(\theta)$ と $\mathbf{A}(0)$ は \mathbf{P}_θ によって関連付けることができる。即ち、 $\mathbf{A}(\theta)$ は $\mathbf{A}(0)$ と \mathbf{P}_θ を用いて以下の式によって表わされる。

$$\mathbf{A}(\theta) = \mathbf{P}_\theta^{-1}\mathbf{A}(0)\mathbf{P}_\theta\tag{4.7}$$

$\mathbf{A}(\theta)$ を $\mathbf{A}(\theta) = [a'_{ij}]$ ($i, j = 1, 2, 3$) の様に表し、式 (4.7) について各成分に展開する。式 (4.5) と

(4.6) を式 (4.7) に代入すると、

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}(\theta) &= [a'_{ij}] \\
&= \mathbf{P}_\theta^{-1} \mathbf{A}(0) \mathbf{P}_\theta \\
&= \mathbf{P}_\theta^{-1} \begin{bmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} & a_{13} \\ \bar{a}_{21} & \bar{a}_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} \cos \theta - a_{13} \sin \theta & \bar{a}_{12} \sin \theta + a_{13} \cos \theta \\ \bar{a}_{21} & \bar{a}_{22} \cos \theta - a_{23} \sin \theta & \bar{a}_{22} \sin \theta + a_{23} \cos \theta \\ a_{31} & a_{32} \cos \theta - a_{33} \sin \theta & a_{32} \sin \theta + a_{33} \cos \theta \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} \cos \theta - a_{13} \sin \theta & \bar{a}_{12} \sin \theta + a_{13} \cos \theta \\ \bar{a}_{21} \cos \theta - a_{31} \sin \theta & -(\bar{a}_{22} + a_{32}) \cos \theta \sin \theta & +(\bar{a}_{22} - a_{33}) \cos \theta \sin \theta \\ \bar{a}_{21} \sin \theta + a_{31} \cos \theta & +(\bar{a}_{22} - a_{33}) \cos \theta \sin \theta & +(\bar{a}_{22} + a_{32}) \cos \theta \sin \theta \\ \bar{a}_{22} \cos^2 \theta & +a_{33} \sin^2 \theta & -a_{23} \cos^2 \theta \\ a_{32} \cos^2 \theta & -a_{23} \sin^2 \theta & a_{33} \cos^2 \theta \\ -a_{32} \sin^2 \theta & +\bar{a}_{22} \sin^2 \theta & -a_{33} \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (4.8)
\end{aligned}$$

となる。或いは、変数を整理して

$$\mathbf{A}(\theta) = [a'_{ij}] = \begin{bmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} \cos \theta - a_{13} \sin \theta & \bar{a}_{12} \sin \theta + a_{13} \cos \theta \\ \bar{a}_{21} \cos \theta - a_{31} \sin \theta & f_1 \cos \theta - f_2 \sin \theta & f_3 \cos \theta - f_4 \sin \theta \\ \bar{a}_{21} \sin \theta + a_{31} \cos \theta & f_1 \sin \theta + f_2 \cos \theta & f_3 \sin \theta + f_4 \cos \theta \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

$$f_1 = \bar{a}_{22} \cos \theta - a_{23} \sin \theta \quad (4.10)$$

$$f_2 = a_{32} \cos \theta - a_{33} \sin \theta \quad (4.11)$$

$$f_3 = \bar{a}_{22} \sin \theta + a_{23} \cos \theta \quad (4.12)$$

$$f_4 = a_{32} \sin \theta + a_{33} \cos \theta \quad (4.13)$$

の様に a'_{ij} 成分が表わされる。速度勾配テンソルの具体的な成分を用いて各成分同士の関連を表

すと、 $a'_{ij} = \partial v'_i / \partial x'_j$ ($i, j = 1, 2, 3$) の各成分は以下の形式となる。

$$\frac{\partial v'_1}{\partial x'_1} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \quad (4.14)$$

$$\frac{\partial v'_1}{\partial x'_2} = \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \cos \theta - \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \sin \theta \quad (4.15)$$

$$\frac{\partial v'_1}{\partial x'_3} = \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \sin \theta + \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \cos \theta \quad (4.16)$$

$$\frac{\partial v'_2}{\partial x'_1} = \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \cos \theta - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \sin \theta \quad (4.17)$$

$$\frac{\partial v'_2}{\partial x'_2} = \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \cos^2 \theta - \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right) \cos \theta \sin \theta + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \sin^2 \theta \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial v'_2}{\partial x'_3} = \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \cos^2 \theta + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_2} - \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right) \cos \theta \sin \theta - \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \sin^2 \theta \quad (4.19)$$

$$\frac{\partial v'_3}{\partial x'_1} = \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \sin \theta + \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \cos \theta \quad (4.20)$$

$$\frac{\partial v'_3}{\partial x'_2} = \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \cos^2 \theta + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_2} - \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right) \cos \theta \sin \theta - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \sin^2 \theta \quad (4.21)$$

$$\frac{\partial v'_3}{\partial x'_3} = \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \cos^2 \theta + \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) \cos \theta \sin \theta + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \sin^2 \theta \quad (4.22)$$

これらの座標変換の関係式では、測定値から得られる変数を示すバーを外して表している。また、この変換では、 x_1 方向のベクトル或いは空間微分について

$$v'_1 = v_1 \quad (4.23)$$

$$\frac{\partial f'}{\partial x'_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \quad (4.24)$$

(f, f' : 基底 e_i, e'_i により表わされる座標系における関数)

であることに注意する。

一方、測定面 $\Pi(\theta)$ において、速度勾配テンソルの成分 a'_{ij} ($i, j = 1, 2$) は測定データから評価することができる。従って、式 (4.8) 或いは式 (4.9)~(4.13) において、 a'_{ij} ($i, j = 1, 2$) の成分に関する式は、未知の速度勾配テンソル成分 $a_{13}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33}$ を求めるための式に用いることができる。

次節では、これらの未知成分に関する解法について記述する。

4.2 未知の速度勾配テンソル成分の解法

前節では線型変換を用いて異なるアジマス角における平面の速度勾配テンソル成分の関係式を導出した。この線型変換の関係、また物理条件を考慮して未知の速度勾配テンソルの成分を評価することを考える。

まず、式 (4.8) 或いは式 (4.9)~(4.13) における a'_{ij} の既知の成分、 \bar{a}'_{ij} ($i, j = 1, 2$) に関する式についてまとめると次式の様になる。

$$\bar{a}'_{11} = \bar{a}_{11} \quad (4.25)$$

$$\bar{a}'_{12} = \bar{a}_{12} \cos \theta - a_{13} \sin \theta \quad (4.26)$$

$$\bar{a}'_{21} = \bar{a}_{21} \cos \theta - a_{31} \sin \theta \quad (4.27)$$

$$\bar{a}'_{22} = \bar{a}_{22} \cos^2 \theta - (a_{23} + a_{32}) \cos \theta \sin \theta + a_{33} \sin^2 \theta \quad (4.28)$$

式 (4.25) の 2 成分は共に既知のものであり、未知成分を求める式としては用いることができない。残りの 3 式を整理すると

$$a_{13} = \frac{1}{\sin \theta} (\bar{a}_{12} \cos \theta - \bar{a}'_{12}) \quad (4.29)$$

$$a_{31} = \frac{1}{\sin \theta} (\bar{a}_{21} \cos \theta - \bar{a}'_{21}) \quad (4.30)$$

$$a_{32} = \frac{1}{\cos \theta \sin \theta} (\bar{a}_{22} \cos^2 \theta - a_{23} \cos \theta \sin \theta + a_{33} \sin^2 \theta - \bar{a}'_{22}) \quad (4.31)$$

となる。

式 (4.29) と (4.30) は、速度勾配テンソルの未知成分 a_{13}, a_{31} を解くために用いることができる。式 (4.31) では、未知成分 a_{23}, a_{32}, a_{33} の 3 変数に関する方程式となり、この式のみでは全ての変数を求めることができない。

ここで、風車後流の流速は音速と比べて十分小さく、非圧縮性流体としてみなすことができるものとする、連続の式

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \quad (4.32)$$

を用いて

$$a_{33} = -(\bar{a}_{11} + \bar{a}_{22}) \quad (4.33)$$

の様に a_{33} が求められる。(式 (4.32) では、総和規約を用いている。)

但し、これを式 (4.31) に代入しても未知成分 a_{23}, a_{32} は一意に定まらない。これら残りの変数を求める方法は幾つか考えられる。これについて次節で記述する。

4.3 連立方程式の補完

二つの測定面を用いた 3 次元の速度勾配テンソルを求める解法では、全ての成分に関する連立方程式系を構成することが困難であり、非圧縮性流体と仮定して連続の式を用いても未知成分 a_{23}, a_{32} は一意に定まらない。

ここで、連続の式 (4.32) より成分 a_{33}, a'_{33} が求められることから、これらに関する座標変換の式 (4.22) からもう一つの方程式を加えることができる様に見えるかもしれないが、これは連立方

程式系中の式と等価であり組み込めない。つまり、式 (4.32) と (4.22) を用いると

$$\frac{\partial v'_3}{\partial x'_3} = \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \cos^2 \theta + \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) \cos \theta \sin \theta + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \sin^2 \theta \quad (4.34)$$

$$-\left(\frac{\partial v'_1}{\partial x'_1} + \frac{\partial v'_2}{\partial x'_2} \right) = -\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) \cos^2 \theta + \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) \cos \theta \sin \theta + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \sin^2 \theta \quad (4.35)$$

となり、

$$\frac{\partial v_3}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_3} = -\frac{1}{\cos \theta \sin \theta} \left(\frac{\partial v'_1}{\partial x'_1} + \frac{\partial v'_2}{\partial x'_2} \right) + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) - \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \quad (4.36)$$

$$a_{32} = -a_{23} - \frac{1}{\cos \theta \sin \theta} (\bar{a}'_{11} + \bar{a}'_{22}) + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} (\bar{a}_{11} + \bar{a}_{22}) - \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \bar{a}_{22} \quad (4.37)$$

が得られる。式 (4.37) を更に展開すると、

$$\begin{aligned} a_{32} &= -a_{23} + \frac{1}{\cos \theta \sin \theta} \{ -(\bar{a}'_{11} + \bar{a}'_{22}) + \cos^2 \theta (\bar{a}_{11} + \bar{a}_{22}) - \sin^2 \theta \bar{a}_{22} \} \\ &= -a_{23} + \frac{1}{\cos \theta \sin \theta} \{ -(\bar{a}_{11} + \bar{a}'_{22}) + \cos^2 \theta (\bar{a}_{11} + \bar{a}_{22}) - \sin^2 \theta \bar{a}_{22} \} \\ &= -a_{23} + \frac{1}{\cos \theta \sin \theta} \{ -(1 - \cos^2 \theta) \bar{a}_{11} - \bar{a}'_{22} + \bar{a}_{22} \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \bar{a}_{22} \} \\ &= -a_{23} + \frac{1}{\cos \theta \sin \theta} \{ -\bar{a}_{11} \sin^2 \theta - \bar{a}'_{22} + \bar{a}_{22} \cos^2 \theta - \bar{a}_{22} \sin^2 \theta \} \\ &= -a_{23} + \frac{1}{\cos \theta \sin \theta} \{ -(\bar{a}_{11} + \bar{a}_{22}) \sin^2 \theta - \bar{a}'_{22} + \bar{a}_{22} \cos^2 \theta \} \\ &= -a_{23} + \frac{1}{\cos \theta \sin \theta} \{ a_{33} \sin^2 \theta - \bar{a}'_{22} + \bar{a}_{22} \cos^2 \theta \} \\ &= \frac{1}{\cos \theta \sin \theta} (\bar{a}_{22} \cos^2 \theta - a_{23} \cos \theta \sin \theta + a_{33} \sin^2 \theta - \bar{a}'_{22}) \end{aligned} \quad (4.38)$$

となり、式 (4.31) と同じ式となる。

そこで、残りの速度勾配テンソルの未知成分を求める方法としては以下の二つの方法が考えられる。即ち、

1. 異なるアジマス角の測定面の追加
2. 同一アジマス角における測定面の追加

以下にこれらについて説明する。

4.3.1 測定面の追加

全ての速度勾配テンソルの未知成分を求めるため、連立方程式系の式を追加する一つの方法は、異なるアジマス角における同様な測定を行うことが挙げられる。これにより、未知成分に関し式 (4.9)

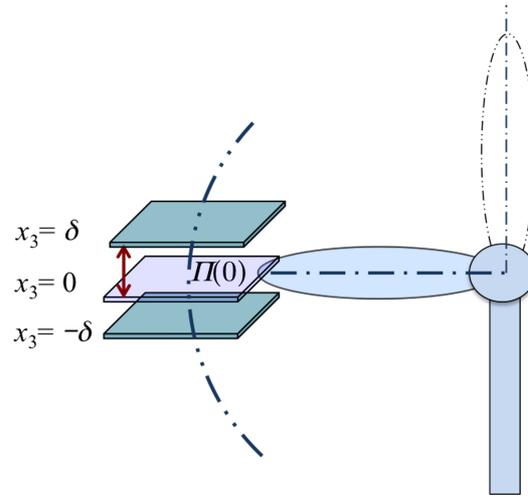


図 4.2: 同一アジマス角における測定面の追加 ($\theta = 0$ における追加例)

～(4.13) と同様な方程式が得られ、式 (4.28) と同様な式を連立させることにより未知成分を求めることができる。例えば、アジマス角 θ' における測定面 $\Pi(\theta')$ において速度場の測定を行い、この測定面に合わせて座標変換した速度勾配テンソルを $\mathbf{A}(\theta') = [a''_{ij}]$ ($i, j = 1, 2, 3$) とすると、式 (4.31) と同様な式

$$a_{32} = \frac{1}{\cos \theta' \sin \theta'} (\bar{a}_{22} \cos^2 \theta' - a_{23} \cos \theta' \sin \theta' + a_{33} \sin^2 \theta' - \bar{a}''_{22}) \quad (4.39)$$

が得られる。これと式 (4.31) を連立することにより、未知成分 a_{23} , a_{32} を求めることができる。

4.3.2 同一アジマス角における測定面の追加

全ての速度勾配テンソルの未知成分を求めるもう一つの方法は、同じアジマス角の面において僅かに面の法線方向にずらした位置にて速度場の測定を行い、有限差分等を用いて法線方向の空間微分に関する速度勾配テンソル成分を求めるものである。例えば、アジマス角 $\theta = 0$ においてこの操作を行うと、 v_1 と v_2 成分に関する x_3 方向の空間微分の速度勾配テンソル成分 $\partial v_1 / \partial x_3$, $\partial v_2 / \partial x_3$ 即ち a_{13} , a_{23} が得られる。この測定例を図 4.2 に示す。この場合、式 (4.29) が不要となり、式 (4.31) と式 (4.33) より a_{32} が求められる。

以上の方法を用いることにより、異なるアジマス角における平面の速度勾配テンソルの成分と連立させて 3次元の速度勾配テンソル $\nabla \mathbf{v}$ を評価することが可能となる。

4.4 複数面の $\nabla \mathbf{v}$ の線型変換において生じる条件

本解析では、複数の測定面 $\Pi(\theta)$ における速度場を用いるが、それぞれの測定面 $\Pi(\theta)$ で定義される節点上の速度を用いて速度勾配テンソルを評価することになる。このとき、数値解析におけ

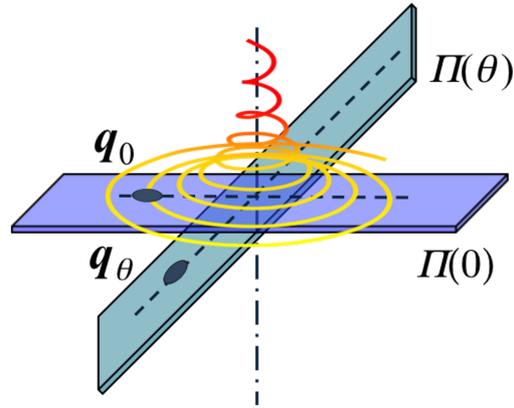


図 4.3: 異なるアジマス角の測定面における同じ節点の空間配置

る測定面は、この測定面の節点の分布（格子上分布等）により定義・構成される。複数の測定面から求められる2次元の速度勾配テンソルを用いて3次元の速度勾配テンソルを連立方程式から導出するとき、各測定面における同じ節点（各平面における同じ座標）の速度勾配テンソルの成分を用いることが考えられる。このとき、各測定面で同じ節点の2次元速度勾配テンソルを用いたとき、同じ節点であったとしても、アジマス角が変わると渦の異なる位置の速度を測定することになる。この概念を図 4.3 に示す。本節では、この測定面間の座標の関係と速度勾配テンソルの関連について記述し、これより本解析法の性質と適用・仮定条件について説明する。また、これを元に、実際の渦モデルの速度構造における本解析の適用性について次節で示す。

まず、アジマス面を含む二つの測定面 $\Pi(0)$, $\Pi(\theta)$ における同じ節点の関係と速度勾配テンソルの関連について記述する。多くの実験による速度場の測定では、格子分布の節点上において速度ベクトルを測定・評価する。そこで、ここでは、平面上で格子状の分布をした節点における2次元の速度ベクトルが与えられるものとし、格子線の内の一つ方向は x_1 軸（基底 e_1 ）に平行とする。このとき、各アジマス角の測定面において、格子線に平行な2次元の直交座標系を考える。アジマス面である $\Pi(0)$ では、格子分布は空間座標系の x_1, x_2 軸（基底 e_1, e_2 ）に平行である。一方、測定面 $\Pi(\theta)$ における直交座標系では、一つは x_1 軸（基底 e_1 ）に平行である。もう一つの軸を x'_2 軸と表すと、 x'_2 軸は空間座標系の x_2 軸をアジマス角に応じて (x_1 軸回りに) 回転させた軸である。即ち、測定面 $\Pi(\theta)$ に関する直交座標系の基底を e'_i ($i = 1, 2$) と表すと、 e'_1 は e_1 と等しく、 e'_2 は x_1 軸（基底 e_1 ）を軸として上流から風車後流をからみたときの反時計回りに θ だけ回転したものと等しい。即ち、

$$e'_1 = e_1 \quad (4.40)$$

$$e'_2 = \cos\theta e_2 - \sin\theta e_3 \quad (4.41)$$

となる。それぞれの測定面 $\Pi(\theta)$ において、 x_1, x'_2 (x_2) 方向にそれぞれ i, j 番目の節点を $\mathbf{q}(i, j)$ とおく。

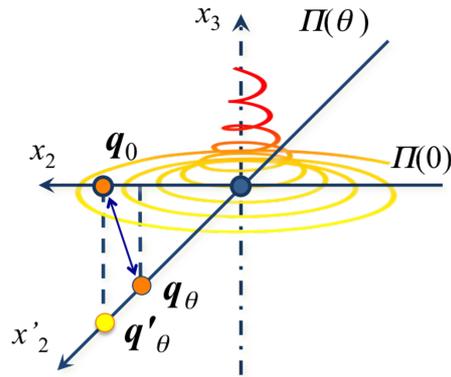


図 4.4: 測定面 $\Pi(0)$, $\Pi(\theta)$ における同節点 $\mathbf{q}_0(x_1, x_2, x_3)$ と $\mathbf{q}_\theta(x_1(\theta), x_2(\theta), x_3(\theta))$ の関係

次に、測定面 $\Pi(0)$, $\Pi(\theta)$ のそれぞれにおける同じ節点 $\mathbf{q}(i, j)$ について、これら 2 節点の座標成分を考える。測定面 $\Pi(0)$, $\Pi(\theta)$ における節点 $\mathbf{q}(i, j)$ の点の座標をそれぞれ

$$\mathbf{q}_0(x_1, x_2, x_3)$$

$$\mathbf{q}_\theta(x_1(\theta), x_2(\theta), x_3(\theta))$$

と表すと、これらの間には

$$x_1 = x_1(\theta) \tag{4.42}$$

$$x_2(\theta) = x_2 \cos \theta \tag{4.43}$$

$$\begin{aligned} x_3(\theta) &= -x_2 \sin \theta \\ &= -\frac{x_2(\theta)}{\cos \theta} \sin \theta \\ &= -x_2(\theta) \tan \theta \end{aligned} \tag{4.44}$$

の関係がある。この $\mathbf{q}_0(x_1, x_2, x_3)$ と $\mathbf{q}_\theta(x_1(\theta), x_2(\theta), x_3(\theta))$ の関係を図 4.4 に示す。従って、同一節点において、 x_1 座標成分は同じであるが、 x_2, x_3 成分はずれ、アジマス角に応じて異なる。このずれは、 x_2 座標成分が大きくなると共に増えるが、但し x_1 軸上の節点では完全に一致する。

このずれによる同じ節点間の物理変数のずれを考える。ある物理変数を x_i 座標系の関数 $\psi(x_1, x_2, x_3)$ として表す。このとき、アジマス面 $\Pi(0)$ 上の節点 $\mathbf{q}(i, j)$ における関数 $\psi(x_1, x_2, x_3)$ において、アジマス角 θ の測定面 $\Pi(\theta)$ 上の節点 $\mathbf{q}_\theta(x_1(\theta), x_2(\theta), x_3(\theta))$ の関数 $\psi(x_1(\theta), x_2(\theta), x_3(\theta))$ とその

テイラー展開を用いて表すと、テイラー展開の高次項のオーダーは小さいものとして無視したとき、

$$\begin{aligned}
\psi(x_1, x_2, x_3) &\approx \psi(x_1(\theta), x_2(\theta), x_3(\theta)) + \frac{\partial\psi(\mathbf{q}_\theta)}{\partial x_i} \{x_i - x_i(\theta)\} \\
&= \psi(x_1, x_2(\theta), x_3(\theta)) + \frac{\partial\psi(\mathbf{q}_\theta)}{\partial x_2} \{x_2 - x_2(\theta)\} + \frac{\partial\psi(\mathbf{q}_\theta)}{\partial x_3} x_3(\theta) \\
&= \psi(x_1, x_2(\theta), x_3(\theta)) + \frac{\partial\psi(\mathbf{q}_\theta)}{\partial x_2} \{x_2 - x_2 \cos \theta\} + \frac{\partial\psi(\mathbf{q}_\theta)}{\partial x_3} x_2(\theta) \tan \theta \\
&= \psi(x_1, x_2(\theta), x_3(\theta)) + \frac{\partial\psi(\mathbf{q}_\theta)}{\partial x_2} \{x_2 - x_2 \cos \theta\} + \frac{\partial\psi(\mathbf{q}_\theta)}{\partial x_3} x_2 \sin \theta \quad (4.45)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial\psi(\mathbf{q}_\theta)}{\partial x_j} = \frac{\partial\psi}{\partial x_j}(x_1(\theta), x_2(\theta), x_3(\theta)) \quad (4.46)$$

となる。逆に、 $\psi(x_1(\theta), x_2(\theta), x_3(\theta))$ について $\psi(x_1, x_2, x_3)$ を用いて表すと、

$$\begin{aligned}
\psi(x_1(\theta), x_2(\theta), x_3(\theta)) &\approx \psi(x_1, x_2, x_3) + \frac{\partial\psi(\mathbf{q}_0)}{\partial x_i} \{x_i(\theta) - x_i\} \\
&= \psi(x_1, x_2, x_3) + \frac{\partial\psi(\mathbf{q}_0)}{\partial x_2} \{x_2(\theta) - x_2\} + \frac{\partial\psi(\mathbf{q}_0)}{\partial x_3} x_3(\theta) \\
&= \psi(x_1, x_2, x_3) + \frac{\partial\psi(\mathbf{q}_0)}{\partial x_2} \{x_2 \cos \theta - x_2\} - \frac{\partial\psi(\mathbf{q}_0)}{\partial x_3} x_2(\theta) \tan \theta \\
&= \psi(x_1, x_2, x_3) + \frac{\partial\psi(\mathbf{q}_0)}{\partial x_2} \{x_2 \cos \theta - x_2\} - \frac{\partial\psi(\mathbf{q}_0)}{\partial x_3} x_2 \sin \theta \quad (4.47)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial\psi(\mathbf{q}_0)}{\partial x_j} = \frac{\partial\psi}{\partial x_j}(x_1, x_2, x_3) \quad (4.48)$$

となる。いずれにしても、いずれかの点における x_2, x_3 方向の空間微分が含まれる形式となる。いずれかの点においてこれらの空間微分値が評価されていれば良いが、関数が速度勾配テンソルである場合、速度成分に関する 2 階導関数の項が含まれる。

本解析では、物理変数が速度勾配テンソルであるため、 ψ を $\partial v_i / \partial x_j$ として表わすと、式 (4.45) は

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x_1, x_2, x_3) &\approx \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x_1, x_2(\theta), x_3(\theta)) + \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \{x_2 - x_2 \cos \theta\} \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} x_2(\theta) \tan \theta \\
&= \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x_1, x_2(\theta), x_3(\theta)) + \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \{x_2 - x_2 \cos \theta\} \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} x_2 \sin \theta \quad (4.49)
\end{aligned}$$

となる。従って、同じ節点 $\mathbf{q}(i, j)$ の速度勾配テンソルを用いて 3 次元の同テンソル成分を求めたとき、本成分の x_2, x_3 方向に関する空間微分の項が補正項として必要になる。

このとき、測定面 $\Pi(\theta)$ における節点 $\mathbf{q}(i, j)$ ではなく、節点 $\mathbf{q}_\theta(i, j)$ における x'_2 成分を $1/\cos \theta$

倍した別の点 \mathbf{q}'_θ

$$\mathbf{q}'_\theta = (x_1(\theta), x'_2(\theta), x'_3(\theta)) \quad (4.50)$$

$$x'_1(\theta) = x_1 \quad (4.51)$$

$$x'_2(\theta) = x_2 \quad (4.52)$$

$$\begin{aligned} x'_3(\theta) &= -x'_2(\theta) \tan \theta \\ &= -x_2 \tan \theta \end{aligned} \quad (4.53)$$

の速度を測定し、速度勾配テンソルを求めたとき、式 (4.49) は

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x_1, x_2, x_3) &\approx \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x_1(\theta), x'_2(\theta), x'_3(\theta)) + \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \{x_k - x'_k(\theta)\} \\ &= \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x_1, x'_2(\theta), x'_3(\theta)) + \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} x'_3(\theta) \\ &= \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x_1, x_2, x'_3(\theta)) + \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} x_2 \sin \theta \end{aligned} \quad (4.54)$$

となる。従って、節点を x_2 方向にずらすことによって (x_3 成分は x_2 成分に応じて変化する)、 x_2 方向の空間微分の項はなくなる。しかし、 x_3 方向の空間微分の項は補正項として存在する。

これより、本解析の条件として、基準面 (アジマス面) の節点 $\mathbf{q}(i, j)$ のある速度勾配テンソル成分において、座標変換した成分を測定面 $\Pi(\theta)$ の成分で表した場合、式 (4.54) の右辺第二項のずれが生じる。これは、本解析法の固有の性質のものである。

この項は、 x_2 座標成分が大きい、即ち、 x_1 軸から離れる程大きく、また、アジマス角に応じて大きくなる。また、以下の場合はこの様なずれはなく、本解析の定式化は数学的に厳密である。

(i) x_1 軸上の点

(ii) $\frac{\partial}{\partial x_3} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = 0$ ($\nabla \mathbf{v}$ 成分のアジマス面の法線方向に関する変化が無視できる)

渦の構造の解析において、その渦の速度構造によっては式 (4.54) の右辺第二項のずれがないものもあり、その場合は前項の定式化により厳密に評価ができる。その中には実在渦モデルも対象となっている。次項以降では、この様な渦モデルについて記述する。

4.5 渦の速度構造モデル

前節で記述した速度勾配テンソル $\nabla \mathbf{v}$ の条件において、

$$\frac{\partial}{\partial x_3} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = 0 \quad (\nabla \mathbf{v} \text{ 成分のアジマス面の法線方向に関する変化が無視できる})$$

の場合、本解析は既述した連立方程式により厳密に評価できる。実在渦のモデルとして挙げられる幾つかの渦モデルについて、この適合性を示す。

まず、Burgers 渦 [42] について考える。多くの渦モデルでは、その速度構造は円筒座標系 (r, θ, z) で表される。ここで、 r, θ, z はそれぞれ半径方向、周方向、高さ方向を示す。これらの方向の速度をそれぞれ v_r, v_θ, v_z と表すと、Burgers 渦のそれぞれの速度成分は以下の式となる。即ち、

$$v_r = -\frac{\alpha}{2}r \quad (4.55)$$

$$v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r}(1 - e^{-\frac{\alpha r^2}{4\nu}}) \quad (4.56)$$

$$v_z = \alpha z \quad (4.57)$$

α : 正定数

ν : 動粘性係数 (viscosity)

Γ : 循環 (circulation)

これをデカルト座標 x_i ($i = 1, 2, 3$) で表すと、

$$v_1 = -\frac{\alpha}{2}x_1 - \frac{x_2}{r}v_\theta \quad (4.58)$$

$$v_2 = -\frac{\alpha}{2}x_2 + \frac{x_1}{r}v_\theta \quad (4.59)$$

$$v_3 = \alpha x_3 \quad (4.60)$$

となる [45]。但し、 x_2 軸は円筒座標系 (r, θ, z) における $\theta = \pi/2$ の方向とし、また x_3 軸は z 軸と同じであるものとした。従って、バーガーズ渦では、

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_3} = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (4.61)$$

$$\frac{\partial v_3}{\partial x_3} = \alpha \quad (4.62)$$

であるから、前節の速度勾配テンソル $\nabla \mathbf{v}$ の条件 (ii) を満たす。

次に、Batchelor 渦 [31] は、半径方向の流れがない渦流れである。まず、この渦の速度構造を Burgers 渦と同様に円筒座標系 (r, θ, z) で表し、これらの方向の速度をそれぞれ v_r, v_θ, v_z と表すと、Batchelor 渦のそれぞれの速度成分は以下の式となる。即ち、

$$v_r = 0 \quad (4.63)$$

$$v_\theta = \frac{q}{r}(1 - e^{-r^2}) \quad (4.64)$$

$$v_z = 1 - e^{-r^2} \quad (4.65)$$

q : positive constant

である。ここで、これらの速度成分をデカルト座標 x_i ($i = 1, 2, 3$) で表すと、

$$v_1 = -\frac{x_2}{r}v_\theta \quad (4.66)$$

$$v_2 = \frac{x_1}{r}v_\theta \quad (4.67)$$

$$v_3 = 1 - e^{-r^2} \quad (4.68)$$

であるから、これらの速度成分の x_3 方向の空間微分は

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_3} = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (4.69)$$

となり、Batchelor 渦も前節の速度勾配テンソル $\nabla \mathbf{v}$ の条件 (ii) を満たす。Batchelor 渦は、スパイラル渦の安定性解析を行うときの渦モデルとして用いられることがある [29, 30]。

大気渦やタービンにおける実在渦のモデルとして提案されている Vatistas 渦 [43] では、実験等のデータと比較し、パラメータを適当に設定する速度構造を定めている。Burgers 渦と同様に円筒座標系でこれらの速度成分 v_r, v_θ, v_z を表すと、それぞれ以下の式となる。

$$v_r = -2\frac{(n+1)r^{2n-1}}{\beta(1+r^{2n})} \quad (4.70)$$

$$v_\theta = \frac{r}{(1+r^{2n})^{1/n}} \quad (4.71)$$

$$v_z = \frac{4(n+1)r^{2(n-1)}}{\beta(1+r^{2n})^2}z \quad (4.72)$$

β : 定数

n : 正整数

Vatistas 渦は、正整数 n により関数に変化するが、この渦も Batchelor 渦と同様に式 (4.69)、並びに前節の速度勾配テンソル $\nabla \mathbf{v}$ の条件 (ii) を満たし、前述した定式化にて解析が可能である。

この他、Rosenhead の渦 [2] もあるが、これらの渦と同様である。これより、現在提案されている実在向け渦モデルの多くが式 (4.69) を満たし、従って、 $\partial/\partial x_3$ の空間微分に関する補正を必要としない。

一方、もしより複雑な渦流れが想定され、更に式 (4.54) の右辺第二項のずれが無視できない場合、測定面と数値計算手法を組み合わせることで解くことが望ましい。即ち、測定面を増やし、数値計算によりこの項を評価する。次節ではこの方法について記述する。

4.6 複雑な渦構造のための定式化

本節では、前節で説明した主要な渦モデルの速度構造より複雑な渦流れであり、渦流が旋回平面に直交する方向の変化が大きい場合の定式化について記述する。即ち、本章で記述している本

座標系において、速度勾配テンソル $\nabla \mathbf{v}$ の成分 $\partial v_i / \partial x_j$ に関する $\partial / \partial x_3$ の微係数のオーダーが無視できない場合を取り扱う。これにより、本解析理論のより普遍的な定式化が示される。一方、この定式化では、測定面が全て互いに平行であるという条件の下で行うため、この方向の速度勾配テンソルの成分 $\partial v_i / \partial x_j$ の更なる空間微分を連立方程式から求めるのは困難である。そこで、複数の平行平面上の測定を行い、速度データから各平面の速度勾配テンソル成分を求めた上で x_3 方向の速度勾配テンソル成分 $\partial v_i / \partial x_j$ の微係数 $\partial^2 v_i / (\partial x_3 \partial x_j)$ を有限差分により導出し、これを連立方程式系に組み込む。

4.6.1 数値計算手法を組み込んだ定式化

本項では、式 (4.54) における座標のずれにより発生する項を考慮して速度勾配テンソル $\nabla \mathbf{v}$ の成分を評価することを考える。式 (4.54) を改めて示すと

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x_1, x_2, x_3) &\approx \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x_1(\theta), x_2'(\theta), x_3'(\theta)) + \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \{x_k - x_k'(\theta)\} \\ &= \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x_1, x_2, x_3'(\theta)) + \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} x_2 \sin \theta \end{aligned} \quad (4.73)$$

である。ここで、式 (4.73) では、測定面 $\Pi(\theta)$ における点 \mathbf{q}' はアジマス面 $\Pi(\theta)$ の節点 $\mathbf{q}(i, j)$ と同じではなく、節点とは異なる座標成分である点 \mathbf{q}'

$$\mathbf{q}' = (x_1(\theta), x_2'(\theta), x_3'(\theta)) \quad (4.74)$$

$$x_1'(\theta) = x_1 \quad (4.75)$$

$$x_2'(\theta) = x_2 \quad (4.76)$$

$$x_3'(\theta) = x_2 \sin \theta \quad (4.77)$$

であることに注意する。即ち、アジマス面 $\Pi(0)$ の節点 $\mathbf{q}(i, j)$ と (空間座標の x_1, x_2 成分に関し) 同じ座標とするために、測定面 $\Pi(\theta)$ の x_2' 座標を測定面 $\Pi(0)$ の節点 $\mathbf{q}(i, j)$ の x_2 座標成分に対し $1/\cos \theta$ 倍した成分の位置としている。

式 (4.73) の右辺第 2 項における x_3 方向の空間微分の評価・導出は、異なるアジマス角における複数の平行平面を測定する、という実験・解析条件上困難である。そこで、連立方程式の補完の項で述べた同一アジマス角における測定面の追加により数値的な手法を用いて式を解く、即ち、異なる複数の測定面 $\Pi(\theta)$ の速度勾配テンソル成分を用いたアジマス面 $\Pi(0)$ の速度勾配テンソル成分の評価を考える。

各測定面 $\Pi(\theta)$ の速度勾配テンソル $\nabla \mathbf{v}$ は、測定した節点の速度データの有限差分により求めるが、ここで、アジマス面 $\Pi(0)$ において、このアジマス角度における複数の平行な平面で測定することを考える。即ち間隔を Δ_h のオーダーでずらした測定面を定める。アジマス面 $\Pi(0)$ を基準として $n\Delta_h$ ($n \in \mathbf{Z}$) の間隔だけずれた平面を $\tilde{\Pi}(0, n\Delta_h)$ とおく。この測定面 $\tilde{\Pi}(0, n\Delta_h)$ にお

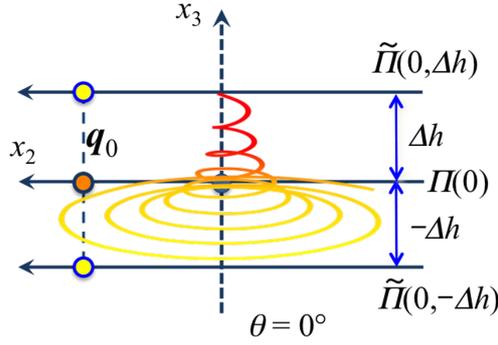


図 4.5: 測定面 $\tilde{\Pi}(0, n\Delta_h)$ ($n = \pm 1$) の速度勾配テンソルに関する x_3 方向の差分

る節点 $\tilde{\mathbf{q}}_n(i, j)$ の分布並びに位置はアジマス面 $\Pi(0)$ の節点 $\mathbf{q}(i, j)$ と (空間座標の x_1, x_2 成分に関し) 完全に合わせたものとする。節点が格子状に分布しているものとし、 x_1, x_2 方向の節点間隔をそれぞれ Δ_1, Δ_2 とする。節点 $\mathbf{q}(n_1, n_2)$ の座標を 3 次元表示として

$$\mathbf{q}(n_1, n_2) = (n_1\Delta_1, n_2\Delta_2, 0) \quad (4.78)$$

とすると、このとき節点 $\mathbf{q}(n_1, n_2)$ に対応する測定面 $\tilde{\Pi}(0, n\Delta_h)$ 上の節点 $\tilde{\mathbf{q}}_n(n_1, n_2)$ の座標は、

$$\tilde{\mathbf{q}}_n(n_1, n_2) = (n_1\Delta_1, n_2\Delta_2, n\Delta_h) \quad (4.79)$$

である。各測定面 $\tilde{\Pi}(0, n\Delta_h)$ 上の速度場のデータから各速度勾配テンソル $\nabla \mathbf{v}$ の成分 $\partial v_i / \partial x_j$ ($i, j = 1, 2$) を評価する。例えば、 $\Delta_h, -\Delta_h$ の測定面 $\tilde{\Pi}(0, \pm\Delta_h)$ で速度勾配テンソル成分 $\partial v_i / \partial x_j$ を評価したとき、アジマス面 $\Pi(0)$ における本成分の x_3 方向の空間微分は、2 次の有限差分を用いて

$$\frac{\partial}{\partial x_3} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x_1, x_2, 0) \approx \frac{1}{2\Delta_h} \left\{ \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x_1, x_2, \Delta_h) - \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x_1, x_2, -\Delta_h) \right\} \quad (4.80)$$

の様に近似できる (図 4.5 参照)。有限差分の次数を上げるには測定面 $\tilde{\Pi}(0, n\Delta_h)$ の n を様々に変えることにより、求める次数の有限差分にて速度勾配テンソル成分の方向微分を求めることができる。従って、式 (4.73) において、アジマス面 $\Pi(0)$ における速度勾配テンソル $\partial v_i / \partial x_j$ 成分について式 (4.80) より

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x_1, x_2, 0) &\approx \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x_1, x_2'(\theta), x_3'(\theta)) + \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} x_2 \sin \theta \\ &\approx \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x_1, x_2, x_3'(\theta)) \\ &\quad + \frac{1}{2\Delta_h} \left\{ \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x_1, x_2, \Delta_h) - \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x_1, x_2, -\Delta_h) \right\} x_2 \sin \theta \end{aligned} \quad (4.81)$$

が得られる。これより、異なるアジマス角の測定面 $\Pi(\theta)$ 面において速度勾配テンソル成分を求め

たとき、アジマス面近傍の別の測定面 $\tilde{\Pi}(0, n\Delta_h)$ の速度勾配テンソル成分を取り入れることにより、線型変換の対象であるアジマス面 $\Pi(0)$ の節点上の（座標変換された）速度勾配テンソル成分をより正確に与えることができる。

式 (4.81) を用いるとき、アジマス面 $\Pi(0)$ の速度勾配テンソルにおける $\partial v_i / \partial x_3$ ($i = 1, 2$) の成分は $\tilde{\Pi}(0, n\Delta_h)$ の速度場のデータより求めることができる。従って、連立方程式にて速度勾配テンソルを求める成分は、 $\partial v_3 / \partial x_i$ ($i = 1, 2$) となる。このとき、式 (4.30) と (4.31) における成分 \bar{a}'_{21} , \bar{a}'_{22} は、式 (4.81) を代入して以下の様に置き換えられる。

$$\bar{a}'_{21} = \frac{\partial \bar{v}'_2}{\partial x'_1} \quad (4.82)$$

→

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{v}'_2}{\partial x'_1}(x_1, x_2, 0) &= \frac{\partial \bar{v}'_2}{\partial x'_1}(x_1, x_2, x'_3(\theta)) \\ &+ \frac{1}{2\Delta_h} \left(\frac{\partial \bar{v}_2}{\partial x_1}(x_1, x_2, \Delta_h) - \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial x_1}(x_1, x_2, -\Delta_h) \right) x_2 \sin \theta \end{aligned} \quad (4.83)$$

$$\bar{a}'_{22} = \frac{\partial \bar{v}'_2}{\partial x'_2} \quad (4.84)$$

→

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{v}'_2}{\partial x'_2}(x_1, x_2, 0) &= \frac{\partial \bar{v}'_2}{\partial x'_2}(x_1, x_2, x'_3(\theta)) \\ &+ \frac{1}{2\Delta_h} \left(\frac{\partial \bar{v}_2}{\partial x_2}(x_1, x_2, \Delta_h) - \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial x_2}(x_1, x_2, -\Delta_h) \right) x_2 \sin \theta \end{aligned} \quad (4.85)$$

$\partial \bar{v}'_2(x_1, x_2, 0) / \partial x'_1$ は、空間座標系における点 $(x_1, x_2, 0)$ において、 x_2, x_3 軸を θ だけ回転させた座標系における速度勾配テンソル成分を示す。

複数の測定面 $\tilde{\Pi}(0, n\Delta_h)$ において速度を測定したとき、アジマス面 $\Pi(0)$ の速度勾配テンソルにおける $\partial v_i / \partial x_3$ ($i = 1, 2$) の成分は $\tilde{\Pi}(0, n\Delta_h)$ の速度場のデータより求めることができる。従って、連立方程式にて速度勾配テンソルを求める成分は、 $\partial v_3 / \partial x_i$ ($i = 1, 2$) となる。式 (4.30) と (4.31) に式 (4.81) を代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_3}{\partial x_1}(x_1, x_2, 0) &= \frac{1}{\sin \theta} \left(\frac{\partial \bar{v}_2}{\partial x_1} \cos \theta - \frac{\partial \bar{v}'_2}{\partial x'_1} \right) \\ &= \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial x_1} \cos \theta - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \bar{v}'_2}{\partial x'_1} \\ &= \frac{1}{\tan \theta} \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial x_1} - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \bar{v}'_2}{\partial x'_1}(x_1, x_2(\theta), x'_3(\theta)) \\ &+ \frac{1}{2\Delta_h} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1}(x_1, x_2, \Delta_h) - \frac{\partial v_2}{\partial x_1}(x_1, x_2, -\Delta_h) \right) x_2 \end{aligned} \quad (4.86)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v_3}{\partial x_2}(x_1, x_2, 0) &= \frac{1}{\cos \theta \sin \theta} \left(\frac{\partial \bar{v}_2}{\partial x_1}(x_1, x_2, 0) \cos^2 \theta - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}(x_1, x_2, 0) \cos \theta \sin \theta \right) \\
&+ \frac{1}{\cos \theta \sin \theta} \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_3}(x_1, x_2, 0) \sin^2 \theta - \frac{\partial \bar{v}'_2}{\partial x'_2} \right) \\
&= \frac{1}{\tan \theta} \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial x_1}(x_1, x_2, 0) - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}(x_1, x_2, 0) + \tan \theta \frac{\partial v_3}{\partial x_3}(x_1, x_2, 0) \\
&+ \frac{1}{\cos \theta \sin \theta} \frac{\partial \bar{v}'_2}{\partial x'_2}(x_1, x_2(\theta), x'_3(\theta)) \\
&- \frac{1}{\cos \theta} \frac{1}{2\Delta_h} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_2}(x_1, x_2, \Delta_h) - \frac{\partial v_2}{\partial x_2}(x_1, x_2, -\Delta_h) \right) x_2 \quad (4.87)
\end{aligned}$$

となる。

速度勾配テンソルの $\partial v_i / \partial x_3$ ($i = 1, 2$) の成分は、以下の様に $\tilde{\Pi}(0, n\Delta_h)$ の速度場のデータより求めることができる。即ち、

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_3}(x_1, x_2, 0) \approx \frac{1}{2\Delta_h} \left\{ \frac{\partial v_i}{\partial x_3}(x_1, x_2, \Delta_h) - \frac{\partial v_i}{\partial x_3}(x_1, x_2, -\Delta_h) \right\} \quad (i = 1, 2) \quad (4.88)$$

$$\frac{\partial v_3}{\partial x_3}(x_1, x_2, 0) = - \left\{ \frac{\partial v_1}{\partial x_1}(x_1, x_2, 0) - \frac{\partial v_2}{\partial x_2}(x_1, x_2, 0) \right\} \quad (4.89)$$

である。また、 $\partial v_3 / \partial x_3$ の成分は連続の式 (4.32) より求める。

以上により、補正項が必要である場合は、上記定式化より速度勾配テンソルを評価することができる。

4.6.2 高次の定式化

前節では、速度勾配テンソル $\nabla \mathbf{v}$ に関する1次のテイラー展開にて定式化を行った。渦構造や測定上の条件により高次のテイラー展開による評価が必要である場合、前述した手法を用いることにより、高次項を含む定式化を行うことができる。本項では、2次のテイラー展開による定式化について示す。

まず、第4.4節にて示した様に、アジマス面 $\Pi(0)$ 上の節点 $\mathbf{q}(x_1, x_2, x_3)$ に対するアジマス角 θ の測定面 $\Pi(\theta)$ 上の節点 $\mathbf{q}_\theta(x_1(\theta), x_2(\theta), x_3(\theta))$ では座標のずれが生じるが、この同じ節点間のずれによる物理変数のずれを考える。物理変数 $\psi(x_1, x_2, x_3)$ において、アジマス面 $\Pi(0)$ 上の節点 $\mathbf{q}(i, j)$ の $\psi(x_1, x_2, x_3)$ をアジマス角 θ の測定面 $\Pi(\theta)$ 上の節点 $\mathbf{q}_\theta(x_1(\theta), x_2(\theta), x_3(\theta))$ の関数 $\psi(x_1(\theta), x_2(\theta), x_3(\theta))$ 値とその微係数 (テイラー展開) を用いて表すものとし、テイラー展開の2

次項までの係数でこれを表すと、

$$\begin{aligned}
\psi(x_1, x_2, x_3) &\approx \psi(x_1(\theta), x_2(\theta), x_3(\theta)) + \frac{\partial\psi(\mathbf{q}_\theta)}{\partial x_i} \{x_i - x_i(\theta)\} \\
&+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2\psi(\mathbf{q}_\theta)}{\partial x_i \partial x_j} \{x_i - x_i(\theta)\} \{x_j - x_j(\theta)\} \\
&= \psi(\mathbf{q}_\theta) + \frac{\partial\psi(\mathbf{q}_\theta)}{\partial x_2} \{x_2 - x_2(\theta)\} - \frac{\partial\psi(\mathbf{q}_\theta)}{\partial x_3} x_3(\theta) \\
&+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2\psi(\mathbf{q}_\theta)}{\partial x_2^2} \{x_2 - x_2(\theta)\}^2 + \frac{\partial^2\psi(\mathbf{q}_\theta)}{\partial x_2 \partial x_3} \{x_2 - x_2(\theta)\} x_3(\theta) \\
&+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2\psi(\mathbf{q}_\theta)}{\partial x_2^2} x_3(\theta)^2 \\
&= \psi(\mathbf{q}_\theta) + \frac{\partial\psi(\mathbf{q}_\theta)}{\partial x_2} \delta x_2 - \frac{\partial\psi(\mathbf{q}_\theta)}{\partial x_3} \delta x_3 \\
&+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2\psi(\mathbf{q}_\theta)}{\partial x_2^2} \delta x_2^2 + \frac{\partial^2\psi(\mathbf{q}_\theta)}{\partial x_2 \partial x_3} \delta x_2 \delta x_3 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2\psi(\mathbf{q}_\theta)}{\partial x_2^2} \delta x_3^2
\end{aligned} \tag{4.90}$$

$$\psi(\mathbf{q}_\theta) := \psi(x_1(\theta), x_2(\theta), x_3(\theta)) \tag{4.91}$$

$$\delta x_2 := x_2 - x_2(\theta) \tag{4.92}$$

$$\delta x_3 := -x_3(\theta) \tag{4.93}$$

となる。ここで、この式の展開では $x_1 = x_1(\theta)$ を用いている。

次に、(第4.4節で既述した様に) 測定面 $\Pi(\theta)$ において、アジマス面 $\Pi(0)$ の節点 $\mathbf{q}(i, j)$ の x_2 座標に合わせた点 \mathbf{q}'_θ

$$\mathbf{q}'_\theta = (x_1(\theta), x'_2(\theta), x'_3(\theta)) \tag{4.94}$$

$$x'_1(\theta) = x_1 \tag{4.95}$$

$$x'_2(\theta) = x_2 \tag{4.96}$$

$$x'_3(\theta) = -x_2 \tan \theta \tag{4.97}$$

の物理変数 $\psi(x_1(\theta), x'_2(\theta), x'_3(\theta))$ を補間等の数値手法を用いて評価する。例えば、Lagrange 補間や Spline 補間等を用いる。このとき、

$$\delta x_2 = 0 \tag{4.98}$$

であるから、この点 \mathbf{q}'_θ における物理変数 $\psi(x_1(\theta), x'_2(\theta), x'_3(\theta))$ を用いて式 (4.90) を表すと、

$$\begin{aligned}\psi(\mathbf{q}'_\theta) &:= \psi(x_1(\theta), x'_2(\theta), x'_3(\theta)) & (4.99) \\ \psi(x_1, x_2, x_3) &\approx \psi(\mathbf{q}_\theta) + \frac{\partial\psi(\mathbf{q}_\theta)}{\partial x_2} \delta x_2 - \frac{\partial\psi(\mathbf{q}_\theta)}{\partial x_3} \delta x_3 \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2\psi(\mathbf{q}_\theta)}{\partial x_2^2} \delta x_2^2 + \frac{\partial^2\psi(\mathbf{q}_\theta)}{\partial x_2 \partial x_3} \delta x_2 \delta x_3 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2\psi(\mathbf{q}_\theta)}{\partial x_3^2} \delta x_3^2 \\ &= \psi(\mathbf{q}'_\theta) - \frac{\partial\psi(\mathbf{q}'_\theta)}{\partial x_3} \delta x_3 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2\psi(\mathbf{q}'_\theta)}{\partial x_3^2} \delta x_3^2 & (4.100)\end{aligned}$$

の様に簡潔に表すことができる。物理変数 $\psi(x_1, x_2, x_3)$ が速度勾配テンソル $\nabla\mathbf{v}$ 成分 $\partial v_i/\partial x_j$ の場合、

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x_1, x_2, x_3) \approx \frac{\partial v_i(\mathbf{q}'_\theta)}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{\partial v_i(\mathbf{q}'_\theta)}{\partial x_j} \delta x_3 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \frac{\partial v_i(\mathbf{q}'_\theta)}{\partial x_j} \delta x_3^2 \quad (4.101)$$

となる。

前節と同様に、アジマス面 $\Pi(0)$ を基準として $n\Delta_h$ ($n \in Z$) の間隔だけずれた平面 $\tilde{\Pi}(0, n\Delta_h)$ の速度勾配テンソル $\nabla\mathbf{v}$ より式 (4.90) の x_3 方向の導関数を有限差分で表現することを考える。ここでもこの測定面 $\tilde{\Pi}(0, n\Delta_h)$ における節点 $\tilde{\mathbf{q}}_n(i, j)$ が格子状に分布しているものとし、この測定面 $\tilde{\Pi}(0, n\Delta_h)$ における節点 $\tilde{\mathbf{q}}_n(i, j)$ の分布並びに位置 (x_1, x_2 座標成分) はアジマス面 $\Pi(0)$ 節点 $\mathbf{q}(i, j)$ と完全に合わせたものとする。1階並びに2階の x_3 方向の速度勾配テンソル成分に関する空間微分を有限差分により評価することを考慮して幾つかの測定面 $\tilde{\Pi}(0, n\Delta_h)$ を定め、その平面 $\tilde{\Pi}(0, n\Delta_h)$ 上の速度場のデータから各速度勾配テンソル $\nabla\mathbf{v}$ の成分 $\partial v_i/\partial x_j$ ($i, j = 1, 2$) を評価する。例えば、前節と同様に $\Delta_h, -\Delta_h$ の測定面 $\tilde{\Pi}(0, \pm\Delta_h)$ で速度勾配テンソル成分 $\partial v_i/\partial x_j$ を評価したとすると、アジマス面 $\Pi(0)$ における本成分の方向の空間微分は、2次の有限差分を用いて

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x_3} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x_1, x_2, 0) \\ &\approx \frac{1}{2\Delta_h} \left\{ \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x_1, x_2, \Delta_h) - \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x_1, x_2, -\Delta_h) \right\} & (4.102)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x_1, x_2, 0) \\ &\approx \frac{1}{\Delta_h^2} \left\{ \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x_1, x_2, \Delta_h) - 2\frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x_1, x_2, 0) + \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x_1, x_2, -\Delta_h) \right\} & (4.103)\end{aligned}$$

の様に近似でき、速度勾配テンソル成分の x_3 方向に関する1階並びに2階の空間微分を同じ測定面のデータで評価することができる。有限差分の精度を上げるには、対象とする次数の有限差分の式に従って測定面 $\tilde{\Pi}(0, n\Delta_h)$ を増やし、速度勾配テンソル成分 $\partial v_i/\partial x_j$ の x_3 方向微分を求めることにより可能である。式 (4.102) と (4.103) を用いると、式 (4.90) におけるアジマス面 $\Pi(0)$

の速度勾配テンソル成分 $\partial v_i/\partial x_j$ について

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x_1, x_2, 0) &\approx \frac{\partial v_i(\mathbf{q}'_\theta)}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{\partial v_i(\mathbf{q}'_\theta)}{\partial x_j} \delta x_3 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \frac{\partial v_i(\mathbf{q}'_\theta)}{\partial x_j} \delta x_3^2 \\
&\approx \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x_1, x_2(\theta), x'_3(\theta)) \\
&\quad - \frac{1}{2\Delta_h} \left\{ \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x_1, x_2, \Delta_h) - \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x_1, x_2, -\Delta_h) \right\} \delta x_3 \\
&\quad + \frac{1}{2\Delta_h^2} \left\{ \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x_1, x_2, \Delta_h) - 2 \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x_1, x_2, 0) + \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x_1, x_2, -\Delta_h) \right\} \delta x_3^2 \\
&= \frac{\partial v_i(\mathbf{q}'_\theta)}{\partial x_j} - \frac{1}{2\Delta_h} \left\{ \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x_1, x_2, \Delta_h) - \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x_1, x_2, -\Delta_h) \right\} x_2 \sin \theta \\
&\quad + \frac{1}{2\Delta_h^2} \left\{ \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x_1, x_2, \Delta_h) - 2 \frac{\partial v_i(\mathbf{q}_0)}{\partial x_j} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x_1, x_2, -\Delta_h) \right\} (x_2 \sin \theta)^2 \quad (4.104)
\end{aligned}$$

$$\mathbf{q}_0 := (x_1, x_2, 0) \quad (4.105)$$

が得られる。これより、異なるアジマス角の測定面 $\Pi(\theta)$ 面において速度勾配テンソル成分を求めたとき、アジマス面近傍の別の測定面 $\tilde{\Pi}(0, n\Delta_h)$ の速度勾配テンソル成分を取り入れることにより、線型変換の対象であるアジマス面 $\Pi(0)$ の節点上の（座標変換された）速度勾配テンソル成分 $\partial v_i/\partial x_j$ をより正確に与えることができる。

これらを用いて、3次元の速度勾配テンソル $\nabla \mathbf{v}$ を求める連立方程式の定式化を示す。測定面 $\tilde{\Pi}(0, n\Delta_h)$ を用いるとき、 $\partial v_i/\partial x_3$ ($i = 1, 2$) の成分は、 $\tilde{\Pi}(0, n\Delta_h)$ の速度場のデータから有限差分により求めることができる。速度勾配テンソル成分 $\partial v_3/\partial x_3$ も同様に連続の式 (4.32) を用いた式 (4.89) より求めるものとする、連立方程式にて速度勾配テンソルを求める成分は $\partial v_3/\partial x_i$ ($i = 1, 2$) である。式 (4.30) と (4.31) における成分 \bar{a}'_{21} , \bar{a}'_{22} は、式 (4.104) を用いて以下の様に置き換えられる。

$$\bar{a}'_{21} = \frac{\partial \bar{v}'_2}{\partial x'_1} \quad (4.106)$$

→

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \bar{v}'_2}{\partial x'_1}(x_1, x_2, 0) \\
&= \frac{\partial \bar{v}'_2(\mathbf{q}'_\theta)}{\partial x'_1} - \frac{1}{2\Delta_h} \left\{ \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial x_1}(x_1, x_2, \Delta_h) - \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial x_1}(x_1, x_2, -\Delta_h) \right\} x_2 \sin \theta \\
&\quad + \frac{1}{2\Delta_h^2} \left\{ \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial x_1}(x_1, x_2, \Delta_h) - 2 \frac{\partial \bar{v}_2(\mathbf{q}_0)}{\partial x_2} + \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial x_1}(x_1, x_2, -\Delta_h) \right\} (x_2 \sin \theta)^2 \quad (4.107)
\end{aligned}$$

$$\bar{a}'_{22} = \frac{\partial \bar{v}'_2}{\partial x'_2} \quad (4.108)$$

→

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \bar{v}'_2}{\partial x'_2}(x_1, x_2, 0) \\ &= \frac{\partial \bar{v}'_2(\mathbf{q}'_\theta)}{\partial x'_2} - \frac{1}{2\Delta_h} \left\{ \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial x_2}(x_1, x_2, \Delta_h) - \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial x_2}(x_1, x_2, -\Delta_h) \right\} x_2 \sin \theta \\ &+ \frac{1}{2\Delta_h^2} \left\{ \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial x_2}(x_1, x_2, \Delta_h) - 2 \frac{\partial v_2(\mathbf{q}_0)}{\partial x_2} + \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial x_2}(x_1, x_2, -\Delta_h) \right\} (x_2 \sin \theta)^2 \end{aligned} \quad (4.109)$$

さて、アジマス面 $\Pi(0)$ の速度勾配テンソルにおける $\partial v_i / \partial x_3$ ($i = 1, 2$) の成分は $\tilde{\Pi}(0, n\Delta_h)$ の速度場のデータより求めることができる。従って、連立方程式にて速度勾配テンソル $\nabla \mathbf{v}$ を求める成分は、 $\partial v_3 / \partial x_i$ ($i = 1, 2$) となる。式 (4.30) と (4.31) に式 (4.107) 並びに (4.109) をそれぞれ代入すると、それぞれ以下の方程式が得られる。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial v_3}{\partial x_1}(x_1, x_2, 0) \\ &= \frac{1}{\sin \theta} \left(\frac{\partial \bar{v}_2}{\partial x_1} \cos \theta - \frac{\partial \bar{v}'_2}{\partial x'_1} \right) \\ &= \frac{1}{\tan \theta} \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial x_1} - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \bar{v}'_2}{\partial x'_1} \\ &\rightarrow \\ &= \frac{1}{\tan \theta} \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial x_1} \\ &- \frac{1}{\sin \theta} \left[\frac{\partial \bar{v}'_2(\mathbf{q}'_\theta)}{\partial x'_1} - \frac{1}{2\Delta_h} \left\{ \frac{\partial v_2}{\partial x_1}(x_1, x_2, \Delta_h) - \frac{\partial v_2}{\partial x_1}(x_1, x_2, -\Delta_h) \right\} x_2 \sin \theta \right. \\ &\left. + \frac{1}{2\Delta_h^2} \left\{ \frac{\partial v_2}{\partial x_1}(x_1, x_2, \Delta_h) - 2 \frac{\partial v_2(\mathbf{q}_0)}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1}(x_1, x_2, -\Delta_h) \right\} (x_2 \sin \theta)^2 \right] \end{aligned} \quad (4.110)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2}(x_1, x_2, 0) \\ &= \frac{1}{\cos \theta \sin \theta} \left(\frac{\partial \bar{v}_2}{\partial x_1}(x_1, x_2, 0) \cos^2 \theta - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}(x_1, x_2, 0) \cos \theta \sin \theta \right) \\ &+ \frac{1}{\cos \theta \sin \theta} \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_3}(x_1, x_2, 0) \sin^2 \theta - \frac{\partial \bar{v}'_2}{\partial x'_2} \right) \\ &\rightarrow \\ &= \frac{1}{\tan \theta} \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial x_1}(x_1, x_2, 0) - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}(x_1, x_2, 0) + \tan \theta \frac{\partial v_3}{\partial x_3}(x_1, x_2, 0) \\ &- \frac{1}{\cos \theta \sin \theta} \left[\frac{\partial \bar{v}'_2(\mathbf{q}'_\theta)}{\partial x'_2} - \frac{1}{2\Delta_h} \left\{ \frac{\partial v_2}{\partial x_2}(x_1, x_2, \Delta_h) - \frac{\partial v_2}{\partial x_2}(x_1, x_2, -\Delta_h) \right\} x_2 \sin \theta \right] \\ &- \tan \theta \frac{1}{2\Delta_h^2} \left\{ \frac{\partial v_2}{\partial x_2}(x_1, x_2, \Delta_h) - 2 \frac{\partial v_2(\mathbf{q}_0)}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2}(x_1, x_2, -\Delta_h) \right\} x_2^2 \end{aligned} \quad (4.111)$$

以上により、2次の補正項が必要である場合は、上記定式化より速度勾配テンソルを評価することができる。

本項で示した定式化を応用することにより、任意の高次の次数による定式化が可能である。これらから、本解析理論により任意の精度で3次元の速度勾配テンソル $\nabla \mathbf{v}$ を評価できることが示された。

4.7 解析理論のまとめ

複数のアジマス角におけるスパイラル渦が同じ状態にある、即ち、極端に流れから歪みを受けたり粘性散逸等によりアジマス角間でトポロジーの性質が変化していないことを仮定し、座標系間の線型変換の関係を応用して2次元の速度データから3次元の速度勾配テンソルを求める解析理論について示した。

本解析において、全ての速度勾配テンソル成分を求める方法は一通りではなく、幾つかの選択肢がある。本解析の応用では、本章で示した特性に注意し、最適な速度勾配テンソルの解法を選択して適用するのが良い。

本解析固有の性質として、異なるアジマス角の測定では、複数の測定面で同じ節点の速度データを用いても座標のずれが存在しうることを示し、それに対する補正を考慮した定式化も行った。但し、後流に平行な回転軸（本章の x_1 軸）上ではこの様なずれは生じず、回転軸近傍の点ではこの影響は無視できる。また、異なるアジマス角の角度の差が小さい場合、或いは速度勾配テンソル成分 $\partial v_i / \partial x_j$ のアジマス面の法線 (x_3) 方向に関する変化が無視できる場合も同様である。従って、以下の場合には、補正は不要である。

1. x_1 軸（回転軸）上或いはその極近傍の領域
2. 測定面間のアジマス角の差が小さい
3. $\frac{\partial}{\partial x_3} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \approx 0$ （速度勾配テンソル成分のアジマス面の法線方向に関する変化が無視できる）

特に回転軸上では、数学的に厳密に補正の項はなくなる。

複雑な渦流れが想定される時、旋回平面の法線方向における速度勾配テンソルの空間微分が測定面の法線軸上で大きく変化するとき、上記3項の考慮が必要である。これは、例えば、旋回平面の法線を仮に「渦軸」とした場合、渦軸方向の速度勾配テンソルの変化が無視できない場合を示す。このとき、 $\partial / \partial x_3$ の微係数の項をテイラー展開し、有限差分を用いた定式化が有効である。本章では、テイラー展開の1次並びに2次近似を用いた定式化を行った。これを応用すると、更なる高次における定式化が可能であり、必要な精度・次数で本解析理論に基づく定式化・解析が可能であることを示した。

しかし、現在考えられている主要な渦モデルである Bugers, Batchlor, Vatistas, Rosenhead 等の渦では、渦軸方向の速度勾配テンソルの変化がなく、スパイラル渦がこれらの速度構造と類似

した構造、或いはこれらの速度構造が速度の関数の主要項的なものであるならば、補正は不要である。

いずれの渦構造にしても、本理論に基づく解析により、3次元の速度勾配テンソル並びに、これから導かれるガリレイ不変の速度構造を同定することができる。

第5章 速度場の測定

スパイラル渦の速度構造の解析のために複数のアジマス角における平面の2次元速度場の測定が必要である。速度場の測定にはPIV (Particle Image Velocimetry: 粒子画像流速計測法) やLDV (Laser Doppler Velocimeter: レーザドップラー流速計) 等がある。PIVは、流れ場に粒子(トレーサ粒子)を混ぜ、レーザ光源を用いて光のシートを構成し、そのシートにおける粒子(群)の移動を測定し、速度場を求めるものである。本研究におけるスパイラル渦の解析では、風車の後流における複数平行平面の2次元速度場のデータより3次元の渦流解析を行うが、水平軸風車の後流の渦の測定における代表的な実験条件においてPIVによる2次元の速度場の測定を行い、渦構造の解析を行う。本章では、このPIVによる速度場の測定要領について記述する。

また、PIVにより瞬間速度場を多数計測しても、それぞれの瞬間で捉えられたスパイラル渦の位置は異なる。また、速度場・流線を見て渦位置を判断することも適切な方法とは言えない。何故なら流線はガリレイ不変(慣性座標系に対して不変)ではないからである。本研究では、瞬間速度場でスパイラル渦を捉えたとき、これらの渦位置を2次元の渦流解析を行って評価し、各瞬間速度場の渦位置を合わせた上で3次元速度勾配テンソルを評価するためのアンサンブル平均を求める。尚、この手法については次章で記述する。

5.1 水平軸風車の運転条件

本実験は、風洞実験装置内にて行う。風洞実験装置内の流れの条件、風車の仕様等について以下に示す。

1. 主流方向の基準風速 U_∞ : 7.34 [m/s]
2. 実験用風車の回転数 w : 860.0 [rpm]
3. 実験用風車の最適運転条件の周速比 λ : 3.1
4. 翼の仕様: 2枚翼水平軸風車
5. 風車半径 R : 250 [mm] (直径 D : 500 [mm])

ここで、周速比 λ は以下の式により与えられる。

$$\lambda = \frac{2\pi R w / 60}{U_\infty} \quad (5.1)$$

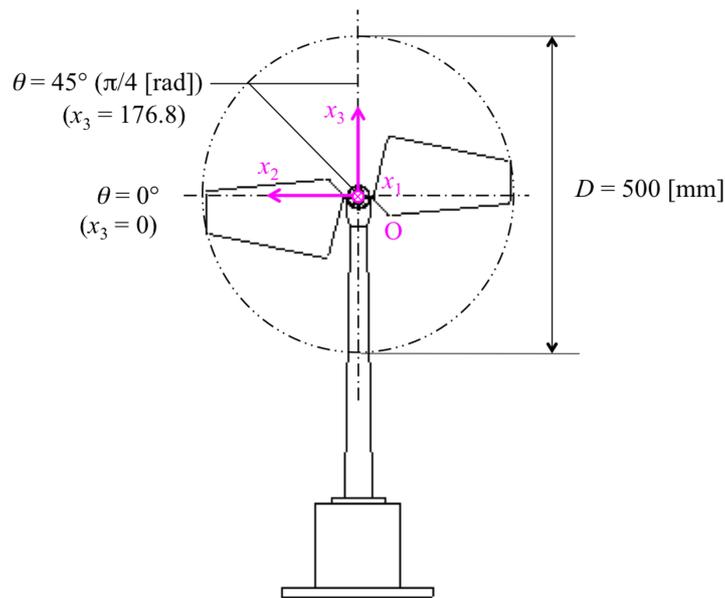


図 5.1: 本実験における 2 枚翼水平軸風車並びに空間座標系 (デカルト座標系)

本実験における風車を図 5.1 に示す。

5.2 PIV による測定

PIV による粒子の撮影にはロータの回転数に同期させて行う。即ち、PIV の測定では、複数のアジマス角にて速度場を測定するが、いずれのアジマス角の測定においても翼が同じアジマス角に位置するときに測定する (phase-locked)。

5.2.1 測定する面のアジマス角

アジマス角について、複数の面における流れの挙動を確認し、また 3 次元の速度勾配テンソルを導出するために、測定するアジマス角は、 $\theta = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, -45^\circ$ ($\theta = 0, \pi/4, \pi/2, -\pi/4$) とする。測定するアジマス角は、 $\theta = 90^\circ$ における面はスパイラル渦の渦軸に対して平行であることが考えられるため、渦位置の判断が難しく、3 次元の速度勾配テンソルの合成をするのは困難であるが、併せて調べるものとする。また、アジマス角 $\theta = -45^\circ (= -\pi/4 \text{ [rad]})$ の面は、アジマス面 (水平面) $\theta = 0^\circ$ の面よりも下方となり、翼根渦による影響も考えられるが、併せて測定して確認する。

アジマス角 $\theta = 0^\circ$ では、本来の測定面の他微小に上下にずらした面においても測定するものとし、3 次元速度勾配テンソルの解法において x_3 方向の空間微分の成分を有限差分にて評価できる様にする。即ち、必要に応じ $\partial v_1 / \partial x_3$ と $\partial v_2 / \partial x_3$ 、即ち a_{13} と a_{23} を直接算出する。これらのアジマス角の測定面を図 5.2 に示す。

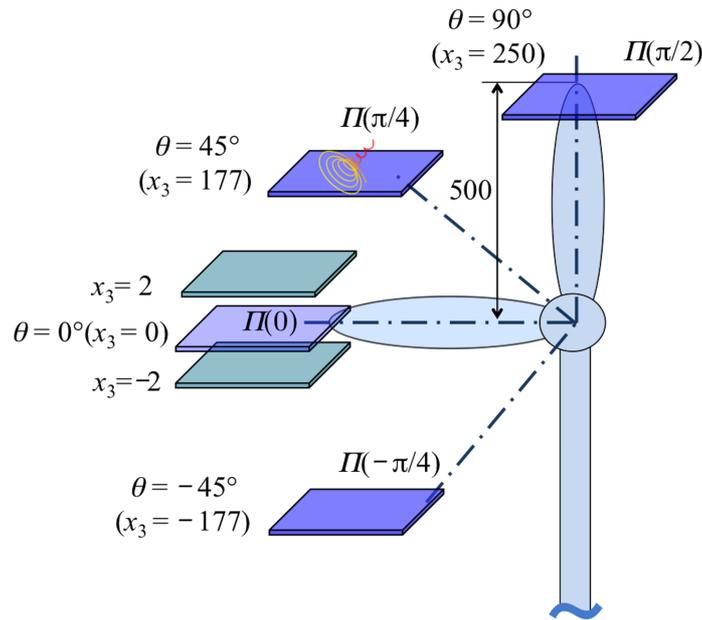


図 5.2: 本実験における測定対象のアジマス角と測定面 ($\theta = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, -45^\circ$ ($0, \pi/4, \pi/2, -\pi/4$))

5.2.2 後流の測定箇所

後流方向の測定範囲は、風車の位置から約 $5R$ まで測定することを考える。実際は、PIV の測定された速度場の様相によりスパイラル渦が測定できていることを確認しつつ、その測定位置を定める。この測定範囲を図 5.3 に示す。図 5.3 では、本実験と解析における座標系も併せて示す。また、第 8 章にて記述する様に、本解析ではアジマス角 $\theta = 0^\circ, 45^\circ$ ($\theta = 0, \pi/4$) における測定面のデータを用いるが、図 5.3 の示す測定範囲は、このアジマス角の高さにおける範囲を表している。

5.2.3 空間解像度

スパイラル渦のスケールについては未知な点があるが、空間解像度として約 2 mm の格子間隔で速度場を求める。

アジマス角 $\theta = 0^\circ$ において、測定面を上下方向に（かつ平行に）ずらした面における測定では、上下方向の間隔を前述した空間解像度と同程度とし、2 mm とする。これにより、差分公式にて速度勾配テンソルの成分を算出するとき、 x_3 方向の空間微分 $\partial v_1/\partial x_3, \partial v_2/\partial x_3$ の差分の精度は平面上のものと同等である。

5.2.4 カメラの撮影範囲

PIV による粒子の撮影範囲は、いずれの後流の測定位置、アジマス角において

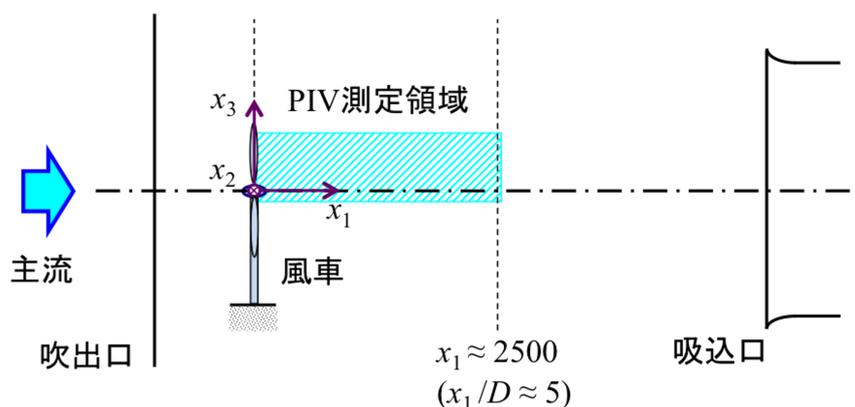


図 5.3: 風車後流における測定範囲。本図では、アジマス角 $\theta = 0^\circ, 45^\circ$ ($\theta = 0, \pi/4$) の高さにおける測定範囲を示す。

- x_1 方向：160 [mm]
- x_2 方向：240 [mm]

とする。

5.2.5 フェーズロックによるシンクロ (PIV の同期)

前述した様に、PIV 計測では、翼の回転運動と PIV のためのカメラの撮影のタイミングを同期させるフェーズロック (phase-locked) 方式により行うものとする。本実験において、アジマス角は 2 枚の風車の翼の内の基準となる翼の 1/4 弦線と水平面との間の角度とする。

実験用風車は、アジマス角 $\theta = 0$ においてパルス信号を発信し、このパルス信号を基準に 1000 μsec 後に粒子の撮影を行う。風車の回転数が 860.0 rpm であるとき、1000 μsec 後におけるアジマス角 θ は約 $\theta = 5.1^\circ$ 程度移動するので、実際はこの角度の分だけずれたアジマス角 θ にてフェーズロックされている。

5.3 スパイラル渦の追跡

スパイラル渦は、翼の後流において螺旋軌道を描きながら流れていく。従って、PIV 計測において、適当な間隔で x_1 方向にカメラをずらすことにより、別の（後流に流れた軌道の）スパイラル渦を捉えることができる。このとき、 x_2 方向において多少のずれが考えられるが、本実験では以下の様な手法により後流のスパイラル渦についても撮影位置を定めて速度を測定することを試みる。

- 風車回転数と主流方向の流速の関係から、あるアジマス角位置で翼端から発生した翼端渦・

スパイラル渦が同一高さ平面内で次にどの位置に移動するかを概算し、試験的に撮影（速度場を測定）する。

- 撮影した画像内にスパイラル渦が存在した場合、得られたデータからスパイラル渦の位置を確認し、撮影範囲の中心に本渦が来るようにカメラの x_1, x_2 座標を移動させる。
- 一方、下流方向に計測を進めるにつれて渦構造の崩壊や渦の位置のずれが大きくなることが懸念され、この場合は速度場におけるスパイラル渦の存在の確認が困難になると考えられる。この確認が困難になった後流以降では、 x_2 座標は固定し、 x_1 座標のみ 150 mm ずつ移動させて撮影を行う。

第6章 速度データの統計処理

風車後流翼端渦の渦構造解析では、瞬間速度場のアンサンブル平均より平均速度場を算出し、これより2次元、3次元のガリレイ不変のトポロジカル渦構造を分析する。瞬間速度場では、各々のケースでスパイラル渦の位置が異なることが考えられ、また、その実際の位置を速度場や流線で判断することは困難である。このとき、2次元の瞬間速度場のデータから2次元の swirlity ϕ を求めることにより、ガリレイ不変の渦領域を同定することができる。これを応用し、瞬間速度場のデータからアンサンブル平均の速度場を求めるとき、各瞬間速度場において2次元の swirlity ϕ から渦位置を特定し、渦位置を合わせたアンサンブル平均ができると、より明確な渦構造を同定できることが期待される。

本章では、瞬間速度場の2次元 swirlity の分布から各瞬間速度場の渦位置の補正を行うデータフィッティングについて記述する。

6.1 データフィッティングの目的と条件

瞬間速度場において、瞬間場の流れの乱れ、或いは測定のタイミングのずれにより渦位置が変化しているものとする、平均速度場（並びに平均速度場から swirlity 等の渦構造）を求めるときには、その（瞬間場の）渦位置を補正した上でアンサンブル平均を求めることが望ましい。このとき、渦流れに関わる何らかの物理量の分布等から渦の特性や位置を確認し、渦中心ができるだけ一致する様にデータを重ね（データフィッティング）、その上でアンサンブル平均を評価することがより明確な渦構造の同定に繋がる。しかし、フィッティングの要領によっては、それに依存した渦構造が定められることもあり得る。そこで、本来の渦構造の特性を効果的に抽出できる様な適切なデータフィッティングとアンサンブル平均を考える必要がある。

6.2 データフィッティングのための渦領域の定義

速度場のアンサンブル平均を求めるための渦位置の変化に伴うデータフィッティングの検討において、まずは渦、或いは渦領域の定義が必要である。ここでは、測定平面上において2次元流れ場の swirlity ϕ が正、即ち $0 < \phi$ である点の集合（閉領域）をこの平面の渦領域と定義する。即ち、渦流れの根本的な必要条件として、2次元の渦領域を定義する。2次元 swirlity が正であるとき、その点周りの局所的なガリレイ不変の流れが渦流となっている。ここで、渦度の高い領域は、流れのトポロジーが渦流とは限らないことに注意する。渦度は局所流れの回転成分を示している

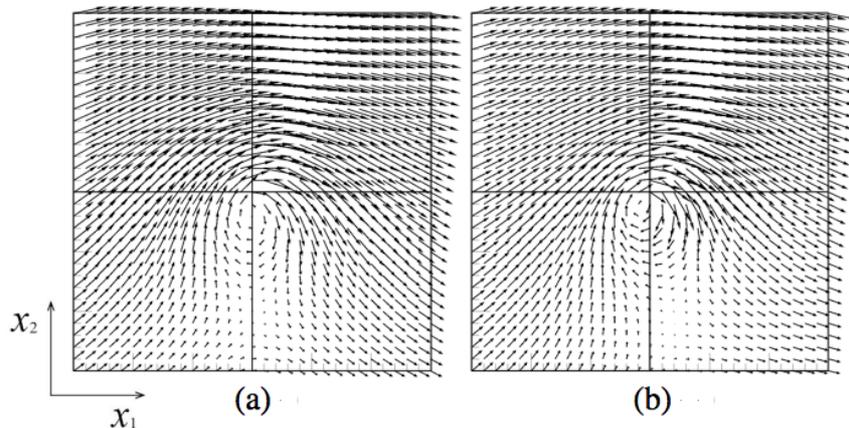


図 6.1: swirlity ϕ が示す渦軸 (渦中心) と速度場が示す渦中心とのずれ。(a), (b) は共に各図の中央に渦の中心があるが、一様流等の影響により、速度場・流線ではずれた位置に見える。(これらは実際の瞬間速度データから解析した場を示す。)

が、せん断と旋回流れとの区別はできない。

速度場はガリレイ不変ではなく、一様流れや慣性座標系に依存する。従って、渦の位置を分析する場合は、速度場ではなく swirlity 分布より分析することが適切であると考えられる。図 6.1 は、swirlity ϕ が示す渦軸 (渦中心) と速度場が示す渦中心とのずれを示す例である。図 6.1 中の (a), (b) では、共に各図の中央に swirlity ϕ の極大値が示す旋回のある中心があるが、一様流等の影響により、速度場・流線では異なる位置に見える。渦軸位置を揃えたアンサンブル平均では、渦の速度特性に基づいたより適切な速度勾配テンソル $\nabla \mathbf{v}$ の評価が可能となる。また、速度勾配テンソル $\nabla \mathbf{v}$ の評価では、これら一様流の影響は除去される。

6.3 フィッティング上の懸案

データフィッティングを行う場合、何らかの数学的なモデルを定めて、これに従い数学的特性 (モデルに関するパラメータの定量評価)、関数分布の位置 (基準位置からのずれ等) を評価する。即ち、モデル関数を定める必要がある。

一方、本渦構造の解析は、その数学的モデルを解明するのが目的であり、モデル関数を定めること自体が本研究の目的・意義と矛盾する。つまり、本旨を含め以下に記述する様な懸案がある。

1. モデル関数自体が存在していない

swirlity 分布の数学的特性が解らず、 C^1 級の関数かどうかということさえ解らない。ガウス分布を仮定すると、この分布に適したデータのみを抽出してしまい、客観性を失ってしまう。これは、他の物理量や速度成分についても同様である。

2. 人為的な数学的構造の特定

一つのモデル関数を定めると、渦構造は強制的にこの数学的構造と定められてしまう。

3. 平均速度場の評価が困難

瞬間的速度場の速度データは格子状の節点上で与えられており、平均速度場を求めるアンサンブル平均では、ある節点上の速度には同じ節点上の複数の瞬間速度場のデータにより求めた平均速度が与えられる。もし、あるモデル関数によるデータフィッティングでずれを評価できたとしても、そのずれの補正が節点単位でない場合は、その対象とする瞬間速度場の節点全体が他の節点分布と異なる位置となる。このようなランダムな節点分布となった速度場でアンサンブル平均を求め、改めて平均速度場を構成する（例えば格子分布上の節点における速度分布）ことは複雑であるだけでなく、平均速度算出のための速度データが補間により与えられ、精度の低下が懸念される。

このような懸案を考慮し、フィッティングを行う場合の一つの案について次節にて説明する。

6.4 データフィッティングの方法

前述した懸案において、モデル関数等の人為的な数学的条件を抑制し、かつ実際の渦構造を明確にする案として以下の様なフィッティングが考えられる。

6.4.1 swirlity の極大性のみの仮定

データフィッティングの様なモデル関数は設定せず、一つの性質のみを仮定する、即ち極大性のみを仮定する。これは以下の様な長所がある。

1. モデル関数の人為設定の排除

C^n 級等の関数の性質・分類に対する細かい設定はしないため、極大性以外の関数の性質に対して自由度があり、人為的な制約を与えることがない。

2. 物理特性の適正

圧力極小を有する渦や、周方向速度の半径方向に関する速度勾配が渦軸で最大となる場合、swirlity は渦軸上で極大となる性質がある。

3. 平均速度場との整合性

本フィッティングは、渦特性をより明確にするためのものであるので、フィッティング無しの平均速度場における渦構造は、フィッティングを行った場合の渦構造と根本的に共通する特性を有している。（後述するが、本解析では、フィッティング無しの平均速度場の渦構造においてこの極大性を有していることが確認されている。）

6.4.2 有限領域の swirlity 分布による極大性の評価と渦軸位置の補正

関数の極大性は、本来この関数の2階導関数より評価できる。しかし、この2階導関数の値は、同じ極大性を有していても関数形により大きく異なる。関数形を仮定しない場合、2階導関数の数値にて渦構造の性質を議論するのは、この点で適切ではない。

一方、有限差分では、2階導関数は、微分方向における前後の点の関数値により評価が可能であるが、前後それぞれ2点（合計5点）の関数データを用いると信頼性が高くなる。つまり、対象とする一つの点の2次元極大性については、その点を中心とした 5×5 点のデータを用いて評価することができる。ある点が極大点であるかどうかは、これら 5×5 点のデータにより判別でき、この極大性を有する点を渦軸としてみなすことが一つの案として考えられる。この方法では、中心点の周りにおいて、この中心点の関数値の極大性を判別する。ある方向における関数値の極大性は前後1点の値により評価することもできるが、微小スケールの極大領域を避けることも含め 5×5 点のデータを用いる。

この数値的手法は、以下の長所がある。

1. 関数形に依存することのない極大性の判断が可能
2. アンサンブル平均の評価が可能
節点単位で渦軸のフィッティングを行うため、節点以外の領域の点の関数値の補間等による速度場データの再構成は不要であり、平均速度場を求めることができる。

6.5 本フィッティング案の適用条件と検証

本フィッティングを適用する場合、以下の検証を渦解析上において用いるものとし、この数学的手法の適正について確認を行うものとする。

- フィッティング有無による渦構造の特性維持の検証

本フィッティングは、あくまで渦構造を明確にするための補正であり、これにより渦のトポロジカルな数学的構造が変化するものではない。従って、本フィッティング有無による数学的変化がないことを、各流れのケース（それぞれの後流位置やアジマス角での瞬間場のアンサンブル平均）において確認する。

6.6 フィッティングのまとめ

瞬間速度場におけるアンサンブル平均を求める際に瞬間速度場のデータフィッティングを適用する場合の数学的考察を行った。平面上の旋回強さ、即ち2次元 swirlity ϕ の極大性のみを仮定する方法により、モデル関数等で渦構造に人為的な設定を与えることなく、渦軸（渦の位置）を

節点単位で補正する方法が一つの数学的・数値的手法として考えられる。この様な仮定は、対象とするスパイラル渦が本来備えている性質であることを確認することが必要であるが、本研究では、平均速度分布から導かれるスパイラル渦の特性より定めているため、適切であると考えられる。この方法は、フィッティングなしの平均速度場における渦構造と共通する基本的特性を有することを条件とし、より明確な渦構造を評価できる。

尚、このフィッティング処理により評価した渦構造は、フィッティング無しの平均速度場と同じ特性 (swirlity の極大性) を有していることが翼直近である後流位置 $(x_1, x_2, x_3) = (330, 280, 0)$ 付近 (解析結果に関する第 8 章参照) の瞬間速度場のデータ処理と渦解析結果にて確認されている。

第7章 スパイラル渦の数値解析

本章では、これまでに記述した3次元速度勾配テンソルの解析理論、渦のトポロジーの同定・解析、スパイラル渦の2次元速度場の測定データの統計処理等を用い、3次元の速度勾配テンソル並びにスパイラル渦構造を解析する数値解析（渦流解析）のアルゴリズムと内容について説明する。渦流解析とは、速度勾配テンソル $\nabla \mathbf{v}$ を用いて局所流れのトポロジー解析を行い、渦領域、渦の強さ、旋回平面、渦空間、トポロジー不変量、トポロジーに基づく物理特性を解析する数値解析を意味する。

以降では、まず本スパイラル渦の渦流解析における数値解析の体系について説明し、また、その体系にあるそれぞれの解析のアルゴリズムと内容について記述する。

7.1 スパイラル渦の渦流解析

スパイラル渦の渦流解析は、5つの主要な解析モジュールにより構成される。即ち、後流のある特定の位置におけるスパイラル渦の渦流解析を行うにあたり、以下の5つの項目に関する解析を行う。

1. 瞬間速度場のデータの検査と解析用データの作成
2. 瞬間速度場における2次元渦流解析によるアンサンブル平均のための速度データの選択
3. 複数平面の2次元速度勾配テンソル $\nabla \mathbf{v}$ の導出
4. 3次元速度勾配テンソル $\nabla \mathbf{v}$ の解析
5. 3次元渦流解析

本解析では、2次元と3次元の渦流解析が共に必要であることを注意する。上記第2項の2次元渦流解析は、2次元の速度場より2次元 swirlity ϕ を同定することを示す。これは、渦位置の同定と2次元 swirlity ϕ の分布を評価するものであるが、後述する様に速度データの適正のチェックとアンサンブル平均のために用いる。

以降ではそれぞれの項目の解析について説明する。

7.2 瞬間場の速度データの検査と自動処理

まず最初に、PIV で測定した瞬間速度場のデータについて、その座標等の検査を行い、設定した空間座標系に座標変換したデータファイルを作成する。瞬間速度場のデータはトータルで数千以上に及ぶため、後流の位置とアジマス角 θ 、更に $\theta = 0$ である場合は $x_3 = 0, \pm 2$ の設定を行うと、その位置における測定面の瞬間速度場の PIV 測定データ全 100 ケースを自動で処理をするプログラムを開発し、解析に用いる。

この処理のアルゴリズムの概要を以下に示す。

1. 対象とする後流位置を設定する。
2. 対象とする測定面を設定する。
このとき、以下のパラメータを設定する。
 - (a) 後流方向の位置 (x_1, x_2 座標)
 - (b) 測定するアジマス角 θ : $\theta = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, -45^\circ$ ($\theta = 0, \pi/4, \pi/2, -\pi/4$)
 - (c) $\theta = 0$ である場合 $x_3 = 0, \pm 2$ の面があるため、この座標パラメータ
3. 設定された後流方向の位置 (x_1, x_2 座標)、アジマス角 θ 、或いは $x_3 = 0, \pm 2$ の面の瞬間速度場のデータファイルの一つを開き、以下の処理を行う。
 - (a) 節点座標、節点間隔の不整合をチェックする。
 - (b) 速度成分について、PIV 測定用の座標系よりスパイラル渦の解析に用いる空間座標系に座標変換する。
 - (c) スパイラル渦の解析用のデータ形式、変数のみをまとめたデータファイルを出力する。
4. 第 2, 3 項を繰り返し、瞬間速度場 100 ケースの PIV 速度データファイルの全てについて行う。

7.3 2次元の渦流解析によるアンサンブル平均のためのデータの選択

次に、スパイラル渦の解析用に作成された各位置の全ての瞬間速度場のデータについて、2次元の渦流解析を行い、捉えた渦の位置、強さ、領域、渦強さの分布を分析する。渦の強さの評価には2次元の swirlity ϕ を用いる。前述した様に、2次元 swirlity ϕ が急激な増加を示す分布（1点ピークの分布）となっている場合、或いは2次元 swirlity ϕ の極大領域が二つ（複数）存在する場合等は状況に応じて除外する必要がある。これを具体的に示す。

2次元の swirlity ϕ を評価したとき、この後流位置における平均値（全瞬間速度場のデータにおける2次元の swirlity ϕ の平均値）から相当低い値の渦は除外する。即ち、瞬間速度場における

渦の強さに対し、ある閾値 $\check{\phi}_{2\text{dim}}$ を設定する。ここで、2次元の swirlity ϕ に対し、

$$\check{\phi}_{2\text{dim}} < \phi \quad (7.1)$$

$\check{\phi}_{2\text{dim}}$: 対象とする後流位置により定める閾値

という条件を設ける。これを満たす場合は、次に2次元の swirlity ϕ の局所極大性を検査するものとする。 $\check{\phi}_{2\text{dim}}$ は、対象とするそれぞれの後流位置において、全瞬間速度場の平均速度場における渦の強さ、また複数の瞬間速度場における2次元の swirlity ϕ の値や分布から定める。

2次元の swirlity ϕ の局所極大性において、急激なピークのあるものは、PIV の速度場の測定で誤ったデータが与えられて速度勾配テンソル成分が適切に評価できなかったことに起因するものとして除外する。このとき、隣接する節点の間で2次元の swirlity ϕ の差 $\Delta\phi$ が

$$\Delta\check{\phi}_{2\text{dim}} < \Delta\phi \quad (7.2)$$

$\Delta\check{\phi}_{2\text{dim}}$: 対象後流位置により定める隣接節点間の ϕ の差の閾値

であるとき、この節点は2次元の swirlity ϕ の評価の対象から除外する。

更に、極大点が複数ある場合、極大点が二つで、この極大領域が隣接している場合、渦の重なり或いは速度場の乱れ等が考えられるが、本研究では極大値の大きい方の節点を渦の中心としてアンサンブル平均に加える。極大点が隣接していない、あるいは極大点が多数存在する場合は、アンサンブル平均のためのデータから除外する。

これらを考慮し、この2次元の渦流解析とアンサンブル平均のためのデータの選択、データファイルの作成のアルゴリズムの概要は以下となる。

1. 対象とする後流位置を設定する。
2. 対象とする測定面の設定
測定するアジマス角を、 $\theta = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, -45^\circ$ ($\theta = 0, \pi/4, \pi/2, -\pi/4$) から設定する。
尚、 $\theta = 0$ である場合 $x_3 = 0, \pm 2$ の面があるため、この座標パラメータを設定する。
3. 前節で作成したそれぞれのアジマス角 θ 或いは $x_3 = 0, \pm 2$ の面の各瞬間速度場のデータファイルを開き2次元の渦流解析を行う。
4. 2次元の渦流解析の結果、2次元の swirlity ϕ 場について以下の分析を行う。
 - (a) 渦領域の有無。
 - (b) 渦領域が（有限領域で）存在する場合、その領域内の節点において2次元の swirlity ϕ の値をチェックする。
 - (c) 2次元 swirlity ϕ が $\check{\phi}_{2\text{dim}} < \phi$ である節点が存在する場合は、局所極大性（周辺の隣接節点の2次元 swirlity ϕ より大きいこと）をチェックする。

- i. 2次元の swirlity ϕ の極大値 $\phi_{2d-\max}$ がある場合、 $\phi_{2d-\max} < \check{\phi}_{2\text{dim}}$ であれば、評価対象から除外する。
 - ii. 隣接する全方向の節点における 2次元の swirlity ϕ と $\phi_{2d-\max}$ との差 $\Delta\phi$ が $\Delta\check{\phi}_{2\text{dim}} < \Delta\phi$ であれば、極端なピークとして評価対象から除外する。
- (d) 他に渦領域の有無を調べ、存在する場合は、第 (b) 項以降を繰り返す。
5. 第 4 項の条件を満たす極大領域の数 $n_{\text{local-max}}$ をカウントする。
6. 第 3, 4, 5 項を平面の全領域で繰り返す。
7. 極大領域の数 $n_{\text{local-max}}$ に応じ以下の対応を行う。
- (a) $n_{\text{local-max}} = 1$ の場合は、極大点を渦中心とする
 - (b) $n_{\text{local-max}} = 2$ の場合、極大領域が隣接している場合のみ、極大値の大きい方を渦中心とする。
 - (c) 上記以外の場合は評価対象から除外する。
8. アンサンブル平均のデータとして用いる場合は、渦中心を有する節点を中心として 31×31 の節点の速度データを所定のフォーマットで出力するファイルを作成する。
9. 瞬間速度場 100 ケースの PIV 速度データファイルの全てに第 2 項から繰り返す。

本アルゴリズムにて作成した瞬間速度場のデータは、渦の位置も同定し、極大点を中心とした瞬間速度場のデータを作成している。これにより渦中心を揃えた速度場のアンサンブル平均のデータを算出することができる。ある瞬間速度場の例を図 7.1 ~ 7.3 に示す。尚、これ以降のコンター図において、 x_1, x_2 軸中の数値は節点番号を示すことに注意する。図 7.1 において、swirlity ϕ の分布は明確な極大領域を一つ有しており、ピーク値を中心にした全周で渦領域が広がっている。しかし、図 7.2 では、swirlity ϕ は極大値を有するものの、非渦領域からの急激なピークの箇所もあり、速度データのエラーによる不適切な速度勾配テンソルの成分 $\nabla\mathbf{v}$ の存在が考えらる。この場合、アンサンブル平均用データとしては除外の対象となる。また、図 7.3 では、明確な極大領域がなく、最大値も全ての瞬間速度場における平均データ上の渦の swirlity ϕ の極大値より小さい。このため、アンサンブル平均用データとしては除外の対象となる。

瞬間速度場における swirlity ϕ 場の様相を表すものとして、後流位置（解析結果に関する第 8 章を参照） $(x_1, x_2) = (330, 280)$ 付近における 2次元 swirlity ϕ 場の 20 データの場を Appendix A に示す。

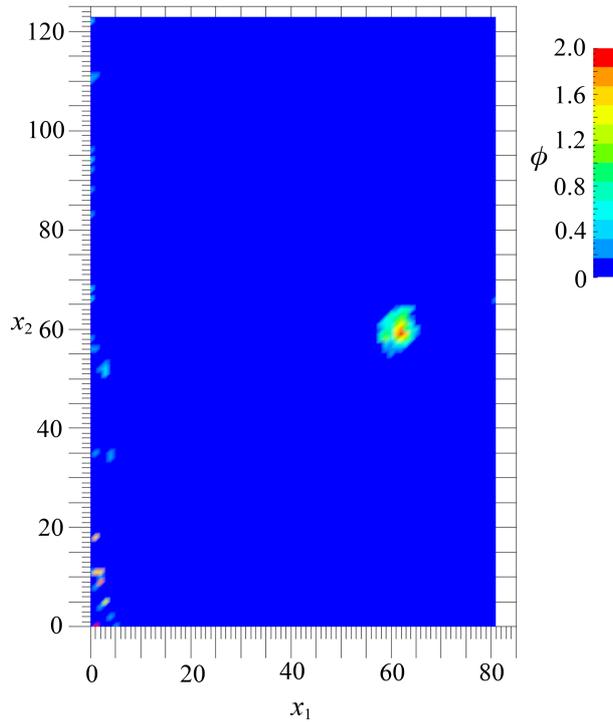


図 7.1: 後流位置 $(x_1, x_2) = (330, 280)$ 付近における瞬間速度場に関する swirlity ϕ の分布例 1 (極大領域を一つ有するサンプル) (注: x_1, x_2 軸中の数値は節点番号を示す)

7.4 複数平面の 2 次元速度勾配テンソル $\nabla \mathbf{v}$ の導出

渦位置を合わせて速度場のアンサンブル平均用の瞬間速度場を選定した後、これらを元に対象とする面におけるアンサンブル平均の速度場を求める。次に、このアンサンブル平均速度場において渦流解析を行い (参考用)、また、3次元の速度勾配テンソル $\nabla \mathbf{v}$ を導出するために、対象平面における 2次元の速度勾配テンソル成分 $\nabla \mathbf{v}$ を評価する。

このアルゴリズムを以下に示す。これまでの解析と同様に、後流位置等を設定し、その位置における 2次元の速度勾配テンソル成分 $\nabla \mathbf{v}$ を評価し、同テンソル成分のデータファイルを作成する。

1. 対象とする後流位置を設定する。
2. 対象とする測定面のアジマス角を、 $\theta = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, -45^\circ$ ($\theta = 0, \pi/4, \pi/2, -\pi/4$) の中から設定する。
尚、 $\theta = 0$ である場合 $x_3 = 0, \pm 2$ の面があるため、この座標パラメータを設定する。
3. 指定されたアジマス角 θ 或いは $x_3 = 0, \pm 2$ の面の瞬間速度場のデータファイルにおいて、アンサンブル平均速度場の (計算に含める) 対象として選択された瞬間速度場のデータファイル N_{data} の数と各データファイルの ID を入力 (自動) する。
4. 第 3 項で入力した一つの ID のデータファイルを開き、各節点の速度データを入力する

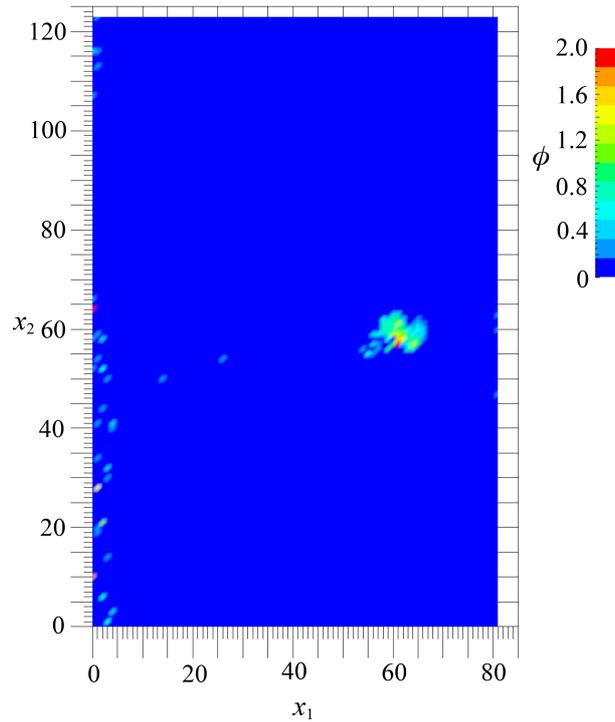


図 7.2: $(x_1, x_2) = (330, 280)$ 付近における瞬間速度場に関する swirlity ϕ の分布例 2 (極大値を有するものの、非渦領域からの急激なピークがあり、速度データのエラーの可能性があるため、アンサンブル平均用データとしては除外の対象となる)

5. N_{data} の数だけ第 4 項を繰り返す。
6. 選択された瞬間速度場の全データよりアンサンブル平均の速度場を求め、各節点の速度成分を出力する。
7. 第 6 項のアンサンブル平均データを用いて、この平面における 2 次元の速度勾配テンソル $\nabla \mathbf{v}$ の成分を差分により評価する。
また、このアンサンブル平均の速度場にて 2 次元の渦流解析を行う (参考用)。
8. 2 次元速度勾配テンソル $\nabla \mathbf{v}$ の成分を出力する。

7.5 3次元速度勾配テンソルの構成

3次元の速度勾配テンソル $\nabla \mathbf{v}$ の導出に用いる測定面の速度場のアンサンブル平均、またこのアンサンブル平均に基づく 2次元の速度勾配テンソルの成分が与えられたとき、第 4 章にて記述した本テンソルの解析理論により 3次元の速度勾配テンソル成分 $\partial v_i / \partial x_j$ ($i, j = 1, 2, 3$) を導出する。以下にこのアルゴリズムを示す。

1. 対象とする後流位置を設定する。

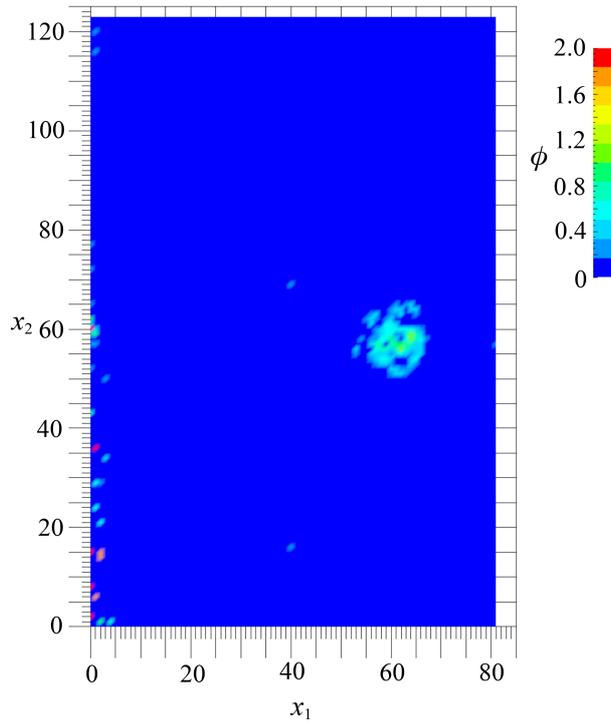


図 7.3: $(x_1, x_2) = (330, 280)$ 付近における瞬間速度場に関する swirlity ϕ の分布例 3 (明確な極大領域がなく、最大値も全平均データにおける渦の swirlity ϕ の極大値より小さいため、アンサンブル平均用データとしては除外の対象となる)

2. 3次元の速度勾配テンソル $\nabla \mathbf{v}$ の導出に用いる測定面のアジマス角を、 $\theta = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, -45^\circ$ ($\theta = 0, \pi/4, \pi/2, -\pi/4$) から設定する。
 $\theta = 0$ である場合 $x_3 = 0, \pm 2$ の座標パラメータを設定する。
3. 第 2 項で設定した全ての面における 2次元速度勾配テンソル成分を入力する (自動)
4. 各節点において、以下の手順で 3次元の速度勾配テンソル $\nabla \mathbf{v}$ を導出する
 - (a) 基準面 (アジマス面: $\theta = 0$) における 2次元速度勾配テンソル成分 $\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_1}, \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_2}, \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial x_1}, \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial x_2}$ を設定する。
 - (b) 連続の式 (4.32) を用いて式 (4.33) より $\frac{\partial v_3}{\partial x_3}$ を求める。
 - (c) 3次元の速度勾配テンソル $\nabla \mathbf{v}$ の他の成分 $\frac{\partial v_1}{\partial x_3}, \frac{\partial v_2}{\partial x_3}, \frac{\partial v_3}{\partial x_1}, \frac{\partial v_3}{\partial x_2}$ は、他の測定面の 2次元速度勾配テンソル成分を用いて式 (4.29), (4.30), (4.31), (4.39) 等より求める。
 - (d) $\theta = 0$ における $x_3 = \pm 2$ の測定面から得られる 2次元速度勾配テンソル $\nabla \mathbf{v}$ の成分を用いる場合、これより $\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_3}, \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial x_3}$ が与えられるので、残りの成分を前項から求める。

- (e) 節点座標の補正や x_3 方向の空間微分において高次精度の解法を必要とする場合は、必要な精度に応じた関連式を用いて3次元の速度勾配テンソル $\nabla \mathbf{v}$ 成分を求める。

5. 3次元速度勾配テンソル $\nabla \mathbf{v}$ の成分を出力する。

第4章の解析理論にて記述した様に、全ての3次元の速度勾配テンソル $\nabla \mathbf{v}$ の導出には、幾つかの選択肢がある。また、節点座標の補正や x_3 方向の空間微分において高次の微分の可能性を仮定する場合は、それに依じた式を用いて成分の導出に組み込む。

7.6 3次元渦流解析

3次元の速度勾配テンソル $\nabla \mathbf{v}$ が得られると、スパイラル渦のトポロジーを解析し、トポロジーに基づく物理特性を解析できる。以下にこのプログラムのアルゴリズムを示す。

1. 対象とする後流位置を設定する。
2. 対象位置の3次元速度勾配テンソル $\nabla \mathbf{v}$ のデータファイルから成分を入力する (自動)。
3. ある指定された節点における速度勾配テンソル $\nabla \mathbf{v}$ の固有方程式を解き、固有値を求める。
4. 速度勾配テンソル $\nabla \mathbf{v}$ が複素固有値を有するとき、複素固有ベクトルにおいて実ベクトル ξ_{pl} 、虚ベクトル η_{pl} がそれぞれ直交する様に設定する。
実ベクトル ξ_{pl} 、虚ベクトル η_{pl} は、(後述する) 式 (7.8) 或いは (7.9) を解き、また式 (7.4) 或いは (7.5) の式を用いて定められる。
5. 渦空間の基底を求める。
6. 渦流対称性 c を求め、旋回平面 \mathcal{P} 上の周方向速度 v_θ 、半径方向速度 v_r の固有値 $\lambda_{\theta_i}, \lambda_{r_i}$ ($i = 1, 2$) を求める。
7. トポロジー不変量 swirlity ϕ 、sourcity σ (旋回平面 \mathcal{P} 上) を求める。
8. 渦空間における渦度ベクトル、また空間座標系における渦度ベクトルの各成分を求める。
9. トポロジーに関する物理特性として、旋回平面 \mathcal{P} 上の圧力極小 $\tilde{\lambda}_2$ 、渦の伸長 (エンストロフィー生成) δ を求める。
10. 第3項に戻り、全ての節点について (31×31 節点) 上記トポロジー不変量、物理量等を計算する
11. 渦流解析の結果を出力する。

上記第2項において、速度勾配テンソル $\nabla \mathbf{v}$ の複素固有値 $\varepsilon_R \pm i\psi$ に関する複素固有ベクトルの実ベクトル $\boldsymbol{\xi}_{pl}$ 、虚ベクトル $\boldsymbol{\eta}_{pl}$ の直交性は以下から導かれる。速度勾配テンソル $\nabla \mathbf{v}$ を $\nabla \mathbf{v} = \mathbf{A} = [a_{ij}] = [\partial v_i / \partial x_j]$ ($i, j = 1, 2, 3$) と表すと、このテンソルの複素固有値 $\varepsilon_R \pm i\psi$ に関する固有方程式

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{\xi}_{pl} \pm i\boldsymbol{\eta}_{pl}) = (\varepsilon_R \pm i\psi)(\boldsymbol{\xi}_{pl} \pm i\boldsymbol{\eta}_{pl}) \quad (7.3)$$

より

$$(\mathbf{A} - \varepsilon_R \mathbf{E}) \boldsymbol{\xi}_{pl} = -\psi \boldsymbol{\eta}_{pl} \quad (7.4)$$

$$(\mathbf{A} - \varepsilon_R \mathbf{E}) \boldsymbol{\eta}_{pl} = \psi \boldsymbol{\xi}_{pl} \quad (7.5)$$

\mathbf{E} : 単位行列 (3×3)

であるから、これらに $(\mathbf{A} - \varepsilon_R \mathbf{E})$ を乗じると、 $\boldsymbol{\xi}_{pl}$ と $\boldsymbol{\eta}_{pl}$ は共に

$$(\mathbf{A} - \varepsilon_R \mathbf{E})^2 \boldsymbol{\xi}_{pl} = -\psi^2 \boldsymbol{\xi}_{pl} \quad (7.6)$$

$$(\mathbf{A} - \varepsilon_R \mathbf{E})^2 \boldsymbol{\eta}_{pl} = -\psi^2 \boldsymbol{\eta}_{pl} \quad (7.7)$$

となる。従って、 $\boldsymbol{\xi}_{pl}$ と $\boldsymbol{\eta}_{pl}$ は共に $(\mathbf{A} - \varepsilon_R \mathbf{E})^2$ における固有値 $-\psi^2$ の固有ベクトルであり、この固有値に関する固有平面上の任意のベクトルとなる。ここで、式 (7.4)、(7.5) において、

$$\boldsymbol{\xi}_{pl} (\mathbf{A} - \varepsilon_R \mathbf{E}) \boldsymbol{\xi}_{pl} = 0 \quad (7.8)$$

$$\boldsymbol{\eta}_{pl} (\mathbf{A} - \varepsilon_R \mathbf{E}) \boldsymbol{\eta}_{pl} = 0 \quad (7.9)$$

の条件を課すと、二つのベクトル $\boldsymbol{\xi}_{pl}$ と $\boldsymbol{\eta}_{pl}$ が直交、即ち $\boldsymbol{\xi}_{pl} \perp \boldsymbol{\eta}_{pl}$ となる様に定めることができる。また、複素固有値の固有方程式 (7.3) は、その複素ベクトルの長さの比も規定することに注意する。渦流対称性 c は、これら二つのベクトル $\boldsymbol{\xi}_{pl}$ と $\boldsymbol{\eta}_{pl}$ の比から与える。

第8章 スパイラル渦の解析結果

第7章に記述した解析法に基づき、アジマス角 $\theta = 0^\circ, 45^\circ$ における平面の速度勾配テンソルを用いて3次元の速度勾配テンソル $\nabla \mathbf{v}$ を構成し、渦の解析を行った。アジマス角 $\theta = 0^\circ$ では水平面に対して垂直方向に $\pm 2 \text{ mm}$ ずらした位置において速度測定を行い、即ち、第4章の解析理論にて示した同一アジマス角における測定面の追加を行い、また x_2 方向の座標の補正なしの条件で渦構造を解析した。本章では、まず翼で発生した翼端渦・スパイラル渦に関し、翼直近、また後流に流れるスパイラル渦の幾つかの位置における渦の同定、並びに渦構造と渦特性を評価した結果を示す。

本解析における(直交)座標系では、翼のロータ軸を原点とし、主流方向を x_1 軸(正)の方向、また x_1 - x_2 平面を水平面、かつ x_3 軸(正)を鉛直上部方向に向く右手系の正規直交座標系を定義する。このとき、翼の x_1 方向の位置を $x_1 = 0$ とし、 $x_1 = 2600$ ($x_1/D \approx 5$) 付近までのスパイラル渦について追跡並びに解析を行った。 $x_1 = 1800$ 以降ではスパイラル渦は殆ど観察されなかった。本章では、翼直近から幾つかの後流位置において同定したスパイラル渦について、3次元の速度勾配テンソル $\nabla \mathbf{v}$ を構成して得られたトポロジーの不変量・物理量に関する解析結果を示す。

本章で示す幾つかの後流位置におけるスパイラル渦のトポロジーでは、以下の各トポロジー不変量・物理量の等値線図(コンター図)を示す。

1. 旋回平面 \mathcal{P} における渦の強さを示す swirlity ϕ
2. 渦流れの対称性 c (以下では渦流対称性と記す)
3. 半径方向速度の吸込み・湧出しの平均強さ ε_R の平均強さ
4. 渦度成分 ω_i ($i = 1, 2, 3$)

また、渦のトポロジーによる渦の物理特性として、以下に示す物理量のコンター図を示す。

1. 旋回平面 \mathcal{P} における圧力極小の強さを示す $\check{\lambda}_2$
2. 渦流れにおける渦の伸長 δ

それぞれのコンター図では、スパイラル渦を中心とした(PIV測定における) 31×31 節点の平面領域に絞り込んだ領域において表示する。尚、前章に記述した様に、コンター図の x_1, x_2 軸中の数値は節点番号を示す。

8.1 後流のスパイラル渦の同定と追跡

同定したスパイラル渦において、翼直近である後流位置 $(x_1, x_2, x_3) = (330, 280, 0)$ ($x_1/D = 0.66$) 付近の瞬間速度場のアンサンブル平均による平均速度場を図 8.1 に示す。 x_1, x_2 方向の節点番号が凡そ 55~60 の所に速度ベクトル上の渦の中心を確認することができる。しかし、これは見かけの位置であることに注意する。また、この平均速度場において渦の解析を行った 2次元の swirlity ϕ の分布を図 8.2 に示す。本図は、特別な条件を用いずに全ての瞬間速度場のデータの算術平均を行った平均速度場の 2次元 swirlity ϕ の分布であるが、本スパイラル渦は swirlity ϕ の極大領域を有するトポロジー構造であることを示している。各瞬間速度場における 2次元 swirlity ϕ の分布にはばらつきがある。しかし、アンサンブル平均の様に 2次元 swirlity ϕ の極大特性を持つものが多い。そこで、このアンサンブル平均において、各速度場における 2次元 swirlity ϕ の最大値の節点位置を合わせて算出した平均速度場における 2次元 swirlity ϕ の分布を図 8.3 に示す。図 8.3 では、図 8.2 に対して 2次元 swirlity ϕ の極大特性がより明確に示されている。

また、後流のスパイラル渦の同定において、第 6 章にて既述した様に、速度場だけで判断しても実際の渦の明確な位置が判らないことに加え、渦の有無の判断や渦周りの速度場の測定が難しくなる。これは、より後流になるとスパイラル渦の旋回強さが弱くなると共に、渦の移動速度が不確定になることによるものと考えられる。図 8.4 は、 $(x_1, x_2) = (1180, 230)$ ($x_1/D \approx 2.4$) における一つの瞬間速度場を示す。また、その速度場における 2次元 swirlity ϕ の場を図 8.5 に示す。図 8.4 では、 x_1, x_2 方向の節点番号がそれぞれ凡そ (40, 80) の辺りに渦流れが存在する様に見えるが、図 8.5 によると、これより少し上部に二つの分裂した様相の渦があり、また、これよりも明確な一つの渦が節点番号 (65, 80) の上部辺りに存在しているのが解る。これは、図 8.4 では判断できず、この渦周辺の色は一樣な方向、或いは少し曲率のある流れにしか見えない。これは、次節から示す翼付近のスパイラル渦と比べ相当弱くなった渦であり、速度場や流線でその有無や位置を確認するのは困難である。

また、図 8.4 の速度場では、可視化で確認した渦付近で速度の絶対値が大きい点があり、主流の基準風速よりかなり速い速度を有する節点がある。これは PIV の速度処理の不具合であると考えられる。この原因として、PIV において速度を評価するために追跡する粒子の同定・特定が異なった場合等が推察される。このとき、一部の速度ベクトルが他の点のベクトルと比べ極端に大きくなったり、方向が異なる場合があるが、このために速度勾配テンソルの特定の成分が極端に大きくなり、強い渦が存在する様に判断されることもあり得る。

従って、スパイラル渦の同定には、2次元 swirlity ϕ 等による確認をしながら測定することが望ましいと言える。また、速度データのアンサンブル平均の統計処理では、PIV の速度処理の不具合に起因すると考えられる渦の強さのピーク等には注意が必要である。

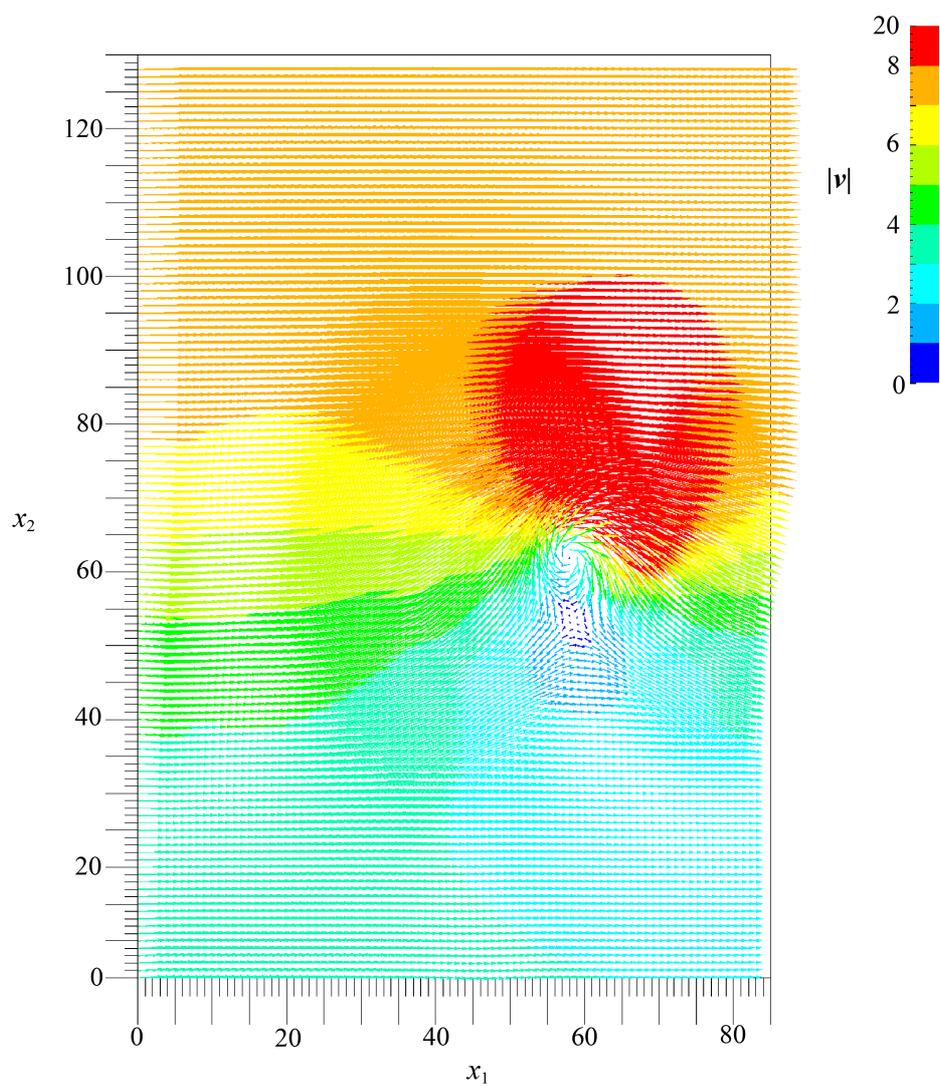


図 8.1: 後流位置 $(x_1, x_2, x_3) = (330, 280, 0)$ 付近の瞬間速度場のアンサンブル平均 (全データの算術平均) による平均速度場 (注: x_1, x_2 軸中の数値は節点番号を示す)

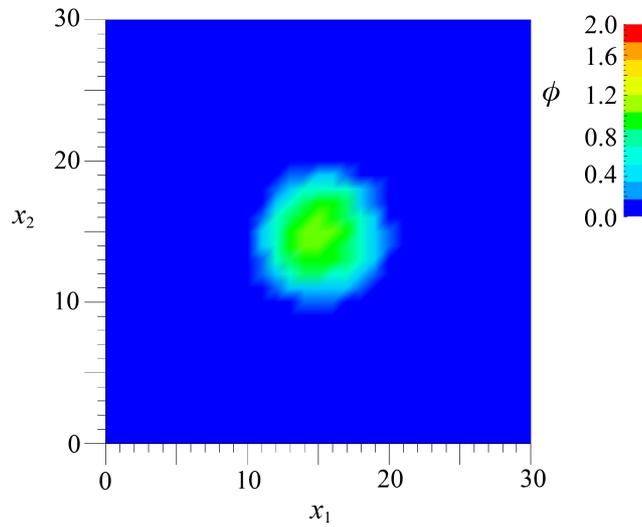


図 8.2: 後流位置 $(x_1, x_2, x_3) = (330, 280, 0)$ 付近の全ての瞬間速度場のアンサンブル平均の速度場における 2次元データによる 2次元 swirlity ϕ の分布 (アンサンブル平均において渦位置に関する補正なし)

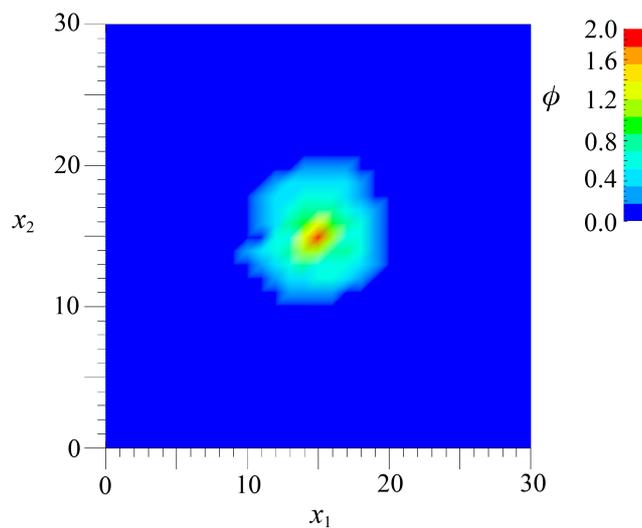


図 8.3: 後流位置 $(x_1, x_2, x_3) = (330, 280, 0)$ 付近の各瞬間速度場の 2次元 swirlity ϕ の最大値の節点 (渦中心) を合わせたアンサンブル平均の速度場における 2次元 swirlity ϕ の分布

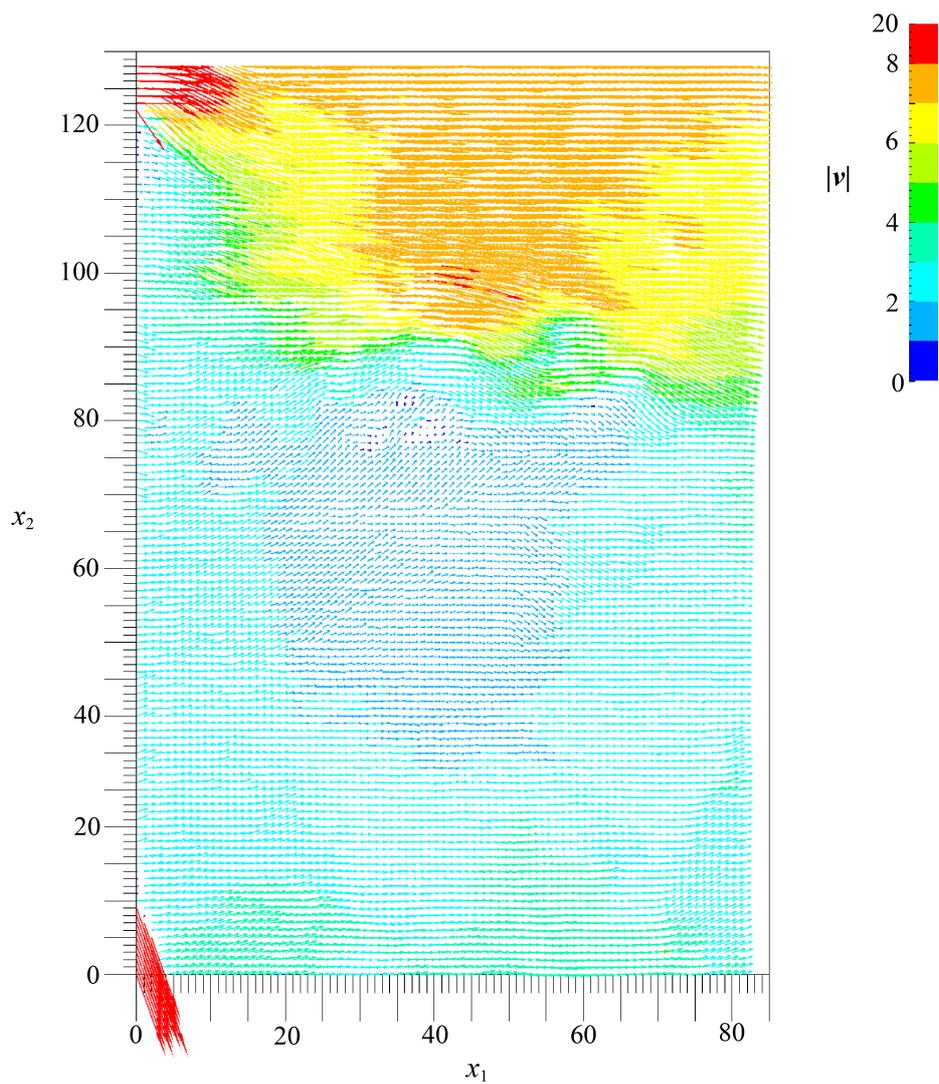


図 8.4: $(x_1, x_2) = (1180, 230)$ における一つの瞬間速度場

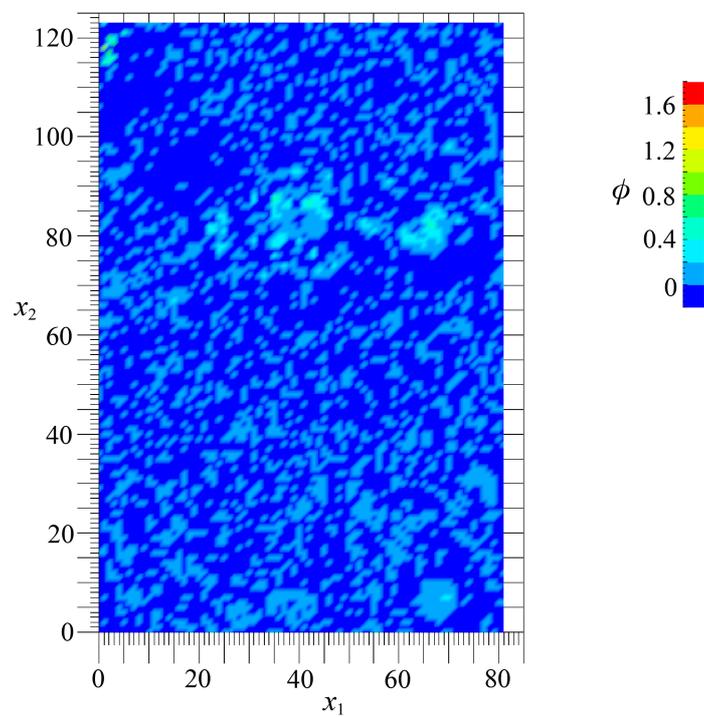


図 8.5: 図 8.4 の速度場における 2 次元 swirlity ϕ の分布

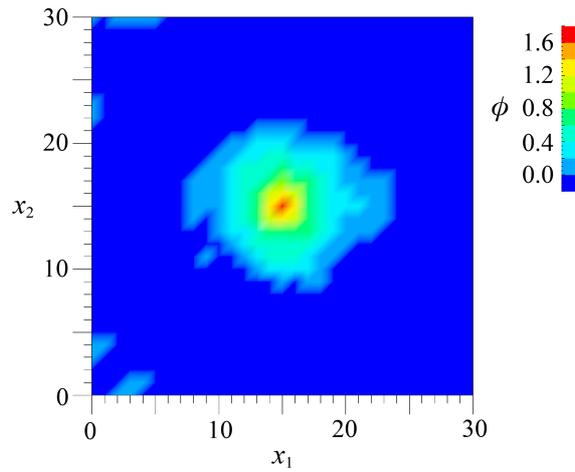


図 8.6: 後流位置 $(x_1, x_2, x_3) = (330, 280, 0)$ 付近のスパイラル渦の旋回平面 \mathcal{P} における swirlity ϕ の分布

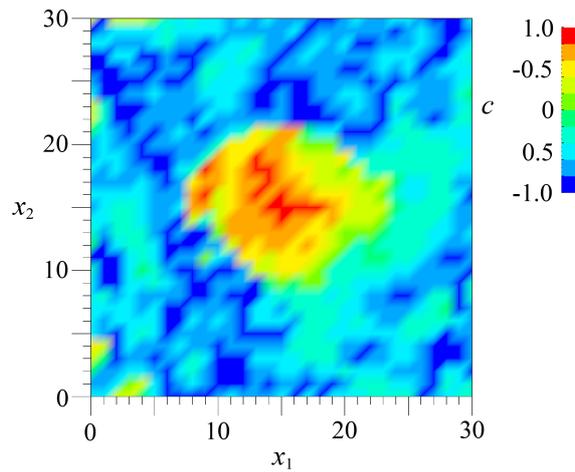


図 8.7: 図 8.6 のスパイラル渦の旋回平面 \mathcal{P} における渦流対称性 c の分布

8.2 翼直後流におけるスパイラル渦のトポロジー構造と特性

本節からは、3次元速度勾配テンソル $\nabla \mathbf{v}$ から求めたトポロジー不変量並びに渦度等を示す。これより、それぞれのコンター図では、スパイラル渦を中心とし (PIV 測定の際点における swirlity ϕ の極大値の節点を中心)、 x_1, x_2 方向において各々 31×31 節点の領域に絞り込んだ平面 ($\Pi(0)$) のコンター図を表示する。この 31×31 節点の平面の図では、 x_1, x_2 方向の節点番号が共に 15 の節点が渦の中心、即ち swirlity ϕ の極大値としている。

PIV 測定結果では座標位置 $(x_1, x_2) = (330, 280)$ ($x_1/D = 0.66$) 付近が翼直近の後流のスパイラル渦の位置である。このときのアジマス面における 3次元座標は $(x_1, x_2, x_3) = (330, 280, 0)$ となる。本位置におけるスパイラル渦について、 $x_1 - x_2$ 平面における旋回平面 \mathcal{P} の swirlity ϕ の分布を図 8.6 に示す。ここで、渦度や swirlity ϕ が各点で定義されるのと同様に、旋回平面 \mathcal{P} も

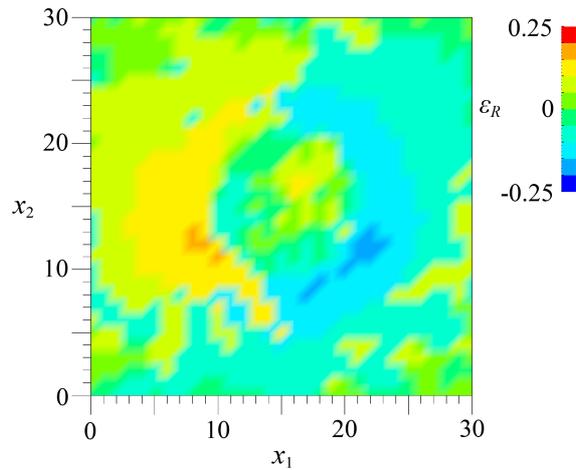


図 8.8: 図 8.6 のスパイラル渦の旋回平面 \mathcal{P} における吸込み・湧出しの平均強さ ε_R の分布

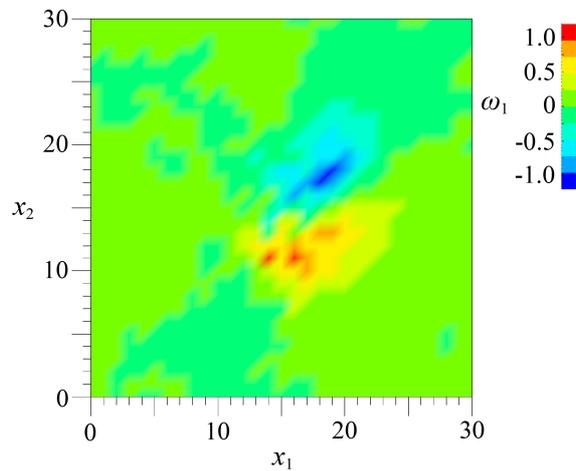


図 8.9: 図 8.6 のスパイラル渦の渦度成分 ω_1 の分布

各点で定義されることに注意する。即ち、旋回平面 \mathcal{P} は、3次元速度勾配テンソル $\nabla \boldsymbol{v}$ の複素固有値の固有ベクトルから定義される平面であり、各点で定められる。但し、swirlity ϕ は、平面に依らず同じ値を有する不変量である [14]。図 8.6 によると、スパイラル渦は、ほぼ対称的な分布を示し、極大領域を有する特性となっている。この極大領域の特性は、特に瞬間場の選定を行わず、かつ渦領域の重ね合わせを考慮しない 2次元のアンサンブル平均の速度場においてもその性質は示されていた (図 8.2 参照)。しかし、前述した様に渦領域の位置ずれを調整したアンサンブル平均では、その特性がより明確になっている。渦の大きさにおいて、PIV におけるメッシュ間隔が渦の直径の約 1/10 に相当するスケールとなっている。

また、旋回平面 \mathcal{P} における渦流対称性 c の分布を図 8.7 に示す。渦流対称性 c は、流れが渦流

でないときにも定義することができ、 λ_{θ_i} ($i = 1, 2$) の比の平方根を示している。即ち、

$$c = \begin{cases} \operatorname{sgn}\left(\frac{\lambda_{\theta_2}}{\lambda_{\theta_1}}\right) \sqrt{\left|\frac{\lambda_{\theta_2}}{\lambda_{\theta_1}}\right|} & \left(\left|\frac{\lambda_{\theta_2}}{\lambda_{\theta_1}}\right| \leq 1\right) \\ \operatorname{sgn}\left(\frac{\lambda_{\theta_1}}{\lambda_{\theta_2}}\right) \sqrt{\left|\frac{\lambda_{\theta_1}}{\lambda_{\theta_2}}\right|} & \left(\left|\frac{\lambda_{\theta_1}}{\lambda_{\theta_2}}\right| \leq 1\right) \end{cases} \quad (8.1)$$

である。非渦領域において、これを評価するための平面は、流れが渦流れに遷移したときの旋回平面と定めると、速度勾配テンソル $\nabla \mathbf{v}$ の同じ符号を有する二つの実固有値に関する固有平面になる [49, 50]。従って、この平面における周方向速度 v_θ の対称性として、 c は λ_{θ_i} ($i = 1, 2$) の比の絶対値の平方根の値を有し、符号は負となる。このため、非渦領域、即ち swirlity が $0 < \phi$ 以外の領域でも c の値が存在し、負の値の分布となる。これらの値も共に不変量であり、以降の図のコンターも同様に 3次元速度勾配テンソル $\nabla \mathbf{v}$ に関するトポロジー不変量である。

さて、図 8.7 によると、渦領域全体として渦流対称性は高く、渦中心領域において特に高い。第 2 章で示した様に、渦流対称性 c ($0 < c \leq 1$) が 1 に近いほど流れの対称性は高く (第 2 章の図 2.1、また第 3 章の図 3.1 参照)、 $c = 1$ のときは流れは (旋回) 平面上で完全な軸対称となる。スパイラル渦を渦軸・渦中心を有する有限領域の渦として考えるとき、その有限規模の渦構造における渦流対称性 c は、渦中心におけるこの値により判断するのが適切である。本スパイラル渦の中心では、渦流対称性 c は 1 に近い値となっている。

次に、このスパイラル渦の旋回平面 \mathcal{P} 上の半径方向速度、即ち吸込み・湧出しの平均強さ ε_R のコンターを図 8.8 に示す。第 2 章のトポロジー不変量を応用すると、非渦領域でも同様に吸込み・湧出しの平均強さを定義できるため [49]、図 8.8 では渦領域以外の (非渦) 領域でも平均強さの値を示している。図 8.8 によると、半径方向速度の平均強さ ε_R の大きさ (絶対値) は $|\varepsilon_R| < 0.1$ 以下であり、図 8.6 における swirlity ϕ の大きさと比べると、約 1/10 のオーダーであり、そのためか正負の両方の符号が混在する分布となっている。これより、このスパイラル渦は、半径方向速度がかなり小さい (弱い) 速度特性を有していることが解る。本スパイラル渦の渦度ベクトルの成分に関し、空間座標系 x_i における渦度ベクトルの成分 ω_i ($i = 1, 2, 3$) を図 8.9~8.11 にそれぞれ示す。これらの図によると、 ω_3 成分が卓越して大きく、また、swirlity ϕ と同様な極大領域を有している。これは、第 2 章によると、 $x_1 - x_2$ 平面が他の平面と比べて旋回平面に近く、旋回平面が x_3 軸に平行ではないことを明確に示している。即ち、 ω_i ($i = 1, 2, 3$) 成分の中で ω_3 成分が旋回する渦の強さに大きく関わっている。 ω_1 また ω_2 成分は ω_3 成分と比べて相当小さくなるが、 ω_1 成分が ω_2 成分と比べて大きい。 ω_1 成分は後流の方向に向かう軸に関する回転成分であるが、渦度は流れの大域的な運動の曲率にも関わるため [51]、スパイラル軌道の曲率と関係がある可能性がある。この検討には、3次元速度勾配テンソル $\nabla \mathbf{v}$ の同定における x_2 座標方向の補正による影響を確認した上で分析することが望ましい。

本スパイラル渦の物理特性として、圧力極小と渦の伸長の分布を図 8.12, 8.13 にそれぞれ示す。

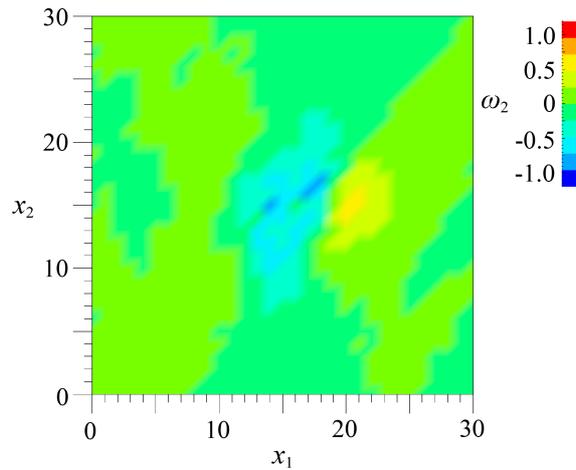


図 8.10: 図 8.6 のスパイラル渦の渦度成分 ω_2 の分布

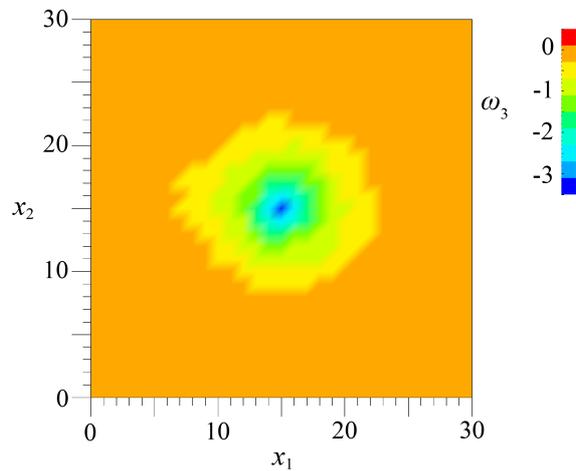


図 8.11: 図 8.6 のスパイラル渦の渦度成分 ω_3 の分布

図 8.12 は、旋回平面 \mathcal{P} における圧力極小の強さを示す $\check{\lambda}_2$ のコンター図である。本図によると、旋回平面のトポジカルな (流れの運動学的な) 圧力特性は、swirlity ϕ と同様な極小領域を有しており、非常に明確な分布となっている。また、対称性も高い。この特性は、図 8.7 で示した渦流対称性 c が高いこととも矛盾しない。

また、渦の伸長に関する δ のコンター図 8.13 において、圧力極小とは異なり極大領域等は特になく、伸長も小さい。これは、半径方向速度の平均強さ ε_R が小さく、伸長に必要な歪み (strain) が小さいことによるものである。スパイラル渦のコア領域 (中心領域) から離れた部分領域では、コア領域より伸長が高くなっているが、これは旋回平面 \mathcal{P} に平行な渦度成分に関する伸長であると考えられる。一般に、有限な渦領域では、その外周領域ではコア領域と比べ旋回に関する渦度は小さくなり、旋回平面に平行な渦度成分は逆に増加し、局所流れにおける渦軸が渦中心の渦軸より逸れる傾向があると予想される。理想化、単純化された渦モデルでは旋回平面に平行な渦度

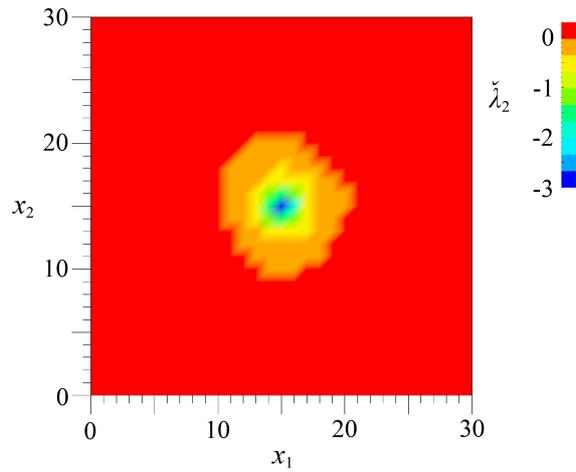


図 8.12: 図 8.6 のスパイラル渦の圧力ヘシアン $\check{\lambda}_2$ の分布

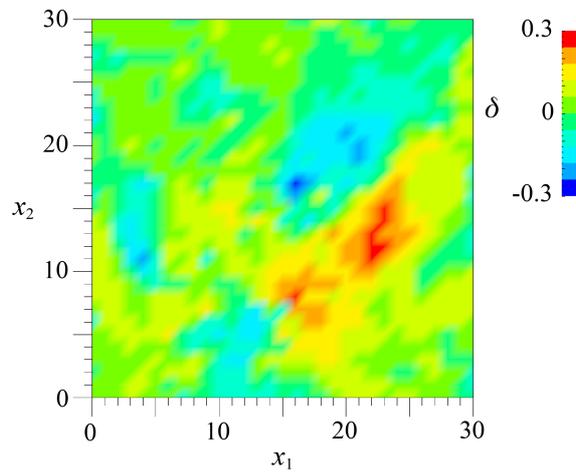


図 8.13: 図 8.6 のスパイラル渦の渦の伸長 $\delta (= \omega_j s_{ij} \omega_j)$ の分布

が存在しないため、このような性質は渦モデルにはないが、一様等方性乱流ではその様な性質が報告されている [25]。

8.3 次軌道のスパイラル渦のトポロジー構造と特性

前節で記述した座標位置 $(x_1, x_2) = (330, 280)$ 付近が翼の直後流のスパイラル渦の位置であったが、スパイラル渦は螺旋軌道を描きながら後流に流れている。PIV 測定にて座標位置 $(x_1, x_2) = (330, 280)$ 以降の後流にて確認できたスパイラル渦は、アジマス面における座標 $(x_1, x_2, x_3) = (520, 260, 0)$ ($x_1/D \approx 1$) 付近であった。このスパイラル渦におけるトポロジーの特性と物理特性を前節と同様に解析する。

この位置のスパイラル渦の旋回平面 \mathcal{P} 上における swirlity ϕ の分布を図 8.14 に示す。図 8.14

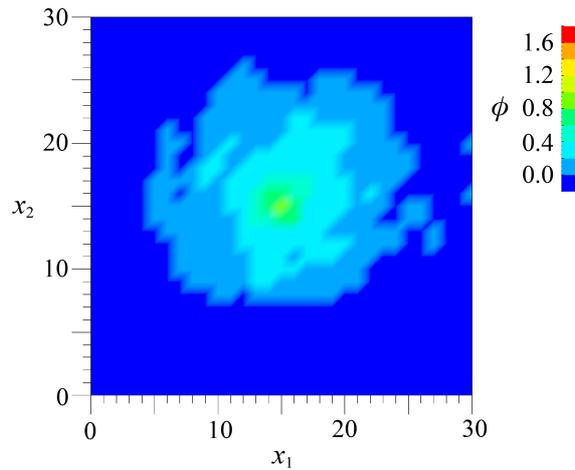


図 8.14: 後流位置 $(x_1, x_2, x_3) = (520, 260, 0)$ 付近のスパイラル渦の旋回平面 \mathcal{P} 上における swirlity ϕ の分布

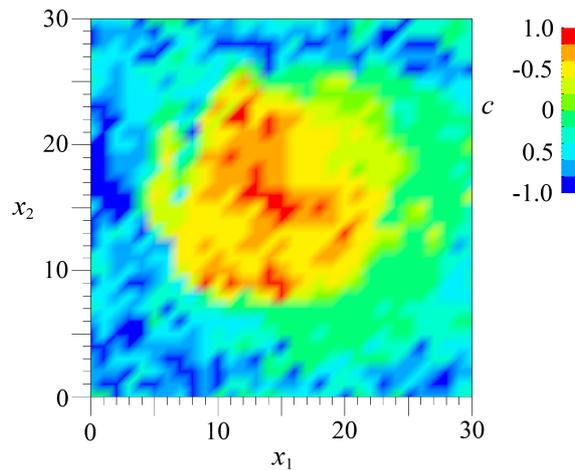


図 8.15: 図 8.14 のスパイラル渦の旋回平面 \mathcal{P} における渦流対称性 c の分布

によると、スパイラル渦は、座標位置 $(x_1, x_2) = (330, 280)$ 付近のものと同様にほぼ対称的な分布を示し、極大領域を有する特性となっている。一方、その強さは、図 8.14 によると約 1.2 程度に低下し、また、swirlity ϕ が正である領域、即ち渦領域が広がり、拡散しているのが解る。

本渦の旋回平面 \mathcal{P} 上の渦流対称性 c の分布を図 8.15 に示す。渦流対称性 c も座標位置 $(x_1, x_2) = (330, 280)$ 付近のものと同様に高い。次に、同じくこのスパイラル渦の旋回平面 \mathcal{P} 上の半径方向速度、即ち、吸込み・湧出しの平均強さ ε_R のコンター図を図 8.16 に示す。吸込み・湧出しの平均強さも座標位置 $(x_1, x_2) = (330, 280)$ 付近のスパイラル渦と同様に swirlity ϕ の大きさと比べて小さく、約 $1/10$ のオーダーである。正負の両方の符号が混在しているが、値は小さい。これより、この地点におけるスパイラル渦のトポロジーの特性は、翼直近のものと余り相違がない。但し、渦度の拡散の如く、渦領域が拡散している。

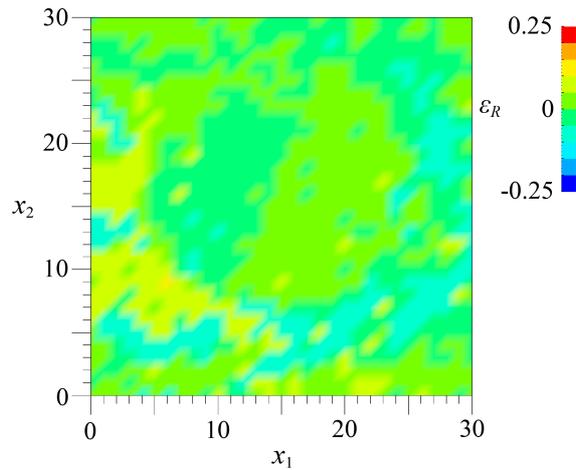


図 8.16: 図 8.14 のスパイラル渦の旋回平面 \mathcal{P} における吸込み・湧出しの平均強さ ε_R の分布

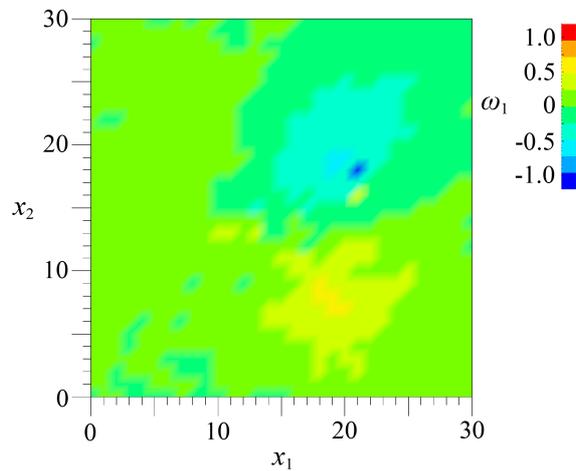


図 8.17: 図 8.14 のスパイラル渦の渦度成分 ω_1 の分布

本スパイラル渦の渦度の成分に関し、空間座標系 x_i における渦度の成分 ω_i ($i = 1, 2, 3$) を図 8.17~8.19 にそれぞれ示す。これらの図によると、翼直近のスパイラル渦と同様 ω_3 成分が ω_1 または ω_2 成分と比べて卓越して大きく、swirlity ϕ と同様な極大領域を有している。また、この地点における swirlity ϕ と同様に渦度の拡散の傾向が確認できる。

本スパイラル渦の物理特性について、圧力極小について旋回平面 \mathcal{P} 上の圧力ヘシアン $\check{\lambda}_2$ のコンターを図 8.20 に示す。図 8.20 では、本後流位置においても swirlity ϕ の特性と同様に圧力極小の性質を保っている。一方で、圧力極小領域は狭くなってきている。

渦の伸長について、図 8.21 に δ のコンターを示す。本位置においても翼直近のスパイラル渦と同様に伸長がとても小さいが、これは半径方向速度の平均強さ ε_R の大きさ（絶対値）が 0.1 以下と小さく、伸長のための吸込み速度、歪みが小さいことによる。スパイラル渦のコア領域（中心領域）から離れた領域において、コア領域より伸長が若干高くなっている部分領域もあるが、こ

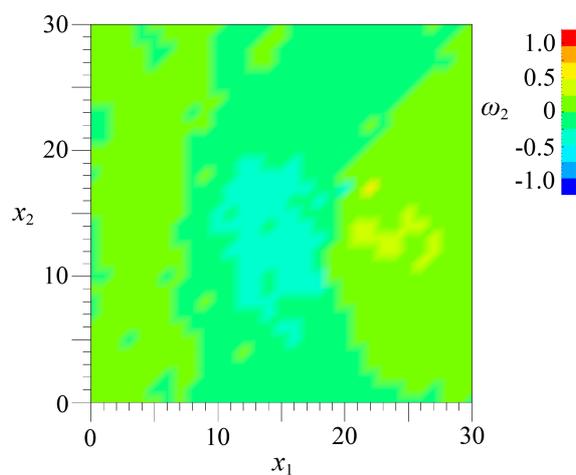


図 8.18: 図 8.14 のスパイラル渦の渦度成分 ω_2 の分布

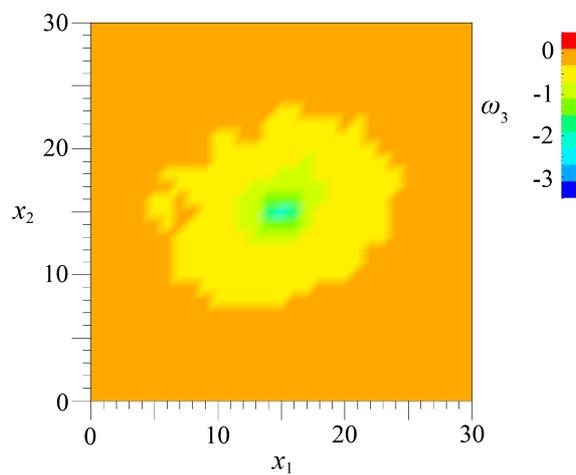


図 8.19: 図 8.14 のスパイラル渦の渦度成分 ω_3 の分布

これは旋回平面 \mathcal{P} に平行な成分に関する伸長であると考えられる。

以上より、翼直近からスパイラル軌道を一周してきたと考えられるスパイラル渦の構造と特性は、翼直近のものと変わらず、但し、swirlity ϕ と渦度や圧力極小の拡散が存在することが確認された。

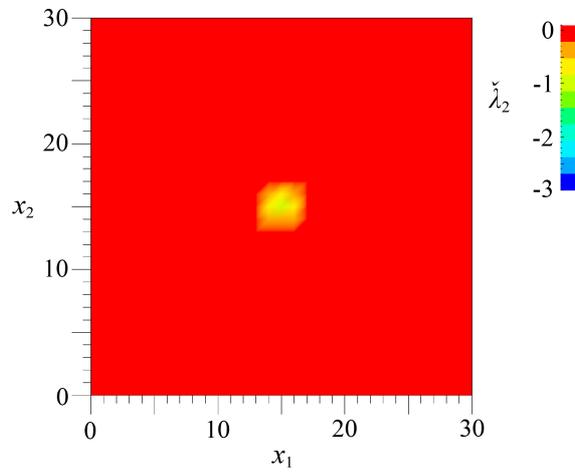


図 8.20: 図 8.14 のスパイラル渦の圧力ヘシアン $\tilde{\lambda}_2$ の分布

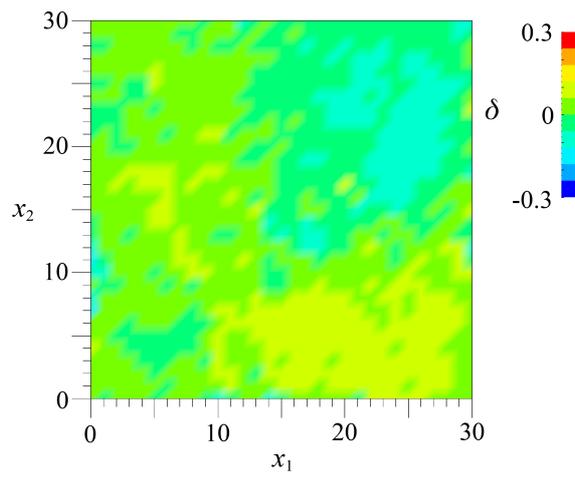


図 8.21: 図 8.14 のスパイラル渦の渦の伸長 δ の分布

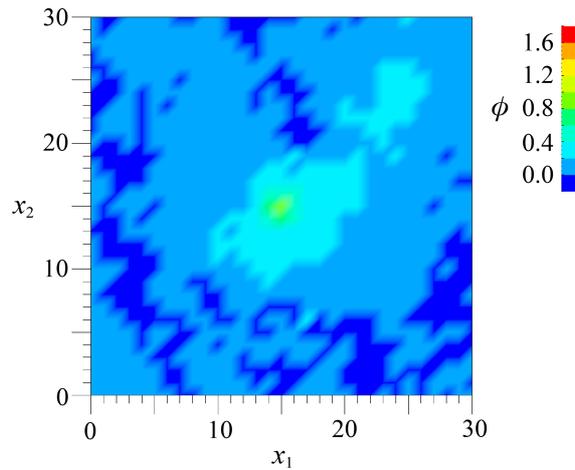


図 8.22: 後流位置 $(x_1, x_2, x_3) = (740, 290, 0)$ 付近のスパイラル渦の旋回平面 \mathcal{P} 上における swirlity ϕ の分布

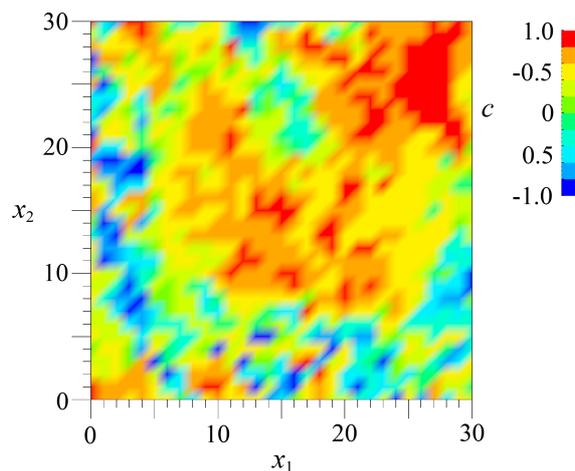


図 8.23: 図 8.22 のスパイラル渦の旋回平面 \mathcal{P} 上における渦流対称性 c の分布

8.4 次々次軌道のスパイラル渦のトポロジー構造と特性

前節のスパイラル渦の座標位置 $(x_1, x_2) = (520, 260)$ 以降の後流の直近で PIV 測定にて確認できたスパイラル渦は、アジマス面における座標 $(x_1, x_2, x_3) = (740, 290)$ ($x_1/D \approx 1.5$) 付近であった。このスパイラル渦における、トポロジーの特性と物理特性を前節と同様に解析する。

この位置のスパイラル渦の旋回平面 \mathcal{P} 上における swirlity ϕ の分布を図 8.22 に示す。図 8.22 によると、この地点におけるスパイラル渦は、座標位置 $(x_1, x_2) = (330, 280), (520, 260)$ 付近におけるスパイラル渦の swirlity ϕ の分布と同じ特性を有している。即ち、swirlity ϕ の極大特性をここでも有している。また、座標位置 $(x_1, x_2) = (520, 260)$ 付近から確認された swirlity ϕ の拡散がここでも生じており、更に広がると共に渦 (swirlity ϕ) の強い領域が小さくなっている。

次に、旋回平面 \mathcal{P} 上の渦流対称性 c の分布を図 8.23 に示す。渦流対称性 c も座標位置 $(x_1, x_2) =$

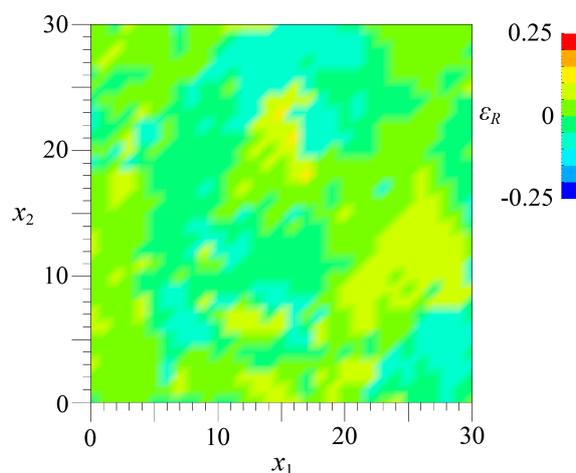


図 8.24: 図 8.22 のスパイラル渦の旋回平面 \mathcal{P} 上における吸込み・湧出しの平均強さ ε_R の分布

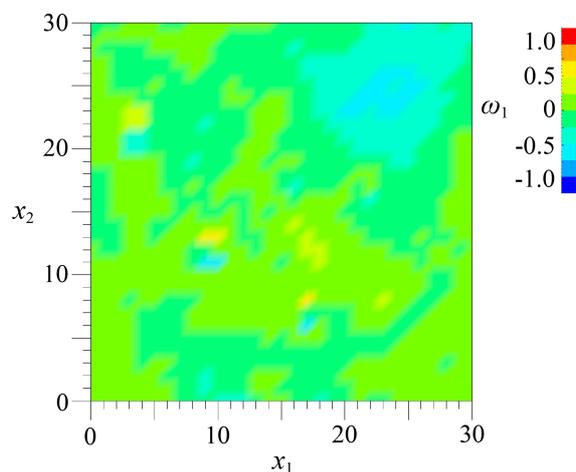


図 8.25: 図 8.22 のスパイラル渦の渦度成分 ω_1 の分布

(330, 280), (520, 260) 付近のものと同様に高い。渦流対称性 c は詳細なトポロジーの特性や物理特性において重要な物理量であるが、これまでの所大きな変化はなく、渦の強さが変わっても主要なトポジカルな特性に大きな変化はない。

また、このスパイラル渦の旋回平面 \mathcal{P} 上の半径方向速度、即ち吸込み・湧出しの平均強さ ε_R のコンターを図 8.24 に示す。半径方向速度の平均的な性質も座標位置 $(x_1, x_2) = (330, 280), (520, 260)$ 付近のスパイラル渦と同様であり、その強さにおいてオーダが変わる様な極端な変化はない。

本スパイラル渦の渦度の成分に関し、本座標系 x_i における渦度の成分 ω_i ($i = 1, 2, 3$) を図 8.25 ~ 8.27 にそれぞれ示す。これらの図によると、それぞれの渦度の成分についても座標位置 $(x_1, x_2) = (330, 280), (520, 260)$ 付近のスパイラル渦と同様な特性を有している。 ω_3 成分が他の成分と比べて卓越し、swirlity ϕ と同様な $|\omega_3|$ の極大領域を有しており、 ω_1 と ω_2 成分は共に小さい。また、座標位置 $(x_1, x_2) = (520, 260)$ 付近のスパイラル渦と同様に渦度の ω_3 成分の拡散が確認でき、そ

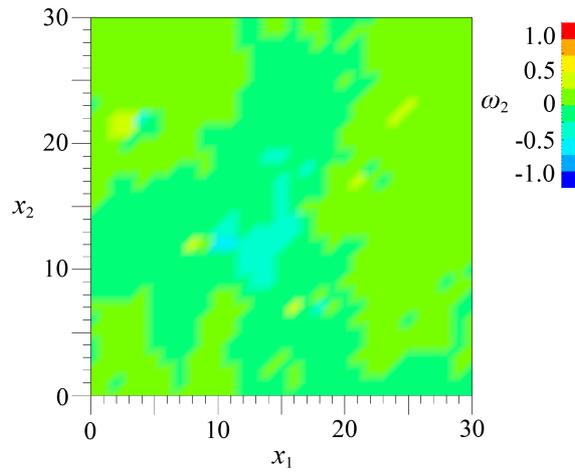


図 8.26: 図 8.22 のスパイラル渦の渦度成分 ω_2 の分布

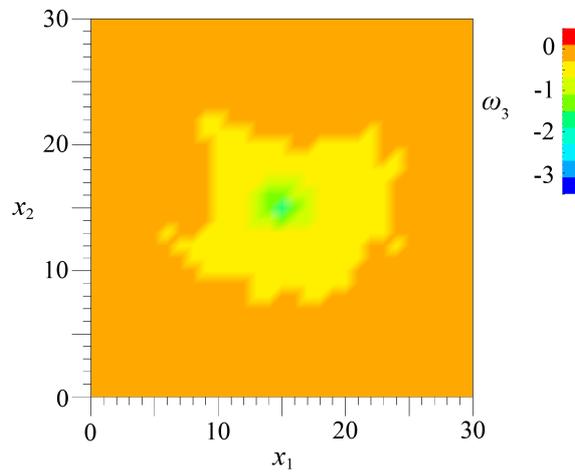


図 8.27: 図 8.22 のスパイラル渦の渦度成分 ω_3 の分布

の極大値も低下している。

次に、本スパイラル渦の物理特性について調べる。圧力極小について旋回平面 \mathcal{P} 上の圧力ヘシアン $\check{\lambda}_2$ のコンターを図 8.28 に示す。図 8.28 では、ここでもこれまでのトポロジーの特徴と同様に、座標位置 $(x_1, x_2) = (330, 280), (520, 260)$ 付近のスパイラル渦と同じ圧力極小の性質を保っている。しかし、swirlity ϕ の弱体化と同様に圧力極小の強さが緩和され、かつ圧力極小領域は小さい。これは、座標位置 $(x_1, x_2) = (520, 260)$ 付近のスパイラル渦から生じた傾向と同じである。

渦の伸長について、 δ のコンターを図 8.29 に示す。図 8.29 によると、渦領域に特化した様な際立った特徴はなく、座標位置 $(x_1, x_2) = (330, 280), (520, 260)$ 付近のスパイラル渦と同様に伸長による渦強さの効果は期待できない。

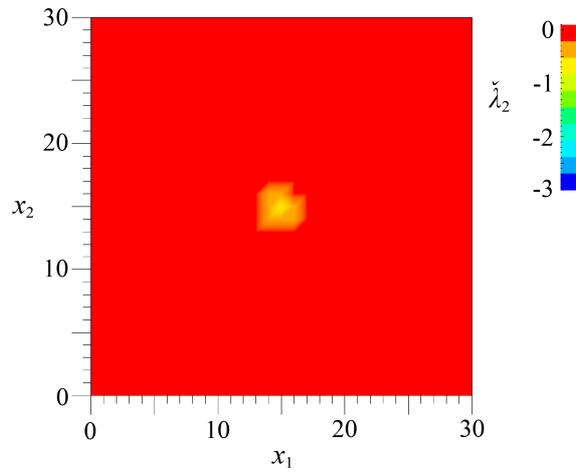


図 8.28: 図 8.22 のスパイラル渦の圧力ヘシアン $\check{\lambda}_2$ の分布

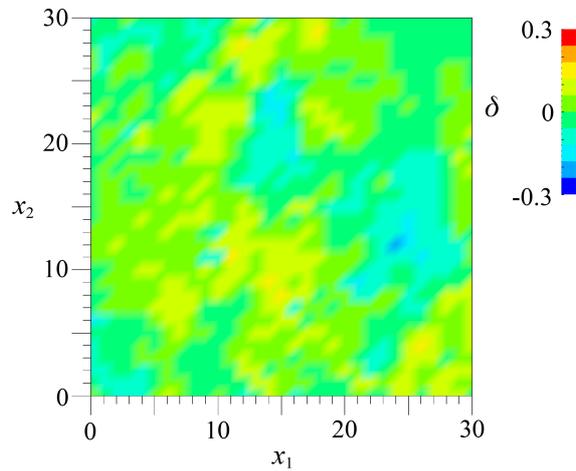


図 8.29: 図 8.22 のスパイラル渦の渦の伸長 δ の分布

8.5 スパイラル渦の特性

これまでの後流の3箇所、即ち、座標位置 $(x_1, x_2) = (330, 280), (520, 260), (740, 290)$ 付近におけるスパイラル渦では、後流位置に関わりなくほぼ同様な性質が確認された。また、ある程度後流に行くと、swirlity ϕ と渦度の拡散が存在することが確認された。ここで明らかにされた本スパイラル渦の特性は以下の通りである。

1. swirlity ϕ の極大領域を有し、渦の中心領域で高い値を有する
2. 旋回平面 \mathcal{P} 上の圧力ヘシアン $\check{\lambda}_2$ は圧力極小を示し、渦中心で最も強い極小の性質を有する
3. swirlity ϕ 、圧力ヘシアン $\check{\lambda}_2$ は共に軸対称的な分布を有する
4. 渦流対称性 c は高い

5. アジマス面に垂直な渦度成分 ω_3 は、swirlity ϕ と同様な極大性質を有する
6. 上記トポロジカルな性質と物理特性を有しつつ、螺旋軌道と共に後流に進むに従い、swirlity ϕ と渦度の ω_3 成分（アジマス面に垂直な成分）の拡散が生じる

本章では、3箇所のスパイラル渦のトポロジー解析について示したが、本実験では以下の箇所に
てスパイラル渦の構造を抽出している。

1. $(x_1, x_2) = (330, 280)$
2. $(x_1, x_2) = (520, 260)$
3. $(x_1, x_2) = (740, 290)$
4. $(x_1, x_2) = (880, 270)$
5. $(x_1, x_2) = (1180, 230)$
6. $(x_1, x_2) = (1380, 270)$
7. $(x_1, x_2) = (1530, 270)$
8. $(x_1, x_2) = (1690, 250)$
9. $(x_1, x_2) = (1840, 250)$
10. $(x_1, x_2) = (1990, 250)$
11. $(x_1, x_2) = (2140, 250)$
12. $(x_1, x_2) = (2290, 250)$
13. $(x_1, x_2) = (2440, 250)$
14. $(x_1, x_2) = (2590, 250)$

しかし、 $(x_1, x_2) = (1180, 230)$ 前後では PIV での速度場の確認による渦の同定は難しく、3次元速度勾配テンソルと渦構造解析のためのアンサンブル平均の対象となりえる瞬間速度場のデータは極端に少なくなった。これは、前述した様に、速度場では渦の本来の位置を確認することが困難であることが挙げられる。また、渦流れが弱くなると、一様流と合成された速度場では渦流れの流線やベクトル分布による渦の確認は難しい。スパイラル渦或いは風車後流の渦を解析するためには、実験の段階で2次元 swirlity ϕ 等による渦の解析を行い、渦の有無・位置と特性を確認しつつ実験を進めることがデータ取得に有益であると考えられる。

次章では、本章で調べたスパイラル渦の詳細な分析について記述する。

第9章 スパイラル渦の渦構造と解析の特性

前章の解析では、3次元の速度勾配テンソルの同定により詳細な渦のトポロジーと特性が分析できることが示され、本実験における幾つかの後流位置で同定したスパイラル渦の構造と特性が明らかになった。本章では、これに基づき、スパイラル渦の渦構造と特性、そして渦モデルとの適合性等について考察する。また、本研究で構築した3次元渦構造の解析技術とその今後の応用について議論する。

9.1 スパイラル渦の速度構造

翼直後流におけるスパイラル渦のトポロジー特性を元に本渦の速度構造について考察する。ここでは、前章で示したトポロジー不変量のコンター図に加え、sourcity σ 並びに式 (2.3) が示す渦軸 ξ_{axis} 、更に旋回平面 P の角度等を含めて渦構造を探る。

渦構造に関するトポロジー不変量や渦度等の物理量は各点において与えられ、また渦空間は旋回平面 P と同様に各点において定義される座標系である。従って、スパイラル渦の様な有限規模の渦の構造について分析するとき、まず渦中心におけるトポロジー不変量等の特性について着目する。

図 9.1 は、スパイラル渦の swirlity ϕ の等値線図（コンター図）である。ここでは、渦ではない領域、即ち $\phi < 0$ の領域は無色にて示す。図 9.1 によると、スパイラル渦は、ほぼ対称的な分布を示し、極大領域となっている。速度勾配テンソルを評価するための速度場のアンサンブル平均において、渦位置を調整した方がよりこの特性が鮮明になっている。この swirlity ϕ が渦中心で極大となるということは、次節以降で記述する様に、周方向速度 v_θ の空間微分、即ち v_θ の半径方向の勾配が大きく、渦中心でピークであることが推察される。

本スパイラル渦における渦流対称性の不変量 c の分布を図 9.2 に示す。渦流対称性 c の分布もスパイラル渦のコア領域で高い値の分布となっており、渦の中心ではほぼ軸対称的な分布となっている。これは、第2章で示した渦空間における速度勾配テンソルの式 (2.20)

$$\check{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_R & c\psi & \check{a}_{13} \\ -\psi/c & \varepsilon_R & \check{a}_{23} \\ 0 & 0 & \varepsilon_a \end{bmatrix} \quad (9.1)$$

において、

$$|\check{a}_{12}| \approx |\check{a}_{21}| \quad (9.2)$$

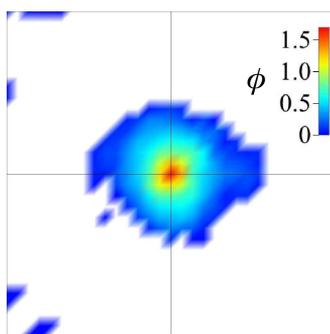


図 9.1: ブレード直近のスパイラル渦の swirlity ϕ のコンター (注: $\phi < 0$ の非渦領域は無色としている)。

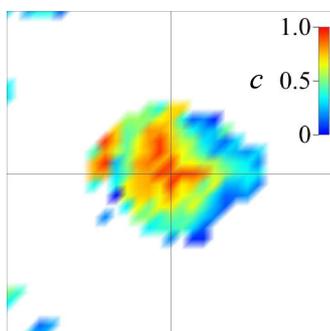


図 9.2: スパイラル渦の渦流対称性 c のコンター

となり、これは、式 (3.2) より旋回平面 \mathcal{P} 上における $\lambda_{\theta_1}, \lambda_{\theta_2}$ について

$$\lambda_{\theta_1} \approx \lambda_{\theta_2} \quad (9.3)$$

であることを示す。このとき、周方向速度 v_θ の対称性、即ち旋回平面 \mathcal{P} 上の周方向流れの軸対称性が高い。また、渦流対称性 c が高いと、周方向速度 v_θ だけでなく、半径方向速度 v_r の対称性についても同様に高くなることに注意する。渦流対称性 $c \rightarrow 1$ のとき、旋回平面 \mathcal{P} 上の $\lambda_{r_1}, \lambda_{r_2}$ の比は、式 (3.4) より

$$\begin{aligned} \lim_{c \rightarrow 1} \frac{\lambda_{r_2}}{\lambda_{r_1}} &= \lim_{c \rightarrow 1} \frac{\varepsilon_R + \frac{1}{2} \left| c - \frac{1}{c} \right| \psi}{\varepsilon_R - \frac{1}{2} \left| c - \frac{1}{c} \right| \psi} \\ &= 1 \end{aligned} \quad (9.4)$$

となる。 ε_R は、相加平均的な半径方向の流れ（吸込み・湧出し流れ）の強さを示すが、式 (9.4) より $\lambda_{r_1}, \lambda_{r_2}$ は共に同符号となり、対称性が高くなる。また、全周における半径流れの同一方向

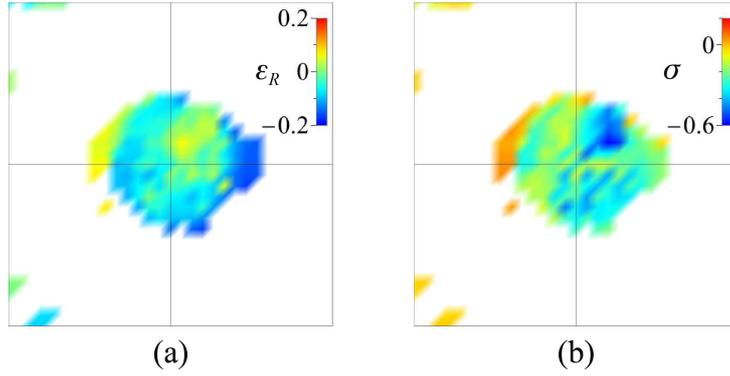


図 9.3: スパイラル渦における (a) ε_R 並びに (b) σ のコンター

性と強さを示す不変量 sourcecity σ は

$$\sigma = \text{sgn} \left(\varepsilon_R^2 - \frac{1}{4} \left(c - \frac{1}{c} \right)^2 \psi^2 \right) \sqrt{ \left| \varepsilon_R^2 - \frac{1}{4} \left(c - \frac{1}{c} \right)^2 \psi^2 \right| } \quad (9.5)$$

となるので、 $c \rightarrow 1$ のときは正の値を有するようになる。但し、この符号は、 ε_R と ψ (ϕ) の大きさの比にも依存する。

次に、スパイラル渦の半径方向速度 v_r について、 ε_R 並びに sourcecity σ のコンター図を図 9.3 に示す。 ε_R の分布によると、このスパイラル渦は、吸込みと湧出し流れの両方を有した半径方向速度の特性を有していることを示している。渦領域の殆どの部分において sourcecity σ が負の値を示していることからこれらの混在した半径方向流れの状態であることが解る。しかし、 σ の符号によらず、 ε_R の分布自身が渦領域内で正と負の両方の値を有している。これから判断すると、本スパイラル渦は、複雑な半径方向流れを有している様に見え、また渦流対称性 c が高いことと矛盾する。

ここで、平均的な半径方向速度の強さ $|\varepsilon_R|$ と swirlity ϕ を比べると、 ε_R は渦のコア領域において十分小さい。従って、この複雑に見える半径方向速度の流れは、その大きさが小さいために生じている様相であると考えられる。つまり、 $|\varepsilon_R|$ が swirlity ϕ と比べて小さいとき、渦流対称性 c が高い場合であっても、式 (3.4) より

$$\lambda_{r_1} \lambda_{r_2} = \left(\varepsilon_R + \frac{1}{2} \left| c - \frac{1}{c} \right| \psi \right) \left(\varepsilon_R - \frac{1}{2} \left| c - \frac{1}{c} \right| \psi \right) < 0 \quad (9.6)$$

$$\therefore \sigma < 0 \quad (9.7)$$

となることが考えられる。従って、このスパイラル渦の渦流れは、殆どが周方向速度 v_θ の成分で構成されているとみなすことができる。

図 9.4 は、渦軸 ξ_{axis} 或いは旋回平面 \mathcal{P} の法線ベクトルと空間座標系 x_i の基底 e_3 (x_3 軸) と

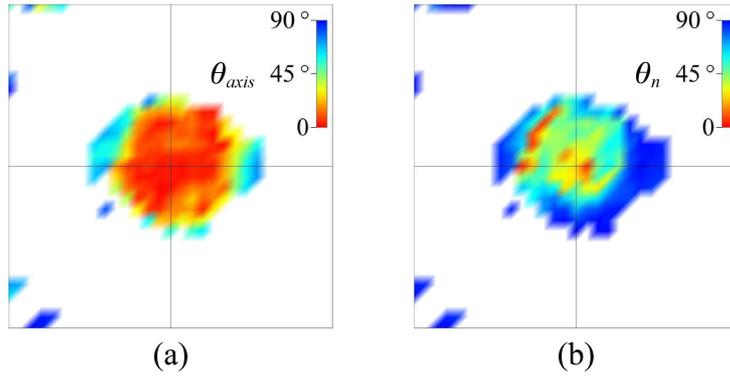


図 9.4: スパイラル渦における (a) 渦軸と基底 e_3 の角度 θ_{axis} のコンター、並びに (b) 旋回平面 \mathcal{P} の法線と基底 e_3 との間の角度 θ_n のコンター (単位: 度)。

の角度に関するコンター図を示す。本図において、 θ_{axis} は基底 e_3 (x_3 軸方向) と渦軸 ξ_{axis} 、また、 θ_n は基底 e_3 と旋回平面 \mathcal{P} の法線ベクトルとの角度を示す。即ち、

$$\theta_{axis} := \cos^{-1} \left\{ \frac{(\xi_{axis}, e_3)}{|\xi_{axis}|} \right\} \quad (9.8)$$

$$\theta_n := \cos^{-1} \left\{ \frac{(\xi_{pl} \times \eta_{pl}, e_3)}{|\xi_{pl} \times \eta_{pl}|} \right\} \quad (9.9)$$

θ_{axis} : e_3 と ξ_{axis} との角度

θ_n : e_3 と旋回平面 \mathcal{P} との角度

と定義する。図 9.4 によると、渦軸 ξ_{axis} は渦のコア領域において基底 e_3 にほぼ平行であることが解る。

これより、速度勾配テンソル $\nabla \mathbf{v}$ の一つの特徴を類推できる。一つのモデルとして、空間座標系 x_i の速度勾配テンソル $\nabla \mathbf{v} = \mathbf{A} = [a_{ij}] = [\partial v_i / \partial x_j]$ ($i, j = 1, 2, 3$) において、

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \epsilon \\ a_{21} & a_{22} & \epsilon \\ a_{31} & a_{32} & \epsilon_a \end{bmatrix} \quad (9.10)$$

ϵ : 微小量 ($\epsilon \approx 0$)

の特性を有している可能性がある。旋回平面 \mathcal{P} は基底 e_3 に線型独立 (非平行) な平面であり、 a_{31} と a_{32} の値に応じてその角度は変わる。また、式 (9.10) のとき、実固有値の固有ベクトル ξ_{axis}

は e_3 に平行な方向となる。即ち、

$$(\mathbf{A} - \varepsilon_a \mathbf{E}) \boldsymbol{\xi}_{axis} = \mathbf{0} \quad (9.11)$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \varepsilon_a & a_{12} & \epsilon \\ a_{21} & a_{22} - \varepsilon_a & \epsilon \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{\xi}_{axis} = \mathbf{0} \quad (9.12)$$

であり、 $\epsilon \approx 0$ であるならば

$$\boldsymbol{\xi}_{axis} \approx e_3 \parallel (0, 0, 1) \quad (9.13)$$

となる。

一方で、 θ_n について、旋回平面 \mathcal{P} の法線ベクトルは基底 e_3 から傾いており、 x_1 - x_2 平面に平行ではない。これは、式 (9.10) において、

$$a_{31} \neq \epsilon \quad \text{または (並びに)} \quad a_{32} \neq \epsilon \quad (9.14)$$

であることを示している。何故なら、もし速度勾配テンソル $\nabla \mathbf{v}$ が共役複素固有値 $\varepsilon_R \pm i\psi$ ($\psi > 0$) を有するとき、これらの固有ベクトル $\boldsymbol{\xi}_{pl} \pm i\boldsymbol{\eta}_{pl}$ において、式 (7.4) より

$$(\mathbf{A} - \varepsilon_R \mathbf{E}) \boldsymbol{\xi}_{pl} = -\psi \boldsymbol{\eta}_{pl} \quad (9.15)$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \varepsilon_R & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \varepsilon_R & a_{23} \\ \epsilon & \epsilon & \varepsilon_a - \varepsilon_R \end{bmatrix} \boldsymbol{\xi}_{pl} = -\psi \boldsymbol{\eta}_{pl} \quad (9.16)$$

となれば、固有ベクトル $\boldsymbol{\xi}_{pl}, \boldsymbol{\eta}_{pl}$ の x_3 成分は共にほぼ 0 になり、 $\boldsymbol{\xi}_{pl}, \boldsymbol{\eta}_{pl}$ の x_1, x_2 成分は、行列 $(\mathbf{A} - \varepsilon_R \mathbf{E})$ の 11, 12, 21, 22 成分により定められ、旋回平面 \mathcal{P} は x_1 - x_2 平面にほぼ平行となる。従って、本渦の特性は、 a_{31}, a_{32} の内の少なくとも一つの成分は 0 ではないということを示している。ここで、渦度ベクトル $\boldsymbol{\omega}_i$ ($i = 1, 2, 3$) の各成分のコンターを図 9.5 に示す。図 9.5 によると、 ω_3 が主要な成分であるが、 ω_1 は 0 ではない値を有している。渦度成分 ω_1 は速度勾配テンソルの a_{32} と a_{31} ($a_{23} \approx \epsilon$) 成分から構成されるので、これは前述した考察と矛盾しない。渦度成分 ω_2 についても同じことが言える。即ち、渦度成分 ω_2 も 0 ではない値を有しているが、本成分は速度勾配テンソルの a_{13} と a_{31} 成分から構成される。このとき、 $a_{13} \approx \epsilon$ であったとしても、 a_{31} 成分が無視できない量であるとする、 ω_2 も 0 ではない値となり、前述した考察と矛盾しない。但し、これらの渦度成分 ω_1, ω_2 は、 ω_3 と比べて小さい。

従って、本実験におけるスパイラル渦の渦軸は旋回平面 \mathcal{P} に垂直ではない、という特性がある。しかし、渦度はあくまで ω_3 が主要な成分である。また、本解析では、 a_{31}, a_{32} は連立方程式より導出しているが、 x_2 座標の補正を行っていないため、この影響評価も必要である。

本節の最後に渦軸 $\boldsymbol{\xi}_{axis}$ と旋回平面 \mathcal{P} の法線ベクトル $\boldsymbol{\xi}_{pl} \times \boldsymbol{\eta}_{pl}$ との角度の特性について示す。

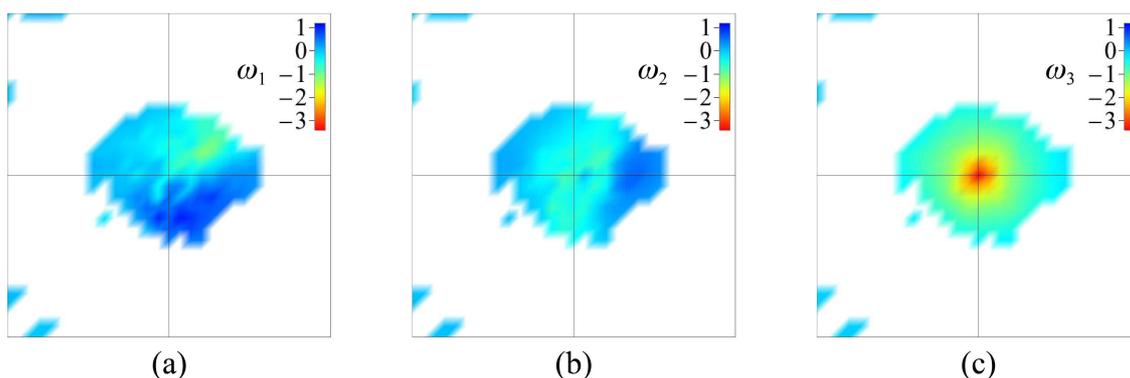


図 9.5: スパイラル渦の渦度成分のコンター。 (a) ω_1 , (b) ω_2 , 並びに (c) ω_3

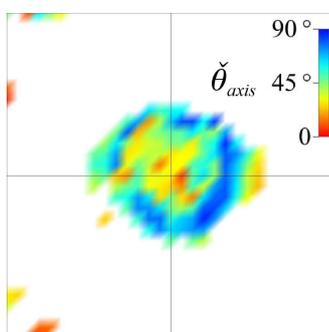


図 9.6: 渦軸 ξ_{axis} と旋回平面 \mathcal{P} の法線ベクトル $\xi_{pl} \times \eta_{pl}$ との角度 $\check{\theta}_{axis}$ のコンター (単位: 度)。

この角度を $\check{\theta}_{axis}$ とおく、即ち、

$$\check{\theta}_{axis} := \cos^{-1} \left\{ \frac{(\xi_{axis} \cdot \xi_{pl} \times \eta_{pl})}{|\xi_{axis}| |\xi_{pl} \times \eta_{pl}|} \right\} \quad (9.17)$$

$\check{\theta}_{axis}$: ξ_{axis} と旋回平面 \mathcal{P} との角度

と定義し、渦領域におけるこの角度 $\check{\theta}_{axis}$ のコンターを図 9.6 に示す。図 9.6 によると、渦軸 ξ_{axis} は旋回平面 \mathcal{P} に垂直ではないものの、渦のコア領域では直交性が増加すると考えられる。これは、渦のコア領域では旋回平面 \mathcal{P} に平行な渦度成分 $\check{\omega}_1, \check{\omega}_2$ が小さくなり、旋回平面 \mathcal{P} に垂直な渦度成分 $\check{\omega}_3$ が支配的になるものと考えられる。

9.2 渦モデルの適合性

本解析で抽出したスパイラル渦において、従来の渦モデルとの適性について考察する。

図 9.1 に示す様に、本スパイラル渦は swirlity ϕ においてほぼ対称的な分布を示し、極大領域となっている。これは、周方向速度 v_θ の空間微分、即ち v_θ の半径方向の勾配が大きく、渦中心でピークであることが推察される [45]。ここで、速度構造が軸対称であるとし、また周方向速度

v_θ 、半径方向速度 v_r の（渦）軸方向の速度勾配が共に無視できるとき、速度勾配テンソル $\nabla \mathbf{v}$ は、円筒座標系を用いて以下の形式で表される。

$$\nabla \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & -\frac{v_\theta}{r} & 0 \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial r} & \frac{v_r}{r} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (9.18)$$

このときの swirlity ϕ は以下の様に表される。

$$\phi = \left\{ \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \frac{v_\theta}{r} - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (9.19)$$

ここで、半径方向速度 v_r に関する項 $\partial v_r / \partial r, v_r / r$ が小さく、周方向速度 v_θ に関する項が右辺の主要なオーダーを定める（リーディングオーダー）、即ち支配的な項であるとする、swirlity ϕ の分布は周方向速度 v_θ の特性により与えられる。周方向速度 v_θ の半径方向の空間微分が軸上で最大となるとき、

$$\phi \approx \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} \frac{v_\theta}{r} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (9.20)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{v_\theta}{r} = \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \Big|_{r=0} \quad (9.21)$$

であり、 $r = 0$ の近傍において、 v_θ / r また swirlity ϕ は $r = 0$ で最大（極大）となる。式 (9.21) では l'Hôpital's Rule を用いた。このとき、 $r = 0$ における swirlity ϕ は

$$\phi = \left| \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right| \quad (9.22)$$

となる。Burgers 渦を例として、この特性を図 9.7 に示す。図 9.7 では、式 (4.55) ~ (4.57) において、 $\alpha / (4\nu) = 0.5, \Gamma / (2\pi) = 1$ とした。以上より、swirlity ϕ の分布から周方向速度 v_θ の特性が示されることがわかる。

さて、この渦中心（渦軸）で周方向速度 v_θ の半径方向に関する空間微分が最大となる特性を有する渦モデルは、Burgers 渦だけでなく、Batchelor 渦、Vatistas 渦も該当する。即ち、周方向速度 v_θ の関数形 f_i ($i = 1, 2, \dots$) が

$$f_1 = \frac{c_1}{r} (1 - e^{-c_2 r^2}) \quad (9.23)$$

$$f_2 = \frac{c_3 r}{1 + r^2} \quad (9.24)$$

c_i : 定数 ($i = 1, 2, 3$)

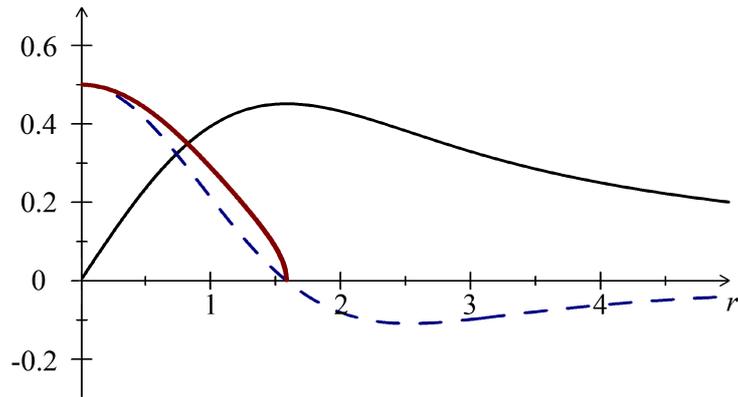


図 9.7: Burgers 渦における v_θ (実線), $\partial v_\theta / \partial r$ (点線), 並びに swirlity ϕ (太線) ($\alpha / (4\nu) = 0.5$, $\Gamma / (2\pi) = 1$)。

のものは、 $r = 0$ においてその導関数値が最大となる。ここで、Vatistas 渦の v_θ において、パラメータである正整数 n を $n = 1$ とした。

一方、半径方向速度 v_r において、本スパイラル渦は周方向速度 v_θ と比べ、吸込みや湧出しの強さは大きくなく、相加平均的な半径方向の流れ（吸込み・湧出し流れ）の強さ ε_R 、また全周における v_r の同一方向性と強さを示す sourcecity σ に関し、渦中心近傍において特に目立った特性はない。このとき、前述した正整数 $n = 1$ の Vatistas 渦は、このスパイラル渦の特性に従わない。Vatistas 渦の半径方向速度 v_r は、式 (4.70) より正整数 $n = 1$ のとき、

$$v_r = -4 \frac{r}{\beta(1+r^2)} \quad (9.25)$$

であり、周方向速度 v_θ の関数形 f_2 と同じ特性となる。これは、 $r = 0$ においてその導関数値 dv_r/dr が最小（ $|dv_r/dr|$ が最大）となるが、これは本スパイラル渦とは異なる特性である。従って、この渦モデルは本研究にて実験・解析した渦とは異なる構造である。

9.3 渦構造の同定について

前節で示した様に、本解析では、渦構造における渦モデルとの適合性を評価し、更に新しい渦モデルを検討する上で有益なトポロジーの特性を示すことができる。渦モデルの適合性において注意が必要なのは、周方向速度 v_θ だけでなく半径方向速度 v_r においても分析することである。周方向速度 v_θ のみの分析で渦モデルを類推するのは、必ずしも一意的な速度構造の特定とは言えない。

また、トポロジー不変量・物理量の分布から一つの分析から周方向速度 v_θ 、半径方向速度 v_r の関数形を同定することにも注意が必要である。異なる関数形でも同様な（物理量の）空間分布を有したり、或いは同じ関数の特徴を有するため、これを特定するには、詳細な速度場のデータ取

得だけでなく、渦空間における3次元の速度勾配テンソル ∇v の成分の分析により、半径方向或いは渦軸方向の速度を含めた各速度の特性の同定が有効であると考えられる。

また、渦流対称性 c により渦の速度構造の軸対称性、また渦軸の同定 [46, 47, 48] により渦軸の直交性も分析に含めることが渦モデルの適合性や構築、また渦に対するせん断の作用等を解析することができる。

9.4 3次元渦構造の解析技術

これまでの解析結果が示す様に、3次元の速度勾配テンソルが同定されると、局所流れにおけるガリレイ不変のトポロジーの物理量（不変量）を用いて詳細な解析ができる。渦の速度構造を速度場から直接評価すると、主流の流れ等の一様流的な成分により渦の位置がずれて同定される懸念がある。また、渦に関わる重要な物理量は速度場から直接評価することは難しい。速度場ではなく、速度勾配テンソルの場に着目し、その同定を求める解析方法は、正確な渦位置を同定できるだけでなく、それにより渦中心の位置を考慮して適切なアンサンブル平均による渦の速度構造を評価できる。また、トポロジー不変量による渦構造や圧力極小、渦の伸長等の渦のトポロジーが導く自己安定性に関わる重要な渦特性を求めることができる。

本解析では、3次元の速度勾配テンソルから、swirlity ϕ 、souncity σ 、渦流の対称性 c 、そして平均半径方向流れの強さを示す ε_R を用いて詳細なトポロジーを同定できた。これにより、渦流の周方向速度、半径方向速度の細かな特性が明らかになった。圧力極小の評価も渦流対称性という詳細なトポロジー不変量の値が必要になるが、渦の伸長では更に半径方向速度の固有値が評価に必要なようになってくる。しかし、いずれの量も、速度場ではなく速度勾配テンソル場が求められると、これらの値が評価され、またこれらの特性を分析できる。

図 9.8 は、本研究にて特定したスパイラル渦のコア領域における代表的な局所トポロジーを示す。本図の渦流全体の図を見ると、渦流れの対称性、即ち c の値は高いことが解る。周方向速度もこれにより対称性の高い旋回流れとなっている。しかし、半径方向速度の流れは、高い渦流対称性にも関わらず、吸込み流れと湧出し流れが混在する流れとなっている。これは、半径方向速度の強さが弱いためであるが、渦流対称性が高くても半径方向速度が弱いと全周の吸込みが得られず、効果的な渦の伸長が得られない渦のケースである。

また、これらのトポロジー不変量は、流れの運動学、即ち渦流れのトポロジーから導かれる圧力極小と渦の伸長に関わっている。 Q 定義 [4]、 λ_2 定義 [7] における圧力極小だけでなく、 Δ 定義 [5] を含めてこれらの定義を統一した $\tilde{\lambda}_2$ 定義 [15] が特定する旋回平面 \mathcal{P} 上の圧力極小も全てが速度勾配テンソルまたはトポロジー不変量から導かれる。渦の伸張（エンストロフィーの生成）[44] は、旋回平面 \mathcal{P} 上と \mathcal{P} に垂直な渦度成分について評価することにより、適切な伸長の評価が可能となる。これには、半径方向速度の固有値 λ_{r_i} の評価が必要になるが、これは旋回平面 \mathcal{P} の歪み速度テンソルの固有値が λ_{r_i} に相当するからである。この詳細なトポロジーの分析により、旋回平面 \mathcal{P} 上の渦度成分を減少させて渦軸の直交性を向上させ、効果的に旋回に関わる渦度を増

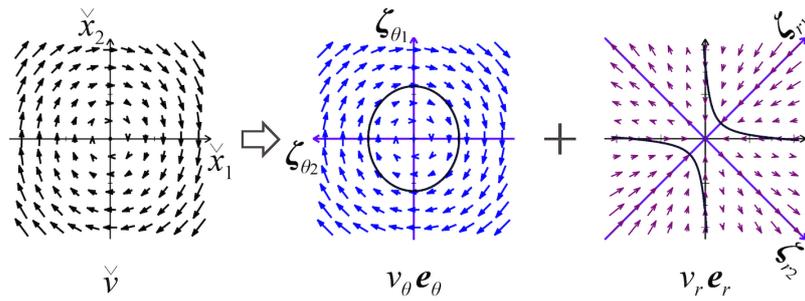


図 9.8: 旋回平面 \mathcal{P} における渦流のトポロジー・様相と分解した半径方向速度 $v_r \mathbf{e}_r$ と周方向速度 $v_\theta \mathbf{e}_\theta$ 、並びにこれらの2次形式 ${}^t \hat{\mathbf{x}} \mathbf{Q}_r \hat{\mathbf{x}}$ 、 ${}^t \hat{\mathbf{x}} \mathbf{Q}_\theta \hat{\mathbf{x}}$ のコンター ($\varepsilon_R = -0.022, \psi = 1.7, c = 0.87$ また $\sigma = -0.23$) (注: 各流れの速度ベクトルの長さは各図で調整している)

加させる伸長のタイプと、旋回平面 \mathcal{P} 上の二つの渦度成分をそれぞれ減少・増加させて渦軸の直交性を下げつつ旋回に関わる渦度を増加させる伸長のタイプに分類することができる [25]。一般に、渦の伸長というとエンストロフィーの増大に着目するが、この様に伸長の特徴を二つのタイプに分類すると、トポロジーによる自己安定性について有益な考察が可能となる。渦流れの安定性においてはその対称性が重要であるが [20]、局所流れにおいても圧力極小や渦の伸長において対称性がその特性を定める重要な物理量となっている。本解析では、これらトポロジーと渦の特性上重要な物理量を評価できる点で有益な技術であると言える。

9.5 今後の解析の応用と展開

本研究における複数の2次元の速度勾配テンソルから3次元の同テンソルを評価する解析技術は、異なるアジマス角における異なる座標系の間の線型変換に基づいており、これよりトポロジー不変量、渦の特性を特定している。この線型変換自体には数値解法上の近似手法等は用いないため、本解析法の原理は近似のない厳密な解法である。しかし、異なる点における速度勾配テンソルの合成では何らかの条件や近似が必要となる。また、速度場から速度勾配テンソルを求めるときの有限差分、測定する速度場の解像度上の条件が3次元速度勾配テンソルの精度に影響する。

複数の測定面（アジマス角）における速度勾配テンソルの合成において、同じ PIV 測定上の節点であっても渦中心からの距離と軸方向の位置は異なることに注意が必要である。測定面である $x_1 - x_2$ 平面において、渦中心が x_1 軸上にあるとすると、 x_1 軸上の節点は厳密に一致するが、 x_2 座標が 0 でない場合は、基準測定面（アジマス面）と合成する他の測定面との角度に応じて渦中心からの距離に相違が生じる。この影響は、 x_1 軸から離れる程大きい。本研究では、各測定面のトポロジー不変量の分布を確認し、同じ特性を有していることから、この補正をしない条件で合成を行ったが、本実験におけるスパイラル渦の主要な特性を解析することができた。

この補正では、もしスパイラル渦が後流に移動するにつれてスパイラル軌道が膨張（スパイラル半径が増大）した場合は、アジマス角に従った補正の他に、この膨張によるスパイラル渦の渦

軸の角度の補正が必要になる。即ち、スパイラル軌道半径が一様に変化する場合は特に影響はないが、楕円的な軌道に遷移した場合、測定面におけるスパイラル渦の渦軸の角度がアジマス角と異なることがあり得る。この場合は、測定面におけるスパイラル渦の渦軸の角度を用いた座標変換並びに補正が適切である。更なる詳細な渦構造の分析では、この点も考慮する、或いはスパイラル軌道の特性を評価してこの軌道遷移の影響を数値解析に組み込むことが望ましい。

本研究は、今回の実験におけるスパイラル渦の基本特性を明らかにすると共に、渦構造の新しい同定・解析技術を提案している。ウインドファーム等の複数の風車を配置する実機の適用において、風車後流の流れは各建設地の地形や周囲の状況により異なり、また気候やその変動、朝夕の時間帯においても変化する [41]。それぞれの流れの状態において、本解析技術により渦の構造を解析することにより、渦構造の解明、並びに後流移動における渦構造の遷移を追跡することができる。

このとき、PIV の空間解像度（測定面の節点間隔）は対象とするスパイラル渦のスケールと速度構造の複雑さに依存する。また、速度勾配テンソル ∇v を評価するときの有限差分の精度にもよる。特に、速度構造の複雑さは本解析の精度・次数（テイラー展開）の設定において重要であり、渦の速度構造の複雑さに応じた精度の考慮は、PIV の実験による測定並びに数値解析の双方において必要である。また、3次元の速度勾配テンソルでは複数のアジマス角の測定面における2次元速度勾配テンソルが必要であるが、このとき各アジマス角・測定面におけるスパイラル渦は同じ状態であると仮定している。従って、測定する後流方向の位置はできるだけ同じ座標とし、測定する複数の面の間でスパイラルが1回転しない角度の範囲で行うことが望ましい。更に、各測定面における PIV の測定では、測定する瞬間におけるスパイラル渦（測定面）と翼の位置関係を同じにすると、各測定面で同じ状態のスパイラル渦の速度を測定できることになり、有効であると考えられる。

また、本解析は、スパイラル渦の構造の遷移を追跡することにより、swirlity の減衰、また swirlity 並びに渦度成分の粘性拡散の特性を分析することができる。実際に、本解析では、スパイラル渦が後流に進むにつれ旋回の強さが弱く、かつ渦領域が拡散することが確認されている。ここで、この拡散の時間或いは空間スケールを評価、モデル化することができれば、ウインドファームにおける複数の風車間の設置間隔の評価や流況の分析に有益なデータを提供することができる。スパイラル渦の減衰、消滅は、それ自体が後流（後続）にある風車とその発電のためには望ましいが、それ以外にも発電にとって有利な点がある。乱流強度が増すと、後流の速度回復や速度の均質化が促進されるが、スパイラル渦が減衰、拡散することにより、周囲の流れとの混合が増し、速度回復が進むと考えられる。

風力発電では、出力の向上のために風車の大型化が進められ、また適切な風車の設置間隔が望まれている。更に、風車の翼の断面形状や小翼の設置等の翼における様々な改良も検討され [52, 53, 54]、今後も多様な観点からの高出力化、健全性向上のための開発が進むと考えられる。大型化による流れの高レイノルズ数化も考えられる。これらの開発には、流れの様相・トポロジーの変化や効果の評価、渦の挙動の解析が必要になる。翼の改良や開発、設計検証、また後流の流動制御では、

流れの詳細を同定・評価する技術は欠かせない。本解析は、この流れの詳細や物理特性を評価する点で、これらの開発を支援することができる。更に、本スパイラル渦の減衰のオーダ評価やモデル化は、これらの開発や環境評価に伴う渦の減衰特性の分析を実エンジニアリング上簡便な方法で評価できるようにするための有意なデータを提供する。これが可能となれば、スパイラル渦の減衰に関する風車の設置間隔の評価の指針や一つのモデル式ができることになる。

ここで、渦の減衰の評価は、渦度（ベクトル）のみの評価では難しいことに注意する。渦度は、旋回に関わる成分と旋回平面に平行な成分に分けられる。これらの内、後者の成分は、渦軸の直交性を下げる作用があり、渦の強化や安定性には寄与せず、トポロジーの観点では渦軸を傾けて歪める点で好ましくない。渦度のみの評価ではこれらの分類は困難であり、旋回強さや渦の強化に関わる成分の抽出には何らかの工夫が必要である。本解析では、渦空間を定めることにより、これらの渦度の影響の分類が可能である。一方、swirlity は、旋回に関わる成分のみの回転強さを抽出・評価する。従って、スパイラル渦という渦の減衰を観察するためには、swirlity による評価が適している。

更に、渦の発生を予測する理論・解析 [49, 50] を応用することにより、渦の移動と生成メカニズムの分析への展開も期待できる。即ち、スパイラル渦の後流方向への移動とは、空間上における速度勾配テンソルの変化により産み出される物理現象とも考えられる。このとき、空間上のスパイラル渦の移動通過領域の速度勾配テンソル成分の様相をモニタリングすることにより、その領域における渦の生成の予測、或いはどのような流れの構造・メカニズムにより移動してくるスパイラル渦の構造が構成されるか、という点について分析することも期待できる。このメカニズムが解ると、スパイラル渦の移動の制限や減衰させるための流動制御技術等につながる可能性がある。

第10章 結 言

風力発電の水平軸風車後流におけるスパイラル渦の3次元渦構造を同定する解析法として、複数のアジマス角における平行な面での2次元速度場の測定から3次元速度勾配テンソルを同定し、局所流れ (local flow geometry) におけるトポロジー不変量に基づく渦のトポロジー構造、並びに渦のトポロジーから導かれる圧力極小、渦の伸長の特性を評価する解析技術を構築した。PIV による翼後流のスパイラル渦に関する速度の測定データにおいて、この解析法を用いた渦解析を行い、スパイラル渦の構造を明らかにすると共に本解析技術の有効性について確認した。

本論文において、第1章では本研究の背景と目的について記述した。水平軸風車の翼端渦がスパイラル渦を構成して後流の特性に影響を及ぼすことを説明し、実験による速度場データの取得は実際のスパイラル渦の速度構造を分析する上で有効であるものの2次元測定に限られる場合があることから、異なるアジマス角の複数の2次元速度データから3次元のスパイラル渦の速度構造を解析することの必要性と意義について記述した。

第2章では、渦のトポロジーを同定するための不変量・物理量について説明し、またトポロジーから導かれる圧力極小と渦の伸長、またこれらを評価する物理量と式、即ち、旋回平面における圧力ヘシアンとエンストロフィーの生成項について記述した。

第3章では、スパイラル渦の解析におけるトポロジーの詳細な同定と物理特性の評価について記述し、本解析にて用いる物理量についてまとめた。

第4章では、本解析のコアである2次元の速度場データより3次元の速度勾配テンソルを同定する解析法について記述した。渦構造と物理特性は、3次元の速度勾配テンソルを同定することにより分析・評価することができる。本章では、渦構造の複雑さに応じ、任意の精度・次数で3次元速度勾配テンソルを同定するための定式化について説明した。

第5章では、スパイラル渦の速度測定のためのPIVによる実験方法についてまとめた。PIVによる計測要領の他、各測定面の位置、アジマス角、並びに測定する後流の範囲について記述した。

第6章では、複数の瞬間速度場の実験データからアンサンブル平均を行う手法について記述した。各瞬間速度場において2次元の渦解析を行い、ガリレイ不変の渦位置を同定し、アンサンブル平均では各瞬間場の渦位置を合わせて統計処理を行う。これらの内容と手順を示した。

第7章では、スパイラル渦の数値解析についてまとめた。即ち、複数の瞬間速度場データの前処理からアンサンブル平均の処理、速度データのエラーの処理等について説明し、2次元の平均速度場から3次元の速度勾配テンソルを求め、スパイラル渦の3次元渦構造と物理特性を評価する解析手法をまとめた。

第8章では、解析結果として風車後流の幾つかの位置におけるスパイラル渦のトポロジー特性

について記述した。渦流対称性の高いスパイラル渦が十分な渦の伸長を得られず、粘性拡散により減衰しながら進んで行く様相を示した。

第9章では、本スパイラル渦の詳細なトポロジー特性と渦モデルとの適合性について記述した。本渦は、渦流対称性が高いものの半径方向速度が小さいために渦の伸長が殆どなく、粘性拡散により減衰すると考えられること、また現在提案されている実在渦モデルとの比較を行った。そして、本解析の今後の展望について記述した。

渦構造、渦のトポロジーの同定では、swirlity や sourcity、流れの対称性の不変量等による同定が詳細なトポロジーを同定する上で有効であり、また、sourcity を定める半径方向流れの固有値を用いることにより、スパイラル渦の渦の伸長の特性の分析とその分類が可能である。即ち、渦とは、乱流中において自己安定性を有する特別な流れの構造であると言えるが、本解析ではスパイラル渦の本構造と物理特性の両方を分析することができる。渦の構造は3次元であるが、数値解析・実験のいずれかのみでは実機の流れの条件におけるこの渦の構造を捉えるのは困難である。実験での測定を容易にしつつ、数値解析で詳細な分析を行うこの融合解析技術は、2次元上の実験のみで詳細な3次元構造を分析することができる。これにより、明確な流体力学的評価に基づく風力発電の技術に資することができると思われる。

関連図書

- [1] Saffman, P. G., *Vortex Dynamics*, Cambridge University Press, NY, (1992).
- [2] Rosenhead, L., “The spread of vorticity in the wake behind a cylinder,” Proc. Roy. Soc. London A, Vol. 127, pp.590–612, (1930).
- [3] Wallace, J. M., “Twenty years of experimental and direct numerical simulation access to the velocity gradient tensor: What have we learned about turbulence?,” Phys. Fluids, Vol. 21, 021301, (2009).
- [4] Hunt, J. C. R., Wray, A. A., and Moin, P., Eddies, streams, and convergence zones in turbulent flows, Center for Turbulence Research CTR-S88, pp.193–208, (1988).
- [5] Chong, M. S., Perry, A. E., and B. J. Cantwell, A general classification of three-dimensional flow fields, Phys. Fluids, Vol. A2(5), pp.765-777, (1990).
- [6] C. H. Berdahl and D. S. Thompson, “Eduction of swirling structure using the velocity gradient tensor,” AIAA Paper, No. 91-1823, (1991).
- [7] Jeong, J., and Hussain, F., On the identification of a vortex, J. Fluid Mech., Vol. 285, pp.69-94, (1995).
- [8] D. Sujudi and R. Haimes, “Identification of swirling flow in 3-D vector fields,” AIAA Paper, No. 95-1715, (1995).
- [9] S. Kida and H. Miura, “Identification and analysis of vortical structures,” E. J. Mech. B/Fluids, Vol. 17(4), pp.471-488, (1998).
- [10] J. Zhou, R. J. Adrian, S. Balachandar, and T. M. Kendall, “Mechanisms for generating coherent packets of hairpin vortices in channel flow,” J. Fluid Mech., Vol. 387, pp.353-396, (1999).
- [11] P. Chakraborty, S. Balachandar, and R. J. Adrian, “On the relationships between local vortex identification schemes,” J. Fluid Mech., Vol. 535, pp.189-214, (2005).
- [12] J.-Z. Wu, A.-K. Xiong, and Y.-T. Yang, “Axial stretching and vortex definition,” Phys. Fluids, Vol. 17, 038108, (2005).

- [13] S. Zhang and D. Choudhury, “Eigen helicity density: a new vortex identification scheme and its application in accelerated inhomogeneous flows,” *Phys. Fluids*, Vol. 18, 058104 (2006).
- [14] Nakayama, K., Physical properties corresponding to vortical flow geometry, *Fluid Dyn. Res.*, Vol. 46, 055502, (2014).
- [15] Nakayama, K., Sugiyama, K., and Takagi, S., A unified definition of a vortex derived from vortical flow and the resulting pressure minimum, *Fluid Dyn. Res.*, Vol. 46, 055511, (2014).
- [16] Jiménez, J., Wray, A. A., Saffman, P. G., and Rogallo, R. S., “The structure of intense vorticity in isotropic turbulence,” *J. Fluid Mech.*, Vol. 255, pp.65-90, (1993).
- [17] Ashurst, Wm. T., Kerstein, A. R., Kerr, R. M., and Gibson, C. H., “Alignment of vorticity and scalar gradient with strain rate in simulated Navier–Stokes turbulence,” *Phys. Fluids*, Vol. 30(8), pp.2343-2353, (1987).
- [18] Soria, J., Sondergaard, R., Cantwell, B. J., Chong, M. S., and Perry, A. E., A study of the fine-scale motions of incompressible time-developing mixing layers, *Phys. Fluids* Vol. 6(2), pp.871-884, (1994).
- [19] Blackburn, H. M., Mansour, N. N., and Cantwell, B. J., “Topology of fine-scale motions in turbulent channel flow,” *J. Fluid Mech.*, Vol. 310, pp.269-292, (1996).
- [20] Lundgren, T. S., Strained spiral vortex model for turbulent fine structure, *Phys. Fluids*, Vol. 25(12), pp.2193-2203, (1982).
- [21] Nakayama, K., and Ohira, Y., and Hasegawa, H., “Relationships between local topology of vortical flow and pressure minimum feature derived from flow kinematics in isotropic homogeneous turbulence,” *J. Fluid Sci. Tech.*, Vol. 11(1), 15-00139, (2016).
- [22] Nakayama, K., Ohira, Y., and Yamada, S., “A new parameter in vortex identification and visualization: Symmetry of vortical flow,” *Proc. 2014 ASME Int. Mech. Eng. Congress & Exposition (IMECE2014)*, IMECE2014-39859, (2014).
- [23] 中山, 大平, 山田, “渦流の対称性を示す不変量,” *土木学会論文集 A2(応用力学)*, 70(2) (応用力学論文集 Vol. 17), I.851-I.858, (2014).
- [24] Nakayama, K., and Ohira, Y., A study of the development and topology of a vortex with inflow in isotropic homogeneous turbulence, *Theor. Appl. Mech. Japan*, Vol. 63, pp.43–51, (2015).
- [25] Nakayama, K., Topological features and properties associated with development/decay of vortices in isotropic homogeneous turbulence, *Phy. Rev. Fluids*, Vol. 2, 014701, (2017).

- [26] Burton, T., Jenkins, N., Sharpe, D., and Bossanyi, E., *Wind Energy Handbook*, John Wiley & Sons, Ltd, West Sussex, England, (2001).
- [27] Fukumoto, Y. and Hattori, Y., “Curvature instability of a vortex ring,” *J. Fluid Mech.*, Vol. 526, pp.77–115, (2005).
- [28] Hattori, Y., and Fukumoto, Y., “Modal stability analysis of a helical vortex tube with axial flow,” *J. Fluid Mech.*, Vol. 738, pp.222–249, (2014).
- [29] Leweke, T., Quaranta, H. U., Bolnot, H., Blanco-Rodríguez F. J, and Le Dizès, S., “Long- and short-wave instabilities in helical vortices,” *The Science of Making Torque from Wind 2014 (TORQUE 2014)*, *J. Phy. Conf. Series* 524, 012154, (2014).
- [30] Blanco-Rodríguez, F. J., and Le Dizès, S., “Elliptic instability of a curved Batchelor vortex,” *J. Fluid Mech.*, Vol. 804, pp.224–247, (2016).
- [31] Batchelor, G.K.: Axial flow in trailing line vortices. *J. Fluid Mech.*, Vol. 20, pp.645-658, (1964).
- [32] V. T. Wood, and L. W. White, “A new parametric model of vortex tangential-wind profiles: development, testing, and verification,” *J. Atmos. Sci.*, Vol. 68, pp.990-1006, (2011).
- [33] M. Dreyer, J. Decaix, C. Münch-Alligné, and M. Farhat, “Mind the gap: a new insight into the tip leakage vortex using stereo PIV,” *Exp. Fluids*, Vol. 55, 1849, (2014).
- [34] Dobrev, I., Maalouf, B., Troldborg, N., and Massouh, F., *Investigation of the Wind Turbine Vortex Structure*, 14th Int. Symp. on Applications of Laser Techniques to Fluid Mechanics, (2008).
- [35] Maalouf, B., Dobrev, I., and Massouh, F., *Vortex structure in the wake of a wind turbine rotor*,” 19ieme Congrès Français de Mécanique, (2009).
- [36] Sherry, M., Sheridan, J., and Lo Jacono, D., “Horizontal axis wind turbine tip and root vortex measurements,” 15th Int. Symp. on Applications of Laser Techniques to Fluid Mechanics, Lisbon, Portugal, (2010).
- [37] Sherry, M., Nemes, A., Lo Jacono, D., Blackburn H. M., and John Sheridan, J., “The interaction of helical tip and root vortices in a wind turbine wake,” *Phys. Fluids*, Vol. 25, 117102, (2013)
- [38] Hashemi-Tari, P., Siddiqui, K., Refan M., and Hangan, H., “Wind Tunnel Investigation of the Near-wake Flow Dynamics of a Horizontal Axis Wind Turbine,” *The Science of Making Torque from Wind 2014 (TORQUE 2014)*, *J. Phy. Conf. Series*, Vol. 524, 012176, (2014).

- [39] Whale, J., Anderson, C. G., Bareiss, and R., Wagner, S., “An experimental and numerical study of the vortex structure in the wake of a wind turbine,” *J. Wind Eng. Industrial Aerodynamics* 84, pp.1-21, (2000).
- [40] Yang, Z., Sarkar, P., and Hu, H., “Visualization of the tip vortices in a wind turbine wake,” *J. Vis.*, Vol. 15, pp.39–44, (2012).
- [41] Bhaganagar, K., and Debnath, M., “The effects of mean atmospheric forcings of the stable atmospheric boundary layer on wind turbine wake,” *J. Renewable and Sustainable Energy*, Vol. 7, 013124, (2015).
- [42] J. M. Burgers, “A mathematical model illustrating the theory of turbulence,” *Adv. Appl. Mech.*, Vol. 1, pp.171-199, (1948).
- [43] G. H. Vatistas, “New model for intense self-similar vortices,” *J. Prop. Power*, Vol. 14(4), pp.462-469, (1998).
- [44] Tennekes, H., and Lumley, J. L., *A first course in turbulence*, MIT Press, Cambridge, MA, (1972)
- [45] 中山, 梅田, 西原, 市川, 高木, “旋回関数の定義と旋回流の同定法への応用,” *日本機械学会論文集 (B編)*, Vol.73(725), pp.22-29, (2007).
- [46] Nakayama, K., and Hasegawa, H., “Relationships between eigen-vortical-axis line and vorticity line,” *Int. Union Theor. Appl. Math. (IUTAM) symp. Helicity, Structures and Singularity in Fluid and Plasma Dynamics*, pp.161-162, (2016).
- [47] Hasegawa, H., and Nakayama, K., “Bundle characteristics between eigen-vortical-axis lines and vorticity lines,” *Int. Congress Theor. Appl. Mech. (ICTAM 2016)*, 129868, (2016).
- [48] Hasegawa, H., and Nakayama, K., “Statistics of physical quantities associated with vortices on vortical axes in isotropic homogeneous turbulence,” *Int. Conf. Fluid Dyn. (ICFD 2016)*, pp.512-513, (2016).
- [49] Nakayama, K., “Invariant local flow topology in transition into a vortex and property of its prediction,” *Int. Congress Theor. Appl. Mech. (ICTAM 2016)*, 129932, (2016).
- [50] Nakayama, K., and Mizushima, L. D., “Numerical analysis of generation process of a vortex in terms of local flow topology,” *Int. Conf. Fluid Dyn. (ICFD 2016)*, pp.530-531, (2016).
- [51] Lindgren, E. R., “Vorticity and rotation,” *Am. J. Phys.*, Vol. 48(6), pp. 465-467, (1980).

- [52] 清水, イスマイリ, 鎌田, 前田, “MIE 型 翼端小翼 (Mie ベーン) 付水平軸風車の性能と翼アスペクト比, 翼枚数, レイノルズ数の関係,” 日本機械学会論文集 (B 編), Vol. 68(676), pp.180-187, (2002).
- [53] Shimizu, Y., Ismaili, E., Kamada, Y. and Maeda, T., “Rotor configuration effects on the performance of a HAWT with tip-mounted Mie-type vanes,” Trans. ASME, J. Solar Eng., Vol. 125, pp.441-447, (2003).
- [54] Shimizu, Y., Ismaili, E., Kamada, Y. and Maeda, T., “Power augmentation of a HAWT by Mie-type tip vanes, considering wind tunnel flow visualization, blade-aspect ratios and Reynolds number,” Wind Eng., Vol. 27(3), pp.183-194, (2003).

謝 辞

本研究の遂行にあたり、深遠なる御指導を賜りました前田太佳夫教授に厚くお礼申し上げます。仕事の事情を御気遣い下さり、温かい御配慮の下で自由な研究環境と雰囲気を与えて下さり、落ち着いて研究に取り組むことができました。本論文の作成では色々と御面倒をおかけしましたが、懐深い丁寧な御助言を賜りました。

また、辻本公一教授、廣田真史教授、鎌田泰成准教授には副査を御承諾頂くだけでなく、風車及び様々な乱流の研究分野の観点から貴重な御助言を賜りました。厚くお礼申し上げます。また、鎌田泰成准教授には PIV による実験におきましても御指導頂きました。

村田淳介助教には実験要領・取り纏めだけでなく、アンサンブル平均の評価におけるデータフィッティング等において議論頂き、有益な意見を頂きました。実験を担当下さった当時修士の学生であった遠藤雅之さん、後藤紀之さんには、忙しい合間をぬって貴重なデータを取得して頂きました。この実験がなかったら今回の解析はできませんでした。深謝致します。

また、機械工学科の野村由司彦教授、小竹茂夫准教授には、常に温かい励ましを頂き、強い心の支えとなりました。深謝致します。同学科の先生方にも御世話になり、謝意を表します。

愛知工業大学の水島 Dias Lucas 君には、渦の解析とコード開発でサポートして頂きました。彼のプログラムテクニックに刺激を受けて、実験データの処理と検査、2次元の渦解析並びに条件付きアンサンブル平均、3次元速度勾配テンソル同定の解析の自動化プログラムを開発しました。同じ研究室の長谷川秀樹君、榎本崇希君、鳴海翔太君には、図の作成をサポートして頂きました。お礼申し上げます。同じく愛知工業大学の澤木宣彦教授には、様々なご相談で貴重な御助言を賜り、また研究のあり方について御指南頂きました。また、金田行雄教授には、同様な御助言と励ましの言葉を頂き、更に広範囲な流体力学の指導を賜りました。先生方の御助言がなければ、この研究に取り組めなかったと思います。ここに厚くお礼申し上げます。

当初3次元速度勾配テンソルの解法にあたり、非線形方程式の定式化を行って Broyden 法を用いた数値解法にて進めていましたが、解の一意性に懸案がありました。しかし、温かく自由な研究環境と実験要領の御配慮のおかげで、新しい解析理論に取り組むことができました。何度か解析コードを作り直し、また、本解析の適用限界を考察して応用性と一般性を広げるために時間を要しましたが、何とか任意の精度（次数）で様々な速度構造を有する渦に対する数値解法の定式化まで漕ぎ着けました。また、本研究は、元々私が研究していた渦の定義や物理量を応用・展開するための解析技術として、風力発電の風車という社会上重要な施設を対象として取り組ませて頂きました。この様な大きなテーマに取り組む機会を与えて頂いたことも有難いことと思います。前田太佳夫教授と研究室の皆様に重ねてお礼申し上げます。

最後に、入学を許可して頂きました三重大学、心身共に支えてくれた妻と子供達、そして両親に感謝致します。有難うございました。

Appendix A

後流位置 $(x_1, x_2) = (330, 280)$ ($x_1/D = 0.66$) 付近の瞬間速度場における swirlity ϕ 場の様相を表すものとして、20 データの swirlity ϕ 場を図 1 ~ 20 に示す。

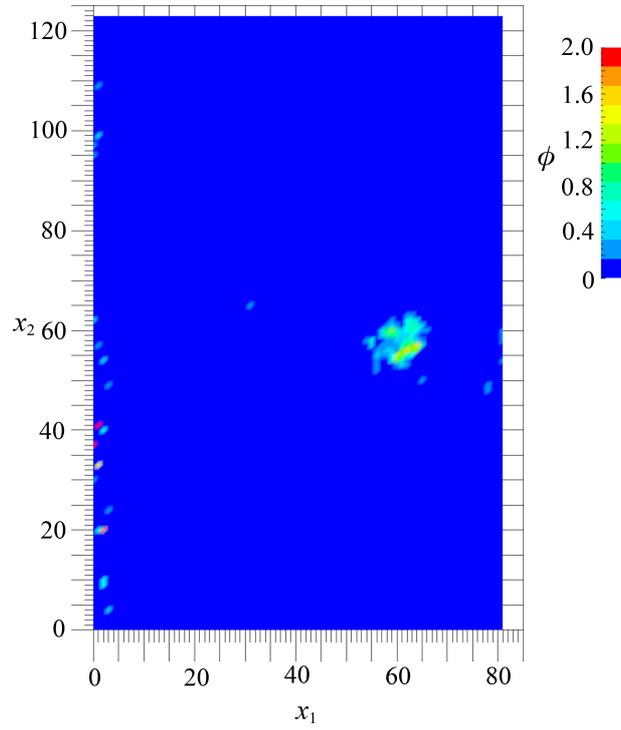


図 1: 後流位置 $(x_1, x_2) = (330, 280)$ 付近における瞬間速度場 (ケース 1) の swirlity ϕ の分布

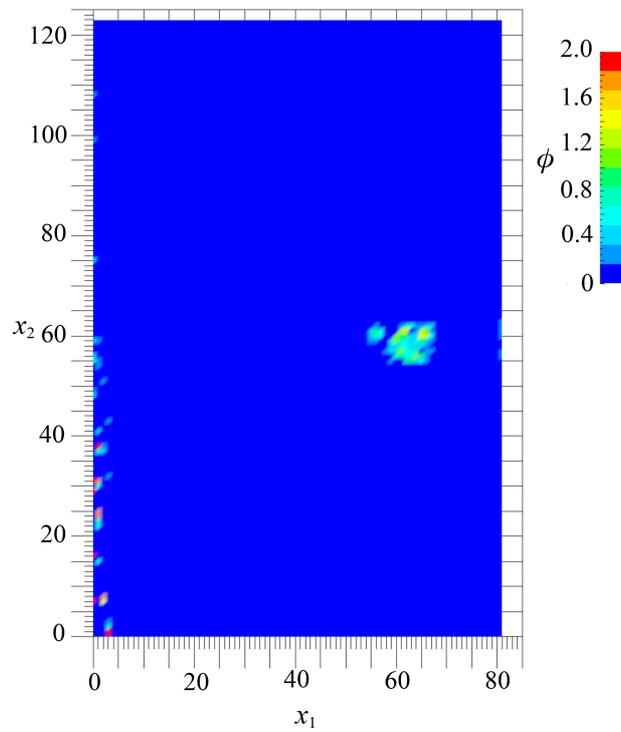


図 2: 後流位置 $(x_1, x_2) = (330, 280)$ 付近における瞬間速度場 (ケース 2) の swirlity ϕ の分布

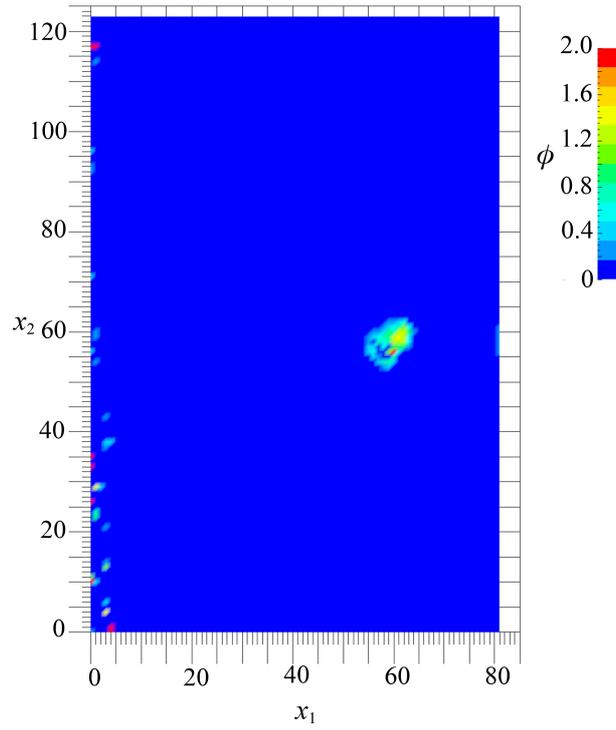


図 3: 後流位置 $(x_1, x_2) = (330, 280)$ 付近における瞬間速度場 (ケース 3) の swirlity ϕ の分布

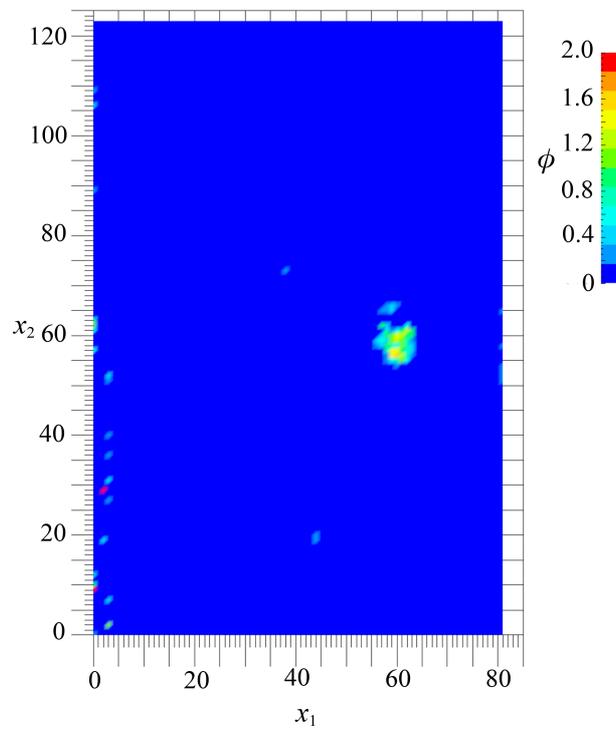


図 4: 後流位置 $(x_1, x_2) = (330, 280)$ 付近における瞬間速度場 (ケース 4) の swirlity ϕ の分布

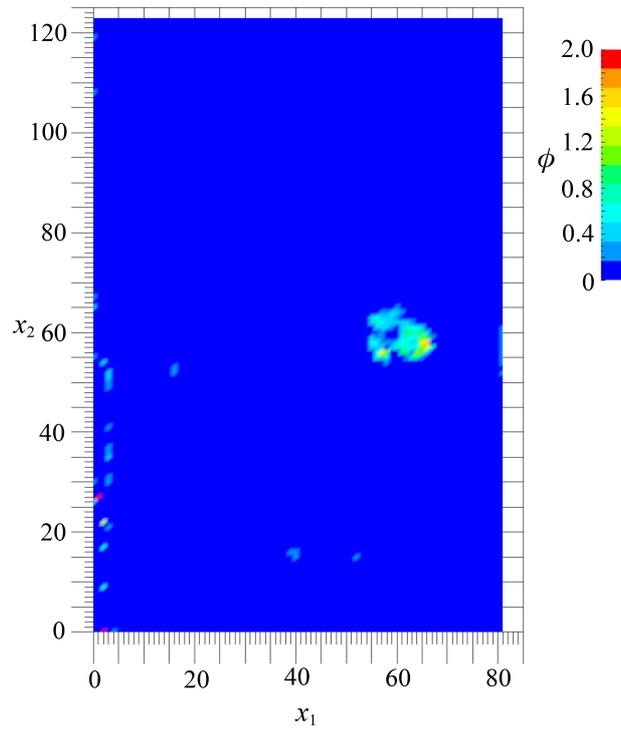


図 5: 後流位置 $(x_1, x_2) = (330, 280)$ 付近における瞬間速度場 (ケース 5) の swirlity ϕ の分布

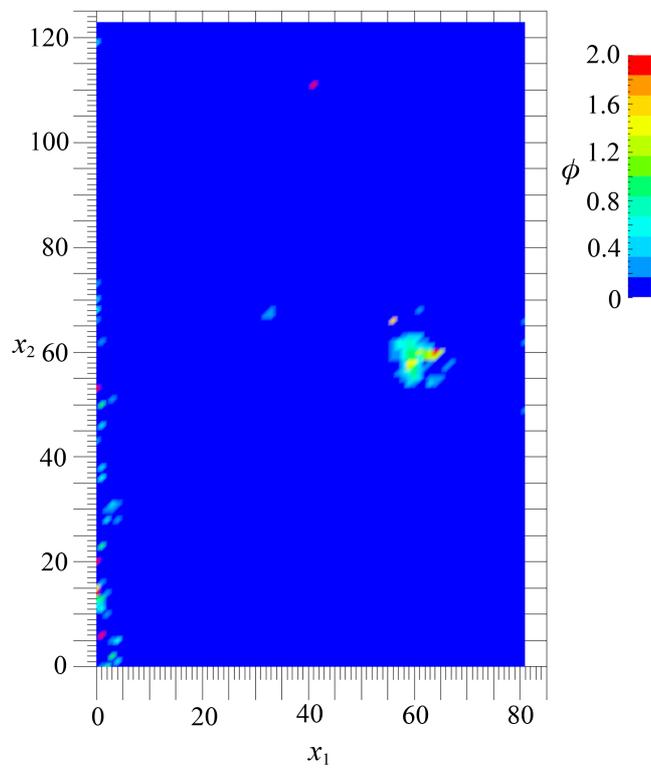


図 6: 後流位置 $(x_1, x_2) = (330, 280)$ 付近における瞬間速度場 (ケース 6) の swirlity ϕ の分布

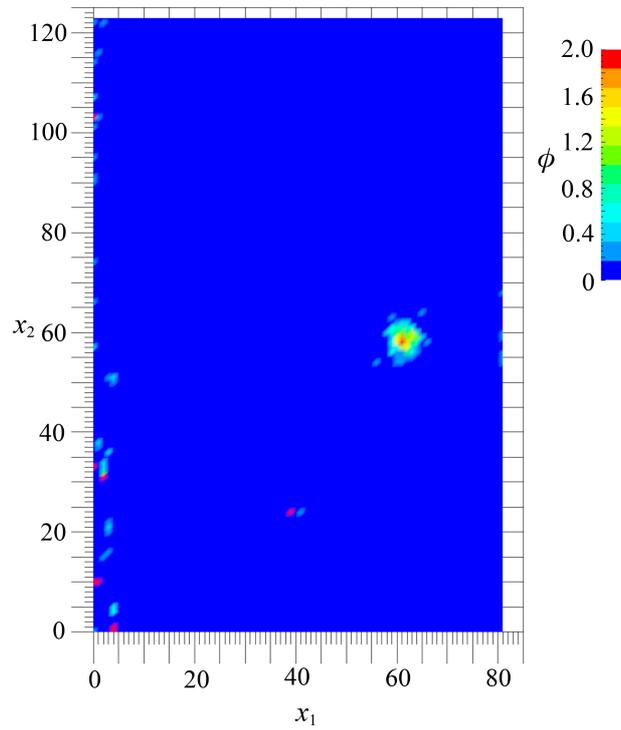


図 7: 後流位置 $(x_1, x_2) = (330, 280)$ 付近における瞬間速度場 (ケース 7) の swirlity ϕ の分布

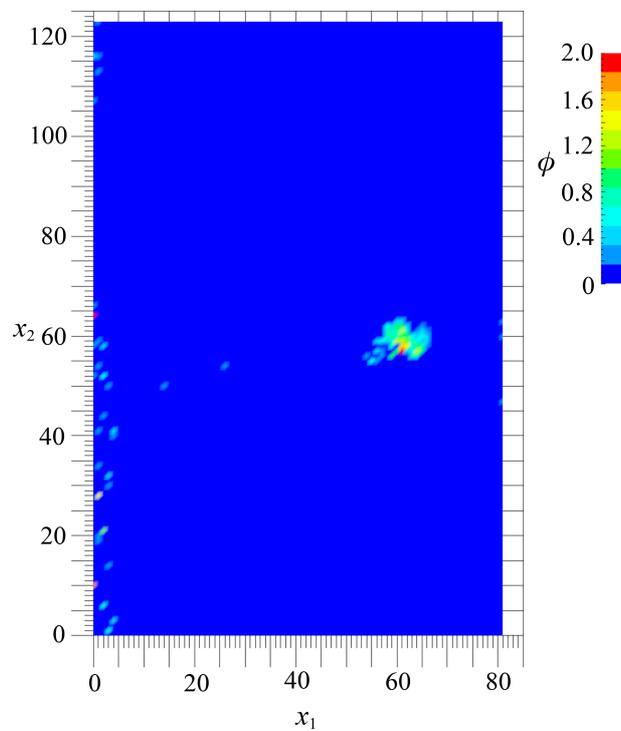


図 8: 後流位置 $(x_1, x_2) = (330, 280)$ 付近における瞬間速度場 (ケース 8) の swirlity ϕ の分布

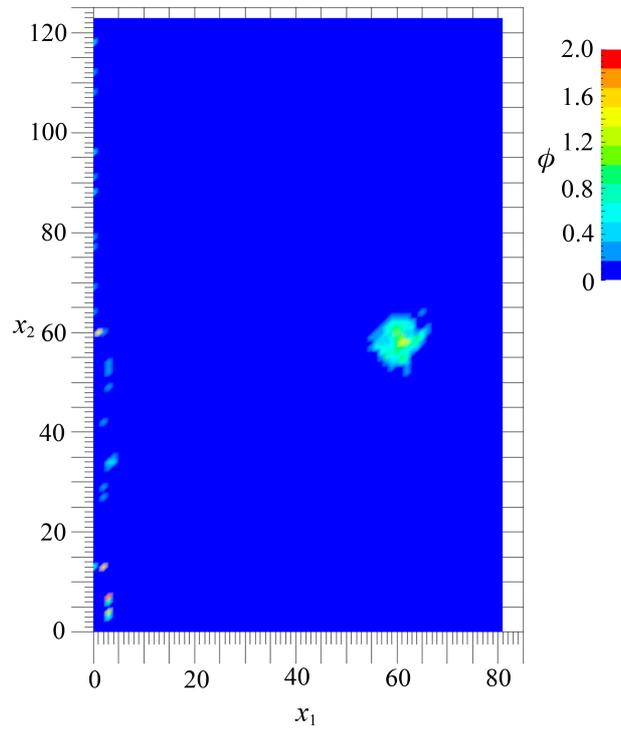


図 9: 後流位置 $(x_1, x_2) = (330, 280)$ 付近における瞬間速度場 (ケース 9) の swirlity ϕ の分布

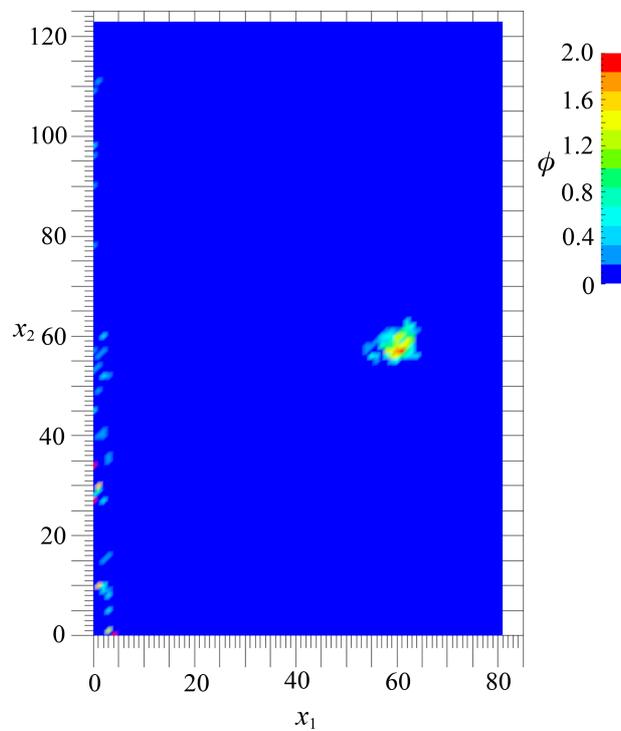


図 10: 後流位置 $(x_1, x_2) = (330, 280)$ 付近における瞬間速度場 (ケース 10) の swirlity ϕ の分布

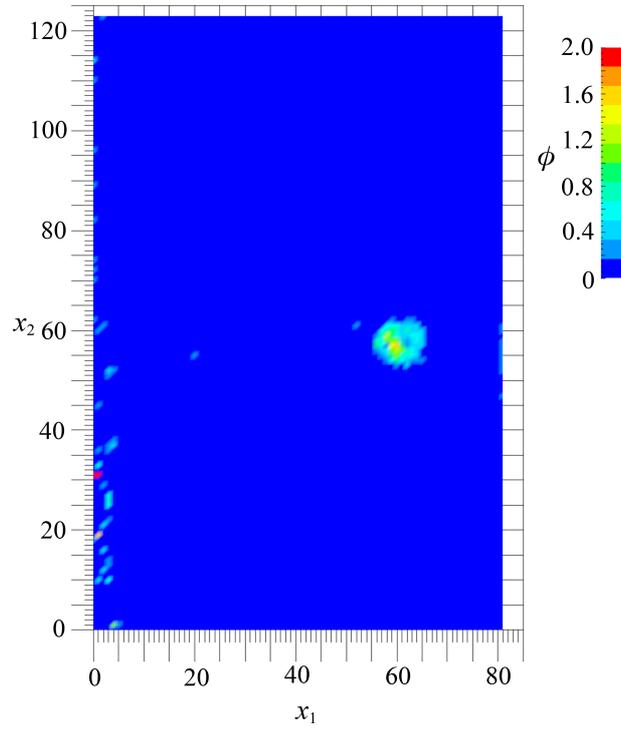


図 11: 後流位置 $(x_1, x_2) = (330, 280)$ 付近における瞬間速度場 (ケース 11) の swirlity ϕ の分布

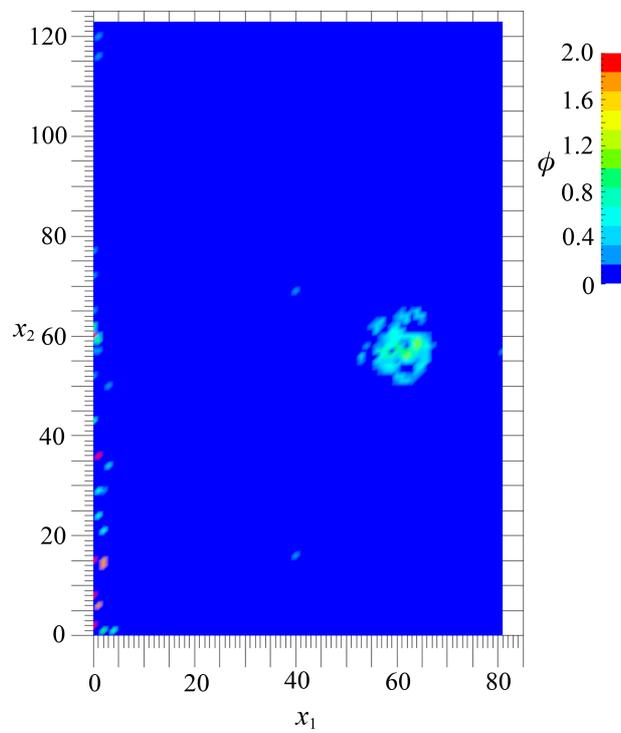


図 12: 後流位置 $(x_1, x_2) = (330, 280)$ 付近における瞬間速度場 (ケース 12) の swirlity ϕ の分布

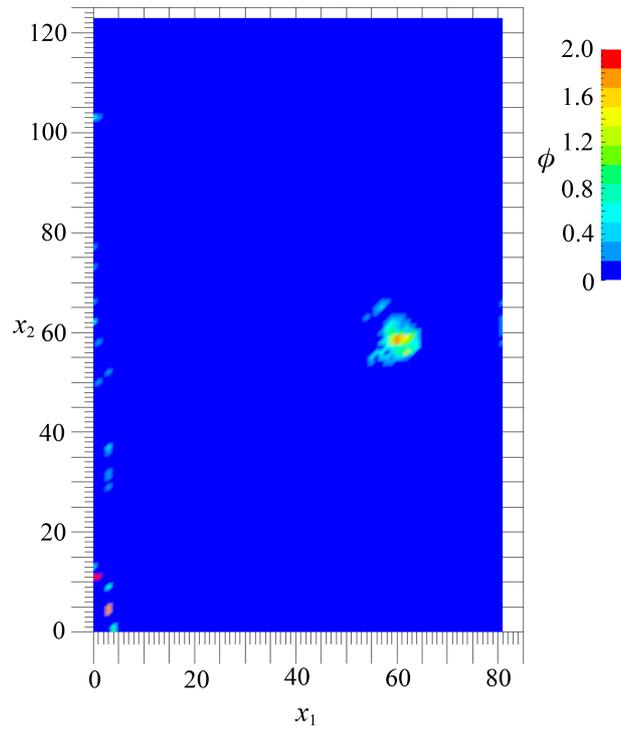


図 13: 後流位置 $(x_1, x_2) = (330, 280)$ 付近における瞬間速度場 (ケース 13) の swirlity ϕ の分布

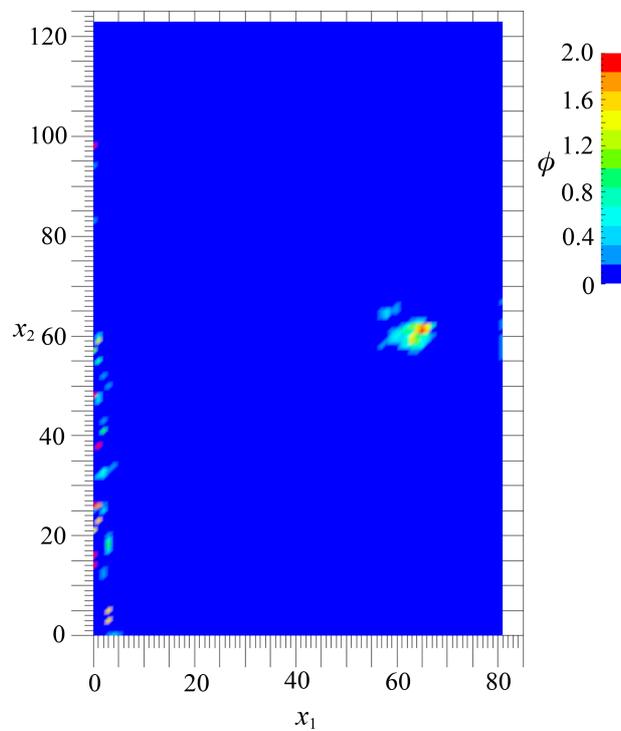


図 14: 後流位置 $(x_1, x_2) = (330, 280)$ 付近における瞬間速度場 (ケース 14) の swirlity ϕ の分布

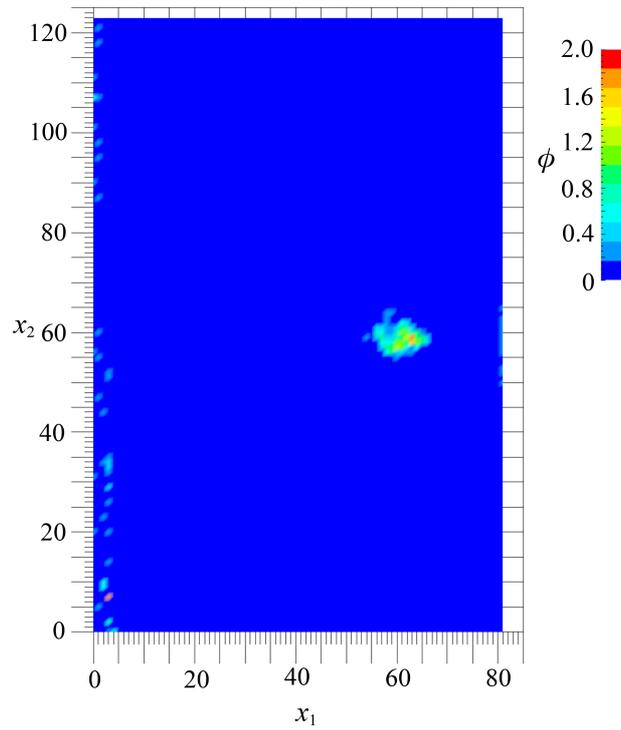


図 15: 後流位置 $(x_1, x_2) = (330, 280)$ 付近における瞬間速度場 (ケース 15) の swirlity ϕ の分布

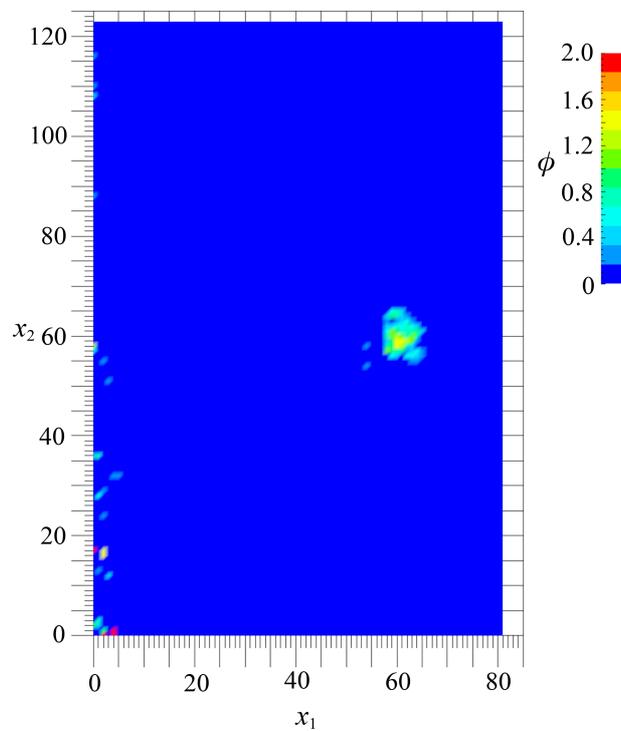


図 16: 後流位置 $(x_1, x_2) = (330, 280)$ 付近における瞬間速度場 (ケース 16) の swirlity ϕ の分布

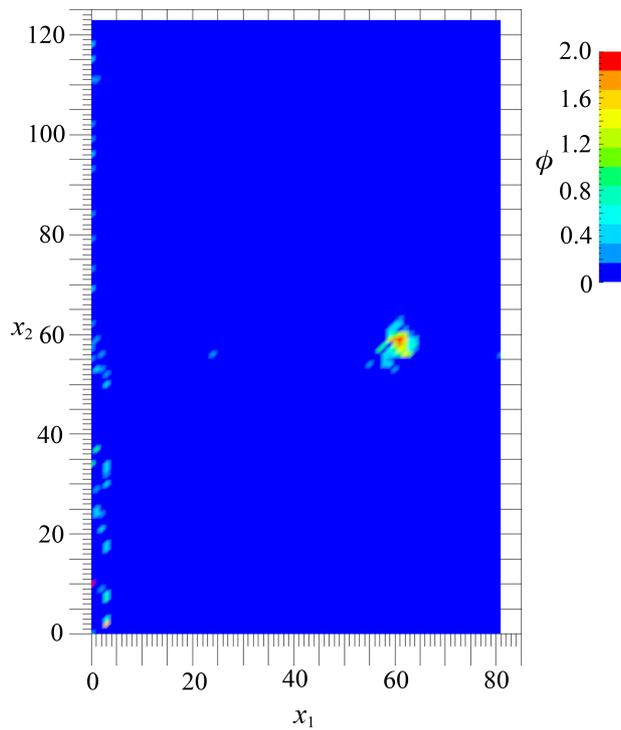


図 17: 後流位置 $(x_1, x_2) = (330, 280)$ 付近における瞬間速度場 (ケース 17) の swirlity ϕ の分布

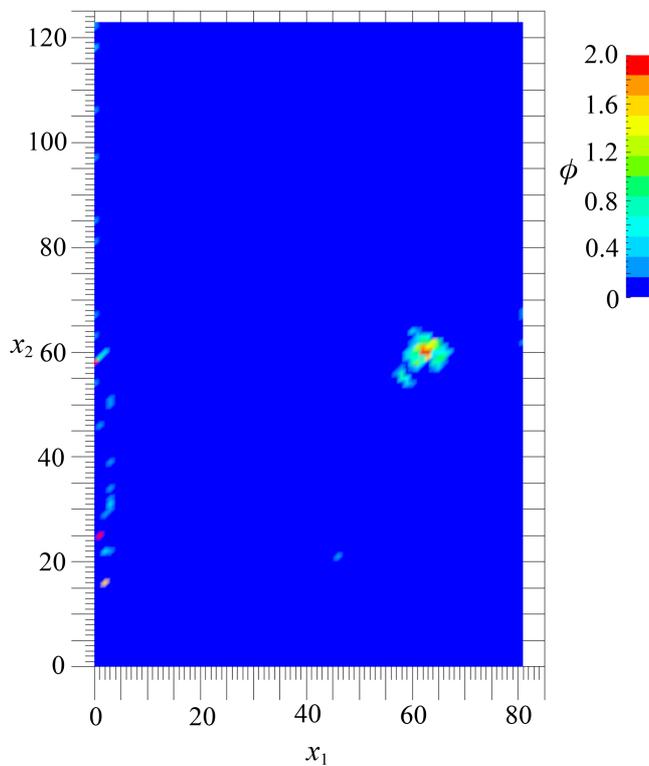


図 18: 後流位置 $(x_1, x_2) = (330, 280)$ 付近における瞬間速度場 (ケース 18) の swirlity ϕ の分布

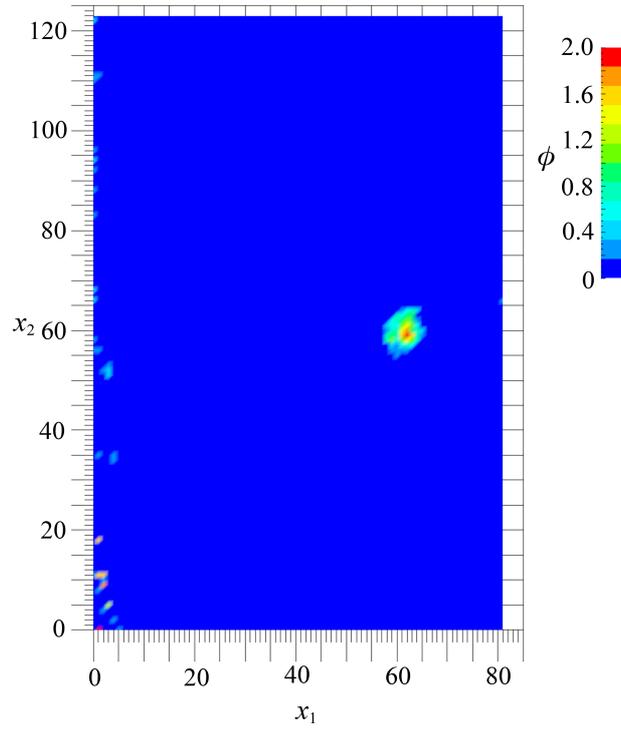


図 19: 後流位置 $(x_1, x_2) = (330, 280)$ 付近における瞬間速度場 (ケース 19) の swirlity ϕ の分布

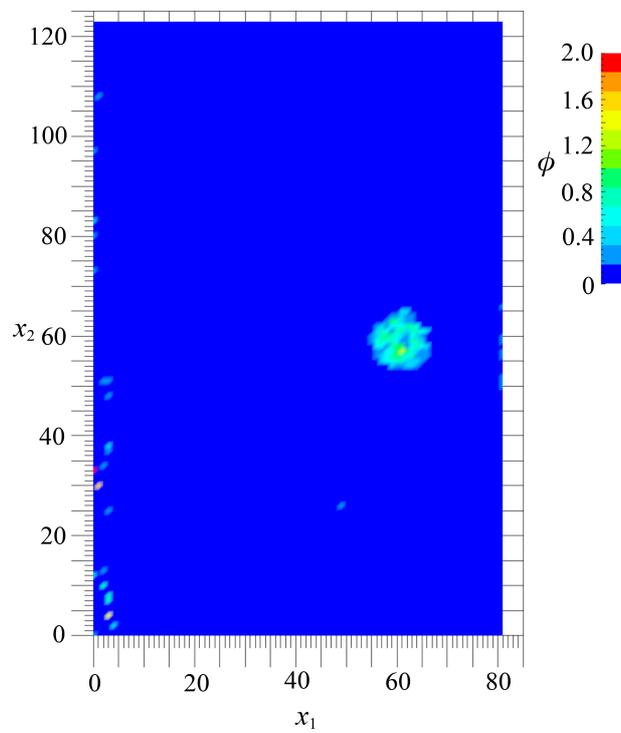


図 20: 後流位置 $(x_1, x_2) = (330, 280)$ 付近における瞬間速度場 (ケース 20) の swirlity ϕ の分布