高等学校数学科における微積分カリキュラムの考察と実践
—積分は「微分の逆」か「求積」か—

惣坊誠太[*1]

平成 29 年 2 月 13 日

*1 三重大学大学院教育学研究科理数・生活系領域 学籍番号 215M022

目次

序章

本研究の所在

古代ギリシャでは幾何学的思考法が主流であり，アルキメデスは，三角形による取り尽くしと帰謬法を用いて，パラボラ（放物線）とその弦が囲む図形の面積を導出した．また，フェルマーを代表とする 17 世紀西洋の数学者たちは「パラボラの求積」を代数的思考法によって解決し，求積法に関するアルゴリズムも得た．

また，フェルマーは，一般パラボラについて，求接線法に関するアルゴリズムも得た．

ルネサンス以降，無限小解析が盛んになり，ニュートンやライプニッツによって，「求積法」と「求接線法」は互いに逆の演算であることが発見された．まさにこれが「微分積分学の基本定理」である．このように長い年月を掛けて，互いに独立していた「求積法」と「求接線法」は「無限小解析」を介し結びつけられたのである．現代においては，この微分積分学における代数的アルゴリズムが，世界の科学技術の発展に無くてはならないものとなった．

一方，今日の数学において，関数のグラフの下部領域の面積を区分求積法としてリーマン和で近似し

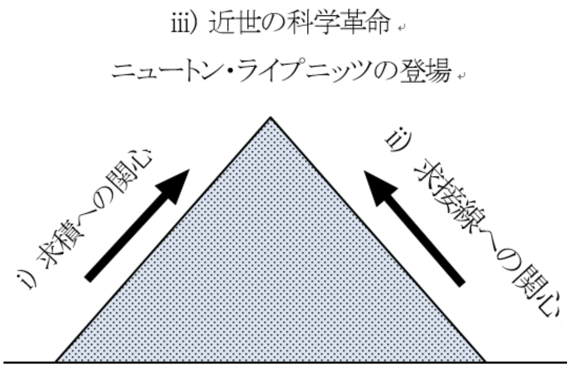
$$\lim_{\Delta x_j \to 0} \sum_{j=0}^{n-1} f(x_j)\Delta x_j = \int_a^b f(x)dx$$

として，積分を構成する．このように，今日の数学においても，積分はグラフ下の面積すなわち定積分を求める演算として，微分は接線の傾きを求める演算として互いに独立し，微分積分学の基本定理により，初めて微分と積分が逆演算であることが示されるのである．

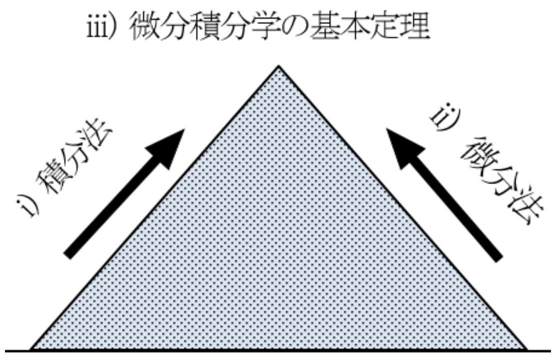
これは，拙論，「高等学校数学科における微積分の構成法に関する考察　– 数学史・解析学と数学教育の相異を起点として –」(田中・惣坊 2017)[1] で以下のような言及をした通りである．

> 一般論として，数学の歴史的発展と，体系化された数学の演繹過程は，必ずしも一致するものではない．しかし，こと微積分においては，「図 1」「図 2」[*1]に喩えて示すように，全く別個の登山者が，それぞれの行程を踏み登山を開始したが，行き着いた山頂ははからずも同一の峰であり，上り詰めた頂からは，反対斜面を辿った一方の登山者の道程がはっきり眺望できるような態様となっており，この両者は酷似しているのである．

[*1] 本稿の図 1



[1] 数学の歴史



[2] 解析学の構成

図 1　数学の歴史と解析学の構成の比較

上述のように，今日の数学の「微分積分学の基本定理」の導出は，数学の歴史的発見に忠実なものといえる．

ところで，現行の高等学校数学では，微積分はどのように構成されているのだろうか．実際，高等学校で使用される教科書は，「学習指導要領」に沿った学習内容や順序で編集されることになるが，その一例として，新興出版社啓林館『詳説 数学 II』[2]（平成 25 年 12 月 10 日発行）を取り上げる．その構成は以下のとおりである．

第 5 章 微分と積分
- 第 1 節 微分係数と導関数
  - 1. 平均変化率と微分係数
  - 2. 導関数
  - 3. 接線の方程式
- 第 2 節 導関数の応用
  - 1. 関数の値の増加・減少
  - 2. 方程式・不等式への応用
- 第 3 節 積分
  - 1. 不定積分
  - 2. 定積分
  - 3. 面積と定積分

この教科書では，「第 3 節 積分」において，「1. 不定積分」が，「2. 定積分」に先行して導入されていることが確認できる．こうした行き方は，「学習指導要領」に忠実なものといえ，使用されるすべての教科書はこのような構成を取らなければならない．実際の教科書の流れを，啓林館『詳説 数学 II』から見ていく．概ね以下である．

i) 関数 $y = f(x)$ に対して，平均変化率，微分係数を順次定め，その後，関数 $f(x)$ の導関数を

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

として定義する．ここで，$f(x)$ から導関数 $f'(x)$ をもとめることを，「微分する」と定める．

ii) 関数 $f(x)$ に対して，微分すると $f(x)$ になる関数，すなわち

$$F'(x) = f(x)$$

となる関数 $F(x)$ を，$f(x)$ の原始関数であると定める．

iii) 関数 $f(x)$ の原始関数は無数にあることに触れ，それらのすべての互いの差は，定数となることに言及し，$f(x)$ の任意の原始関数は

$$F(x) + C \qquad (C \text{ は定数})$$

と表され，これを $f(x)$ の不定積分と定義する．また，不定積分を

$$\int f(x)dx$$

と表すことにする．$f(x)$ からその不定積分を求めることを，「積分する」と定義する．

iv) $f(x)$ の原始関数の一つ $F(x)$ に対し，$x = a$ から $x = b$ までの値の変化，$F(b)$ - $F(a)$ を考える．これを，$f(x)$ の a から b までの定積分と定義し

$$\int_a^b f(x)dx$$

で表すものとする．

v) 関数 $y = f(x)$ のグラフが，x 軸の上部にあるとき，$x = a$，$x = t$，と x 軸で囲まれる部分の面積を $S(t)$ とし，これを t について微分すると $f(t)$ が得られることを示し，$\mathrm{S}(a) = 0$ であることに注意すれば， $x = a$，$x = b$ と x 軸で囲まれる部分の面積 $S(b)$ が

$$\mathrm{S}(b) = \int_a^b f(x)dx$$

で計算できることを導く．

上記の行き方を要約すると，以下のようになる．

i) 微分の導入
ii) 微分の逆演算で得られる原始関数
iii) 原始関数の一般化としての不定積分
iv) 原始関数の関数値の差としての定積分
v) 定積分の活用としての面積の計算法

このように，高等学校数学の微積分は，先ほど取り上げた「数学の歴史」と「解析学の構成」と比較して，大きく異なるのである．本来，定積分は，グラフの下部領域の面積として扱われ，不定積分は，定積分の上端が変数となる関数として扱われるべきである．しかしながら，高等学校では，微分の逆演算によって得られる関数を不定積分とし，その関数値の差を定積分とした．そして，定積分がグラフの下部領域の面積と一致するという構成なのである．高等学校数学科の微積分の構成法を、前述の登山者の例で形容するなら、次のようなものであろう．

> 微分法とその演算を登り道とし、山頂を目指した登山者が、その逆演算として積分法をもって反対斜面を下山する。こうして下山過程で作られた積分法を，求積法として利用するのである。(図 2)

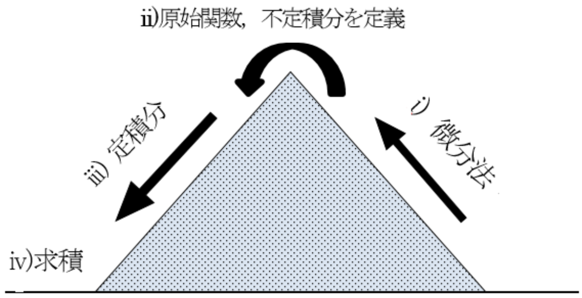


図 2　高等学校数学の構成

筆者は，高等学校数学では不定積分，定積分の学習が「単なる計算問題」として扱われ，本来の積分の意味づけが行われないことを疑問視した．そして，大学数学や数学史を学ばない者にとって，微積分は「単なる計算問題」のままである．微積分という，人類が築いてきた偉大な文化遺産が，本来の形を変えて，本質が失われたまま一般的に認知されることに違和感を覚えるのである．

高等学校における微積分教育の問題点

前節で見た，高等学校数学「独自」の微積分にはどのような問題点があるだろうか．
黒田 (2014)[3] は，今日の高等学校の積分について以下のように述べている．

> 積分については，微分の原始関数として，不定積分を定義し，不定積分の差として定積分を定義する．そして，定積分の性質，微分と定積分の関係を指導し，最後にグラフにおける面積がこの定積分で求まることを指導する．この指導の流れは，数学的には指導しやすく能率的であるが，形式的抽象的な思考となるため，積分の概念イメージが捉えにくいものとなる欠点もある．

現行の高等学校数学における微積分は，積分を微分の逆演算として扱うため，数列の極限を用いる必要性がなくなる．よって，積分の簡潔な指導が可能となる．しかし，先ほど筆者が記した通

り，定積分が「単なる計算問題」として扱われ，積分の概念イメージが捉えにくい．また，黒田(2008)[4] では，微積分に関する認識について，以下のように述べている．

> 一般的に，高校数学に選択性が導入されてから，文系の生徒は数学 I レベルまでにとどまり，微分積分にまで到達する高校生は少なくなっているといえる．理系の生徒は微分積分を学ぶが，数学 III までしっかり学ぶ生徒は減り，大学で再教育しなければならないという現状もある．微積を学んだ生徒でも，その概念や理論的意味が十分理解されずに終わっている傾向も見られる．公式を覚え，類型に応じた計算をするというテクニックは鍛えられているものの，真の意味を物理現象との関わりで理解できていないことが問題点である．これも大学受験数学の影響といえよう．

このように，高等学校の微積分は，大学受験のための道具として扱われ，物理現象との関わりを生徒が理解できないことを問題視している．

平成 24 年度から実施された現行学習指導要領の解説 [5] では，微積分について，以下のように述べている．

> 微分・積分の概念は，いろいろな事象を数理的に扱うのに有用である．関数については，中学校第 2 学年で一次関数の変化の割合とそのグラフの特徴を，第 3 学年で関数の変化の割合とそのグラフの特徴を扱い，「数学 I」で一般の二次関数についてそのグラフの特徴を理解し，関数の値の変化について理解を深めている．ここでは，簡単な整式で表される関数（以下「多項式関数」という．）に限定して，瞬間の速さや面積などの具体的な事象の考察を通して微分・積分の考えを理解させ，その考えの有用性を認識できるようにするとともに，関数の値の変化を調べるなど，事象を数学的に考察し表現する能力を養う．

上記に見る通り，現行の学習指導要領では，具体的な事象の考察により，微積分の考えを理解させ，有用性を認識させることを期待している．それにも関わらず，大学入試のための微積分の問題を解くことに重点が置かれ，有用性が認識されにくいという実態がある．

本研究の目的

本研究の目的は，積分の概念イメージを捉えることができ，具体的な事象との関わりを認識させる高等学校数学の微積分カリキュラムの提案である．カリキュラムの概要は，積分を微分の逆演算としてでなく，グラフの下部領域の面積として認識させる．これは，数学史と解析学に忠実な流れであり，積分のイメージを直感的に捉えることができるだろう．そして，具体的事象を織り交ぜながら，微分と積分の学習を独立させ，「微分積分学の基本定理」により，微分と積分が逆演算であることを発見させるというものである．このカリキュラムを構成するために，以下の 3 項目について，研究を行った．

1. 解析学における微積分の再確認

2. 過去に我が国で使用された教科書の調査
3. 現行カリキュラムの教育的意図

更に，この 3 項目を基に構成したカリキュラムによって，高校生を対象とした実践授業を行う．そして，構成した微積分カリキュラムと，現行の微積分教育との比較により，その功罪を明らかにする．

参考文献

[1] 田中伸明，惣坊誠太 (2017 発行予定),「高等学校数学科における微積分の構成法に関する考察 – 数学史・解析学と数学教育の相異を起点として –」,『三重大学教育学部研究紀要 68 巻』, 三重大学教育学部.

[2] 高橋陽一郎 他（2013),『詳説 数学 II』，新興出版社啓林館，pp.189-239.

[3] 黒田恭史（2014),『数学教育実践入門』，共立出版株式会社，p149.

[4] 黒田恭史（2008),『数学科教育法入門』，共立出版株式会社，p131.

[5] 文部科学省（2009)『高等学校学習指導要領解説　数学編』，p34.

第 1 章

解析学における微積分概念の構成

本章の目的は，解析学の微積分概念の理論的厳密性を基に，高等学校数学の微積分を検討することである．高等学校数学は，まぎれもなく数学ではあるが，教育数学としての使命を帯びたものである．従って，理論的厳密性を敢えて捨てて，直感的理解を優先する場面もあってしかるべきである．理論的厳密性の視点を得るために，本章では，上限公理を要請することから始まり，積分法，微分法の構成，さらに微分積分学の基本定理の導出までの解析学の過程を検討する．

1.1 はじめに

本章では，実数全体の集合を $\mathbb{R}$，有理数全体の集合を $\mathbb{Q}$，整数全体の集合を $\mathbb{Z}$，自然数全体の集合を $\mathbb{N}$ とする．

また，議論を進めるにあたって，実数の演算及び，大小に関する性質は既知のものとし，以下の 3 項目を定義として扱うことにする．

定義 1.1

数列 $\{a_n\}$ が実数 a に収束するとは，任意の正の実数 ε に対して，$N \in \mathbb{N}$ が存在して，$n \geq N$ ならば

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

が成り立つことである．

定義 1.2

S を集合とし，$\exists M \in \mathbb{R} : x \leq M(x \geq M)$, $\forall x \in S$ が成り立つとき，S は上に有界 (下に有界) であるといい，M を S の上界 (下界) であるという．

定義 1.3

　S が実数の集合であるとき，次の二つの性質を満たす数 m を S の上限と呼び，$m = \sup S$ と表す．

　(i)m は S の上界である．

　(ii)m' が S の上界であれば，$m' \geq m$ が成り立つ．

　同様にして，下に有界な集合 S に対して，下限が定義され，$\inf S$ と表される．

　さらに，以下の定理 1.4 を証明なしに扱うことにする．

定理 1.4（三角不等式）

$a, b \in \mathbb{R}$ のとき，$|a+b| \leq |a| + |b|$ が成り立つ．

　以上のことを踏まえて，次節において，実数の連続性に関する定理と，数列の収束に関する定理について述べる．

1.2　実数の連続性と数列

　始めに，実数の連続性を保証するために，上限（下限）公理を定義する．

上限（下限）公理

上（下）に有界な空でない実数の集合は，必ず上限（下限）をもつ．

　上限（下限）公理から，次の定理 2.1，2.2 が示される．

定理 2.1

上に有界な単調増加数列 $\{a_n\}$ は，集合 $\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$ の上限に収束する．

定理 2.2

下に有界な単調減少数列 $\{a_n\}$ は，集合 $\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$ の下限に収束する．

証明

　上に有界な単調増加数列を $\{a_n\}$ とおくと，上限公理から上限が存在し，それを a とおくと，$\forall \varepsilon_{>0} \in \mathbb{R}$ に対して，$a - \varepsilon$ は $\{a_n\}$ の有界ではないから，$\exists N \in \mathbb{N}$ に対して，$n \geq N$ のとき，

$$a_n > a - \varepsilon$$

すなわち

$$-\varepsilon < a_n - a \tag{1.1}$$

が成り立つ．一方，a は $\{a_n\}$ の上限であるから

$$a_n \leq a < a + \varepsilon, \forall n \in \mathbb{N}$$

すなわち

$$a_n - a < \varepsilon, \forall n \in \mathbb{N} \tag{1.2}$$

が成り立つ．(1.1)，(1.2) より $n \geq N$ のとき

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

が成り立つ．　よって，$\{a_n\}$ は a 収束する．(証明終わり)

定理 2.2 も同様に証明される．

また，定理 2.1，2.2 から，次の定理 2.3 が示される．

定理 2.3(区間縮小法)

$\{I_n\} = \{[a_n, b_n]\}$ が閉区間の列で，各 n に対して $I_n \supset I_{n+1}$ が成り立つとする．この時，どの区間 I_n にも含まれるような実数が必ず存在する．さらに，区間 I_n の長さの数列 $\{b_n - a_n\}$ が 0 に収束すると仮定するならば，各区間 I_n に共通な点はただ 1 つに限る．

証明

仮定から，$[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$ が各 n に対して成り立つから，数列 $\{a_n\}$ は単調増加数列，数列 $\{b_n\}$ は単調減少数列である．

ここで，$\exists N \in \mathbb{N}$ に対して $n \geq N$ のとき

$$a_N \leq a_n < b_n$$

$n < N$ のとき

$$a_N < b_N \leq b_n$$

が成り立つから，a_n は $\{b_n\}$ の下界であり，$\{b_n\}$ は下に有界である．同様にして，$\{a_n\}$ は上に有界である．

定理 2.1，2.2 から，$\{a_n\}$ は上限，$\{b_n\}$ は下限をもち，それぞれを a，b とすると，$\lim_{n\to\infty} a_n = a$，$\lim_{n\to\infty} b_n = b$ である．

このとき，$\forall N \in \mathbb{N}$ に対して，$a \leq b_N$，$a_N \leq b$ が成り立つ．ここで，$a \leq b_N$，$\forall N \in \mathbb{N}$ ということは，a は $\{b_n\}$ の下界であることを意味しているから，$a \leq b$ が成り立つ．

従って

$$a_n \leq a \leq b \leq b_n, \ \forall N \in \mathbb{N}$$

が成り立つ．つまり

$$[a, b] \supset [a_n, b_n], \ \forall N \in \mathbb{N}$$

であるから，どの区間 I_n にも区間 $[a, b]$ が含まれている．すなわち，どの区間 I_n にも含まれているような実数が必ず存在する．

さらに，$\{b_n - a_n\}$ が 0 に収束するとき，$\lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$

ここで，$\lim_{n\to\infty} a_n = a$ より，$\forall\varepsilon_{>0} \in \mathbb{R}$ に対して，$N_1 \in \mathbb{N}$ が存在して，$n \geq N_1$ のとき

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

が成り立つ．さらに，$\lim_{n\to\infty} b_n = b$ より，$\forall\varepsilon_{>0} \in \mathbb{R}$ に対して，$N_2 \in \mathbb{N}$ が存在して，$n \geq N_2$ のとき

$$|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$$

が成り立つ．このとき，$N = \max\{N_1, N_2\}$ とすれば，$n \geq N$ のとき

$$\begin{aligned} |(b_n - a_n) - (b - a)| &= |(b_n - b) + (a - a_n)| \\ &\leq |b_n - b| + |a_n - a| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

となり，$\{b_n - a_n\}$ は $b - a$ に収束する．すなわち $b - a = 0$.

よって $b = a$ となり，各区間 I_n に共通な点は $a = b$ に限る．(証明終わり)

さらに，定理 2.3 から，次の定理 2.4 も示される．

定理 2.4（Dedekind の定理）

切断 (A, B) が与えられたとき，一つの数 s が存在して，s は A の最大数，または B の最小数となる．

ただし，前者の場合，B は最小数をもたず，後者の場合，A は最大数をもたない．

ここで，切断 (A, B) とは，A に属する各数を B に属する各数よりも小さくなるように，すべての数を A，B の二組に分けたものである．このような組分けを Dedekind の切断といい，A を下組，B を上組という．

証明

(A, B) を実数の切断とする．$a \in A$，$b \in B$ となる a, b を取り出して，$I_0 = [a, b]$ とする．このとき

$$\frac{a+b}{2} \in A \text{ ならば，} a_1 = \frac{a+b}{2}, \; b_1 = b$$
$$\frac{a+b}{2} \in B \text{ ならば，} a_1 = a, \; b_1 = \frac{a+b}{2}$$

と置けば，$a_1 \in A$，$b_1 \in B$ を満たす．ここで $I_1 = [a_1, b_1]$ と置く．このとき，I_1 の区間の長さは $b_1 - a_1 = \frac{1}{2}(b - a)$ となる．さらに，同様の操作により，$I_2 = [a_2, b_2]$ と置けば，$a_2 \in A$，$b_2 \in B$ を満たし，区間の長さは $b_2 - a_2 = \frac{1}{2^2}(b - a)$ となる．

このような操作を繰り返して，区間の列

$$I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset \cdots$$
$$I_n = [a_n, b_n], \; b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b - a)$$

を得る．ここで，定理 2.3 により，どの区間 I_n にも含まれる実数 s が存在する．また，$\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ であるから，各区間 I_n に属する s は唯一つに限る．

ここで，$s \in A$ とする．$s < s'$ となる s' をとると，$b_n \to s(n \to \infty)$ であり，$s < b_n < s'$ となる b_n が存在するから，$s' \in B$ である．

すなわち，$s \in A$ であり，どんな $s < s'$ となる s' をとってきても $s' \in B$ であるから，s は A の最大数である．

また，仮に s' を B の最小数とすれば，$s < s'$ であるが，上記から $s < b_n < s'$ となる b_n が存在し，$b_n \in B$ であるから，s' は B の最小数となりえない．従って B は最小数をもたない．

B が最小数をもち，A が最大数をもたないことも，同様に示される．（証明終わり）

ここで，定理 1.4 を公理として承認すると，上限（下限）公理を，Weierstrass の定理として証明することができる．その証明を以下に示す．

定理 2.4 を根拠とした Weierstrass の定理の証明

S が下に有界であると仮定する．S の一つの下界を a とすれば，a より小さい数も S の下界である．よって，S の下界でありうる数の全てを A 組，その他の数を全て B 組とすれば，一つの切断 (A, B) が生ずる．この切断によって確定する数を s とすれば，定理 1.4 から s は A の最大数か，B の最小数となる．

ここで，$s \in B$ であり，s は B の最小数であると仮定する．s は S の下界でないから，$x < s$，$x \in S$ をみたす x が存在する．このとき，$x < b < s$ となる b が存在し，$b \in B$ である．$b < s$ であるから，s が B の最小数であることに矛盾する．

従って s は A の最大数，すなわち S の最大下界，すなわち S の下限となる．

S が上に有界であると仮定すると，上限の存在も同様に示される．（証明終わり）

ここまで，実数の連続性に関する 4 つの基本定理

(i) Weierstrass の定理
(ii) 有界な単調数列の収束
(iii) 区間縮小法
(iv) Dedekind の定理

について，(i)→(ii)→(iii)→(iv)→(i) の流れで証明を行った．すなわち，これらの定理は命題として同値であり，(i)〜(iv) のうち一つを公理として要請することにより，他の定理が示されるのである．（図 1.1 参照）

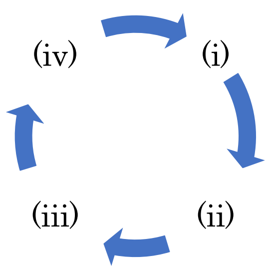


図 1.1　4 つの定理の相互関係

次に，数列の収束，発散を判定するために，以下のような定理を与える．

定理 2.5(Cauchy の判定法)

数列 $\{a_n\}$ が収束するためには，次の条件が成立することが必要十分条件である．
「任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$N \in \mathbb{N}$ が存在して，$|a_n - a_m| < \varepsilon$, $\forall n$, $m \geq N$ が成立する．」

証明

（必要性）　数列 $\{a_n\}$ が a に収束すると仮定する．このとき，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$N \in \mathbb{N}$ が存在して，$n \geq N$ のとき

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$m \geq N$ のとき

$$|a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

が成り立つ．よって，n, $m \geq N$ のとき

$$\begin{aligned}|a_n - a_m| &= |(a_n - a) + (a - a_m)| \\ &\leq |a_n - a| + |a_m - a| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon\end{aligned}$$

が成り立つ．

（十分性）
[1] まず，数列 $\{a_n\}$ が有界であることを示す．
　$\varepsilon = 1$ とすると，$N \in \mathbb{N}$ が存在して，n, $m \geq N$ のとき

$$|a_n - a_m| < 1$$

特に，$m = N$，$n \geq N$ のとき

$$|a_n - a_N| < 1,$$

が成り立つ．これより $n \geq N$ のとき

$$|a_n| = |a_N + (a_n - a_N)| \leq |a_N| + |a_n - a_N| < |a_N| + 1$$

である． $M = \max\{|a_j| + 1, 1 \leq j \leq N\}$ とすると，$n < N$ のとき

$$|a_n| < M$$

$n \geq N$ のとき

$$|a_n| \leq M$$

が得られて，$n \geq N$ のとき

$$|a_n| \leq M$$

となる．すなわち数列 $\{a_n\}$ は有界である．

[2] 次に，数列 $\{a_n\}$ が収束する部分列をもつことを示す．

[1] より数列 $\{a_n\}$ は有界であるから $|a_n| \leq M, \quad \forall n \geq N$ を満たすから, $a_n \in [-M, M]$, $\forall n \in \mathbb{N}$ である．

$I_0 = [-M, M]$ とする．I_0 を二等分すると，$[-M, 0]$, $[0, M]$ となる．この二つの区間のうち，$\{a_n\}$ の項を無限個含む方を I_1 とする．同様の操作を繰り返せば

$$I_k \supset I_{k+1},\ \forall k \in \mathbb{N}$$

が成り立つ．また，各 I_k は $\{a_n\}$ の項を無限個含む．

I_k の長さは，$\dfrac{M}{2^{k-1}}$ で，$\dfrac{M}{2^{k-1}} \to 0 \quad (k \to \infty)$ であるから，区間縮小法より

$$l \in I_k,\ \forall k \in \mathbb{N}$$

となる l が一意に定まる．

ここで，I_1 に属する $\{a_n\}$ の点を a_{n_1}，I_2 に属する $\{a_n\}$ の点を $a_{n_2}(n_2 > n_1)$，以下同様にして，$n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$ に対して $a_{n_k} \in I_k$ となるように部分列を構成する．

$\forall \varepsilon > 0$ に対して，$N \in \mathbb{N}$ を十分大きくとって，$\dfrac{M}{2^{N-1}} < \varepsilon$ となるようにすると，各 k に対して，$k \geq N$ のとき

$$|a_{n_k} - l| \leq \frac{M}{2^{k-1}} \leq \frac{M}{2^{N-1}} < \varepsilon$$

が成り立つ．よって，$\{a_{n_k}\}$ は l に収束する．

[3] 最後に，部分列 $\{a_{n_k}\}$ が l に収束するならば，数列 $\{a_n\}$ も l に収束することを示す．

部分列 $\{a_{n_k}\}$ が l に収束するとき，$\forall \varepsilon > 0$ に対して，$N_1 \in \mathbb{N}$ が存在して，$n \geq N_1$ のとき

$$|a_{n_k} - l| < \frac{\varepsilon}{2}$$

が成り立つ．一方，仮定より，$N_2 \in \mathbb{N}$ が存在して，$n, m \geq N_2$ のとき

$$|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ここで，$N = \max\{N_1, N_2\}$ とすると，$n \geq N$ のとき，$n_k \geq N$ を満たす n_k に対して，$n \geq N$ のとき

$$\begin{aligned}
|a_n - l| &= |a_n - a_{n_k} + a_{n_k} - l| \\
&\leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - l| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

よって，数列 $\{a_n\}$ も l に収束することが示された．（証明終わり）

一般に，定理 2.5 を満たすような数列は Cauchy 列と呼ばれる．

次に二つの収束数列に関する以下の定理を与える．

定理 2.6

$\lim_{n\to\infty} a_n = a$，$\lim_{n\to\infty} b_n = b$ であれば，以下が成り立つ．

(1) $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b$（複合同順）

(2) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab$

(3) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}$(ただし $b_n \neq 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$)

(4) ある $N \in \mathbb{N}$ に対して，$a_n \leq b_n$，$\forall n \geq N$ が成り立つならば，$a \leq b$ も成り立つ．

(5)$a_n \leq c_n \leq b_n$，$\forall n \in \mathbb{N}$ が成り立ち，$a = b$ ならば，$\lim_{n\to\infty} c_n$ が存在して，$a = b$ に等しい．

証明

(1)$\forall \varepsilon > 0$ に対して，N_1，$N_2 \in \mathbb{N}$ が存在して，$n \geq N_1$ のとき

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$n \geq N_2$ のとき

$$|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$$

が成り立つ．$N = \max\{N_1, N_2\}$ とすると，$n \geq N$ のとき

$$\begin{aligned}|(a_n + b_n) - (a + b)| &\leq |a_n - a| + |n_n - b| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon\end{aligned}$$

よって，$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$（$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = a - b$ も同様に示せる．）

(2) 収束する数列は有界であるから，ある $M > 0$ が存在して，$|a_n| \leq M$，$\forall n \in \mathbb{N}$ となる．

ここで，$\forall \varepsilon > 0$ に対して，N_1，$N_2 \in \mathbb{N}$ が存在して，$n \geq N_1$ のとき

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2|b|}$$

$n \geq N_2$ のとき

$$|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

が成り立つ．$N = \max\{N_1, N_2\}$ とすると，$n \geq N$ のとき

$$\begin{aligned}|a_n b_n - a + b| &= |a_n b_n - a_n b + a_n b = ab| \\ &= |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a| \\ &< M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + |b| \cdot \frac{\varepsilon}{2|b|} \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon\end{aligned}$$

よって，$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab$

(3) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$ を示す．

$\frac{1}{2}|b| > 0$ に対して，$N_1 \in \mathbb{N}$ が存在して，$n \geq N_1$ のとき

$$|b_n - b| < \frac{1}{2}|b|$$

ここで

$$||b_n| - |b|| \leq |b_n - b|$$

が成り立つから，$n \leq N_1$ のとき

$$\begin{aligned} ||b_n| - |b|| &< \frac{1}{2}|b| \\ -\frac{1}{2}|b| &< |b_n| - |b| \\ \therefore \quad \frac{1}{|b_n|} &< \frac{2}{|b|} \end{aligned}$$

となる．また，$\forall \varepsilon > 0$ に対して，$N_2 \in \mathbb{N}$ が存在して，$n \geq N_2$ のとき

$$|b_n - b| < \frac{|b|^2}{2}\varepsilon$$

が成り立つ．$N = \max\{N_1, N_2\}$ とすると，$n \geq N$ のとき

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| &= \left|\frac{b_n - b}{b_n n}\right| \\ &= \frac{|b_n - b|}{|b_n||n|} \\ &< \frac{2}{|b|} \cdot \frac{1}{|b|} \cdot \frac{|b|^2}{2}\varepsilon \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

よって，$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$ が示された．そして，(2) と同様にすれば，$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$ が示される．

(4) $a > b$ と仮定する．$\frac{|b-a|}{2} > 0$ に対して，$N \in \mathbb{N}$ が存在して，$n \geq N$ のとき，(1) より

$$|(b_n - a_n) - (b - a)| < \frac{|b-a|}{2}$$

が成り立つから

$$\begin{aligned}(b_n - a_n) - (b - a) &< \frac{|b-a|}{2}\\ \therefore \quad b_n - a_n &< \frac{|b-a|}{2} + (b-a)\\ &= \frac{1}{2}(b-a)\end{aligned}$$

となり，仮定の $b_n \geq a_n$，$\forall n \in \mathbb{N}$ に反する．

よって，$b \geq a$ が成り立つ．

(5)$\forall \varepsilon > 0$ に対して，N_1，$N_2 \in \mathbb{N}$ が存在して，$n \geq N_1$ のとき

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

$n \geq N_2$ のとき

$$|b_n - b| < \varepsilon$$

が成り立つ．$N = \max\{N_1, N_2\}$ とすると，$n \geq N$ のとき

$$\begin{aligned}a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon\\ b - \varepsilon < b_n < b + \varepsilon\end{aligned}$$

が成り立つ．ここで

$$a_n \leq c_n \leq b_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

と，$a = b$ より，$n \geq N$ のとき

$$a - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < a + \varepsilon$$

つまり，$n \geq N$ のとき

$$|c_n - a| < \varepsilon$$

が成り立つ．

よって，数列 $\{c_n\}$ は $a = b$ に収束する．（証明終わり）

一般に，定理 2.6(5) は，はさみうちの原理として知られている．

ここまで，実数の連続性と，数列の収束に関する定理をいくつか述べた．ところで，高等学校数学では，実数の連続性に関する話題に一切触れられることなく議論が進む．また，数列の極限に関しては，所謂「$\varepsilon - N$ 論法」による収束の定義がなされず，直感的に収束，発散の区別がなされているのである．定理 2.6 は，高校数学において言及されているが，「収束する数列の極限値について，次の性質が成り立つ」と，証明なしに「天下り的」に与えられている．これらの事柄をすべて厳密に高校生に指導することは，多くの時間を要し，単位数を考慮すると現実的でない．しかし，数列の極限を指導する者が最低限得るべき知識であろう．

1.3 無限級数

本節では，無限級数に関する基本的な事柄，定理について言及する．無限級数は，定積分をリーマン和の極限として定義するために特に重要な概念であり，高等学校で積分を指導するならば必須事項である．無限級数とは

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \tag{1.3}$$

のように，数列 $\{a_n\}$ の各項を順々に $+$ の符号で結んで得られる式である．式 (1.3) は $\sum a_n$，$\displaystyle\sum_n a_n$，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ などと表記される．また

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{j=1}^{n} a_j$$

として定義される数列 $\{S_n\}$ を，級数 $\sum a_n$ の部分和列と呼び，部分和列が収束（発散）するとき，級数 $\sum a_n$ は収束（発散）するという．級数 $\sum a_n$ が収束するとき，$S = \displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ を級数 $\sum a_n$ の和という．

ここから，無限級数に関する定理をいくつか挙げていく．

定理 3.1

級数 $\sum a_n$ が収束するための必要十分条件は，$\forall\varepsilon > 0$ に対して，$N \in \mathbb{N}$ が存在して，$l, k \geq N$ のとき

$$\left|\sum_{n=l+1}^{k} a_n\right| < \varepsilon$$

が成立することである．

証明

(必要性)

級数 $\sum a_n$ の部分和列 $\{S_n\}$ が S に収束するとき，$\forall\varepsilon > 0$ に対して，$N \in \mathbb{N}$ が存在して，$n \geq N$ のとき

$$|S_n - S| < \frac{\varepsilon}{2}$$

が成り立つ．ここで， $k, l \geq N$ のとき

$$
\begin{aligned}
\left|\sum_{n=l+1}^{k} a_n\right| &= |S_k - S_l| \\
&= |S_k - S + S - S_l| \\
&\leq |S_k - S| + |S_l - S| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}
$$

となる．

（十分性）

必要性の証明から，$\{S_n\}$ は Cauchy 列になることがわかり，定理 2.5 から，$\{S_n\}$ は収束する．（証明終わり）

定理 3.1 系

級数 $\sum a_n$ が収束すれば， $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ が成り立つ．

証明

定理 3.1 において，$l+1 = k \geq N$ として

$$
\left|\sum_{n=l+1}^{k} a_n\right| = \left|\sum_{n=k}^{k} a_n\right| = |a_k - 0| < \varepsilon,\ \forall k \in \mathbb{N}
$$

よって， $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ が成り立つ．（証明終わり）

定理 3.1 系においては，逆が成り立つとは限らない．すなわち， $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ が成り立つならば，級数 $\sum a_n$ が収束するとは限らない．

例えば，級数 $\sum \frac{1}{n}$ について， $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ であるが，$S_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}$ とおくと

$$
\begin{aligned}
|S_{2n} - S_n| &= \sum_{j=n+1}^{2n} \frac{1}{j} \\
&= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \\
&> n \cdot \frac{1}{2n} \\
&= \frac{1}{2},\ \forall n \in \mathbb{N}
\end{aligned}
$$

よって，$\{S_n\}$ は定理 2.5 により，収束しない．従って， $\sum \frac{1}{n}$ は発散するのである．

定理 2.5 を用いれば，以下の定理 3.2 が成り立つことは自明である．

定理 3.2

級数 $\sum a_n$，$\sum b_n$ が共に収束し，それぞれの和が A，B であるとすると，$\forall s, t \in \mathbb{R}$ に対して，級数 $\sum (sa_n + tb_n)$ も収束し，その和は $sA + tB$ に等しい．

次に，正項級数の性質について述べる．正項級数とは，$a_n \geq 0$，$\forall n \in \mathbb{N}$ が成り立つような級数 $\sum a_n$ のことである．正項級数に関して，以下の定理が成り立つ．

定理 3.3

正項級数 $\sum a_n$ が収束するためには，部分和列 $\{S_n\}$ が上に有界な数列であることが必要十分条件である．$\sum a_n$ が収束すれば，その和は $\sup\{S_n | n \in \mathbb{N}\}$ に等しい．

証明

（必要性）

正項級数 $\sum a_n$ が収束するとき，部分和列 $\{S_n\}$ は収束する．定理 2.5 で示したように，収束する数列は有界であるから，$\{S_n\}$ は上に有界である．

（十分性）

$\{S_n\}$ が上に有界な数列であるとき，$\{S_n\}$ は単調増加数列であるから，定理 2.1 により $\{S_n\}$ は $\sup\{S_n | n \in \mathbb{N}\}$ に収束する．（証明終わり）

定理 3.3 系 1

正項級数 $\sum a_n$ が収束するとき，任意の有界な正数列 $\{b_n\}$ の各項を $\sum a_n$ の対応する項に掛けて得られる級数 $\sum a_n b_n$ も収束する．

証明

$\{S_n\}$ を $\sum a_n$ の部分和列とすれば，$\{S_n\}$ は上に有界であるから $M_1 > 0$ が存在して $S_n \leq M_1$，$\forall n \in \mathbb{N}$ となる．一方 b_n も上に有界であるから $M_2 > 0$ が存在して $b_n \leq M_2$，$\forall n \in \mathbb{N}$ となる．そこで，$\{T_n\}$ を級数 $\sum a_n b_n$ の部分和列とすれば $T_n = \sum_{j=1}^{n} a_j b_j$ であるから

$$T_n \leq M_2 \sum_{j=1}^{n} a_n = M_2 S_n \leq M_1 M_2,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

となる．よって，$\{T_n\}$ は有界となり，$\sum a_n b_n$ も正項級数であるから，定理 2.1 より $\sum a_n b_n$ は収束する．（証明終わり）

定理 3.3 系 2

$\sum a_n$，$\sum b_n$ が正項級数であるとき，$N \in \mathbb{N}$ と $c > 0$ が存在して $a_n \geq cb_n$, $\forall n \geq N$ が成立しているとすると，$\sum a_n$ が収束するとき，$\sum b_n$ も収束する．また，$\sum b_n$ が発散するとき，$\sum a_n$ も発散する．

証明

級数の収束，発散は，最初の有限個の項に影響がないから，$N = 1$ としても，一般性を失わない．

$\{S_n\}$, $\{T_n\}$ をそれぞれ，$\sum a_n$，$\sum b_n$ の部分和列とする．仮定より

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} a_n \geq c \sum_{j=1}^{n} b_n = cT_n, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

が成り立つ．　従って，$\{S_n\}$ が上に有界ならば，$\{T_n\}$ も上に有界である．$\{T_n\}$ が上に有界でないなら，$\{S_n\}$ も上に有界でない．従って，$\sum a_n$，$\sum b_n$ の収束，発散は一致する．（証明終わり）

定理 3.3 系 3

二つの正項級数 $\sum a_n$，$\sum b_n$ に対して，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$ が存在し，$l \neq 0, \infty$ であれば，$\sum a_n$，$\sum b_n$ は同時に収束，もしくは同時に発散する．

証明

仮定より，$N \in \mathbb{N}$ が存在して，$n \geq N$ のとき

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - l \right| < \frac{1}{2} l$$

が成り立つ．従って

$$\frac{1}{2} l < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3}{2} l$$

が成り立つ．

$c = \dfrac{1}{2} l$ とすれば，$a_n > cb_n$，$\forall n \in \mathbb{N}$ より，系 2 から，$\sum a_n$ が収束するとき，$\sum b_n$ も収束する．$\sum a_n$ が発散するとき，$\sum b_n$ も発散する．

$c' = \dfrac{3}{2} l$ とすれば，$\frac{1}{c'} a_n < b_n$，$\forall n \in \mathbb{N}$ より，系 2 から，$\sum b_n$ が収束するとき，$\sum a_n$ も収束する．$\sum b_n$ が発散するとき，$\sum a_n$ も発散する．

従って．$\sum a_n$，$\sum b_n$ は同時に収束，もしくは同時に発散する．（証明終わり）

続いて，正項級数の収束，発散の判定に用いられる二つの定理を与える．

定理 3.4（D'Alembert の判定条件）

正項級数 $\sum a_n$ に対して，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lambda$ が存在すれば，$\lambda<1$ のとき，$\sum a_n$ は収束し，$\lambda>1$ のとき，発散する．

証明

$\lambda<1$ とすると，$\lambda+\varepsilon<1$ となるような，$\varepsilon>0$ が存在する．そのような ε を一つ固定する．$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lambda$ から，$N_\varepsilon\in\mathbb{N}$ が存在して，$n\geq N_\varepsilon$ のとき

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}-\lambda\right|<\varepsilon$$

すなわち

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}<\lambda+\varepsilon$$

が成り立つ．ここで，$\lambda+\varepsilon=c$ とおけば，$n\geq N_\varepsilon$ のとき

$$a_{n+1}<ca_n$$

が成り立つから，帰納的に

$$a_n<ca_{n-1}<c^2a_{n-2}<\cdots<c^{n-N_\varepsilon}a_{N_\varepsilon}$$

が $n\geq N_\varepsilon$ のときに成り立つ．$0<c<1$ より，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}c^{n-N_\varepsilon}a_{N_\varepsilon}$ は収束する．よって，定理 3.3 系 2 から $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ も収束する．

一方，$\lambda>1$ とすると，$\lambda-\varepsilon>1$ をみたす $\varepsilon>0$ に対して，$N\in\mathbb{N}$ が存在して, $n\geq N$ のとき

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}-\lambda\right|<\varepsilon$$

すなわち

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}>\lambda-\varepsilon>1$$

が成り立つ．よって，$n\geq N$ のとき，$a_{n+1}>a_n$ となり，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=0$ とならない．よって，定理 3.1 系の対偶により，$\sum a_n$ は発散する．（証明終わり）

定理 3.5(Cauchy の判定条件)

正項級数 $\sum a_n$ に対し，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n)^{\frac{1}{n}}=\lambda$ が存在すれば，$\lambda<1$ のとき，$\sum a_n$ は収束し，$\lambda>1$ のとき，発散する．

証明

　$\lambda < 1$ とすると，$\lambda + \varepsilon < 1$ となるような，$\varepsilon > 0$ が存在する．そのような ε を一つ固定する．$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda$ から，$N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ が存在して，$n \geq N_\varepsilon$ のとき

$$\left|(a_n)^{\frac{1}{n}} - \lambda\right| < \varepsilon$$

すなわち

$$(a_n)^{\frac{1}{n}} < \lambda + \varepsilon$$

が成り立つ．ここで，$\lambda + \varepsilon = c$ とおけば，$n \geq N_\varepsilon$ のとき

$$a_n < c^n$$

が成り立つから，$0 < c < 1$ より，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c^n$ は収束する．従って，定理 3.3 系 2 から，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ も収束する．

　一方，$\lambda > 1$ とすると，$\lambda - \varepsilon > 1$ をみたす $\varepsilon > 0$ に対して，$N \in \mathbb{N}$ が存在して, $n \geq N$ のとき

$$\left|(a_n)^{\frac{1}{n}} - \lambda\right| < \varepsilon$$

すなわち

$$(a_n)^{\frac{1}{n}} > \lambda - \varepsilon > 1$$

が成り立つ．よって，$n \geq N$ のとき，$a_n > 1$ となり，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ とならない．よって，定理 3.1 系の対偶により，$\sum a_n$ は発散する．（証明終わり）

　ここまで，正項級数についていくつかの定理を述べた．続けて，絶対収束と条件収束について言及する．

　$\sum |a_n|$ が収束するとき，$\forall\varepsilon > 0$ に対して，$N \in \mathbb{N}$ が存在して，k, $l \geq N$ のとき

$$\sum_{n=l}^{k} |a_n| < \varepsilon$$

が定理 3.1 から成り立ち，さらに，k, $l \geq N$ のとき

$$\left|\sum_{n=l}^{k} a_n\right| < \sum_{n=l}^{k} |a_n| < \varepsilon$$

となり，$\sum a_n$ は収束する．

　このように，$\sum |a_n|$ が収束するとき，$\sum a_n$ は絶対収束するという．また，収束はしても絶対収束しないような級数は条件収束するという．

　上記に関連して，以下に定理 3.6 を与える．

定理 3.6

$\{a_n\}$ が単調減少数列であるような交代級数[*1] $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ が収束するための必要十分条件は $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ である．

証明

（必要性）

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ が収束するとき，定理 3.1 系により，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(-1)^{n-1}a_n = 0$ である．従って $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ である．

（十分性）

$\{S_n\}$ を $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ の部分和列とすると

$$S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2n-1} - a_{2n})$$

である．仮定より $a_{2n-1} \geq a_{2n}$ であるから，$\{S_{2n}\}$ は単調増加数列である．

一方

$$S_{2n+1} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots - (a_{2n} - a_{2n+1})$$

であるから，$a_{2n-1} \geq a_{2n}$ より，$\{S_{2n+1}\}$ は単調減少数列である．さらに

$$S_{2n+1} - S_{2n} = a_{2n+1} \geq 0$$

より

$$S_1 \geq S_3 \geq \cdots \geq S_{2n-1} \geq S_{2n+1} \geq \cdots \geq S_{2n} \geq S_{2n-2} \geq \cdots \geq S_4 \geq S_2,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

が成り立ち，$\{S_{2n}\}$ は上に有界，$\{S_{2n+1}\}$ は下に有界である．従って，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_{2n}$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_{2n+1}$ が共に存在する．

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ のとき，

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} - \lim_{n\to\infty} S_{2n} = \lim_{n\to\infty}(S_{2n+1} - S_{2n}) = \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = 0$$

となって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ が存在し，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_{2n} = \lim_{n\to\infty} S_{2n+1}$ に一致する．

（証明終わり）

定理 3.6 を満たす交代級数の例として，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ を取り上げる．$a_n = (-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$ とすると，$a_n \to 0 (n \to \infty)$ より，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する．一方，$|a_n| = \dfrac{1}{n}$ であるから，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ は発散する．従って，絶対収束はしないが，条件収束する．

[*1] 項が交互に正負になる級数．$\{a_n\}$ は正数列である．

ここまで，無限級数に関して言及したが，高等学校数学で実際に触れられているのは，定理 3.1 系と，定理 3.2 である．定理 3.1 系に関しては，以下のように証明が行われている．

$\sum a_n$ が収束するとき，その部分和列 $\{S_n\}$ は収束し，$\lim_{n\to\infty} S_n = S$ とする．このとき，$\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = S - S = 0$$

一方，$n \geq 2$ のとき，$S_n - S_{n-1} = a_n$ であるから

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

となる．（証明終わり）

また，高等学校数学では，定理 2.6 が性質であるとし，定理 3.2 の証明を行っている．このように，高等学校数学では，「$\varepsilon - N$ 論法」を避けて証明され得る定理を極力扱い，避けることのできないようなものは，性質として扱うか，もしくは扱わないという姿勢が見受けられる．

1.4 連続関数

この節では，1 変数実数値関数の極限や連続性，後の節で重要な事柄となる中間値の定理等について言及する．

まずは，関数の極限について論ずるために，以下の定義 4.1，4.2 を述べる．

定義 4.1

$a \in \mathbb{R}$ のとき，$U \subset \mathbb{R}$ が a の近傍であるとは，$\delta > 0$ が存在して，U が，a を中心とする開区間 $(a-\delta, a+\delta) = \{x \in \mathbb{R} | |x-a| < \delta\}$ を含むことをいう．開区間 $(a-\delta, a+\delta)$ 自身も a の近傍である．

定義 4.2

$\forall\varepsilon > 0$ に対して，点 $a \in \mathbb{R}$ の近傍 U が存在して，$x \in U$，$x \neq a$ ならば（$\delta > 0$ が存在して，$0 < |x-a| < \delta$ ならば），$|f(x) - A| < \varepsilon$ が成り立つとき，“x が a に近づくとき，関数 $f(x)$ は極限 A をもつ”といい，$\lim_{x\to a} f(x) = A$ と表す．

更に，$\lim_{x\to a} f(x) = A$ の存在を示すためには，右極限，左極限を定義する必要がある．

定義 4.3

“$\forall\varepsilon > 0$ に対して，$\delta > 0$ が存在して，$a < x < a+\delta (a-\delta < x < a)$ ならば $|f(x)-A| < \varepsilon$ が成り立つ．”がいえるとき，“f の $x = a$ における右極限（左極限）が A である”といい，$\lim_{x\to a+0} f(x) = A$（$\lim_{x\to a-0} f(x) = A$）と表す．

定理 4.4

$\lim_{x \to a} f(x) = A$ が存在するための必要十分条件は，$\lim_{x \to a+0} f(x) = A$ と $\lim_{x \to a-0} f(x) = A$ が共に存在して，その値が一致することである．

証明

（必要性）

$\lim_{x \to a} f(x) = A$ とする．仮定より，$\forall \varepsilon > 0$ に対して，$\delta > 0$ が存在して，$0 < |x - a| < \delta$，すなわち，$a < x < a + \delta$ または $a - \delta < x < a$ のとき

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

が成り立つ．すなわち，$\lim_{x \to a+0} f(x)$ と $\lim_{x \to a-0} f(x)$ が共に存在して，その値は共に A となる．

（十分性）

仮定より，$\forall \varepsilon > 0$ に対して，$\delta_1, \delta_2 > 0$ が存在して，$a < x < a + \delta_1$ のとき

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

$a - \delta_2 < x < a$ のとき

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

が成り立つ．$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ とおけば，$0 < |x - a| < \delta$ のとき

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

が成り立つ．よって，$\lim_{x \to a} f(x) = A$ が存在する．（証明終わり）

関数の極限に関して，以下の定理 4.5 が成り立つ．

定理 4.5

$\lim_{x \to a} f(x)$ が存在すれば，a のある近傍 U と正数 M が存在して，$|f(x)| \leq M$, $\forall x \in U - \{a\}$ が成り立つ．

証明

$\lim_{x \to a} f(x) = A$ とすると，$\varepsilon = 1$ に対して，$\delta > 0$ が存在して，$0 < |x - a| < \delta$ のとき

$$|f(x) - A| < 1$$

すなわち

$$-|A| - 1 \leq A - 1 < f(x) < A + 1 \leq |A| + 1$$
$$\therefore \quad |f(x)| < |A| + 1$$

が成り立つ．よって，$U = (a - \delta,\ a + \delta)$, $M = |A| + 1$ とすれば，$|f(x)| \leq M$, $\forall x \in U - \{a\}$ となる．（証明終わり）

定理 4.5 等を用いると，数列の極限に関する定理 2.6 を関数の極限に対応させた以下の定理 4.6 が成り立つ．証明は定理 2.6 と同様にすればよい．

定理 4.6

$\lim_{x\to a} f(x) = A$，$\lim_{x\to a} g(x) = B$ であれば，以下が成り立つ．

(1) $\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = A \pm B$（複合同順）

(2) $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = AB$

(3)$x = a$ の近傍で，$g(x) \neq 0$ かつ，$B \neq 0$ であれば，$\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$

(4)$x = a$ の近傍で，$f(x) \leq g(x)$ が成り立つならば，$A \leq B$ も成り立つ．

(5)$x = a$ の近傍で，$f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ が成り立ち，$A = B$ ならば，$\lim_{x\to a} h(x)$ が存在して，$A = B$ に等しい．

次に，関数の連続性について論ずる．そこで，以下の二つの定義を述べる．

定義 4.7

関数 $f(x)$ が $x = a$ で連続であるとは，a が $f(x)$ の定義域に含まれ，しかも $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ が成り立つことである．

定義 4.8

関数 $f(x)$ が連続関数であるとは，$f(x)$ がその定義域のすべての点で連続であることをいう．

関数 $f(x)$ が，$x = a$ で連続であることを示すには，$\forall\varepsilon > 0$ に対して，$\delta > 0$ が存在して，$|x - a| < \delta$ ならば，$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ が成り立つことを示せばよい．

以下に，既知の連続関数から，新しい連続関数を構成することが可能なことを示す二つの定理を述べる．

定理 4.9

$f(x)$ と $g(x)$ が共に $x = a$ で連続であるとき，以下の関数も $x = a$ で連続である．

(1)$f(x) \pm g(x)$

(2)$f(x)g(x)$

(3)$\dfrac{f(x)}{g(x)}$(ただし $g(a) \neq 0$)

証明は，定理 4.6 から明らかである．

定理 4.10

$f(x)$ が $x = a$ で連続，$g(y)$ が $y = f(a)$ で連続であれば，合成関数 $(g \circ f)(x)$ は $x = a$ で連続である．

証明

$g(y)$ が $y=f(a)$ で連続であるから，$\forall\varepsilon>0$ に対して，$\eta>0$ が存在して，$|y-f(a)|<\eta$ のとき

$$|g(y)-g(f(a))|<\varepsilon$$

が成り立つ．さらに，この $\eta>0$ に対して，$\delta>0$ が存在して，$|x-a|<\delta$ のとき

$$|f(x)-f(a)|<\eta$$

が成り立つ．以上から，$|x-a|<\delta$ のとき

$$|(g\circ f)(x)-(g\circ f)(a)|<\varepsilon$$

が成り立ち，$(g\circ f)(x)$ は $x=a$ で連続．（証明終わり）

続けて，連続関数の性質に関する内容について以下に述べる．

定理 4.11（中間値の定理）

$f(x)$ が閉区間 $I=[a,b]$ 上で連続であるとすると，$f(a)$ と $f(b)$ の間にある任意の数 γ に対して，区間 I の点 c が存在して，$f(c)=\gamma$ が成り立つ．

証明

[1]$c\in I$ を示す．

$f(a)=f(b)$ が成り立つとすれば，$\gamma=f(a)=f(b)$ であるから，$c=a$，または $c=b$ とすればよい．

$f(a)<f(b)$ とする．[*2]$f(a)<\gamma<f(b)$ と仮定する．このとき，$A=\{x\in I|f(x)<\gamma\}$ とすれば，$a\in A$ となり，A は空集合でなく，b は明らかに A の上界となる．よって，A は上に有界．従って，上限公理から $\sup A$ が存在するので，$\sup A=c$ と置く．$a\in A$ より，$a\leq c$ であり，b は A の上界より，$c\leq b$．よって，$c\in I$ である．

[2]$f(c)=\gamma$ を示す．

$f(c)<\gamma$ と仮定する．このとき，$\gamma<f(b)$ であるから，$c<b$ でなくてはならないが，$f(x)$ が c で連続より，$\varepsilon=\gamma-f(c)>0$ に対して，$c<x<b$ を満たす x を c に十分近く取れば，$|f(x)-f(c)|<\gamma-f(c)$ を満たす．従って，$f(x)<\gamma$ となるが，これは $x\in A$ であることを意味する．ところで，$c<x$ であるから，c は A の上限であることに矛盾する．

次に，$f(c)>\gamma$ と仮定する．このとき，$c>a$ となるが，$f(x)$ の連続性から，$\delta>0$ を十分小さく取れば，$c-\delta>a$ を満たし，$\forall x\in(c-\delta,c)$ に対して，$f(x)>\gamma$ が成立するようにできる．しかし，これは $x\in A$，$x\leq c$ ならば，$x\leq c-\delta$ でなければならないことを意味するから，A が c より小さい $c-\delta$ を上界にもつことになり矛盾．

以上から，$f(c)=\gamma$ であることが示された．（証明終わり）

[*2] $f(a)>f(b)$ の場合は，$f(x)$ を $-f(x)$ と置き換えることにより示せる．

次に，中間値の定理を用いた，逆関数の存在の有無を示す定理について述べる．

定義 4.12

関数 $f(x)$ が，$a \leq x_1 \leq x_2 \leq b$ のとき，$f(x_1) \leq f(x_2)$（$f(x_1) \geq f(x_2)$）を満たすならば，$f(x)$ は区間 $[a,b]$ 上で単調増加（単調減少）であるという．特に，$f(x_1) < f(x_2)$（$f(x_1) > f(x_2)$）が常に成り立つときは，狭義の単調増加（単調減少）であるという．

定理 4.13

$f(x)$ がある区間 $[a,b]$ 上で連続かつ狭義に単調増加（減少）であるならば，逆関数 $f^{-1}(x)$ が区間 $[f(a), f(b)]$（$[f(b), f(a)]$）上に存在し，$f^{-1}(x)$ も狭義に単調増加（減少）な連続関数である．

証明

[1]$f^{-1}(x)$ が存在し，狭義の単調増加であることを示す．（狭義の単調減少であることも同様に示せる．）

$a \leq x_1 < x_2 \leq b$ ならば，$f(x_1) \neq f(x_2)$ であり，$f(x)$ は連続である．よって，中間値の定理より，f は，区間 $[a,b]$ から区間 $[f(a), f(b)]$ への全単射の写像である．従って，逆関数 $f^{-1}(x)$ が存在する．

また，$[f(a), f(b)]$ の 2 点 $y_1 < y_2$ を取れば，$f(x)$ が狭義の単調増加であるから，$f(x_1) = y_1$，$f(x_2) = y_2$ を満たす x_1，x_2 は，$x_1 < x_2$ の関係にある．$f^{-1}(y_1) = x_1$，$f^{-1}(y_2) = x_2$ であるから，従って $f^{-1}(x)$ は狭義の単調増加である．

[2]$f^{-1}(x)$ が連続であることを示す．

$\forall \varepsilon > 0$ が与えられたとき，$\dfrac{b-a}{n} < \dfrac{1}{2}\varepsilon$ を満たす $n \in \mathbb{N}$ を一つ固定し

$$a_j = a + \frac{j}{n}(b-a)(0 \leq j \leq n)$$

と定義すると，点列 $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b$ は，区間 $[a,b]$ を n 個の長さ $\dfrac{b-a}{n}$ である部分区間 $[a_j, a_{j+1}](0 \leq j \leq n-1)$ に分割する．このとき，$f(a_0) < f(a_1) < \cdots < f(a_{n-1}) < f(a_n)$ は，区間 $[f(a), f(b)]$ を n 個の部分区間 $[f(a_j), f(a_{j+1})]$ に分割する．

ここで，$l = \min\{f(a_{j+1}) - f(a_j) | 0 \leq j \leq n-1\}$ とおく．$\delta > 0$ を，$\delta < l$ となるように選ぶとき，$[f(a), f(b)]$ の 2 点 y，y_0 が $|y - y_0| < \delta$ を満たせば，y と y_0 は，同一の部分区間 $[f(a_j), f(a_{j+1})]$ に属するか，互いに隣り合った部分区間に属するかのどちらかである．

よって，$f^{-1}(y)$ 及び $f_{-1}(y_0)$ は，$[a,b]$ の同一部分区間 $[a_j, a_{j+1}]$ に属するか，あるいは互いに隣り合った部分区間に属する．従って，$|y - y_0| < \delta$ のとき

$$|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \frac{2(b-a)}{n} < \varepsilon$$

が成り立つ．従って，$f^{-1}(x)$ は連続である．（証明終わり）

以下に，一様連続について述べる．

定義 4.14

集合 $A \supset \mathbb{R}$ 上で定義された関数 $f(x)$ に対して，$\forall\varepsilon > 0$ が与えられたとき，$\delta > 0$ が存在して，$|x_1 - x_2| < \delta$ を満たす任意の A の 2 点 x_1，x_2 に対して，$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ が成立するならば，$f(x)$ は A 上で一様連続であるという．

例えば，関数 $f(x) = x^2$ とする．任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$|x_1 - x_2| < \dfrac{\varepsilon}{x_1 + x_2}$ を満たすように $I = (0, 1)$ に属する任意の点 x_1，x_2 を選ぶと

$$
\begin{aligned}
|f(x_1) - f(x_2)| &= |x_1^2 - x_2^2| \\
&= |(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)| \\
&< \frac{\varepsilon}{x_1 + x_2} \cdot |x_1 + x_2| \\
&= \varepsilon
\end{aligned}
$$

となり，関数 $f(x)$ は I 上で一様連続である．

定理 4.15

有界閉区間 I 上の連続関数 $f(x)$ は I 上で一様連続である．

証明

$f(x)$ が I 上で一様連続でないと仮定すると，ある $\varepsilon > 0$ に対して，I 上の点列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ が選べて，$|x_n - y_n| \to 0$ だが

$$|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon, \forall n \in \mathbb{N} \tag{1.4}$$

が成り立つようにできる．$\{x_n\}$ は有界数列より，$\{x_n\}$ の部分列 $\{x_{n_k}\}$ が存在し，$\{x_{n_k}\}$ は I 上のある点 z に収束する．$|x_n - y_n| \to 0$ より．$\{y_n\}$ の部分列 $\{y_{n_k}\}$ が存在し，$\{y_{n_k}\}$ も z に収束する．$f(x)$ は z で連続より，$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(z)$，$\lim_{k\to\infty} f(y_{n_k}) = f(z)$ が成り立つが

$$|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \leq |f(x_{n_k}) - z| + |f(y_{n_k}) - z|$$

であるから，十分大きい k に対して $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| < \varepsilon$ とならなければならないが，これは (1.4) に矛盾．よって $f(x)$ は I 上で一様連続である．（証明終わり）

次に，最大値，最小値に関して述べる．

定義 4.16

$f(x_0) = \sup\{f(x)|x \in E\}$（$f(x_0) = \inf\{f(x)|x \in E\}$）が成り立てば，$f(x_0)$ を，$f(x)$ の E 上の最大値（最小値）とよぶ．

定理 4.17

有界閉区間 $I = [a, b]$ 上の連続関数 $f(x)$ は，この区間上有界で，必ず最大値，最小値をもつ．

証明

[1] はじめに，$f(x)$ が I で有界であることを示す．

定理 4.15 より，$f(x)$ は I 上で一様連続であるから，$\varepsilon = 1$ に対して，$\delta > 0$ が存在して，$|x_1 - x_2| < \delta$，x_1，$x_2 \in I$ ならば

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

が成り立つ．そこで，点列 a_0，a_1，$\cdots$，a_m を

$$a = a_0 < a_1 < \cdots < a_{m-1} < a_m = b, \max\{a_{j+1} - a_j | 0 \le j \le m-1\} < \frac{1}{2}\varepsilon$$

が成立するように選び，この点列から作られる部分区間 $[a_j, a_{j+1}]$，$0 \le j \le m-1$ を考えると，互いに隣り合う部分区間から選ばれた任意の x，y に対して，$|x - y| < \delta$ であるから，$|f(x) - f(y) < 1$ が成り立つ．今，$x_0 \in I$ を一つ固定すると，任意の $x \in I$ に対して，I 上の点列 x_1，x_2，$\cdots$，x_k（$k \le m$）を選び，$x_1 = x$，$x_k = x_0$ で，しかも $j(0 \le j \le k-1)$ について，x_{j+1} と x_j が互いに隣り合った部分区間に属しているようにできる．よって $M = m + |f(x_0)|$ と置くと

$$\begin{aligned}|f(x)| &= |f(x_1) - f(x_2) + f(x_2) + \cdots + f(x_{k-1}) - f(x_k) + f(x_k)| \\ &\le |f(x_1) - f(x_2)| + |f(x_2) - f(x_3)| + \cdots + |f(x_{k-1}) - f(x_k)| + |f(x_k)| \\ &< m + |f(x_0)| \\ &= M\end{aligned}$$

よって，$f(x)$ は I 上有界．

[2] 次に，最大値の存在を示す．

[1] と，上限公理より，$\sup\{f(x) | x \in I\} = \alpha$ が存在し，$f(x) \le \alpha$ である．すべての $x \in I$ に対して，$f(x) < \alpha$ で仮定すると，関数 $\alpha - f(x)$ は，I 上連続で，0 とならないから，定理 4.9 から $g(x) = \dfrac{1}{\alpha - f(x)}$ も連続であり，$g(x)$ も I 上有界でなければならない．従って，ある正の数 k に対して，$g(x) \le k$ がすべての $x \in I$ に対して成り立つはずである．しかし，この不等式は

$$f(x) \le \alpha - \frac{1}{k}, \forall x \in I$$

を意味するから，$\sup\{f(x) | x \in I\} = \alpha$ に矛盾する．よって，$f(c) = \alpha$ となる $c \in I$ が存在する．すなわち $f(x)$ は $x = c$ で最大値 α をとる．最小値の存在についても同様に示される．（証明終わり）

ここまで，関数の性質について述べてきたが，高校数学で扱う関数の殆どが連続関数であり，最大値，最小値の存在も直感的な理解が求められた．関数の連続性についても，所謂「$\varepsilon - \delta$ 論法」を扱わず，数列の極限と同様に直感的な定義が行われているのである．

1.5 面積と定積分

本節では，本稿の主旨である積分について述べていく．

積分を定義するために，いくつかの定義を前提に議論を進めていくため，それらを以下に述べる．始めは階段関数の積分について言及する．

定義 5.1

有界閉区間 $[a, b]$ の点列 $\{a_0, a_1, \cdots, a_n\}$ が

$$a = a_0 < a_1 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b$$

を満たすとき，$\{a_0, a_1, \cdots, a_n\}$ を区間 $[a, b]$ の分割といい Δ，Δ' 等と表す．また，各点 a_j は分割 Δ の分割点と呼ぶ．

定義 5.2

区間 $[a, b]$ 上に定義された関数 $\varphi(x)$ が階段関数であるとは，$[a, b]$ の分割 Δ が存在して，Δ による各開部分区間 (a_j, a_{j+1}) 上で，$\varphi(x)$ は定数値 s_j をとることをいう．

定義 5.3

Δ' が Δ の細分であるとは，Δ の分割点が，Δ' の分割点のどれかに一致していることをいう．また，Δ，Δ' が $[a, b]$ の分割であるとき，Δ の分割点と Δ' の分割点の全てを一緒にして，大きさの順に並べて得られる $[a, b]$ の分割を $\Delta \cup \Delta'$ と表し，Δ と Δ' の共通の細分と呼ぶ．

定義 5.4

$\varphi(x)$ が，$[a, b]$ の分割 $\Delta = \{a_0, a_1, \cdots, a_n\}$ に対応する階段関数としたとき，量 $\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} s_j(a_{j+1} - a_j)$ を記号 $\displaystyle\int_a^b \varphi(x)dx$ を用いて表し，これを，$\varphi(x)$ の区間 $[a, b]$ 上の（定）積分と呼ぶ．ここで s_j は区間 (a_j, a_{j+1}) 上の $\varphi(x)$ の値を表す．

定義 5.4 の $\displaystyle\int_a^b \varphi(x)dx$ の値は，分割 Δ の取り方によらず，一定である．

ここで，簡単な階段関数の例として，$\varphi(x) = \lfloor x \rfloor$ を取り上げる．ただし，$\lfloor x \rfloor$ は，x 以下の最大の整数を表す．

$\varphi(x) = \lfloor x \rfloor$ に対して，区間 $[0, n]$ の分割 $\Delta = \{0, 1, 2, \cdots, n\}$ を与えたとすると

$$\begin{aligned}\int_0^n \varphi(x)dx &= \sum_{k=0}^{n-1} k\{(k+1) - k\} \\ &= 0 + 1 + 2 + \cdots + n - 1 \\ &= \frac{n(n-1)}{2}\end{aligned}$$

となる．また，$\displaystyle\int_0^n \varphi(x)dx$ は，図 1.2 の斜線部分の面積を表している．

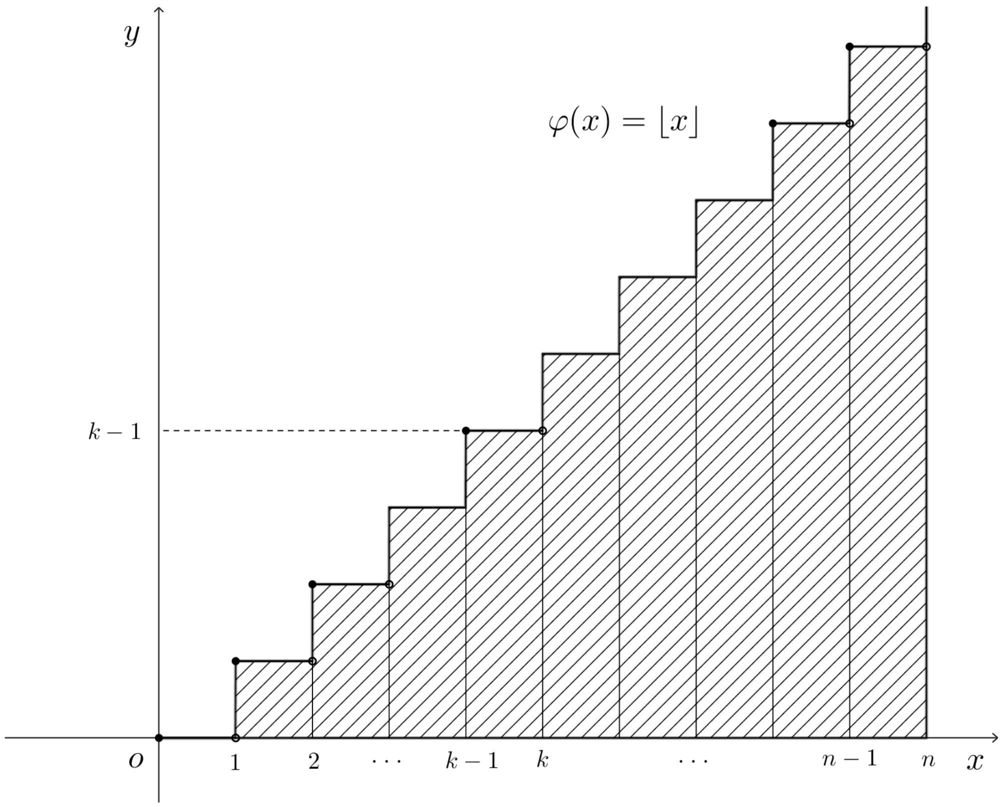


図 1.2　$\displaystyle\int_0^n \varphi(x)dx$ が表す面積

次に，積分 $\displaystyle\int_a^b \varphi(x)dx$ について以下の 2 つの定理が成り立つ．証明は，定義より明らかである．

定理 5.5

$\varphi_1(x)$，$\varphi_2(x)$ を $[a,b]$ 上の階段関数とすれば
(1) 任意の $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ に対して

$$\int_a^b(\alpha\varphi_1(x)+\beta\varphi_2(x))dx=\alpha\int_a^b\varphi_1(x)dx+\beta\int_a^b\varphi_2(x)dx$$

が成り立つ．
(2)$\varphi_1(x)\geq\varphi_2(x)$, $\forall x\in[a,b]$ ならば，$\displaystyle\int_a^b\varphi_1(x)dx\geq\int_a^b\varphi_2(x)dx$ が成り立つ．
(3) 任意の $c\in\mathbb{R}$ に対して，関数 $\psi(x)=\varphi_1(x-c)$ は，区間 $[a+c,b+c]$ 上階段関数で，$\displaystyle\int_{a+c}^{b+c}\psi(x)dx=\int_a^b\varphi_1(x)dx$ が成り立つ．

定理 5.6

$\varphi(x)$ が $[a,b]$ 上の階段関数であるとき，任意の $c\in(a,b)$ に対して，$\varphi(x)$ は $[a,c]$，$[c,b]$ 各々の上で階段関数であり，$\displaystyle\int_a^b\varphi(x)dx=\int_a^c\varphi(x)dx+\int_c^b\varphi(x)dx$ が成り立つ．

次に，階段関数でない一般の関数 $f(x)$ の積分を定義する．$f(x)$ は $[a,b]$ 上で有界な関数とすると，ある $M>0$ に対して，$|f(x)|<M, \forall x\in[a,b]$ が成立する，このとき，$\varphi(x)$ が $[a,b]$ 上の階段関数で，$\varphi(x)\leq f(x)$, $\forall x\in[a,b]$ を満たすとき

$$\int_a^b\varphi(x)dx=\sum_{j=0}^{n-1}s_j(a_{j+1}-a_j)\leq M\sum_{j=0}^{n-1}(a_{j+1}-a_j)=M(b-a)$$

が成り立つ．そこで，$f(x)$ が，$[a,b]$ 上の有界関数であるとき，$\varphi(x)\leq f(x)$, $\forall x\in[a,b]$ を満たすような階段関数を全て考えて，その各々に対して定まる $\displaystyle\int_a^b\varphi(x)dx$ の値の全体のなす集合を A とすると，A は上に有界な $\mathbb{R}$ の部分集合となるから，上限公理によって，$\sup A$ が存在する．この数を $\displaystyle\underline{\int_a^b}f(x)dx$ と表し,，$f(x)$ の $[a,b]$ 上の下積分という．同様に，$\psi(x)\leq f(x)$, $\forall x\in[a,b]$ を満たす階段関数を考えて，その各々に対して定まる $\displaystyle\int_a^b\psi(x)dx$ の値の全体をなす集合を B とすれば，$\inf B$ が存在する．この数を $\displaystyle\overline{\int_a^b}f(x)dx$ と表し，$f(x)$ の $[a,b]$ 上の上積分という．

以上のことを踏まえて，$f(x)$ の積分を以下のように定義する．

定義 5.7

$f(x)$ が区間 $[a,b]$ 上に定義された有界関数であるとき，$\displaystyle\underline{\int_a^b}f(x)dx=\overline{\int_a^b}f(x)dx$ が成立するならば，$f(x)$ は $[a,b]$ 上で積分可能，あるいは可積分であるといい，この時，共通の値を $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ で表して，$f(x)$ の $[a,b]$ 上の（定）積分と呼ぶ．

$f(x)$ は $[a,b]$ 上で可積分であるとは，以下のように言い換えることができる．

定理 5.8

区間 $[a,b]$ 上の有界関数 $f(x)$ が，可積分であるための必要十分条件は，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，階段関数 $\varphi(x)$，$\psi(x)$ が存在して，$\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$, $\forall x \in [a,b]$ のとき

$$\int_a^b \psi(x)dx - \int_a^b \varphi(x)dx < \varepsilon$$

を満たすことである．

証明

集合 $A = \{\int_a^b \varphi(x)dx | \varphi(x) \leq f(x), \forall x \in [a,b]\}$，$B = \{\int_a^b \psi(x)dx | \psi(x) \leq f(x), \forall x \in [a,b]\}$ とする．（必要性）

仮定より，$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$ が成り立つ．ここで，$\underline{\int_a^b} f(x)dx$ は集合 A の上限であり，$\overline{\int_a^b} f(x)dx$ は集合 B の下限である．よって，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある A，B の元が存在して

$$\left| \int_a^b \varphi(x)dx - \underline{\int_a^b} f(x)dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\left| \int_a^b \psi(x)dx - \overline{\int_a^b} f(x)dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

が成り立つ．よって

$$\begin{aligned}\left| \int_a^b \varphi(x)dx - \int_a^b \psi(x)dx \right| &\leq \left| \int_a^b \varphi(x)dx - \underline{\int_a^b} f(x)dx \right| + \left| \int_a^b \psi(x)dx - \overline{\int_a^b} f(x)dx \right| \\ &< \varepsilon\end{aligned}$$

が成り立つ．A，B の任意の元において，$\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$, $\forall x \in [a,b]$ であるから，従って

$$\int_a^b \psi(x)dx - \int_a^b \varphi(x)dx < \varepsilon$$

が成り立つ．

（十分性）

$\varepsilon > 0$ は十分小さくとれるから，A，B の上限，下限を取ると

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$$

とできる．（証明終わり）

ここで，定理 5.8 を満たす関数の例として $f(x) = x^2$, $\forall x \in [0, b]$ を取り上げる．

$\forall \varepsilon > 0$ に対して，$\dfrac{b^3}{n} < \varepsilon$ が成り立つ n を選ぶ．$a_j = \dfrac{jb}{n}$，$0 \leq j \leq n$ とし，分割 $\Delta = \{a_0, a_1, \cdots, a_n\}$ を作る．Δ に対応する二つの階段関数 $\varphi(x)$，$\psi(x)$ を

$$\varphi(x) = \left(\frac{jb}{n}\right)^2, \frac{jb}{n} \leq x < \frac{(j+1)b}{n} \quad (0 \leq j \leq n-1)$$

$$\psi(x) = \left\{\frac{(j+1)b}{n}\right\}^2, \frac{jb}{n} \leq x < \frac{(j+1)b}{n} \quad (0 \leq j \leq n-1)$$

と定義すると

$$\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x),\ \forall x \in [a, b]$$

が成り立ち，$a_{j+1} - a_j = \dfrac{b}{n}$ より

$$\int_0^b \varphi(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{jb}{n}\right)^2 = \frac{b^3}{6}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(2 - \frac{2}{n}\right)$$

$$\int_0^b \psi(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} \left\{\frac{(j+1)b}{n}\right\}^2 = \frac{b^3}{6}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{2}{n}\right)$$

よって

$$\int_a^b \psi(x)dx - \int_a^b \varphi(x)dx = \frac{b^3}{n} < \varepsilon$$

が成立するから，$f(x)$ は $[0, b]$ 上で可積分となる．また

$$\underline{\int_0^b} f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b^3}{6}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(2 - \frac{2}{n}\right) = \frac{b^3}{6}$$

$$\overline{\int_0^b} f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b^3}{6}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{2}{n}\right) = \frac{b^3}{6}$$

より

$$\int_0^b f(x)dx = \frac{b^3}{6}$$

となる．

このように，高等学校数学では，微分の逆演算により簡易に求めていた $f(x) = x^2$ の 0 から b までの定積分は，本来厳密なる定義によって得られるのである．面積を求める様相を視覚的に捉えられるという点では，厳密性は伴わなくとも学習すべき内容であろう．

次に，関数 $f(x)$ に対して，上手く対応する階段関数の取り方について述べる．上手く取れるとは，具体的には，区間 $[a, b]$ の分割 Δ が与えられたとき，Δ による各部分区間上で，$f(x)$ のその区間上の値の上限および下限に一致するような階段関数を取れることである．

$\Delta = \{a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ を $[a,b]$ の分割としたとき，$M_j = \sup\{f(x) | x \in (a_{j,a}j+1)\}$，$m_j = \inf\{f(x) | x \in (a_{j,a}j+1)\}$，$0 \leq j \leq n-1$ と置いて

$$\xi(x) = M_j,\ \forall x \in (a_j, a_{j+1}), \xi(a_j) = f(a_j),\ 0 \leq j \leq n-1$$

$$\eta(x) = m_j,\ \forall x \in (a_j, a_{j+1}), \eta(a_j) = f(a_j),\ 0 \leq j \leq n-1$$

と定義すれば，$\xi(x)$ と $\eta(x)$ は共に $[a,b]$ 上の階段関数で，$\eta(x) \leq f(x) \leq \xi(x)$，$\forall x \in [a,b]$ を満たす．

また

$$\overline{S}_\Delta(f) = \int_a^b \xi(x)dx = \sum_{j=0}^{n-1} M_j(a_{j+1} - a_j)$$

$$\underline{S}_\Delta(f) = \int_a^b \eta(x)dx = \sum_{j=0}^{n-1} m_j(a_{j+1} - a_j)$$

とすれば

$$\overline{S}_\Delta(f) \geq \overline{\int_a^b} f(x)dx$$

$$\underline{S}_\Delta(f) \leq \underline{\int_a^b} f(x)dx$$

を満たす．

定理 5.9

$[a,b]$ 上の有界関数 $f(x)$ が可積分であるための必要十分条件は，$\forall\varepsilon > 0$ に対して，$[a,b]$ 上の分割 $\Delta = \{a_0, a_1, \cdots, a_n\}$ が存在して，$\overline{S}_\Delta(f) - \underline{S}_\Delta(f) < \varepsilon$ が成り立つことである．

証明

（必要性）

$f(x)$ が可積分ならば，定理 5.8 より，$\forall\varepsilon > 0$ に対して，階段関数 $\varphi(x)$，$\psi(x)$ が存在して，$\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$，$\forall x \in [a,b]$ のとき

$$\int_a^b \psi(x)dx - \int_a^b \varphi(x)dx < \varepsilon$$

を満たす．階段関数 $\varphi(x)$，$\psi(x)$ は同じ分割 Δ によって定義されているとしてよい．そこで，分割 Δ から ξ，η を考えると，$\varphi(x)$ は Δ によって (a_j, a_{j+1}) 上で定数値 s_j を取るが，$\varphi(x) \leq f(x)$，$\forall x \in [a,b]$ であるから，$s_j \leq \inf\{f(x) | x \in (a_{j,a}j+1)\} = m_j$ が成り立つ．また，$\varphi(a_j) \leq f(a_j) \leq \eta(a_j)$，$0 \leq j \leq n-1$ であるから，$\varphi(x) \leq \eta(x)$，$\forall x \in [a,b]$ とな

る．同様して，$\psi(x) \geq \xi(x)$，$\forall x \in [a,b]$ もいえるから，定理 5.5(2) より

$$\begin{aligned}\overline{S}_\Delta(f) - \underline{S}_\Delta(f) &= \int_a^b \xi(x)dx - \int_a^b \eta(x)dx \\ &\leq \int_a^b \psi(x)dx - \int_a^b \varphi(x)dx \\ &< \varepsilon\end{aligned}$$

が成り立つ．

（十分性）

仮定より，$\forall\varepsilon > 0$ に対して，$[a,b]$ 上の分割 Δ による階段関数 $\xi(x)$，$\eta(x)$ が存在して

$$\overline{S}_\Delta(f) - \underline{S}_\Delta(f) = \int_a^b \xi(x)dx - \int_a^b \eta(x)dx < \varepsilon$$

が成り立つ．よって，定理 5.8 より，$f(x)$ は可積分である．（証明終わり）

次に，可積分関数の判別のために，以下の二つの定理を与える．

定理 5.10

$f(x)$ が $[a,b]$ 上連続ならば，可積分である

証明

定理 4.17 より，$f(x)$ は $[a,b]$ 上有界である．また，定理 4.15 より，$f(x)$ は $[a,b]$ 上一様連続となるから，$\forall\varepsilon > 0$ に対して，$\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{b-a}$ とすると，$\delta > 0$ が存在して，$x, x' \in [a,b]$ が $|x - x'| < \delta$ を満たすとき，$|f(x) - f(x')| < \varepsilon'$ が成り立つ．ここで，$\dfrac{b-a}{n} < \delta$ を満たすような十分大きい n を一つ固定し

$$a_j = a + \frac{j}{n}(b-a),\ 0 \leq j \leq n$$

と定義して，$[a,b]$ 上の分割 $\delta = \{a_0, a_1, \cdots, a_n\}$ を作る．

$$\begin{aligned}M_j &= \sup\{f(x)|x \in (a_j, a_{j+1})\} \leq \sup\{f(x)|x \in [a_j, a_{j+1}]\} \\ m_j &= \inf\{f(x)|x \in (a_j, a_{j+1})\} \geq \inf\{f(x)|x \in [a_j, a_{j+1}]\}\end{aligned}$$

が各 $j(0 \leq j \leq n-1)$ について成り立つが，定理 4.17 より，$\overline{x}_j$，$\underline{x}_j \in [a_j, a_{j+1}]$ が存在して

$$\begin{aligned}f(\overline{x}_j) &= \max\{f(x)|x \in [a_j, a_{j+1}]\} = M_j \\ f(\underline{x}_j) &= \min\{f(x)|x \in [a_j, a_{j+1}]\} = m_j\end{aligned}$$

となるから，$|\overline{x}_j - \underline{x}_j| \le \dfrac{b-a}{n} < \delta$ より

$$\begin{aligned}\overline{S}_\Delta(f) - \underline{S}_\Delta(f) &= \sum_{j=0}^{n-1}(M_j - m_j)(a_{j+1} - a_j)\\ &\le \sum_{j=0}^{n-1}(f(\overline{x}_j) - f(\underline{x}_j))(a_{j+1} - a_j)\\ &< \varepsilon' \sum_{j=0}^{n-1}(a_{j+1} - a_j)\\ &= \varepsilon'(b-a)\\ &= \varepsilon\end{aligned}$$

よって定理 5.9 により，$f(x)$ は可積分である．（証明終わり）

定理 5.11

$f(x)$ が $[a,b]$ 上単調であれば，可積分である

証明

$f(x)$ が単調増加である場合を考える．$M = \max\{|f(a)|, |f(b)|\}$ と置けば，$|f(x)| \le M$，$\forall x \in [a,b]$ より，$f(x)$ は上に有界である．$\varepsilon > 0$ が与えられたとき，$\dfrac{b-a}{n}(f(b) - f(a)) < \varepsilon$ となるような十分大きい n を一つ固定する．

$$a_j = a + \frac{j}{n}(b-a),\ 0 \le j \le n$$

と置いて $[a,b]$ 上の分割 $\Delta = \{a_0, a_1, \cdots, a_n\}$ を定めると，$f(x)$ は単調増加より

$$\begin{aligned}M_j &= \sup\{f(x) | x \in (a_j, a_{j+1})\} = f(a_{j+1})\\ m_j &= \inf\{f(x) | x \in (a_j, a_{j+1})\} = f(a_j)\end{aligned}$$

が $0 \le j \le n-1$ で成り立つ．従って

$$\begin{aligned}\overline{S}_\Delta(f) - \underline{S}_\Delta(f) &= \sum_{j=0}^{n-1}(M_j - m_j)(a_{j+1} - a_j)\\ &= \sum_{j=0}^{n-1}(f(a_{j+1}) - f(a_j))\frac{b-a}{n}\\ &= (f(b) - f(a))\frac{b-a}{n}\\ &< \varepsilon\end{aligned}$$

となり，定理 5.9 により，$f(x)$ は可積分である．$f(x)$ は単調減少のときは，$f(x)$ を $-f(x)$ に置き換えることにより示される．（証明終わり）

上記の二つの定理では，区間を n 等分分割を考えたが，一般の分割が与えられた場合についても考える．一般の分割 $\Delta = \{a_0, a_1, \cdots, a_n\}$ が与えられたとき，$f(x)$ が $[a,b]$ 上で連続または単調ならば

$$f(\overline{x}_j) = \max\{f(x)|x \in [a_j, a_{j+1}]\} = \sup\{f(x)|x \in [a_j, a_{j+1}]\}$$
$$f(\underline{x}_j) = \min\{f(x)|x \in [a_j, a_{j+1}]\} = \inf\{f(x)|x \in [a_j, a_{j+1}]\}$$

となる $\overline{x}_j$，$\underline{x}_j \in [a_j, a_{j+1}]$ が存在して，$\forall t \in [a_j, a_{j+1}]$ に対して

$$\sum_{j=0}^{n-1} f(\overline{x}_j)(a_{j+1} - a_j) \leq \sum_{j=0}^{n-1} f(t_j)(a_{j+1} - a_j) \leq \sum_{j=0}^{n-1} f(\underline{x}_j)(a_{j+1} - a_j)$$

を満たす．従って，もし

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n-1} f(\overline{x}_j)(a_{j+1} - a_j) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n-1} f(\underline{x}_j)(a_{j+1} - a_j) = \int_a^b f(x)dx$$

が成立するならば，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n-1} f(t_j)(a_{j+1} - a_j) = \int_a^b f(x)dx$$

となる．$\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} f(t_j)(a_{j+1} - a_j)$ を一般に Riemann 和と呼ぶ．

定積分の性質として，以下の事柄が成り立つ．定理 5.12 は，定理 5.5 に対応しており，定理 5.8 を用いて示すことができる．

定理 5.12

関数 $f(x)$，$g(x)$ が $[a,b]$ 上で共に可積分であれば，以下のことが成り立つ．

(1) 任意の $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ に対して，$\alpha f(x) + \beta g(x)$ も可積分であり，

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$$

が成り立つ．

(2)$f(x) \leq g(x)$，$\forall x \in [a,b]$ ならば，$\displaystyle\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$ が成り立つ．

(3)$\forall c \in \mathbb{R}$ に対して，$g(x) = f(x-c)$ は，区間 $[a+c, b+c]$ で可積分であり，

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{a+c}^{b+c} g(x)dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c)dx$$

が成り立つ．

定理 5.13

> $f(x)$ が $[a,b]$ 上可積分ならば，$|f(x)|$ も可積分で $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$ が成り立つ．

証明

$f(x)$ が可積分であることから，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$[a,b]$ の分割 $\Delta = \{a_0, a_1, \cdots, a_n\}$ が存在し

$$M_j = \sup\{f(x)|x \in (a_{j,a}\,j+1)\}$$
$$m_j = \inf\{f(x)|x \in (a_{j,a}\,j+1)\},\ 0 \leq j \leq n-1$$

とおいて

$$\overline{S}_\Delta(f) = \sum_{j=0}^{n-1} M_j(a_{j+1} - a_j)$$
$$\underline{S}_\Delta(f) = \sum_{j=0}^{n-1} m_j(a_{j+1} - a_j)$$

としたとき，定理 5.9 より $\overline{S}_\Delta(f) - \underline{S}_\Delta(f) < \varepsilon$ が成り立つ．ここで，同じ分割 Δ に対して

$$M_j^* = \sup\{|f(x)||x \in (a_{j,a}\,j+1)\}$$
$$m_j^* = \inf\{|f(x)||x \in (a_{j,a}\,j+1)\},\ 0 \leq j \leq n-1$$

とおいて

$$\overline{S}_\Delta(|f|) = \sum_{j=0}^{n-1} M_j^*(a_{j+1} - a_j)$$
$$\underline{S}_\Delta(|f|) = \sum_{j=0}^{n-1} m_j^*(a_{j+1} - a_j)$$

とおくと，任意の $\varepsilon' > 0$ に対して，x_1，$x_2 \in (a_j, a_{j+1})$ が存在して，上限，下限の定義から $|f(x_1)| \geq M_j^* - \frac{\varepsilon'}{2}$，$|f(x_2)| \leq m_j^* + \frac{\varepsilon'}{2}$ をみたし

$$M_j^* - m_j^* - \varepsilon' \leq |f(x_1)| - |f(x_2)| \leq |f(x_1) - f(x_2)|$$

ここで，$M_j \geq f(x_1)$，$m_j \leq f(x_2)$ より $f(x_1) - f(x_2) \leq M_j - m_j$，$M_j \geq m_j$ であるから

$$M_j^* - m_j^* \leq |M_j - m_j| = M_j - m_j$$

すなわち

$$M_j^* - m_j^* \leq M_j - m_j$$

が成り立つ．従って

$$\begin{aligned}\overline{S}_{\Delta}(|f|)-\underline{S}_{\Delta}(|f|)&=\sum_{j=0}^{n-1}(M_j^*-m_j^*)(a_{j+1}-a_j)\\&\leq\sum_{j=0}^{n-1}(M_j-m_j)(a_{j+1}-a_j)\\&=\overline{S}_{\Delta}(f)-\underline{S}_{\Delta}(f)\\&<\varepsilon\end{aligned}$$

よって，$|f(x)|$ は可積分である．ここで，$-|f(x)|\leq f(x)\leq|f(x)|$，$\forall x\in[a,b]$ より

$$-\int_a^b|f(x)|dx\leq\int_a^b f(x)dx\leq\int_a^b|f(x)|dx$$

すなわち

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right|\leq\int_a^b|f(x)|dx$$

が成り立つ．（証明終わり）

定数 M の区間 $[a,b]$ 上の積分が $M(b-a)$ になることを用いれば定理 5.13 系も示せる．

定理 5.13 系

$[a,b]$ 上可積分関数 $f(x)$ に対して，$m\leq f(x)\leq M$，$\forall x\in[a,b]$ が成り立てば

$$m(b-a)\leq\int_a^b f(x)dx\leq M(b-a)$$

が成り立つ．特に $|f(x)|\leq M$，$\forall x\in[a,b]$ ならば

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right|\leq M(b-a)$$

が成り立つ．

定理 5.13 系を用いれば，以下のことが示される．

定理 5.14（積分の平均値の定理）

$f(x)$ が $[a,b]$ 上で連続であれば，$c\in[a,b]$ が存在して

$$f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

が成り立つ．

証明

$f(x)$ は $[a,b]$ 上で連続より，定理 4.17 から x_1，$x_2 \in [a,b]$ が存在して

$$f(x_1) = M = \max\{f(x) | x \in [a,b]\}$$
$$f(x_2) = m = \min\{f(x) | x \in [a,b]\}$$

となる．$m \leq f(x) \leq M$，$\forall x \in [a,b]$ であるから，定理 5.13 系より

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

となり，従って

$$f(x_2) = m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq M = f(x_1)$$

が成り立つ．定理 4.11（中間値の定理）により，$f(x_1)$ と $f(x_2)$ の間にある任意の数 γ に対して，$c \in [x_1, x_2]$ が存在して，$f(c) = \gamma$ となる．特に，$\gamma = \int_a^b f(x)dx$ に対して $f(c) = \gamma$ となる $c \in [x_1, x_2]$ が存在する．従って，$c \in [a,b]$ が存在して

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

が成り立つ．（証明終わり）

以下に定理 5.15 を述べるが，区間 $[a,b]$ 上の分割 $\{a_0, a_1, \cdots, a_n\}$ に対して

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n-1} f(t_j)(a_{j+1} - a_j) \\ &= -\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n-1} f(t_j)(a_j - a_{j+1}) \\ &= -\int_b^a f(x)dx\end{aligned}$$

と定義して，議論を進めることにする．

定理 5.15

$f(x)$ が有界関数で

$$\int_a^c f(x)dx,\ \int_c^b f(x)dx,\ \int_a^b f(x)dx$$

の三つの積分のうち，二つが存在すれば，三つ目の積分も存在し

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx \cdots (*)$$

が成り立つ．

証明

$a < c < b$ と仮定しても，一般性を失わない．

[1] $\int_a^c f(x)dx$，$\int_c^b f(x)dx$ が存在するとき，$\int_a^b f(x)dx$ が存在し，$(*)$ が成り立つことを示す．

$f(x)$ が，$[a,c]$ 上および $[c,b]$ 上で可積分であるとすると，$\varepsilon > 0$ が与えられたとき，$[a,c]$ 上の階段関数 $\varphi_1(x)$，$\psi_1(x)$ と，$[c,b]$ 上の階段関数 $\varphi_2(x)$，$\psi_2(x)$ が存在して

$$\varphi_1(x) \leq f(x) \leq \psi_1(x),\ \forall x \in [a,c],\ \int_a^c \psi_1(x)dx - \int_a^c \varphi_1(x)dx < \frac{\varepsilon}{2} \cdots (1)$$
$$\varphi_2(x) \leq f(x) \leq \psi_2(x),\ \forall x \in [c,b],\ \int_c^b \psi_2(x)dx - \int_c^b \varphi_2(x)dx < \frac{\varepsilon}{2} \cdots (2)$$

が成り立つから，$[a,b]$ 上の階段関数 $\varphi(x)$，$\psi(x)$ を

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi_1(x) & x \in [a,c] \\ \varphi_2(x) & x \in (c,b] \end{cases}$$
$$\psi(x) = \begin{cases} \psi_1(x) & x \in [a,c] \\ \psi_2(x) & x \in (c,b] \end{cases}$$

と定義すれば，$\varphi(x)$，$\psi(x)$ は，$[a,b]$ 上の階段関数で

$$\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x),\ \forall x \in [a,b] \cdots (3)$$

であり，定理 5.6 から

$$\int_a^b \varphi(x)dx = \int_a^c \varphi_1(x)dx + \int_c^b \varphi_2(x)dx$$
$$\int_a^b \psi(x)dx = \int_a^c \psi_1(x)dx + \int_c^b \psi_2(x)dx$$

が成り立つから，(1)，(2) より

$$\begin{aligned}\int_a^b \psi(x)dx - \int_a^b \varphi(x)dx &= \left(\int_a^c \psi_1(x)dx - \int_a^c \varphi_1(x)dx\right) + \left(\int_c^b \psi_2(x)dx - \int_c^b \varphi_2(x)dx\right) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon \cdots (4)\end{aligned}$$

が成り立つ．定理 5.8 から，(3)，(4) より，$f(x)$ は $[a,b]$ 上で可積分であることがわかる．よって，$\int_a^b f(x)dx$ が存在する．

また

$$\int_a^c \varphi_1(x)dx \leq \int_a^c f(x)dx \leq \int_a^c \psi_1(x)dx$$
$$\int_a^c \varphi_2(x)dx \leq \int_a^c f(x)dx \leq \int_a^c \psi_2(x)dx$$

であるから

$$\int_a^b \varphi(x)dx \leq \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \leq \int_a^b \psi(x)dx \cdots (5)$$

が成り立つ．また，(3) より

$$\int_a^b \varphi(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b \psi(x)dx \cdots (6)$$

が成り立つから，(4)，(5)，(6) より

$$\left| \left(\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \right) - \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b \psi(x)dx - \int_a^b \varphi(x)dx < \varepsilon$$

である．ε は任意の正の数であるから

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

が成り立つ．

[2] $\int_a^c f(x)dx$，$\int_a^b f(x)dx$ が存在するとき，$\int_c^b f(x)dx$ が存在し，$(*)$ が成り立つことを示す．

$\int_a^b f(x)dx$ が存在することから

$$\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x),\ \forall x \in [a,b],\ \int_a^b \varphi(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b \psi(x)dx \cdots (7)$$

が成り立つ．$\varphi(x)$，$\psi(x)$ の $[c,b]$ 上のものを，$\varphi_1(x)$，$\psi_1(x)dx$ とおく．$\varphi_1(x)$，$\psi_1(x)dx$ は階段関数で，明らかに

$$\varphi_1(x) \leq f(x) \leq \psi_2(x),\ \forall x \in [c,b] \cdots (8)$$

また，定理 5.6 から

$$\int_c^b \varphi_1(x)dx = \int_a^b \varphi(x)dx - \int_a^c \varphi(x)dx \cdots (9)$$
$$\int_c^b \psi_1(x)dx = \int_a^b \psi(x)dx - \int_a^c \psi(x)dx \cdots (10)$$

であり，また

$$\int_a^c \varphi(x)dx - \int_a^c \psi(x) \cdots (11)$$

が成り立つから，(7) (11) より，任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$\begin{aligned}\int_c^b \psi_1(x)dx - \int_c^b \varphi_1(x)dx &= \left(\int_a^b \psi(x)dx - \int_a^c \psi(x)dx\right) - \left(\int_a^b \varphi(x)dx - \int_a^c \varphi(x)dx\right) \\ &\leq \int_a^b \psi(x)dx - \int_a^b \varphi(x)dx \\ &< \varepsilon \cdots (12)\end{aligned}$$

となる．定理 5.8 から，(8)，(12) より $f(x)$ が $[c, b]$ 上で可積分であることがわかる．よって，$\displaystyle\int_c^b f(x)dx$ が存在が存在する．

[1] と同様にすれば，$(*)$ も示せる．（証明終わり）

上記の証明から，以下のことも明らかに成り立つ．

定理 5.15 系

$f(x)$ が $[a, b]$ 上で可積分ならば，$[a, b]$ 上の任意の閉部分区間 $[a', b']$ 上でも可積分である．

ここまで，定積分の定義及び性質について述べた．厳密な理解は高校生には難しいが，高等学校数学で扱われている選択科目「数学 III」の区分求積法を，極限の問題として，定積分の導入に扱う等の方法により，本来の解析学に沿ったカリキュラムを作成できるだろう．次節では，微分を定義し，微分と積分が逆演算であることについて述べる．

1.6 導関数と微分積分学の基本定理

まず，微分係数と導関数の定義について以下に述べる．

定義 6.1

関数 $f(x)$ に対して，極限 $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ が存在すれば，$f(x)$ は $x = x_0$ で微分可能であるといい，その極限の値を $f(x)$ の $x = x_0$ における微分係数と呼ぶ．$f(x)$ がある集合 $A \subset U$ の全ての点で微分可能であれば，$f(x)$ は A 上で微分可能な関数であるという．

定義 6.2

ある閉区間 (a, b) 上で，$f(x)$ が微分可能であるとき，(a, b) の各点に x に，その点における $f(x)$ の微分係数に対応させせると，新しい関数が定義される．この関数を導関数と呼び，$f'(x)$，$\dfrac{df}{dx}$，あるいは Df の記号で表す．$f(x)$ から $f'(x)$ を求める操作を $f(x)$ を微分するという．

定義 6.3

関数 $f(x)$ が点 $x = x_0$ で微分可能であるとき，直線 $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$，すなわち，点 $(x_0, f(x_0))$ を通り，傾き $f'(x_0)$ をもつ直線を，グラフ $y = f(x)$ への $(x_0, f(x_0)$ における接線とよぶ.

上記三つの定義は「数学 II」を学習した高校生なら馴染み深いものであろう．高等学校数学では，微分は積分に比べて，解析学に忠実であることがわかる．以下に述べる定理も，「数学 III」で扱われるものである.

定理 6.4

$f(x)$ が $x = x_0$ で微分可能であれば，x_0 で連続である.

証明

定理 4.6(2) より

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0}(f(x) - f(x_0)) &= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0) \\
&= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\lim_{x\to x_0}(x-x_0) \\
&= f'(x_0)\cdot 0 \\
&= 0 \\
\therefore \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)
\end{aligned}$$

よって，$f(x)$ は x_0 で連続である.（証明終わり）

定理 6.5

$f(x)$，$g(x)$ が共に点 x_0 で微分可能であるとき，以下が成り立つ.

(1)$f(x) \pm g(x)$ も x_0 で微分可能で，$(f(x_0) \pm g(x_0))' = f'(x_0) \pm g'(x_0)$（複合同順）

(2)$f(x)g(x)$ も x_0 で微分可能で，$(f(x_0)g(x_0))' = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$

(3)$g(x_0) \neq 0$ であれば，$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ も x_0 で微分可能で，

$$\left(\frac{f(x_0)}{g(x_0)}\right)' = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{\{g(x_0)\}^2}$$

証明

(1)

$$\begin{aligned}\frac{(f(x)\pm g(x))-(f(x_0)\pm g(x_0))}{x-x_0} &= \frac{(f(x)-f(x_0))\pm(g(x)-g(x_0))}{x-x_0}\\ &= \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\pm\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\\ &\to f'(x_0)\pm g'(x_0) \qquad (x\to x_0)\end{aligned}$$

よって，$(f(x_0)\pm g(x_0))' = f'(x_0)\pm g'(x_0)$（複合同順）

(2)

$$\begin{aligned}\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} &= \frac{f(x)g(x)-f(x)g(x_0)+f(x)g(x_0)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}\\ &= \frac{f(x)(g(x)-g(x_0))+g(x_0)(f(x)-f(x_0))}{x-x_0}\\ &= f(x)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}+g(x_0)\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\\ &\to f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0) \qquad (x\to x_0)\end{aligned}$$

よって，$(f(x_0)g(x_0))' = f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$

(3)

$\dfrac{1}{g(x)}$ が，x_0 で微分可能で，$\left\{\dfrac{1}{g(x_0)}\right\}' = -\dfrac{g'(x_0)}{\{g(x_0)\}^2}$ を示せば，(2) より，(3) も示せる．

$$\begin{aligned}\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{g(x_0)}}{x=x_0} &= \frac{1}{g(x)g(x_0)}\frac{g(x_0)-g(x)}{x-x_0}\\ &= -\frac{1}{g(x)g(x_0)}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\\ &\to -\frac{g'(x_0)}{\{g(x_0)\}^2} \qquad (x\to x_0)\end{aligned}$$

よって，$\left\{\dfrac{1}{g(x_0)}\right\}' = -\dfrac{g'(x_0)}{\{g(x_0)\}^2}$ が成り立ち，(2) を用いれば，

$$\left(\frac{f(x_0)}{g(x_0)}\right)' = \frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{\{g(x_0)\}^2}$$

も示される．（証明終わり）

定理 6.6

関数 $f(x)$ が x_0 で微分可能，関数 $g(y)$ が $y_0 = f(x_0)$ で微分可能であれば，合成関数 $F(x) = (g\circ f)(x)$ は x_0 で微分可能で，$F'(x_0) = (g'\circ f)(x_0)f'(x_0)$ が成り立つ．

証明

$f(x)$，$g(x)$ がそれぞれ $x=x_0$，$y=y_0$ で微分可能であるから

$$\begin{aligned} f(x)-f(x_0) &= f'(x_0)(x-x_0)+\varepsilon(x-x_0)\cdots\text{(i)} \\ g(y)-g(y_0) &= g'(y_0)(y-y_0)+\varepsilon'(y-y_0)\cdots\text{(ii)} \end{aligned}$$

と表すことができる．このとき

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)\to 0 \quad (x\to x_0) \\ \varepsilon' &= \frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0}-g'(y_0)\to 0 \quad (y\to y_0) \end{aligned}$$

となる．ここで，$y=f(x)$，$y_0=f(x_0)$ と置くと，(ii) より

$$g(f(x))-g(f(x_0))=g'(f(x_0))(f(x)-f(x_0))+\varepsilon'(f(x)-f(x_0))$$

両辺 $x-x_0$ で割ると，(i) より

$$\begin{aligned} \frac{(g\circ f)(x)-(g\circ f)(x_0)}{x-x_0} &= (g'\circ f)(x_0)\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\varepsilon'\frac{(f(x)-f(x_0))}{x-x_0} \\ &= (g'\circ f)(x_0)\{f'(x_0)+\varepsilon\}+\varepsilon'\{f'(x_0)+\varepsilon\} \end{aligned}$$

ここで，$x\to x_0$ のとき，$\varepsilon\to 0$ であり，$f(x)$ は x_0 で連続であるから

$$y=f(x)\to y_0=f(x_0) \quad (x\to x_0)$$

従って，$\varepsilon'\to 0(x\to x_0)$ となるから

$$\lim_{x\to x_0}\frac{(g\circ f)(x)-(g\circ f)(x_0)}{x-x_0}=(g'\circ f)(x_0)f'(x_0)$$

よって，$F'(x_0)=(g'\circ f)(x_0)f'(x_0)$ が成り立つ．（証明終わり）

定理 6.7

$f(x)$ が区間 (a,b) 上で狭義に単調な関数であるとし，$g(x)=f^{-1}(x)$ を $f(x)$ の逆関数とするとき，$f(x)$ が x_0 で微分可能で，$f'(x_0)\neq 0$ であるならば，$g(y)$ は $y_0=f(x_0)$ で微分可能で，$g'(f(x_0))=\dfrac{1}{f'(x_0)}$ が成り立つ．

証明

$$\begin{aligned} \frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0} &= \frac{g(f(x))-g(f(x_o))}{f(x)-f(x_0)} \\ &= \frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)} \\ &= \frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}} \end{aligned}$$

が成り立ち，$g(y)$ は $y_0=f(x_0)$ で連続より，$g(y)\to g(y_0)=g(f(x_0))=x_0(y\to y_0)$，つまり $y\to y_0$ のとき $x\to x_0$ であるから

$$\begin{aligned}\lim_{y\to y_0}\frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0}&=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}\\&=\frac{1}{f'(x_0)}\end{aligned}$$

が成り立つ．よって $g'(f(x_0))=\dfrac{1}{f'(x_0)}$ が成り立つ．（証明終わり）

次に，平均値の定理について述べる．平均値の定理は高等学校数学の「数学 III」で扱われるが，その導出過程に重きを置かず，それを利用した不等式の証明を行うなど大学入試問題を解くための道具として扱われる印象が強い．

また，平均値の定理は，「開区間 (a,b) で f’ $(x)>0$ (<0，$=$) ならば、閉区間 $[a,b]$ で増加（減少，定数）する」という高等学校数学においても極めて重要な定理の証明で用いられる．しかし，高等学校数学の「数学 II」では，平均値の定理を扱わないので，上記の事柄は直感的に与えられている．よって，「数学 III」においても，平均値の定理を用いることの必要性や厳密性が認識されにくい事実がある．

平均値の定理を証明するために，以下の定理について述べておく．

定理 6.8（Rolle の定理）

$f(x)$ が開区間 (a,b) 上微分可能でかつ，閉区間 $[a,b]$ 上で連続であるとき，$f(a)=f(b)$ が満たされるならば，(a,b) 上の点 c が存在して，$f'(c)$ が成り立つ．

証明

$f(x)$ は $[a,b]$ 上で連続より，定理 4.17 から点 c，c' $\in[a,b]$ が存在して

$$\begin{aligned}f(c)&=\max\{f(x)|x\in[a,b]\}\\f(c')&=\min\{f(x)|x\in[a,b]\}\end{aligned}$$

を満たす．

[1]$f(c)=f(c')$ のとき

$f(x)$ は $[a,b]$ 上で定数値をとるから，$f'(x)=0$，$\forall x\in(a,b)$

[2]$f(c)>f(a)=f(b)$ のとき

$f(c)$ は $f(x)$ の $[a,b]$ 上の最大値であり，$c\neq a,b$ より，$c\in(a,b)$ である．そこで，$f(c')>0$ と仮定する．$f(x)$ は $c\in(a,b)$ で微分可能であるから，極限 $\displaystyle\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ が

存在し，その値は $f'(c)>0$ である．このとき，$\varepsilon=\dfrac{1}{2}f'(c)>0$ に対して，$\delta>0$ が存在して，$0<|x-c|<\delta$ ならば

$$\left|\frac{f(x)-f(c)}{x-c}-f'(c)\right|<\frac{1}{2}f'(c)$$

すなわち

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}f'(c)<&\frac{f(x)-f(c)}{x-c}-f'(c)<\frac{1}{2}f'(c)\\
0<\frac{1}{2}f'(c)<&\frac{f(x)-f(c)}{x-c}<\frac{3}{2}f'(c)\\
\therefore\quad &\frac{f(x)-f(c)}{x-c}>0
\end{aligned}$$

ここで，$c<x<c+\delta$ となる $x\in(a,b)$ を取ると，$x-c>0$ より

$$f(x)-f(c)>0$$

つまり

$$f(x)>f(c),\ x\in(c,c+\delta)\supset(a,b)$$

となり，$f(c)$ が $f(x)$ の $[a,b]$ 上の最大値となることに矛盾する．

一方，$f'(c)<0$ と仮定すると，$\varepsilon'=\dfrac{1}{2}|f'(c)|>0$ に対して，$\delta'>0$ が存在して，$0<|x-c|<\delta'$ ならば

$$\left|\frac{f(x)-f(c)}{x-c}-f'(c)\right|<\frac{1}{2}|f'(c)|$$

すなわち

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}|f'(c)|<&\frac{f(x)-f(c)}{x-c}-f'(c)<\frac{1}{2}|f'(c)|\\
\frac{3}{2}f'(c)<&\frac{f(x)-f(c)}{x-c}<\frac{1}{2}f'(c)<0\\
\therefore\quad &\frac{f(x)-f(c)}{x-c}<0
\end{aligned}$$

ここで，$c-\delta'<x<c$ となる $x\in(a,b)$ を取ると，$x-c<0$ より

$$f(x)-f(c)>0$$

つまり

$$f(x)>f(c),\ x\in(c-\delta',c)\supset(a,b)$$

となり，$f(c)$ が $f(x)$ の $[a,b]$ 上の最大値となることに矛盾する．
以上より，$f'(c)=0$ となる．（証明終わり）

定理 6.9（平均値の定理）

$f(x)$ が区間 (a,b) 上微分可能で，閉区間 $[a,b]$ で連続であるとすると，(a,b) 上の点 c が存在して，$f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ が成り立つ．[*3]

証明

$$\varphi(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

とおくと，$\varphi(x)$ は (a,b) 上微分可能で，$[a,b]$ 上連続かつ．$\varphi(a)=\varphi(b)=0$ を満たす．従って，Rolle の定理より，$c\in(a,b)$ が存在して，$\varphi'(c)=0$ となるが

$$\varphi'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

より

$$\varphi'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

よって

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

が得られる．（証明終わり）

平均値の定理を用いて，次のこともいえる．

定理 6.9 系

関数 $f(x)$ がある区間 (a,b) 上で微分可能で，しかも $f'(x)=0$，$\forall x\in(a,b)$ が成立すれば，$f(x)$ はこの区間上で定数値である．

証明

$x_0\in(a,b)$ を固定する．平均値の定理を $[x_0,x]$（または $[x,x_0]$）に関して適用すれば，ある θ（$0<\theta<1$）が存在して

$$f(x)-f(x_0)=f'(x_0+\theta(x-x_0))(x-x_0)$$

が成り立つ．$x_0+\theta(x-x_0)\in(x_0,x)\subset(a,b)$ であるから，仮定より $f'(x_0+\theta(x-x_0))=0$ である．従って $f(x)=f(x_0)$，$\forall x\in(a,b)$ となり，$f(x)$ は定数値となる．（証明終わり）

ここからは，原始関数に関する事柄，微分積分学の基本定理について述べる．ここで，高等学校数学では当たり前のように扱われていた，「微分と積分が逆演算であること」が明らかにされる．

[*3] 「ある $\theta(0<\theta<1)$ が存在して，$f(b)-f(a)=f'(a+\theta(b-a))(b-a)$ が成り立つ」と述べられることもある．

定義 6.10

関数 $f(x)$ に対して，$F'(x) = f(x)$ を定義域のすべての点で満たすような関数 $F(x)$ が存在すれば，$F(x)$ は $f(x)$ の原始関数であるという．

$f(x)$ が区間 $[a, b]$ 上で可積分な関数であるとすると，定理 5.15 系から，$f(x)$ は任意の $x \in [a, b]$ に対して，区間 $[a, x]$ 上で可積分である．そこで，$A(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ と置くと，$A(x)$ は x の関数である．この関数について，次の定理が成り立つ．

定理 6.11

$f(x)$ が $[a, b]$ 上の可積分関数であるとき，$[a, b]$ 上に定義される関数 $A(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ は $f(x)$ の任意の連続点 x_0 で微分可能であり，$A'(x_0) = f(x_0)$ を満たす．

証明

$$
\begin{aligned}
\frac{A(x) - A(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) &= \frac{1}{x - x_0}\left(\int_a^x f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt\right) - f(x_0) \\
&= \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x f(t)dt - \frac{1}{x - x_0}(x - x_0)f(x_0) \\
&= \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x f(t)dt - \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x f(x_0)dt \\
&= \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x \{f(t) - f(x_0)\}dt
\end{aligned}
$$

であるから，$f(x)$ が x_0 で連続ならば

$$
\lim_{x \to x_0} \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x \{f(t) - f(x_0)\}dt = 0
$$

を示せばよい．

$f(t)$ が x_0 で連続より，$\forall \varepsilon > 0$ に対して，$\delta > 0$ が存在して，$|t - x_0| < \delta$ のとき

$$
|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon
$$

が成り立つ．ここで，$x \in [a, b]$ が $|x - x_0| < \delta$ を満たせば，x_0 と x の間のいかなる t に対しても，$|t - x_0| \leq |x - x_0| < \delta$ のとき

$$
|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon
$$

が成り立つから，定理 5.12，定理 5.13 より

$$\left|\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x}\{f(t)-f(x_0)\}dt\right| \leq \begin{cases} \dfrac{1}{|x-x_0|}\displaystyle\int_{x_0}^{x}|f(t)-f(x_0)|dt & (x \geq x_0) \\ \dfrac{1}{|x-x_0|}\displaystyle\int_{x}^{x_0}|f(t)-f(x_0)|dt & (x < x_0) \end{cases}$$
$$< \varepsilon\frac{|x-x_0|}{|x-x_0|}$$
$$= \varepsilon$$

が成り立つ．よって

$$\lim_{x\to x_0}\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x}\{f(t)-f(x_0)\}dt = 0$$

が示される．（証明終わり）

定理 6.11 から，$f(x)$ が区間 $[a,b]$ 上で連続であれば，$A(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ が $f(x)$ の原始関数であることがわかる．$f(x)$ の任意の原始関数は，$A(x)+C$（C は定数）の形をしており，そのような原始関数を $\displaystyle\int f(x)dx$ と表し，これを $f(x)$ の不定積分という．

定理 6.12（微分積分学の基本定理）

$f(x)$ が $[a,b]$ 上で連続であるとし，$F(x)$ を $f(x)$ の任意の原始関数の一つとすると，$f(x)$ の $[a,b]$ 上の定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ は

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$$

で与えられる．

証明

$A(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ とする．このとき，$F(x) = A(x)+C$ と表せるので

$$\int_a^b f(t)dt = A(b)-A(a)$$
$$= (A(b)+C)-(A(a)+C)$$
$$= F(b)-F(a)$$

が成り立つ．（証明終わり）

以上をもって，微分積分学の基本定理の導出が完了し，Riemann 和の極限としてでなく，微分の逆演算を用いた方法により，定積分を求めることが可能となった．これにより，三角関数や指数・対数関数などの初等関数の定積分を求めることにおいても，困難な Riemann 和の極限を用いる必要がなくなったのである．

図 1.3 は，本章において定義，定理を用いた微分積分学の基本定理の導出をダイヤグラムとして纏めたものである．

本章は高木貞治著『定本　解析概論』[1]，伊藤雄二著『新数学講座　微分積分学』[2] を参考に，微分積分学の基本定理の導出過程を纏めた．

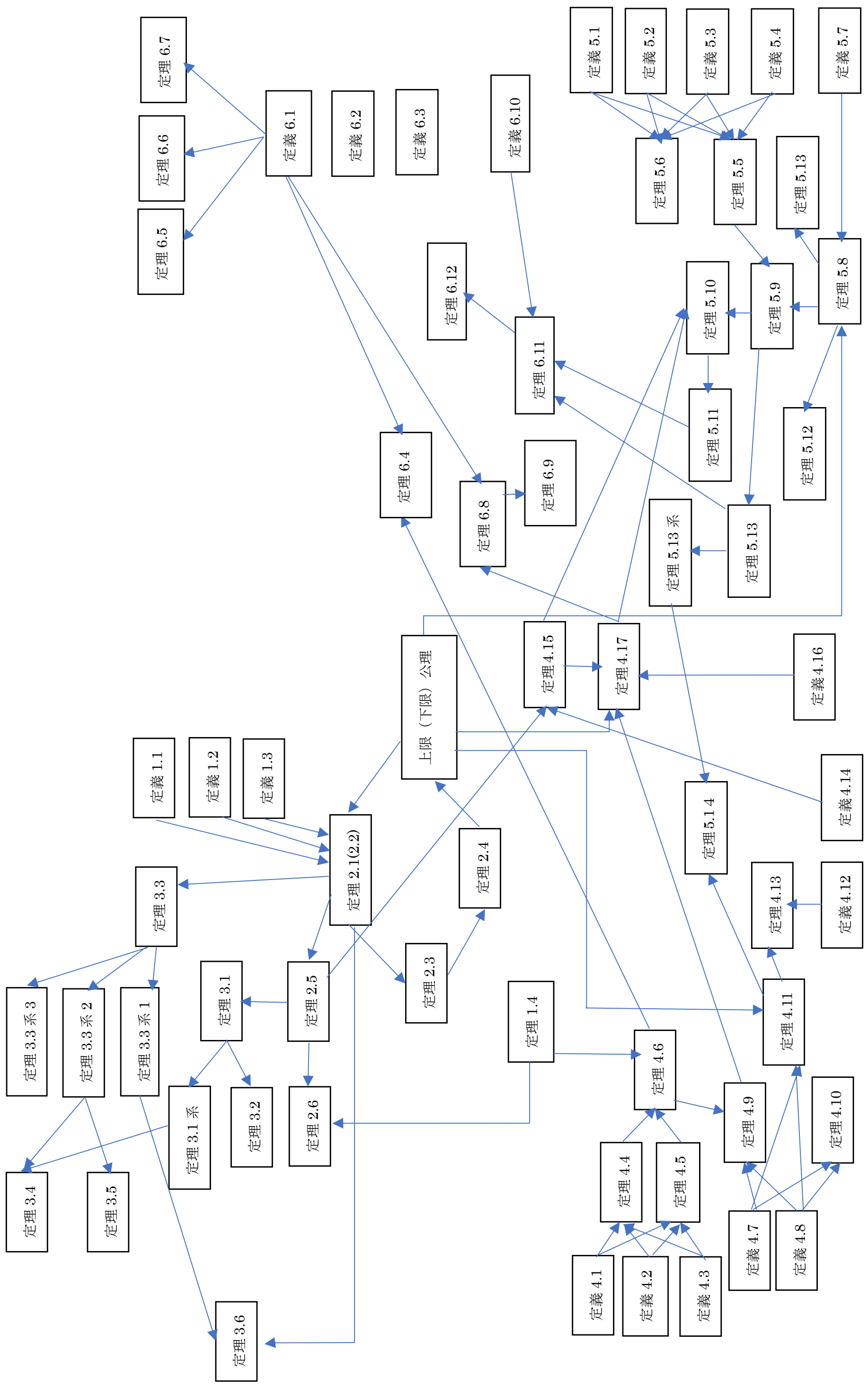


図 1.3　基本定理導出のダイヤグラム

参考文献

[1] 高木貞治 (2010)『定本　解析概論』岩波書店.

[2] 伊藤雄二 (1984)『新数学講座　微分積分学』朝倉書店.

第 2 章

『数学 中学校用 第一類』の微積分

日本の中等数学教育における微積分教育は，第二次世界大戦中の昭和 17 年 3 月に告示された「中学校教授要目」以来 60 年以上の歴史を持つ．その中でも筆者は『数学 中学校用 第一類』という教科書に着目した．『数学 中学校用 第一類』は，昭和 17 年の「中学教授要目」に従い，中等学校教科書株式会社により，昭和 19 年 7 月に発行された，数学教科書である．この教科書において，我が国の中等普通教育において，微積分の教材化が初めてなされている．「中学校教授要目」において，数学の教授内容は，数量を中心とした「第一類」と，空間を中心とした「第二類」に分けられていたため，これに対応し，教科書は『数学 中学校用 第一類』と『数学 中学校用 第二類』が，各学年用に分冊発行されたのであった．文部省検定教科書は，これら『数学 中学校用 第一類』と『数学 中学校用 第二類』のみであるため，これらは一種検定教科書と呼ばれている．

元来，中学校は「5 修」，すなわち 5 年制であったが，戦時の時局の切迫により，昭和 17 年度入学生は，希望により「4 修」または「5 修」，すなわち 4 年制または 5 年制を選択することが可能であった．そのため，微積分の内容を 5 年生もしくは 4 年生で履修させる必要があった．従って，全く同一の微積分に関する内容が，『数学 中学校用 4 第一類』，『数学 中学校用 5 第一類』の両者に掲載されている．しかし，戦後，現代化以降の教科書の微積分と比べて異質な内容となっている．

『数学 中学校用 第一類』について，田中（2008）[1] は以下のように述べている．

> 昭和 17 年改訂の教授要目では，関数概念が重視されるだけでなく関係観念が重視され，『数学　第一類』の構成は，関数に関わる教材内容が中心であるとともに，事象から発見的に導こうとする展開がみられるのである．そして，この教科書の構成は，今日の教科書と比較してみても特徴的な構成をもっているのである．このため，『数学第一類・第二類』はよりよい関数の学習指導を志向し今日の教科書の教材内容の構成を再検討するときには，重要な分析対象なのである．

田中（2008）が述べたように，『数学 第一類』は事象から発見的に導こうとする展開を構成していることから，筆者が目指す具体的事象の考察を織り交ぜた微積分カリキュラムの構成の手立てになることが期待できる．よって，本章では『数学 中学校用 第一類』（4 及び 5）の微積分の導入及びその扱いについて考察する．各章の目的や各小節の概要については，『数学編纂趣意書 4・5 第一

類』(昭和 19 年 11 月 20 日発行) から参照することにする．
『数学 中学校用 第一類』（4 及び 5）の目次を図 2.1 に示す．

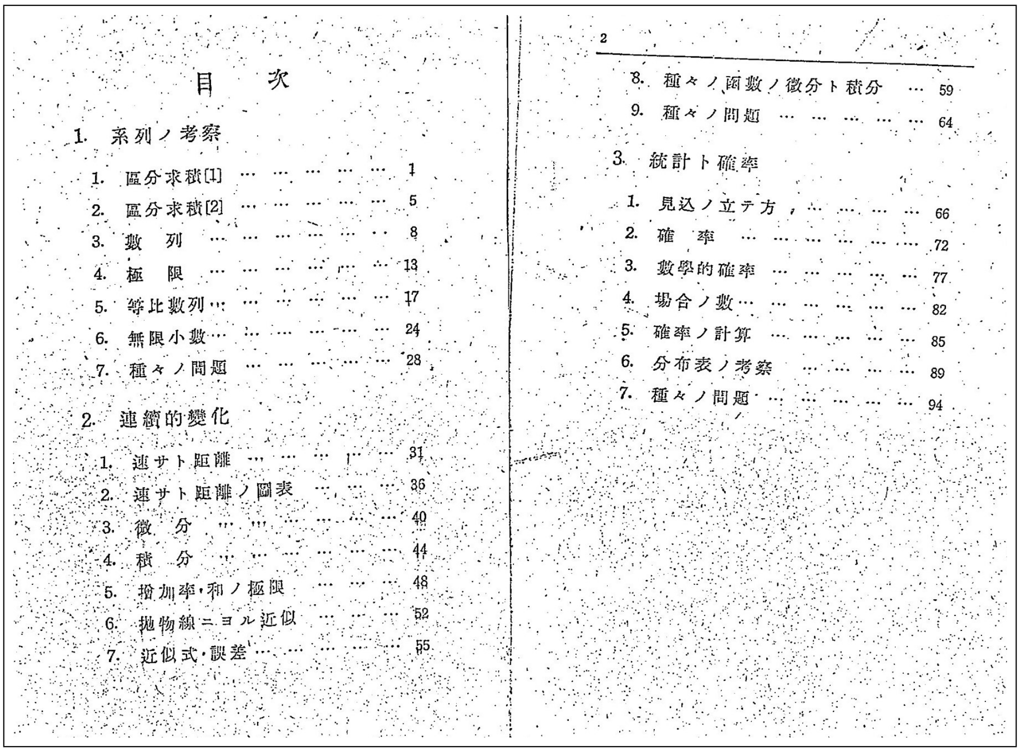

目次

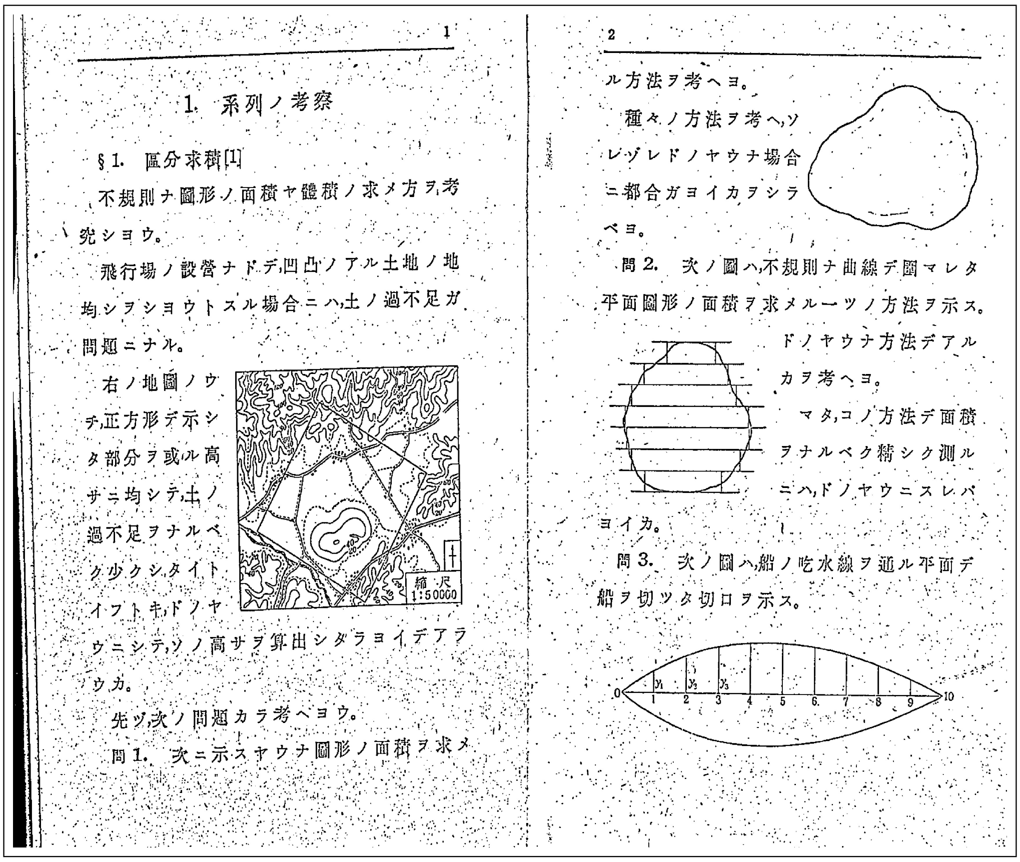
図 2.1 『数学 中学校用 第一類』（4 及び 5）の目次

2.1　「1. 系列ノ考察」について

『数学編纂趣意書 4・5 第一類』の各章要旨によると,「1. 系列ノ考察」の目的は,「本章ノ目的ハ,極限概念ノ導入ニ在ル」としている．以下では,「1. 系列ノ考察」の各節の概要について述べる．

2.1.1　§ 1. 区分求積 [1]

「§ 1. 区分求積 [1]」は,「実用的ナ求積問題デ技術的ニ精度ヲ高メテイクコトヲ考究スル」とある．図 2.2 及び 2.3 に「区分求積 [1] 問 1〜3」を示し，各問の概要を表 2.1 に記す．



1

1. 系列ノ考察

§1. 區分求積[1]

不規則ナ圖形ノ面積ヤ體積ノ求メ方ヲ考究シヨウ。

飛行場ノ設營ナドデ凹凸ノアル土地ノ地均シヲシヨウトスル場合ニハ,土ノ過不足ガ問題ニナル。

右ノ地圖ノウチ,正方形デ示シタ部分ヲ或ル高サニ均シテ,土ノ過不足ヲナルベク少クシタイトイフトキ,ドノヤウニシテ,ソノ高サヲ算出シタラヨイデアラウカ。

先ヅ,次ノ問題カラ考ヘヨウ。

問 1.　次ニ示スヤウナ圖形ノ面積ヲ求メ

2

ル方法ヲ考ヘヨ。

種々ノ方法ヲ考ヘ,ソレゾレドノヤウナ場合ニ都合ガヨイカヲシラベヨ。

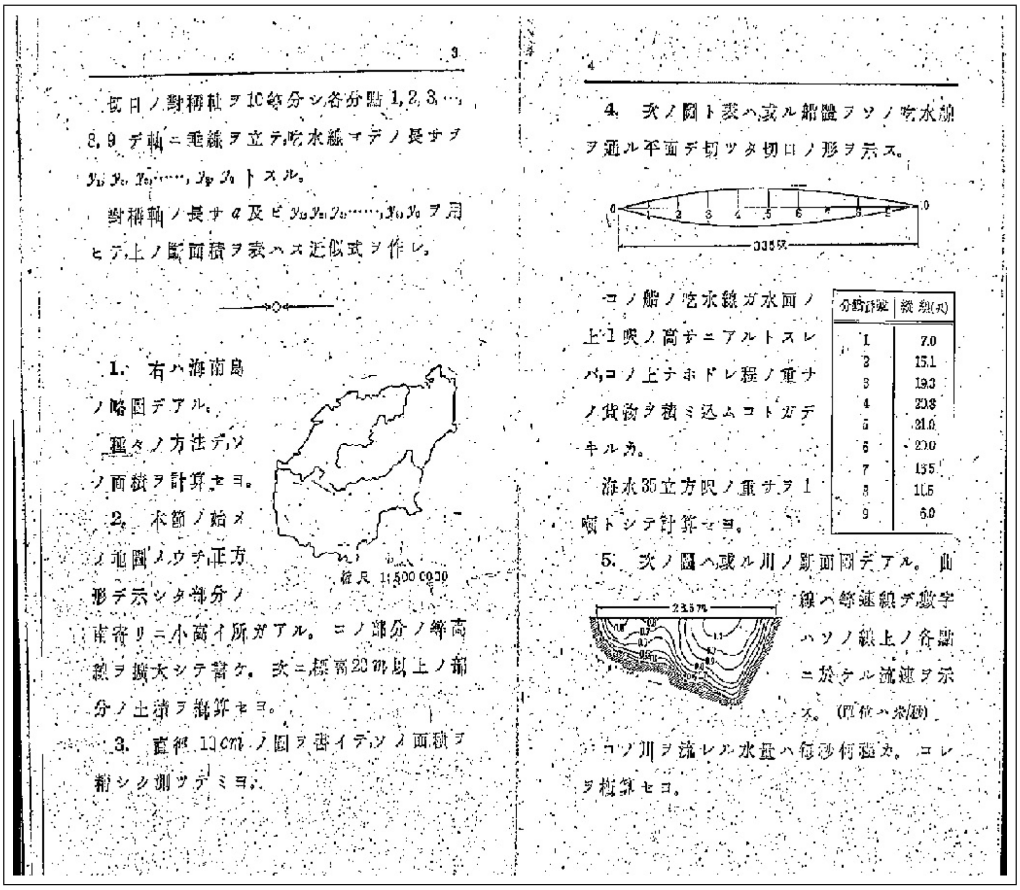
問 2.　次ノ圖ハ,不規則ナ曲線デ圍マレタ平面圖形ノ面積ヲ求メル一ツノ方法ヲ示ス。

ドノヤウナ方法デアルカヲ考ヘヨ。

マタ,コノ方法デ面積ヲナルベク精シク測ルニハ,ドノヤウニスレバヨイカ。

問 3.　次ノ圖ハ,船ノ吃水線ヲ通ル平面デ船ヲ切ツタ切口ヲ示ス。

図 2.2　区分求積 [1]　問 1〜3(1)



3

切口ノ對稱軸ヲ10等分シ各分點1, 2, 3, …, 8, 9デ軸ニ垂線ヲ立テ吃水線マデノ長サヲ$y_1, y_2, y_3, \cdots, y_8, y_9$トスル。

對稱軸ノ長サa及ビ$y_1, y_2, y_3, \cdots, y_8, y_9$ヲ用ヒテ上ノ斷面積ヲ表ハス近似式ヲ作レ。

1. 右ハ海南島ノ略圖デアル。種々ノ方法デソノ面積ヲ計算セヨ。

縮尺 1:500 0000

2. 本節ノ始メノ地圖ノウチ正方形デ示シタ部分ノ南寄リニ小高イ所ガアル。コノ部分ノ等高線ヲ擴大シテ畫ケ。次ニ標高20m以上ノ部分ノ土積ヲ概算セヨ。

3. 直徑10cmノ圓ヲ畫イテソノ面積ヲ精シク測ツテミヨ。

4

4. 次ノ圖ト表ハ或ル船體ヲソノ吃水線ヲ通ル平面デ切ツタ切口ノ形ヲ示ス。

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

335呎

コノ船ノ吃水線ガ水面ノ上1呎ノ高サニアルトスレバ,コノ上デホドレ程ノ重サノ貨物ヲ積ミ込ムコトガデキルカ。

海水35立方呎ノ重サヲ1噸トシテ計算セヨ。

分點番號	縱線(呎)
1	7.0
2	15.1
3	19.3
4	20.8
5	21.0
6	20.0
7	15.5
8	10.5
9	6.0

5. 次ノ圖ハ或ル川ノ斷面圖デアル。曲線ハ等速線デ數字ハソノ線上ノ各點ニ於ケル流速ヲ示ス。(單位ハ米/秒)

23.5m

コノ川ヲ流レル水量ハ毎秒何程カ。コレヲ概算セヨ。

図 2.3　区分求積 [1]　問 1～3(2)

表 2.1　「§ 1. 区分求積 [1]」問の概要

問番号	テーマ
1	不規則な図形の面積の考察
2	不規則な図形の面積の長方形による近似
3	船を吃水線を通る平面で切った切り口の面積

導入では，ある土地の地均しを行う際に，土の過不足を最低限に抑える方法を問われている．生徒に，土砂の過剰分を不足部分に埋める場面を想起させ，この節で扱う不規則な曲線図形の面積を数個の長方形を用いて近似する方法を発想しやすいよう誘導が図られていると考えられる．

問 1 では不規則な曲線で囲まれた図形の面積を求める方法が問われている．「種々ノ方法ヲ考ヘ，ソレゾレドノヤウナ場合ニ都合ガヨイカヲシラベヨ」とあることから，まず，生徒の自由な発想を求めていることが分かる．例えば，円や三角形に近似するといった考えが引き出せるかもしれない．その際，元の図形が円や三角形といった近似すべき図形に類似していることが必要で，そのような場合にのみ「都合ガヨイ」ものとなる．『趣意書』には，「透明ナ紙ニ図形ヲ写シトリ，コレヲ

方眼紙ニ当テテソノ目ヲ数ヘルガヨイ」と記されており，どのような不規則な図形にも対応可能で，極めて工学的・技術的な方法が示されている．この方眼紙を用いる方法は，J.Perry に端を発する改造精神に沿った方法と言え，興味を引くところである．また，『趣意書』には「切り抜イテ目方ヲ測ル方法」にも触れられている．

問 2 は，その不規則な図形にいくつかの長方形を埋め込んだ図を示し，どのように面積を求めるかを問うものである．さらに「コノ方法デ面積ヲナルベク精シク測ルニハドウスレバヨイカ」という問いもある．『趣意書』には，「不規則ナ図形ヲ目分量デ矩形ニ置キカヘ，ソノ底辺ノ長サヲ計ツテソノ和ヲ求メル」とあり，均等な幅をもった矩形 (長方形) で近似する区分求積の方法が，ここでは示唆されていると言ってよい．

問 3 は船を吃水線を通る平面で切った切り口の面積を考察する問題である．切り口の対称軸を 10 等分し，各分点と，その各々を通る垂線と吃水線との交点をそれぞれ y_1，y_2，y_3，
$\cdots$，y_9 とする．対称軸の長さを a としたとき，切り口の面積の近似値はどのように表されるかが問われている．結果として，9 個の矩形の $\frac{2}{9}a\,(y_1+y_2+y_3+\cdots+y_9)$ を得させるのである．この問では，文字式で近似面積を表現することを求めている．

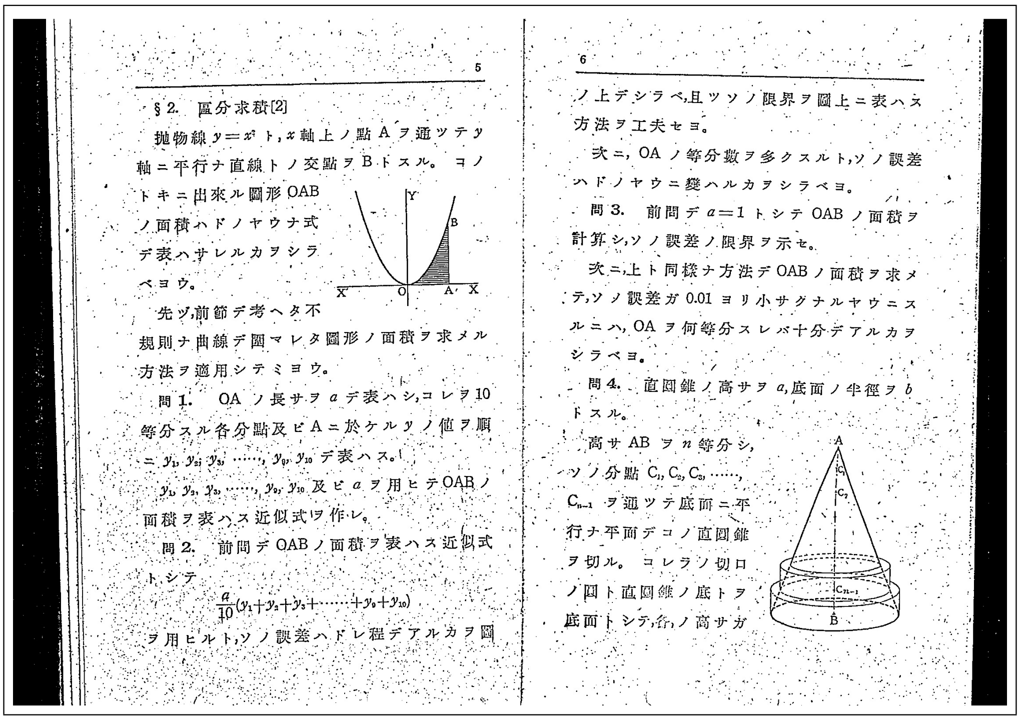
以上の 3 つの問の後，節末問題 1〜5 を解かせる．これらは 4 を除き実測問題である．『趣意書』では，「1,3 デハ実測ソノモノニ，2 デハ土積ヲ算出スル式ノ作リ方ニ，5 デハ計算ノ形式ヲ整ヘルコトニ，ソレゾレ重点ヲオクガヨイ」と記されている．4 は，問 3 の応用として，「水面ガ吃水線ノ上 1 尺ノ高サニアルトスレバ，コノ上ナホドレ程ノ重サノ貨物ヲ積ミ込ムコトガデキルカ」と問い，問 3 得られた $\frac{2}{9}a\,(y_1+y_2+y_3+\cdots+y_9)$ に，表で示された数値を代入し，船の水平断面積の近似値を求めさせる．さらに，船が吃水線までの 1 尺分沈むとき排除する水の体積を求め，その水の重量が積載可能な貨物の重量に等しいという浮力の原理を用いて，積載可能重量を求めさせ，問題解決を図るのである．

2.1.2　§ 2．区分求積 [2]

「区分求積 [2]」では，数学的な求積問題について，理論的に精度を高めることを考え，極限観念の一歩手前まで進むことを目標としている．図 2.4 及び 2.5 に「区分求積 [2] 問 1〜4」を示し，各問の概要を表 2.2 に記す．

表 2.2　「§ 1. 区分求積 [2]」問の概要

問番号	テーマ
1	放物線と直線の囲む面積の近似
2	問 1 における誤差
3	誤差の限界を小さくする
4	直円錐の体積の近似



5

§2.　區分求積[2]

抛物線$y=x^2$ト,x軸上ノ點Aヲ通ツテy軸ニ平行ナ直線トノ交點ヲBトスル。コノトキニ出來ル圖形OABノ面積ハドノヤウナ式デ表ハサレルカヲシラベヨウ。

先ヅ,前節デ考ヘタ不規則ナ曲線デ圍マレタ圖形ノ面積ヲ求メル方法ヲ適用シテミヨウ。

問1.　OAノ長サヲaデ表ハシ,コレヲ10等分スル各分點及ビAニ於ケルyノ値ヲ順ニ$y_1, y_2, y_3, \cdots\cdots, y_9, y_{10}$デ表ハス。

$y_1, y_2, y_3, \cdots\cdots, y_9, y_{10}$及ビ$a$ヲ用ヒテOABノ面積ヲ表ハス近似式ヲ作レ。

問2.　前問デOABノ面積ヲ表ハス近似式トシテ

$$\frac{a}{10}(y_1+y_2+y_3+\cdots\cdots+y_9+y_{10})$$

ヲ用ヒルト,ソノ誤差ハドレ程デアルカヲ圖

6

ノ上デシラベ,且ツソノ限界ヲ圖上ニ表ハス方法ヲ工夫セヨ。

次ニ,OAノ等分數ヲ多クスルト,ソノ誤差ハドノヤウニ變ハルカヲシラベヨ。

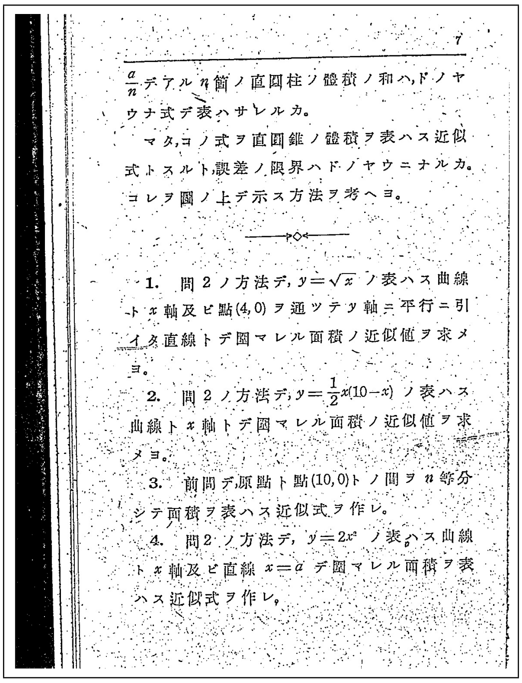
問3.　前問デ$a=1$トシテOABノ面積ヲ計算シ,ソノ誤差ノ限界ヲ示セ。

次ニ,上ト同樣ナ方法デOABノ面積ヲ求メテ,ソノ誤差ガ0.01ヨリ小サクナルヤウニスルニハ,OAヲ何等分スレバ十分デアルカヲシラベヨ。

問4.　直圓錐ノ高サヲa,底面ノ半徑ヲbトスル。

高サABヲn等分シ,ソノ分點$C_1, C_2, C_3, \cdots\cdots, C_{n-1}$ヲ通ツテ底面ニ平行ナ平面デコノ直圓錐ヲ切ル。コレラノ切口ノ圓ト直圓錐ノ底トヲ底面トシテ,各ノ高サガ

図 2.4　区分求積 [2]　問 1〜4(1)



7

$\frac{a}{n}$デアルn箇ノ直圓柱ノ體積ノ和ハ,ドノヤウナ式デ表ハサレルカ。

マタ,コノ式ヲ直圓錐ノ體積ヲ表ハス近似式トスルト,誤差ノ限界ハドノヤウニナルカ。コレヲ圖ノ上デ示ス方法ヲ考ヘヨ。

1.　問2ノ方法デ,$y=\sqrt{x}$ノ表ハス曲線トx軸及ビ點(4,0)ヲ通ツテy軸ニ平行ニ引イタ直線トデ圍マレル面積ノ近似値ヲ求メヨ。

2.　問2ノ方法デ,$y=\frac{1}{2}x(10-x)$ノ表ハス曲線トx軸トデ圍マレル面積ノ近似値ヲ求メヨ。

3.　前問デ,原點ト點(10,0)トノ間ヲn等分シテ面積ヲ表ハス近似式ヲ作レ。

4.　問2ノ方法デ,$y=2x^2$ノ表ハス曲線トx軸及ビ直線$x=a$デ圍マレル面積ヲ表ハス近似式ヲ作レ。

図 2.5　区分求積 [2]　問 1〜4(2)

『趣意書』には，「実用上の求積問題デハ，精度ヲ高メル要求ニモコレニ応ズル手段ニモ限度ガアルガ，理論上ノ問題ニハソレガナイ」と記されいる．この意に沿って，導入では「放物線 $y = x^2$ ト，x 軸上ノ点 A ヲ通リ y 軸ニ平行ナ直線トノ交点ヲ B トスルトキ，図形 OAB ノ面積ハドノヤウナ式デ表サレルカヲ調ベヤウ」とあり，実用上の問題を離れ，座標平面上に描かれた放物線の下部の領域の求積問題を提示し，これがこれから取り組むべき課題であることを明示してる．

問 1 では，前述の放物線の下部領域について，

> OA ノ長サヲ a デ表ハシ，コレヲ 10 等分スル各分点及ビ A ニオケル y ノ値ヲ順ニ y_1，y_2，y_3，$\cdots$，y_9，y_{10} デ表ハス．y_1，y_2，y_3，$\cdots$，y_9，y_{10} 及ビ a ヲ用ヒテ図形 OAB ノ面積ヲ表ハス近似式ヲ作レ．

と問われている．『趣意書』には，「前節問 3 ト同様ニ考ヘル」とある．ここで，図形 OAB の面積は図 2.6 の斜線部分の面積に近似される．

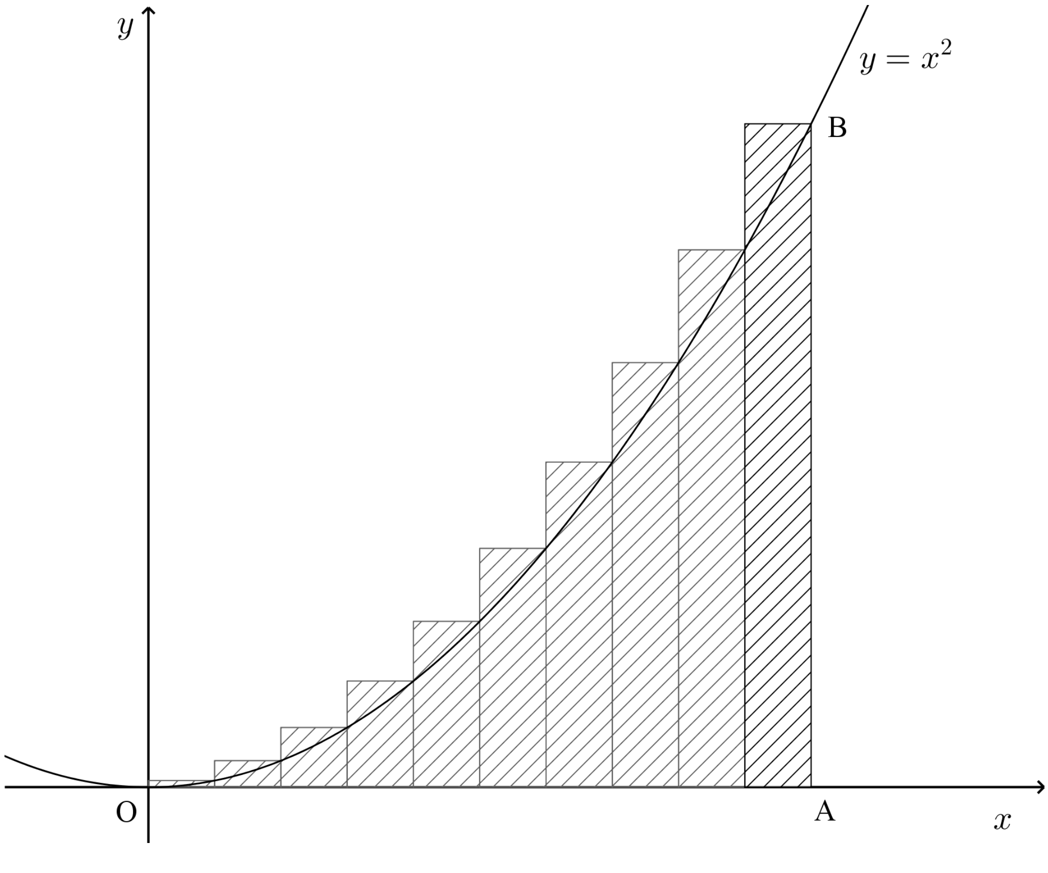


図 2.6　図形 OAB の面積の近似

また，面積の近似式は

$$\frac{a}{10}(y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_9 + y_{10}) \tag{2.1}$$

となる．

問 2 では，問 1 で求めた図形 OAB の面積の近似式 (2.1) を用いて，「誤差ハドレ程デアルカヲ図ノ上デ調べ，且ツソノ限界ヲ図上ニ表ハス方法ヲ工夫セヨ」と問い，さらに，「OA ノ等分数ヲ多クスルト，ソノ誤差ハドノヤウニ変化スルカヲシラベヨ」と指示がなされている．

式 (2.1) の値と図 2.6 における曲線図形 OAB の面積の「誤差」は，10 個の矩形が放物線より上側にはみ出した部分の面積である．この誤差部分は，図 2.7 において放物線 OA 上に対頂点をもつ灰色で示された 10 個の小さな長方形で覆われ，誤差はこれら 10 個の長方形の面積の和より小さくなる．さらに，この 10 個の矩形を AB の右側に平行移動させれば，網掛けで示した矩形 ABCD に等積変形することができる．

ここで，矩形 ABCD の面積を「誤差の限界」と定めれば，その面積

$$\frac{a}{10} \times \mathrm{AB}$$

をもって，近似図形の面積精度が評価できるようになる．ここで等分数を多くすると「誤差の限界」を示す矩形 ABCD の横幅が小さくなっていくことから，「誤差」も漸次小さくなっていくことが理解できる．

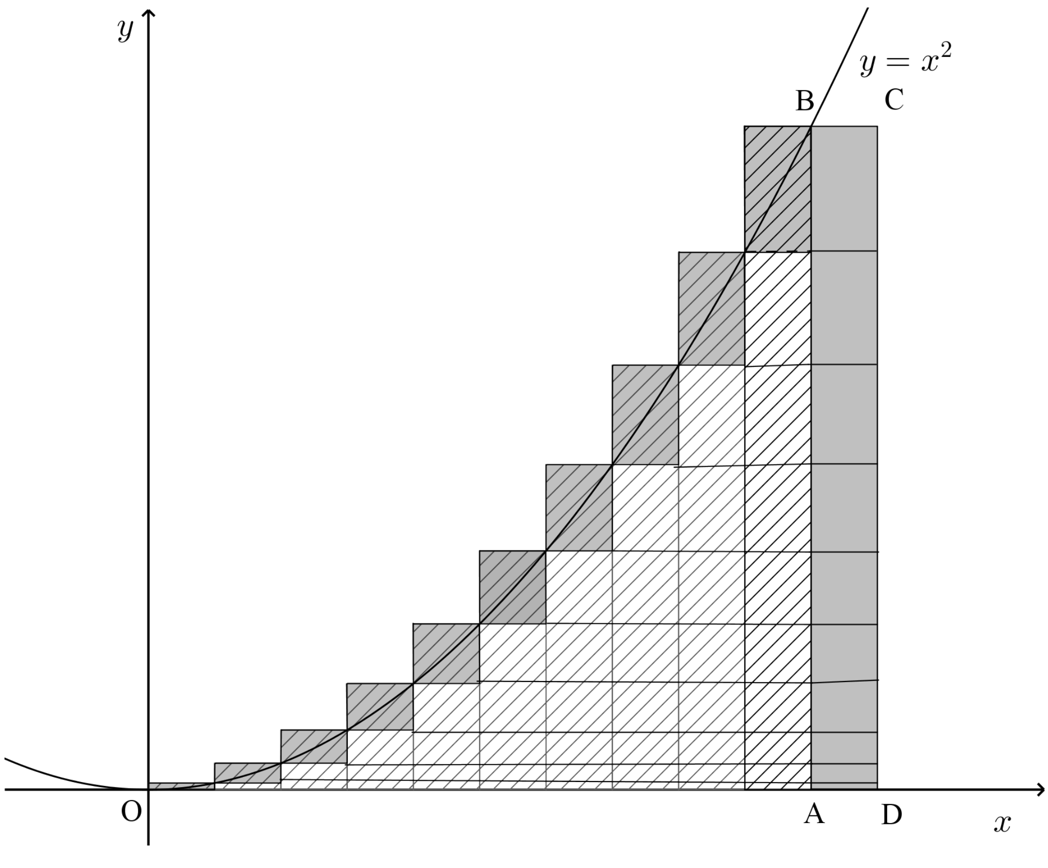


図 2.7　誤差の限界

問 3 では，具体的に問 2 の式 (2.1) について，$a = 1$ としたときの値と誤差の限界を求め，誤差が 0.01 より小さくなるには線分 OA を何等分すればよいを問うている．実際，線分 OA を 100 等分より多く等分すると，誤差の限界は 0.01 より小さくなる．問 2 で誤差の限界として示された矩形 ABCD は，線分 OA の等分数を増やすことにより，限りなく細くなっていき，その面積は 0 に収束していく様子も理解できる．即ち，長方形による近似図形が，放物線の下部の曲線図形に収束していくことが示される．今日的な高等学校数学で区分求積法を扱う際，このような「誤差の限界」を示すことはなく，『数学第一類』の著しい特徴であるといえる．

問 4 は，直円錐の体積を n 個の直円柱の体積で近似し，誤差の限界を求める問題である．『趣意書』には，「最下段ノ直円柱ノ体積ヲモツテ誤差ノ限界トスルコトガデキル．ココデ n ヲ増スニツレ，コノ限界ハドノヤウニ変ワツテイクカヲ考ヘサセルガヨイ」と記されている．

節末には練習問題が 5 題配置されている．4 では，曲線 $y = 2x^2$ と x 軸 及び $x = a$ で囲まれる部分の面積の近似式，5 では，楕円の面積の近似式を取り上げられている，『趣意書』には，「4,5 ニヨリ次ノ一般的ナ事柄ヲ悟ラセタイ」とし，ねらいを以下のように定めている．

> 1 ツノ曲線ガアルトキ，x 軸ヲ基準ニシ y 軸ニ平行ナ方向ニ k 倍ニコレヲ拡大 $(k > 1)$ マタハ縮小 $(k < 1)$ シテ第二ノ曲線ヲ作ルト，コノ二ツノ曲線下ノ面積ヲ表ハス近似式ノ間ニモ一同数等分ノ場合デアレバ一同ジ倍数関係 (k 倍) ガ成リ立ツ．

すなわち，一般の曲線に対しても，曲線を x 軸を基準とし y 軸方向に拡大縮小するとき，その倍率に応じて，近似図形の面積も拡大縮小されることを理解させるのである．

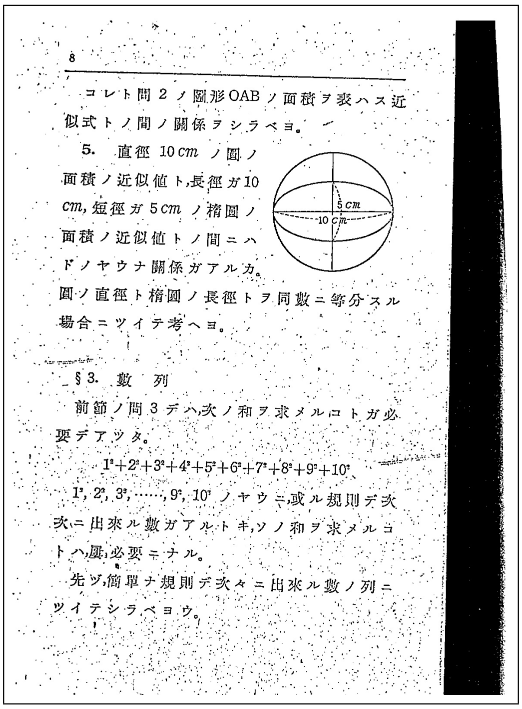
2.1.3 § 3. 数列

「§ 3. 数列」では，§ 2 の問 3 で現れる計算

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 9^2 + 10^2$$

について，「1^2，2^2，3^2，$\cdots$，9^2，10^2 ノヤウニ，或ル規則デ次々ニ出来ル数ガアルトキソノ和ヲ求メルコトハ，屢必要ニナル」と述べている．すなわち，規則的に並ぶ数の和を求める方法を獲得することが求められ，本節でそれを学習することが述べられている．「数列問 1〜9」を図 2.8 及び**??** に示し，各問の概要を表 2.3 に記す．

問 1 は，まず,「1 カラ 10 マデノ整数ノ和ヲ求メル簡便ナ方法ヲ工夫セヨ」とある．階段状の図が付されている．この図を上下反転したものを合併することで, 縦 10 横 11 の矩形を得させ, その和が $\dfrac{10(10+1)}{2}$ であることを導く．さらに,「一般ニ n ヲ整数トシ,1 カラ n マデノ整数ノ和ヲ求メル式ヲ作レ」と続く．前半と同様の方法を利用すれば, 容易に $\dfrac{n(n+1)}{2}$ を得させることが出来るだろう．『趣意書』には,「問 6 ノ公式ノ導キ方ヲ最モ簡単ナ場合ニツイテ悟ラセルノガ目的デアル」と記されている．



8

コレト問 2 ノ圖形OABノ面積ヲ表ハス近似式トノ間ノ關係ヲシラベヨ。

5. 直徑 10 cm ノ圓ノ面積ノ近似值ト,長徑ガ10 cm,短徑ガ 5 cm ノ楕圓ノ面積ノ近似值トノ間ニハドノヤウナ關係ガアルカ。

圓ノ直徑ト楕圓ノ長徑トヲ同數ニ等分スル場合ニツイテ考ヘヨ。

§3. 數 列

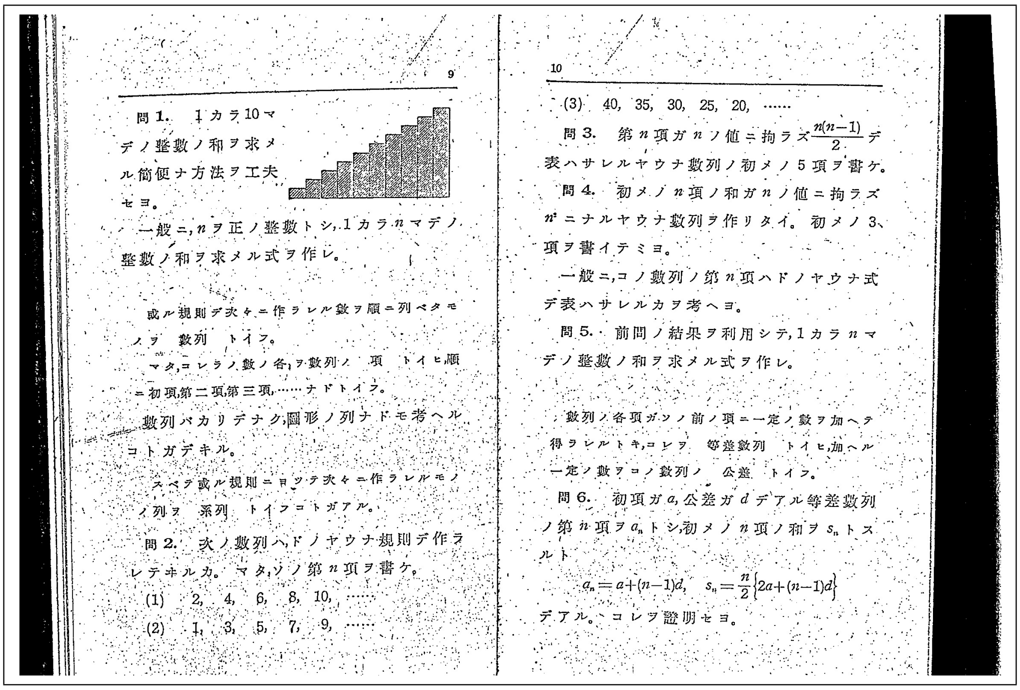
前節ノ問 3 デハ,次ノ和ヲ求メルコトガ必要デアツタ。

$$1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2+8^2+9^2+10^2$$

$1^2, 2^2, 3^2, \cdots\cdots, 9^2, 10^2$ ノヤウニ,或ル規則デ次次ニ出來ル數ガアルトキ,ソノ和ヲ求メルコトハ屢,必要ニナル。

先ヅ,簡單ナ規則デ次々ニ出來ル數ノ列ニツイテシラベヨウ。

図 2.8 数列 問 1〜9(1)



9

問 **1.** 1 カラ10マデノ整數ノ和ヲ求メル簡便ナ方法ヲ工夫セヨ。

一般ニ,n ヲ正ノ整數トシ,1 カラ n マデノ整數ノ和ヲ求メル式ヲ作レ。

或ル規則デ次々ニ作ラレル數ヲ順ニ列ベタモノヲ 數列 トイフ。

マタ,コレラノ數ノ各,ヲ數列ノ 項 トイヒ,順ニ初項,第二項,第三項,……ナドトイフ。

數列バカリデナク,圖形ノ列ナドモ考ヘルコトガデキル。

スベテ或ル規則ニヨツテ次々ニ作ラレルモノノ列ヲ 系列 トイフコトガアル。

問 **2.** 次ノ數列ハ,ドノヤウナ規則デ作ラレテヰルカ。マタ,ソノ第 n 項ヲ書ケ。

(1) 2, 4, 6, 8, 10, ……

(2) 1, 3, 5, 7, 9, ……

10

(3) 40, 35, 30, 25, 20, ……

問 **3.** 第 n 項ガ n ノ值ニ拘ラズ $\dfrac{n(n-1)}{2}$ デ表ハサレルヤウナ數列ノ初メノ 5 項ヲ書ケ。

問 **4.** 初メノ n 項ノ和ガ n ノ值ニ拘ラズ n^2 ニナルヤウナ數列ヲ作リタイ。初メノ 3、項ヲ書イテミヨ。

一般ニ,コノ數列ノ第 n 項ハドノヤウナ式デ表ハサレルカヲ考ヘヨ。

問 **5.** 前問ノ結果ヲ利用シテ,1 カラ n マデノ整數ノ和ヲ求メル式ヲ作レ。

數列ノ各項ガソノ前ノ項ニ一定ノ數ヲ加ヘテ得ラレルトキ,コレヲ 等差數列 トイヒ,加ヘル一定ノ數ヲコノ數列ノ 公差 トイフ。

問 **6.** 初項ガ a,公差ガ d デアル等差數列ノ第 n 項ヲ a_n トシ,初メノ n 項ノ和ヲ s_n トスルト

$$a_n=a+(n-1)d,\quad s_n=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}$$

デアル。コレヲ證明セヨ。

図 2.9 数列 問 1〜9(2)

表 2.3　「§ 3. 数列」の概要

問番号	テーマ
1	1 から n までの整数の和
2	数列の規則性
3	一般項から初めの 5 項を求める
4	数列の和 (n^2) から初めの 3 項と一般項を求める
5	問 5 の結果から 1 から n までの数列の和を求める
6	等差数列の一般項と和
7	数列の和 (n^3) から初めの 3 項と一般項を求める
8	平方数の和
9	「§ 2 問 2」の図形 OAB の面積を数列の和を用いて表記

問 2 は，3 つの等差数列がそれぞれどのような規則で作られているかを答えさせ，第 n 項を求める問題，問 3，第 n 項が $\dfrac{n(n-1)}{2}$ と与えられたとき，初めの 5 項を答えさせるものである．

問 4 は，「初メノ n 項ノ和ガ n ノ値ニ拘ラズ n^2 ニナルヤウナ数列」に対して，初めの 3 項を書かせる．そこから四角数を見出し 3 個の奇数の和が 3^2 となることを掴ませる．続いて「一般ニコノ数列ノ第 n 項ハドノヤウナ式デ表サレルカ考ヘヨ」と問い，四角数の構造から第 n 項が $2n-1$ であることを答えさせる．

この時，四角数を用いずに，1 辺が n の正方形と一辺が $n-1$ の正方形の面積の差分に注目し，一般項を $n^2-(n-1)^2=2n-1$ と導くことも可能である．こうすれば，より一般的に $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$ を得ることが出来る．

問 5 は，問 4 の結果を利用して 1 から n までの整数の和を求めさせる問題である．『趣意書』には，「問 4，問 5 ハ，問 1 後半ニ対スル別法ヲ考案サセルモノデアルガ，問 7，問 8 ノ困難ヲ緩和スル為ノ段階デアル」と記されている．問 4 において 最初の n 個の奇数の和 $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$ が得られており，左辺の各項を 1 ずつ増やすと，両辺に n を加えることになるから，$2+4+6+\cdots+2n=n^2+n$ が得られる．この式の両辺を 2 で割って，$1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ が導かれる．

問 6 では，等差数列の一般項の公式 $a_n=a+(n-1)d$ を導き，初項から第 n 項までの和の公式 $S_n=\dfrac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}$ を証明する．

問 7 は，初項から第 n 項までの和が n^3 である数列の一般項を求める問題である．問 4 と同様に「初メノ n 項ノ和ガ n^3 デ表ハサレルヤウナ数列ノ初メノ 3 項ト一般項ヲ書ケ」と与えられる．和が 1,8,27 となることから，数列はその差分をとり，1,7,19 となる．一般項は同様に差分を考えて，$n^3-(n-1)^3=3n^2-3n+1$ と導くことができる．1 辺が n の立方体と 1 辺が $n-1$ の立方体の体積の差をイメージさせても良いであろう．

問 8 は，平方数の和の公式

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

を証明する問題である．証明方法は，問 7 の結果を利用する．つまり，一般項 $3n^2-3n+1$ で与えられる数列の初項から第 n 項までの和が n^3 となることを用いる．この式は，後，放物線の下部領域の求積を行うとき，極めて重要な公式となる．

問 9 は，§ 2 の問 2 で OA を n 等分したとき，図形 OAB の面積を表す近似式を a と n で表し，できるだけ簡単な形にするという問題である．図形 OAB の近似式を M_n とし，問 8 の結果を利用すると

$$\begin{aligned}M_n&=\frac{a}{n}\left\{\left(\frac{a}{n}\right)^2+\left(\frac{2a}{n}\right)^2+\left(\frac{3a}{n}\right)^2+\cdots+\left(\frac{na}{n}\right)^2\right\}\\&=\frac{a^3}{n^3}\left(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2\right)\\&=\frac{a^3}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\\&=\frac{a^3(n+1)(2n+1)}{6n^2}\end{aligned}\tag{2.2}$$

となる．

問 8 の後，練習問題を 7 題取り組ませる．1 から 4 までと 7 は，数列の一般項と和に関する問題で，5，6 は体積を数列の和で近似する問題である．

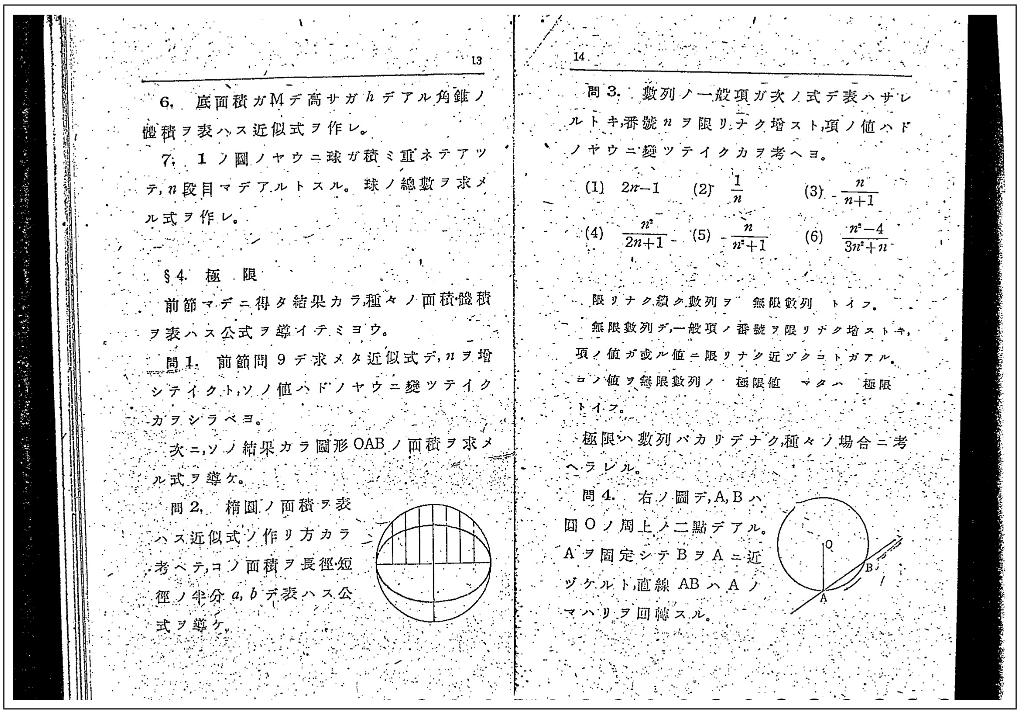
2.1.4 § 4. 極限

「§ 4. 極限」では，前節までの結果を用いて，種々の図形の面積・体積を表す公式を導くことを目標に学習を進める．また，数列や関数の極限を取り扱う．『趣意書』には，「極限ニニツイテ，安易ナ解釈ヲ与ヘルコトハ危険デアル．初学者ニ対シテハ，本来ノ意味ヲソノママ伝ヘルニカメ，誤解ヲ招クヤウナ軽率ナ言葉遣ヒノナキヤウニ注意シナケレバナラヌ」とあり，極限概念を扱う上での注意が与えられている．「極限問 1〜5」を図**??**及び**??**に示し，各問の概要を表 2.4 に記す．

問 1 では，§ 3 の問 9 で求めた図形 OAB の面積の近似式 (2.1) の n の値を大きくしていくとどのような値に近づいていくか問われている．また，その結果から図形 OAB の面積を求める式はどのようになるか問われている．式 (2.2) を次のように変形する．

$$M_n=\frac{a^3}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)\tag{2.3}$$

上記の式 (2.3) の n を限りなく大きくすると，M_n は $\frac{a^3}{3}$ に限りなく近づくことがわかる．このことから図形 OAB の面積を表す式は $\frac{a^3}{3}$ であることを認める．ここで『趣意書』には



13

6. 底面積ガMデ高サガhデアル角錐ノ體積ヲ表ハス近似式ヲ作レ。

7. 1ノ圖ノヤウニ球ガ積ミ重ネテアツテ,n段目マデアルトスル。球ノ總數ヲ求メル式ヲ作レ。

§4. 極　限

前節マデニ得タ結果カラ,種々ノ面積體積ヲ表ハス公式ヲ導イテミヨウ。

問1. 前節問9デ求メタ近似式デ,nヲ増シテイクト,ソノ値ハドノヤウニ變ツテイクカヲシラベヨ。

次ニ,ソノ結果カラ圖形OABノ面積ヲ求メル式ヲ導ケ。

問2. 楕圓ノ面積ヲ表ハス近似式ノ作リ方カラ考ヘテ,コノ面積ヲ長徑短徑ノ半分a, bデ表ハス公式ヲ導ケ。

14

問3. 數列ノ一般項ガ次ノ式デ表ハサレルトキ,番號nヲ限リナク増スト,項ノ値ハドノヤウニ變ツテイクカヲ考ヘヨ。

(1) $2n-1$　(2) $\frac{1}{n}$　(3) $\frac{n}{n+1}$

(4) $\frac{n^2}{2n+1}$　(5) $\frac{n}{n^2+1}$　(6) $\frac{n^2-4}{3n^2+n}$

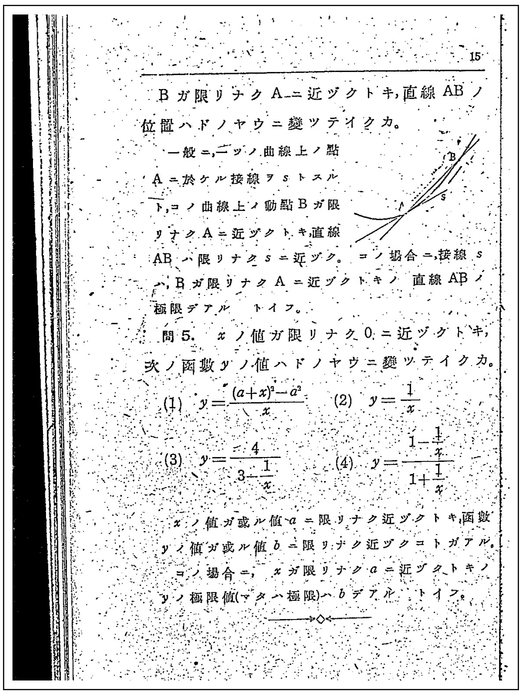
限リナク續ク數列ヲ　無限數列　トイフ。

無限數列デ,一般項ノ番號ヲ限リナク増ストキ,項ノ値ガ或ル値ニ限リナク近ヅクコトガアル。コノ値ヲ無限數列ノ　極限値　マタハ　極限　トイフ。

極限ハ數列バカリデナク,種々ノ場合ニ考ヘラレル。

問4. 右ノ圖デ,A,Bハ圓Oノ周上ノ二點デアル。Aヲ固定シテBヲAニ近ヅケルト,直線ABハAノマハリヲ回轉スル。

図 2.10　極限　問 1～5(1)



15

Bガ限リナクAニ近ヅクトキ,直線ABノ位置ハドノヤウニ變ツテイクカ。

一般ニ,一ツノ曲線上ノ點Aニ於ケル接線ヲsトスルト,コノ曲線上ノ動點Bガ限リナクAニ近ヅクトキ,直線ABハ限リナクsニ近ヅク。コノ場合ニ,接線sハ,Bガ限リナクAニ近ヅクトキノ直線ABノ極限デアル　トイフ。

問5. xノ値ガ限リナク0ニ近ヅクトキ,次ノ函數yノ値ハドノヤウニ變ツテイクカ。

(1) $y=\frac{(a+x)^2-a^2}{x}$　(2) $y=\frac{1}{x}$

(3) $y=\frac{4}{3-\frac{1}{x}}$　(4) $y=\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}$

xノ値ガ或ル値aニ限リナク近ヅクトキ,函數yノ値ガ或ル値bニ限リナク近ヅクコトガアル。コノ場合ニ,xガ限リナクaニ近ヅクトキノyノ極限値(マタハ極限)ハbデアル　トイフ。

図 2.11　極限　問 1～5(2)

表 2.4　「§ 4. 極限」の概要

問番号	テーマ
1	「§ 2 問 2」の図形 OAB の面積の極限
2	楕円の面積公式
3	数列の極限
4	円の接線
5	関数の極限

> コノトキニ陥リヤスイ誤解ハ，OA ヲ無限ニ細カク分ケルト，M_n ハ $\dfrac{a^3}{3}$ ニ等シクナルトイフヤウニ，到達ノ状態ヲ考ヘルコトデアル．コノヤウナ誤解ニ対シテハ，無限ニ細カク分ケルコト自体ガアリ得ナイ無意義ナ事柄デアルコトヲ明確ニシナケレバナラナイ．

と記されている．前述した「誤解ヲ招クヤウナ軽率ナ言葉遣ヒ」を戒めているのである．すなわち，「OA を無限に細かく切ると，M_n が $\dfrac{a^3}{3}$ に等しくなる」のではなく，「OA を限りなく細かく切り続けると，M_n が $\dfrac{a^3}{3}$ に限りなく近づく」と認識させなければならないことに言及しているのである．

問 2 では，極限を用いた長径 a，短径 b の楕円の面積の導出を扱う．半径 a の円と，長径 a 短径 b の楕円の面積をそれぞれ L, M とし，それらを n 個の矩形を用いて近似する．このとき，面積の近似値をそれぞれ L_n，M_n とすると，任意の n で $\dfrac{L_n}{M_n} = \dfrac{a}{b}$ が成り立つ．さらに，$\dfrac{L_n}{M_n} \to \dfrac{L}{M} (n \to \infty)$ となるから，$\dfrac{L}{M} = \dfrac{a}{b}$ となる．従って $L = \pi a^2$ より，$M = \pi ab$ となる．

問 3 では，数列の極限を扱っている．ただし，あくまで数列の収束値を求めるのではなく，n が大きくなるにつれてどのように変化するかに着目させた問題である．『趣意書』には，「n ヲ無限大ニスルト，$\dfrac{1}{n}$ ハ 0 ニナルトイフヨウナ言葉遣ヒハ，初学者ニ対シテハ禁物デアル.」と記されている．すなわち，問 1 と同様に無限大については慎重に扱い指導しなければならないことを示唆しているのである．問題には収束する数列だけでなく，$2n-1$ のように n を限りなく大きくすると発散するような数列も扱われている．

問 4 では，図 2.12 の，円 O の周上の 2 点について，点 A を固定し，点 B を点 A に近づけると，直線 AB の位置はどのように変化するかという問題である．図 2.12 を以下に示す．

直感的に，直線 AB は点 A で円 O に接する直線，すなわち円 O の点 A における接線に近づくことがわかる．この問題を機として一般の曲線についての説明がある．任意の曲線上の点 A における接線を s とすると，点 A でない曲線上の動点 B が限りなく点 A に近づくとき，直線 AB は限りなく s に近づく．このとき，『接線 s は直線 AB の極限である』としている．ここでは，極限は面積などの数量のみの概念ではなく，点や直線のような図形に対しても考えられることに言及している．

問 5 は，x を変数とする関数について，x の値が限りなく 0 に近づくとき従属変数 y がどのよう

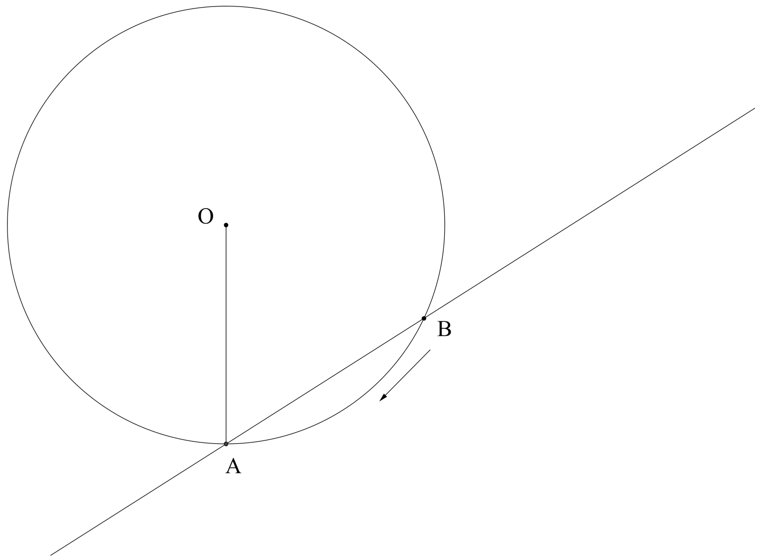


図 2.12　§ 4 問 4

な値に近づくかを考察する問題であり，小問 4 つで構成されている．(1) は，$y = \dfrac{(a+x)^2 - a^2}{x}$ の極限値を考える問題であり，x を 0 に近づけると y の値は $2a$ に近づく．この問題は y の $x = a$ における微分係数を求める問題となっており，後に学習する微分の布石となっている．このように y が有限値に近づく場合を扱っているが，(2) の $y = \dfrac{1}{x}$ のように x が 0 に限りなく近づくと y が限りなく大きくなる場合も扱っている．

この節「§ 4 極限」では，前節からの流れの中で数列の極限を扱ったが，節の最後において，問 4 で図形の極限に言及し，問 5 では関数の極限を求めさせることになる．今日的な感覚では唐突感が否めないところである．この後，節末問題が大問で 6 問配置されている．

2.1.5　§ 5. 等比数列

本節では，図 2.13 に示す図形 OMP の面積を，§ 1 から§ 4 で扱った方法とは異なる方法で求めることを導入としている．それは，アルキメデスの「取り尽くし法」をモデルとした方法である．この方法を問 1 から問 5 において誘導的に習得させ，後の問で等比数列の和及びその極限の習得を目的とする．「等比数列問 1〜7」を図 2.14 及び 2.15 に示し，各問の概要を表 2.5 に記す．

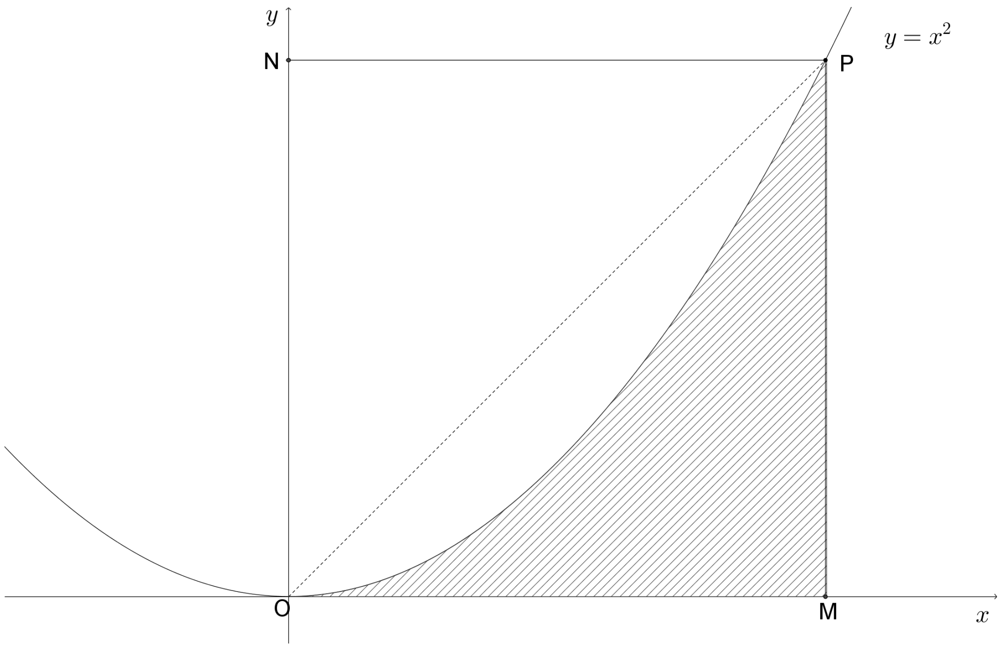
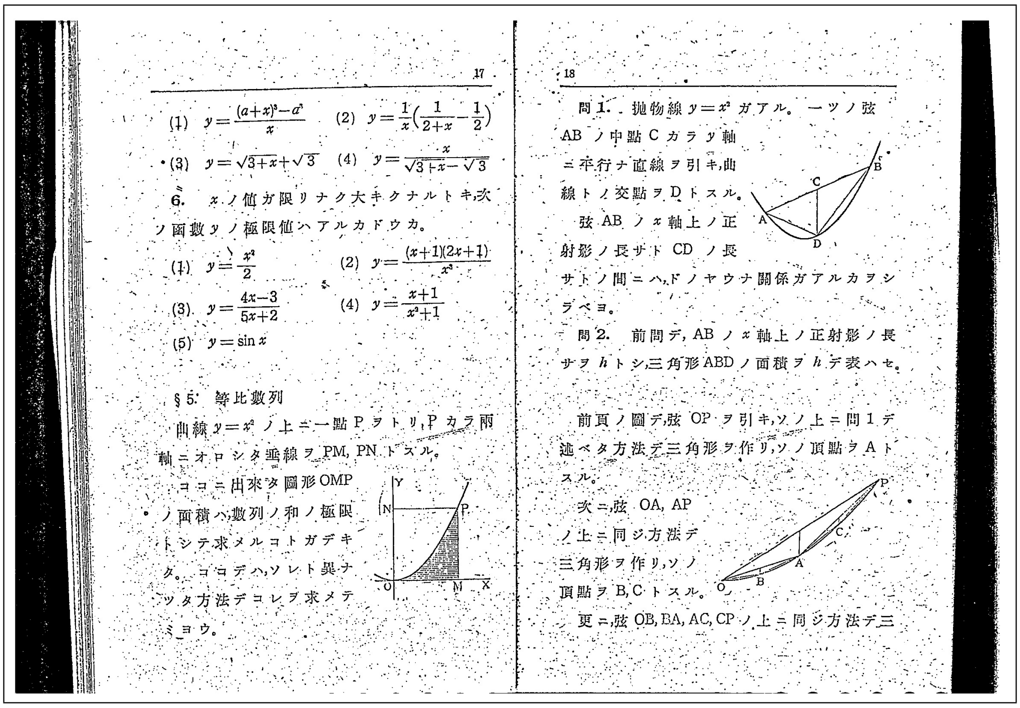


図 2.13　図形 OMP

表 2.5　「§ 5. 等比数列」の概要

問番号	テーマ
1 〜 3	放物線の求積
4	等比数列の一般項と和
5	問 3 の結果を，問 4 を用いて一般化
6	振動する等比数列
7	無限等比数列の和

問 1 では，放物線 $y = x^2$ の弦 AB の中点を C とする．また，点 C から y 軸に平行な直線を引き曲線との交点を D とする．このとき，弦 AB の正射影の長さと，直線 CD の長さの関係性を調べる．問 1 で扱うグラフを図 2.16 に示す．



17

(1) $y=\dfrac{(a+x)^3-a^3}{x}$　(2) $y=\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{2+x}-\dfrac{1}{2}\right)$

(3) $y=\sqrt{3+x}+\sqrt{3}$　(4) $y=\dfrac{x}{\sqrt{3+x}-\sqrt{3}}$

6. x ノ値ガ限リナク大キクナルトキ,次ノ函數 y ノ極限値ハアルカドウカ。

(1) $y=\dfrac{x^2}{2}$　(2) $y=\dfrac{(x+1)(2x+1)}{x^3}$

(3) $y=\dfrac{4x-3}{5x+2}$　(4) $y=\dfrac{x+1}{x^2+1}$

(5) $y=\sin x$

§5. 等比數列

曲線 $y=x^2$ ノ上ニ一點 P ヲトリ,P カラ兩軸ニオロシタ垂線ヲ PM, PN トスル。

ココニ出來タ圖形 OMP ノ面積ハ,數列ノ和ノ極限トシテ求メルコトガデキタ。ココデハ,ソレト異ナツタ方法デコレヲ求メテミヨウ。

18

問 1. 抛物線 $y=x^2$ ガアル。一ツノ弦 AB ノ中點 C カラ y 軸ニ平行ナ直線ヲ引キ,曲線トノ交點ヲ D トスル。

弦 AB ノ x 軸上ノ正射影ノ長サト CD ノ長サトノ間ニハ,ドノヤウナ關係ガアルカヲシラベヨ。

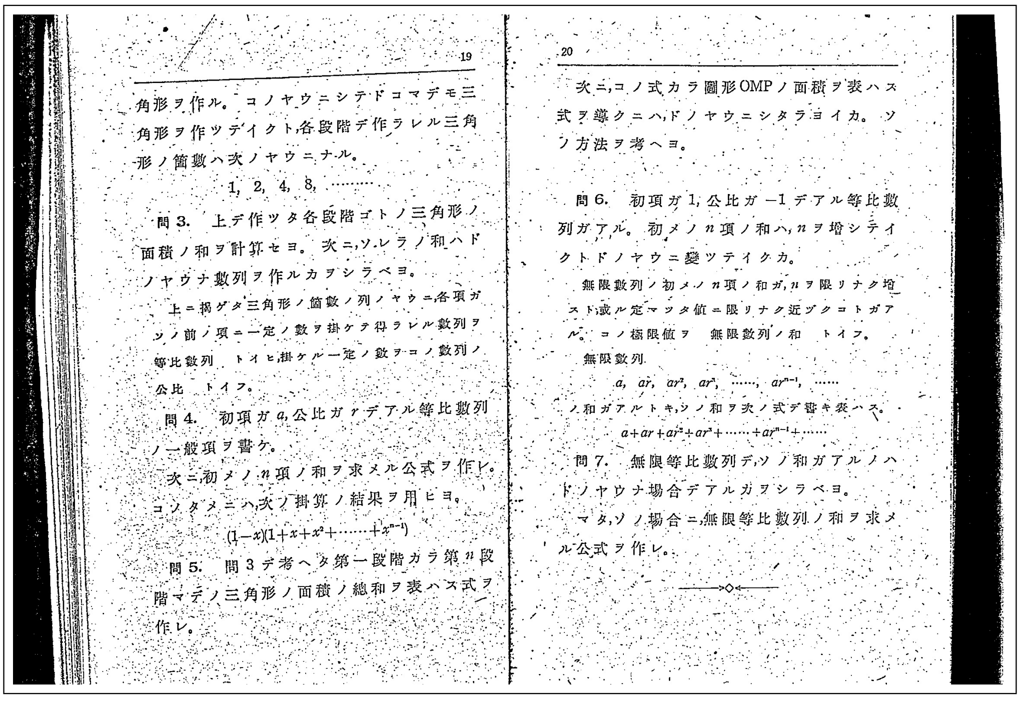
問 2. 前問デ,AB ノ x 軸上ノ正射影ノ長サヲ h トシ,三角形 ABD ノ面積ヲ h デ表ハセ。

前頁ノ圖デ,弦 OP ヲ引キ,ソノ上ニ問 1 デ述ベタ方法デ三角形ヲ作リ,ソノ頂點ヲ A トスル。

次ニ,弦 OA, AP ノ上ニ同ジ方法デ三角形ヲ作リ,ソノ頂點ヲ B, C トスル。

更ニ,弦 OB, BA, AC, CP ノ上ニ同ジ方法デ三

図 2.14　等比数列　問 1〜7(1)



19

角形ヲ作ル。コノヤウニシテドコマデモ三角形ヲ作ツテイクト,各段階デ作ラレル三角形ノ箇數ハ次ノヤウニナル。

1, 2, 4, 8, ………

問 3. 上デ作ツタ各段階ゴトノ三角形ノ面積ノ和ヲ計算セヨ。次ニ,ソレラノ和ハドノヤウナ數列ヲ作ルカヲシラベヨ。

上ニ掲ゲタ三角形ノ箇數ノ列ノヤウニ,各項ガソノ前ノ項ニ一定ノ數ヲ掛ケテ得ラレル數列ヲ等比數列　トイヒ,掛ケル一定ノ數ヲコノ數列ノ公比　トイフ。

問 4. 初項ガ a,公比ガ r デアル等比數列ノ一般項ヲ書ケ。

次ニ,初メノ n 項ノ和ヲ求メル公式ヲ作レ。コノタメニハ,次ノ掛算ノ結果ヲ用ヒヨ。

$$(1-x)(1+x+x^2+\cdots\cdots+x^{n-1})$$

問 5. 問 3 デ考ヘタ第一段階カラ第 n 段階マデノ三角形ノ面積ノ總和ヲ表ハス式ヲ作レ。

20

次ニ,コノ式カラ圖形 OMP ノ面積ヲ表ハス式ヲ導クニハ,ドノヤウニシタラヨイカ。ソノ方法ヲ考ヘヨ。

問 6. 初項ガ 1,公比ガ -1 デアル等比數列ガアル。初メノ n 項ノ和ハ,n ヲ増シテイクトドノヤウニ變ツテイクカ。

無限數列ノ初メノ n 項ノ和ガ,n ヲ限リナク増スト,或ル定マツタ値ニ限リナク近ヅクコトガアル。コノ極限値ヲ　無限數列ノ和　トイフ。

無限數列

$$a,\ ar,\ ar^2,\ ar^3,\ \cdots\cdots,\ ar^{n-1},\ \cdots\cdots$$

ノ和ガアルトキ,ソノ和ヲ次ノ式デ書キ表ハス。

$$a+ar+ar^2+ar^3+\cdots\cdots+ar^{n-1}+\cdots\cdots$$

問 7. 無限等比數列デ,ソノ和ガアルノハドノヤウナ場合デアルカヲシラベヨ。

マタ,ソノ場合ニ,無限等比數列ノ和ヲ求メル公式ヲ作レ。

図 2.15　等比数列　問 1〜7(2)

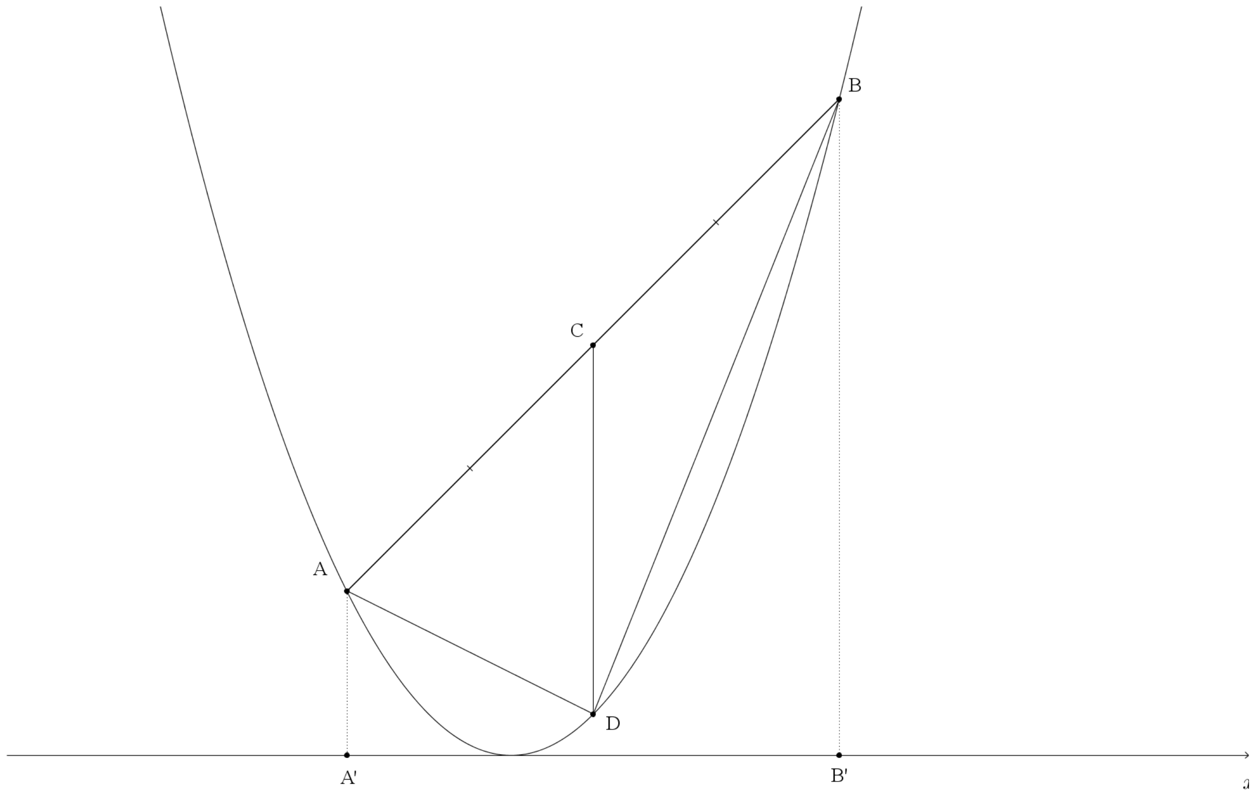


図 2.16　§ 5 問 1

図 2.16 において A(α,α^2)，B(β,β^2) とおく．ここで $\alpha < \beta$ であることに注意する．このとき，弦 AB の x 軸上の正射影 A′B′ の長さは $\beta - \alpha$ となる．また，点 C は弦 AB の中点より，C$\left(\dfrac{\beta+\alpha}{2}, \dfrac{\beta^2+\alpha^2}{2}\right)$ である．すると，題意から点 D の y 座標は $\left(\dfrac{\beta+\alpha}{2}\right)^2$ であることがわかる．従って，CD は以下のように計算される．

$$
\begin{aligned}
\mathrm{CD} &= \frac{\beta^2+\alpha^2}{2} - \left(\frac{\beta+\alpha}{2}\right)^2 \\
&= \frac{(\beta-\alpha)^2}{4} \\
&= \frac{(\mathrm{A'B'})^2}{4}
\end{aligned}
$$

$$
\therefore \quad \mathrm{CD} = \frac{(\mathrm{A'B'})^2}{4} \tag{2.4}
$$

問 2 は，前問において A′B′ $= h$ として，三角形 ABD の面積を h で表す問題である．三角形 ABD の面積を△ ABD とすると，式 (2.3) から

$$
\begin{aligned}
\triangle\ \mathrm{ABD} &= \frac{1}{2}\cdot \mathrm{CD}\cdot \mathrm{A'B'} \\
&= \frac{1}{2}\cdot \frac{(\mathrm{A'B'})^2}{4}\cdot \mathrm{A'B'} \\
&= \frac{(\mathrm{A'B'})^3}{8} \\
&= \frac{h^3}{8}
\end{aligned}
$$

$$
\therefore\quad \triangle\ \mathrm{ABD} = \frac{h^3}{8} \tag{2.5}
$$

となる．次に図 2.13 で示した図形 OMP についても弦 OP を引き，問 1 と同様な方法で三角形をつくり，その頂点を A とする．また，弦 OA，AP についても同様の操作で三角形を作り，その頂点を B，C とする．このような操作を繰り返し行い三角形を作っていくと各段階で作られる三角形の個数は 1，2，4，8，…となることが示唆されている．これは初項 1，公比 2 の等比数列となっている．

問 3 では図形 OMP についての繰り返し操作での各段階における三角形の面積の総和を求める問題となる．2 段階目では三角形 OAB と三角形 APC が作られる．このとき

$$
\triangle\ \mathrm{OAB} = \triangle\ \mathrm{APC} = \frac{1}{8}\triangle\ \mathrm{OAP}
$$

となる．よって，2 段階目での三角形の面積の総和を S_2 とすると

$$
\begin{aligned}
S_2 &= \triangle\ \mathrm{OAP} + 2\times\frac{1}{8}\triangle\ \mathrm{OAP} \\
&= \triangle\ \mathrm{OAP} + \frac{1}{4}\triangle\ \mathrm{OAP}
\end{aligned}
$$

となる．同様の操作を繰り返して $n(n=1,2,3,\cdots)$ 段階目での三角形の面積の総和を S_n とすると

$$
S_n = \triangle\ \mathrm{OAP} + \frac{1}{4}\triangle\ \mathrm{OAP} + \frac{1}{4^2}\triangle\ \mathrm{OAP} + \cdots + \frac{1}{4^{n-1}}\triangle\ \mathrm{OAP} \tag{2.6}
$$

を得る．この結果から，n 段階目の三角形の面積の総和は初項が △ OAP，公比が $\frac{1}{4}$ の等比数列の和であることがわかる．

問 4 は，初項が a，公比が r の等比数列の一般項を求め，その数列の初めの n 項の和を求める公式を作るものである．『趣意書』には，前節の問 6 で等差数列の一般項を導く際，「帰納的ニ行ヘバヨイ」と指示されていたことから，ここでも第 2 項は ar，第 3 項は ar^2，$\cdots$，第 n 項は ar^{n-1} というように帰納的に導かせたと推測できる．

また，第 n 項までの和については

$$
(1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}) = 1-x^n \tag{2.7}
$$

を用いて求めることを指示している．ただし，問題文にも『趣意書』にも言及されてはいないが，式 (2.6) を用いるのは $x \neq 1$ の場合のみである．$x \neq 1$ のとき，$1-x \neq 0$ であるから，式 (2.6) の両辺を $1-x$ で割って

$$1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}=\frac{1-x^n}{1-x} \tag{2.8}$$

となる．式 (2.7) の左辺は初項 1，公比 x の等比数列の和を表している．式 (2.6) の両辺に a を掛けて，$x=r$ とすれば以下のように書ける．

$$a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}=\frac{a(1-r^n)}{1-r} \tag{2.9}$$

式 (2.8) の左辺は初項 a，公比 r の等比数列の和を表している．また，$r=1$ のときは，$\underbrace{a+a+\cdots+a}_{n\text{ 個}}=na$ となる．従って，初項 a，公比 r の等比数列の和を求める公式は，

$$a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}=\begin{cases}\frac{a(1-r^n)}{1-r} & (r \neq 1)\\ na & (r=1)\end{cases}$$

と表すことができる．

問 5 では，まず「問 3 デ考ヘタ第 1 段階第カラ n 段階マデノ三角形ノ面積ノ総和 S_n ヲ表ハス式ヲ作レ.」とある。総和 S_n は，すでに式 (2.5) で表されているが，$\mathrm{OM}=h$ とし，問 4 の結果と式 (2.4) を適用すれば，S_n は以下のように変形できる．

$$\begin{aligned}S_n &= \triangle\,\mathrm{OAP}\times\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}}\\ &=\frac{4}{3}\triangle\,\mathrm{OAP}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}\\ &=\frac{4}{3}\cdot\frac{h^3}{8}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}\\ &=\frac{h^3}{6}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}\end{aligned} \tag{2.10}$$

問 5 後半では，「コノ式カラ図形 OMP ノ面積ヲ表ハス式ヲ導クニハ, ドノヤウニシタラヨイカ，ソノ方法ヲ考ヘヨ.」と指示される．まず，図形 OMP の面積は，三角形 OMP の面積から放物弓形 OMP の面積を引くことにより求められる．三角形 OMP の面積は $\frac{h^3}{2}$ であり，第 n 段階で，放物弓形 OMP の面積は，式 (2.9) から $\dfrac{h^3}{6}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}$ と近似されているから，この段階において図形 OMP の面積は，

$$\frac{h^3}{2}-\frac{h^3}{6}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}=\frac{h^3}{3}+\frac{h^3}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^n \tag{2.11}$$

と近似される．さらに，直観的に n を限りなく大きくすると $\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$ が 0 に収束することを認めれば，図形 OMP の面積は $\dfrac{h^3}{3}$ であることが得られる．

ところで，上記の結果を得る際，「$-1 < r < 1$ のとき，r^n は 0 に収束する」ことを利用したが，これは，後の問 7 において，無限等比数列の和の公式を導く際必要な性質である．

問 6 では，初項が 1，公比が -1 の等比数列を扱う．この数列の初項から n 項の和は，n を増やしていくとどのように変化するかという問題である．問 4 を用いて初項から n 項の和を式で表すと，$\dfrac{1-(-1)^n}{2}$ となる．この値は n が奇数のとき 1，偶数のとき 0 をとる．よって，n を増やしていくと，数列の和は 0 と 1 を交互に繰り返すのである．すなわち，n を大きくしてもその和は一定の値に近づくことはないのである．ここで本教科書では，無限数列の和について触れており，

> 無限数列ノ初メノ n 項ノ和ガ，n ヲ限リナク増スト，或ル定マツタ値ニ限リナク近ヅクコトガアル．コノ極限値ヲ　無限数列ノ和　トイフ．

とあり，問 6 は無限数列の和が存在しない場合の例の 1 つとなっている．また，

> 無限数列 a，ar，ar^2，ar^3，$\cdots$，ar^{n-1}，$\cdots$ ノ和ガアルトキ，ソノ和ヲ次ノ式表ハス．
> $a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$

と記されている．すなわち，教科書では，各項を「+」でつなぐ上記のような式表現は，無限数列の和が存在するときのみ許されるものとし，教科書では，「級数」という語は用いられれていない．

一方，『趣意書』では，「級数」について説明がある．「級数」という語を用いれば，その和の有無にかかわらず，「無限級数」として，$a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$ を考え，この式表現が可能となることに言及されている．さらに『趣意書』では，

> 数列ノ和ノ収斂・発散ヲ論ズル場合ニハ，コノ語ガ無イト不便デアル．

と記されている．

問 7 は，無限等比数列の和が存在するための条件の考察に加えて，その和を求める公式を作るという内容である．無限数列の和は，数列の部分和の極限の有限確定値であるため，初項 a，公比 r の等比数列の第 n 項までの部分和

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} = \begin{cases} \dfrac{a(1-r^n)}{1-r} & (r \neq 1) \\ na & (r = 1) \end{cases}$$

の極限を考えればよい．$r = 1$ のときは，部分和 $S_n = na$ となり，n を限りなく大きくすると S_n は発散する．$r \neq 1$ のとき，$S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$ であり，n を限りなく大きくすると，$|r| < 1$ のとき，r^n は 0 に収束し，$|r| > 1$ のとき，r^n は発散する．従って，無限等比数列の和が存在するための条件は $|r| < 1$ であり，和の公式は $\dfrac{a}{1-r}$ となる．

§ 5 の節末問題は 10 問配置されている．その中には，『尋常小学算術書』（通称 緑表紙）の表紙絵に描かれていた，フラクタル図形の面積の極限や，等比数列の一般項とその和，収束値を求める問題がある．

§ 6 は無限小数を扱い，§ 7 は様々な練習問題を扱う．これらの考察は本研究との関連性が比較的低いと考えられるため，割愛する．

2.2 「2. 連続的変化」について

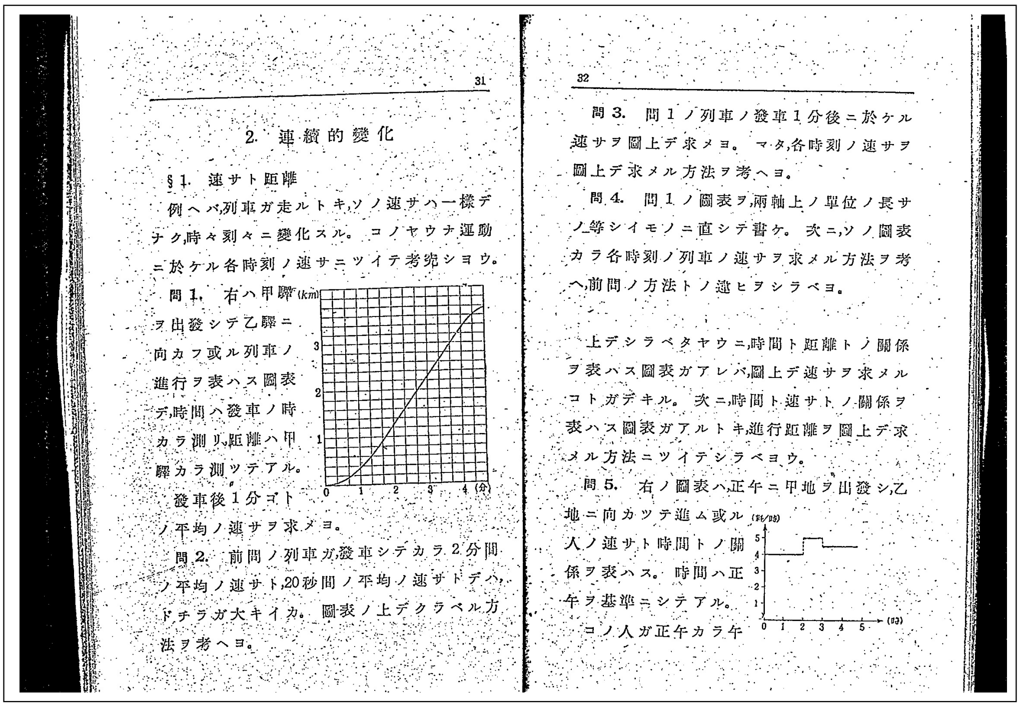
『趣意書』には,「2. 連続的変化」について以下のように述べている.

> 本章ノ眼目ハ，増加率ト和ノ極限トノ意義並ビニコレラヲ求メル演算トノ関連ヲ十分ニ理会サセ，微分ト積分ノ核心ヲ捉ヘサセルニ在ル.

すなわち，ここでの目的は，後に学ぶ増加率と，1 章で学んだ和の極限がそれぞれ持つ意義と演算方法について，関係性を理解すること．その上で微分と積分の核心を捉えることなのである．また，本章において微分と積分の演算の関係性，更に積分の演算方法の導入に着目して考察する．以下では,「2. 連続的変化」の各節の概要について述べる.

2.2.1 § 1. 速サト距離

「速サト距離」では,『趣意書』によると「運動ニ於ケル各瞬間ノ速サノ観念ヲ確立シ，速サト進行距離トノ関係ヲ明確ニスル」と目標が定められている.「速サト距離問 1〜6」を図 2.17 及び 2.18 に示し，各問の概要を表 2.6 に示す.



31

2. 連續的變化

§1. 速サト距離

例ヘバ,列車ガ走ルトキ,ソノ速サハ一樣デナク,時々刻々ニ變化スル。コノヤウナ運動ニ於ケル各時刻ノ速サニツイテ考究シヨウ。

問 1. 右ハ甲驛ヲ出發シテ乙驛ニ向カフ或ル列車ノ進行ヲ表ハス圖表デ,時間ハ發車ノ時カラ測リ,距離ハ甲驛カラ測ツテアル。

發車後 1 分ヨトノ平均ノ速サヲ求メヨ。

問 2. 前問ノ列車ガ,發車シテカラ 2 分間ノ平均ノ速サト,20 秒間ノ平均ノ速サトデハ,ドチラガ大キイカ。圖表ノ上デクラベル方法ヲ考ヘヨ。

32

問 3. 問 1 ノ列車ノ發車 1 分後ニ於ケル速サヲ圖上デ求メヨ。マタ,各時刻ノ速サヲ圖上デ求メル方法ヲ考ヘヨ。

問 4. 問 1 ノ圖表ヲ,兩軸上ノ單位ノ長サノ等シイモノニ直シテ書ケ。次ニ,ソノ圖表カラ各時刻ノ列車ノ速サヲ求メル方法ヲ考ヘ,前問ノ方法トノ違ヒヲシラベヨ。

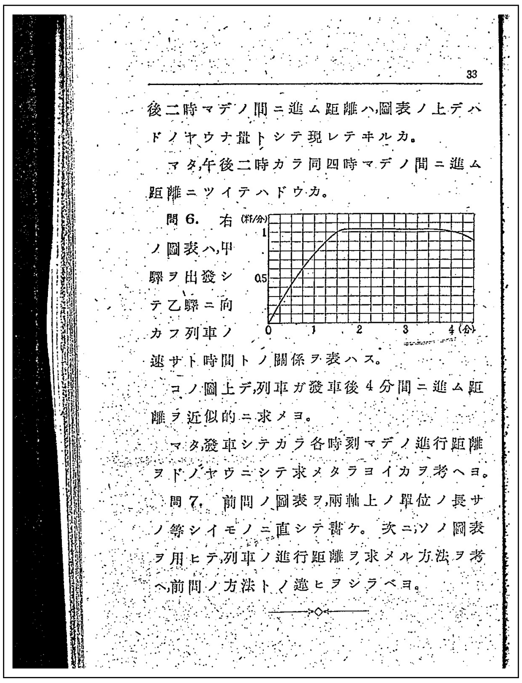
上デシラベタヤウニ,時間ト距離トノ關係ヲ表ハス圖表ガアレバ,圖上デ速サヲ求メルコトガデキル。次ニ,時間ト速サトノ關係ヲ表ハス圖表ガアルトキ,進行距離ヲ圖上デ求メル方法ニツイテシラベヨウ。

問 5. 右ノ圖表ハ,正午ニ甲地ヲ出發シ,乙地ニ向カツテ進ム或ル人ノ速サト時間トノ關係ヲ表ハス。時間ハ正午ヲ基準ニシテアル。

コノ人ガ正午カラ午

図 2.17　速サト距離　問 1〜6(1)

問 1 から問 4 では，以下に示す図 2.19 のグラフについて考察する．このグラフは，甲駅から乙駅へ移動する列車の進行を表している．また，横軸は時間 (分)，縦軸は移動距離 (km) を表す．『趣意書』には,



33

後二時マデノ間ニ進ム距離ハ,圖表ノ上デハドノヤウナ量トシテ現レテヰルカ。

マタ,午後二時カラ同四時マデノ間ニ進ム距離ニツイテハドウカ。

問 6. 右ノ圖表ハ,甲驛ヲ出發シテ乙驛ニ向カフ列車ノ速サト時間トノ關係ヲ表ハス。

コノ圖上デ,列車ガ發車後 4 分間ニ進ム距離ヲ近似的ニ求メヨ。

マタ,發車シテカラ各時刻マデノ進行距離ヲドノヤウニシテ求メタラヨイカヲ考ヘヨ。

問 7. 前問ノ圖表ヲ,兩軸上ノ單位ノ長サノ等シイモノニ直シテ書ケ。次ニ,ソノ圖表ヲ用ヒテ,列車ノ進行距離ヲ求メル方法ヲ考ヘ,前問ノ方法トノ違ヒヲシラベヨ。

図 2.18　速サト距離　問 1〜6(2)

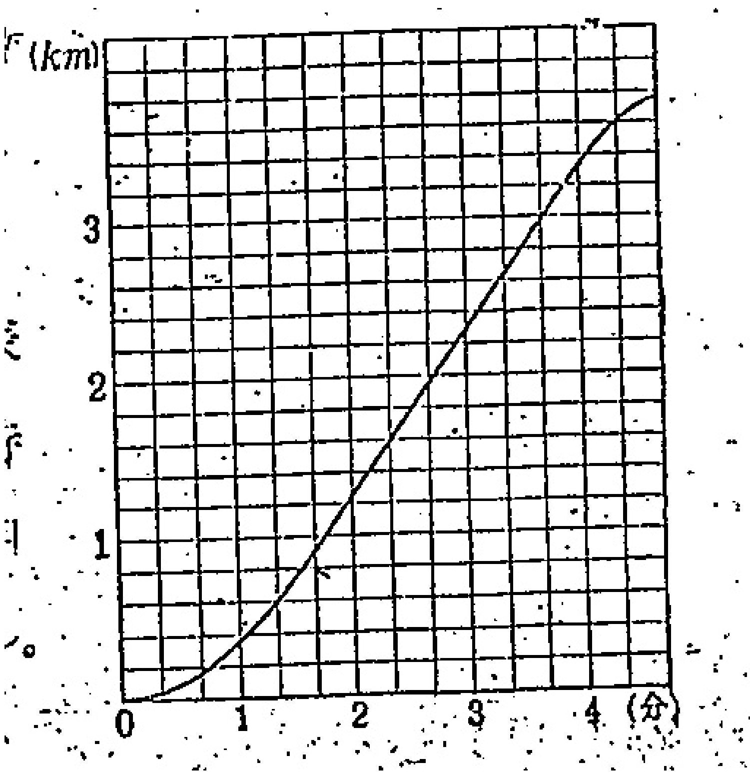


図 2.19　§ 2 問 1 から問 4 で扱われるグラフ

表 2.6　「§ 1. 速サト距離」の概要

問番号	テーマ
1	時間と移動距離のグラフ
2	グラフに基づいた平均の速さの考察
3	グラフに基づいた瞬間の速さの考察
4	単位の長さを揃えたグラフにおける速さの考察
5	時間と速さのグラフ及びグラフに現れる移動距離
6	グラフに現れる移動距離の近似

> 1 分間，10 秒間，1 秒間トイフヤウニ，漸次ニ短イ時間ノ平均ノ速サヲ考ヘテイクト，ソノ極限トシテ瞬間ニ於ケル速サノ観念ニ達スル.
>
> コノ観念ヲ得サセルト同時ニ，瞬間ノ速サト図表トノ関係ヲ追究サセルノガ問 1 カラ問 4 マデの目的デアル.

とある．つまり，平均の速さを考え，漸次その時間を短くして，瞬間の速さの概念に達せしむる傍ら，グラフ上では，直線の勾配をもって速さが表現さてれいることに気づかせ，その直線が割線から接線へと変化していくことを見出させるのである.

問 1 は，列車の発車後 1 分毎の平均の速さを問う．x_1(分) から x_2(分) の間に $y_1(km)$ 地点から $y_2(km)$ 地点まで進んだとき，平均の速さは，$\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(km/分)$ で表される．これはこのグラフの時間が x_1 から x_2 まで変化するときの平均変化率である．具体的な値として，0 分〜1 分は 0.4$(km/分)$，1 分〜2 分は 0.8$(km/分)$，2 分〜3 分は 1.0$(km/分)$，3 分〜4 分は 1.2$(km/分)$ と求められる.

問 2 は，列車が発車してから 2 分間の平均の速さと，20 秒間の平均の速さではどちらが大きいかをグラフ上で判断する方法を問う．発車してから 20 秒間の平均の速さを具体的に求めることはできない．しかし，問 1 において割線の勾配が大きいほど平均の速さが大きい傾向にあることがわかるから，発車してから 2 分間の平均の速さの方が大きいと判断できる.

問 3 では，列車の発車 1 分後における速さをグラフ上で求めさせる．また，各時刻での速さを求める方法を考察させる．ここでいう速さとは瞬間の速さであり，平均の速さと区別しなければならない．『趣意書』には，「漸次ニ短イ時間ノ平均ノ速サト曲線ノ勾配トノ関係ヲ導ク」とあり，1 分前後において微小な時間の変化における平均の速さを考えればよい．しかし，移動距離の具体的な関数が与えられていないため，1 分前後の微小時間での平均の速さを求めることができない．そこで，グラフ上から求めるというテーマから，発射後 1 分後や各時刻において定規でおおまかにグラフの接線を引き，その接線の傾きを求めるなどの方法を用いたのではないかと考えられる.

問 4 は，与えられたグラフの両軸の単位の長さを揃えて書き直し，そのグラフから各時刻における列車の速さを求める方法を考察するものである．グラフの軸の単位の長さを揃えることについ

て，『趣意書』は「両軸上ノ単位ノ長サヲ等シクシテオクト，接線ト横軸トノ作ル角ノ正接ガソノママ速サヲ表スカラ便利デアル」と述べており，これが前問までの速さを求める方法の違いといえるだろう．直線の傾きと正接の関係については『数学 第二類 3』の第 3 節，§ 3 の練習問題で学習済みである．

以上，問 4 までは時間と進行距離の関係を示したもの，いわゆる s-t グラフを扱ったが，問 5，問 6，問 7 は，時間と速さを示した v-t グラフを扱う．『趣意書』では，

> 距離ト速サガ一方デハ曲線ト勾配デ表ハサレ，他方デハ面積ト曲線デ表ハサレルコトニ注目シ，同ジ関係ノ二様ノ図表示ヲ明確ニ理会スルコトガ肝要デアル．コノ点ガハツキリシナイト，今後ノ理会ガ円滑ニイカナイ．

と注意書きがなされている．

問 5 では，図 2.20 のグラフについて考察する．このグラフは人が甲地から乙地へ移動する様子を示しており，横軸は時間 (時)，縦軸は速さ (粁/時)，原点は正午を表している．

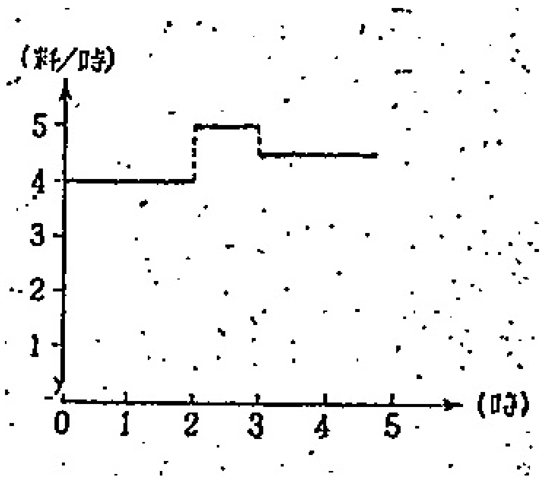


図 2.20　§ 2 問 5 で扱われるグラフ

ここでは，まず，正午から午後 2 時までの間に進む距離を求める．グラフから，正午から午後 2 時までの 2 時間は 4 粁/時と一定の速さで歩いていることが読み取れ，求める距離は，4 粁/時× 2 時間で 8 粁と計算できる．ここで，図上では，4 × 2 は，グラフ下部の矩形の面積を示している．次に，午後 2 時から午後 4 時についても同様に問われる．この場合，午後 3 時時点で速さが変わるが，午後 3 時までと午後 3 時から 1 時間ずつに分割して考えればよく，面積は 2 つの矩形の面積和になる．こうして，問 5 では，速さが階段関数のグラフで表されるとき，グラフ下部の矩形の面積が進む距離を示すことを理解させるのである．

問 6，問 7 では，以下に示す図 2.2.21 のグラフについて考察する．このグラフは列車が甲駅から乙駅まで移動する様子を表しており，問 5 と同様に速さと時間を示すものとなっている．

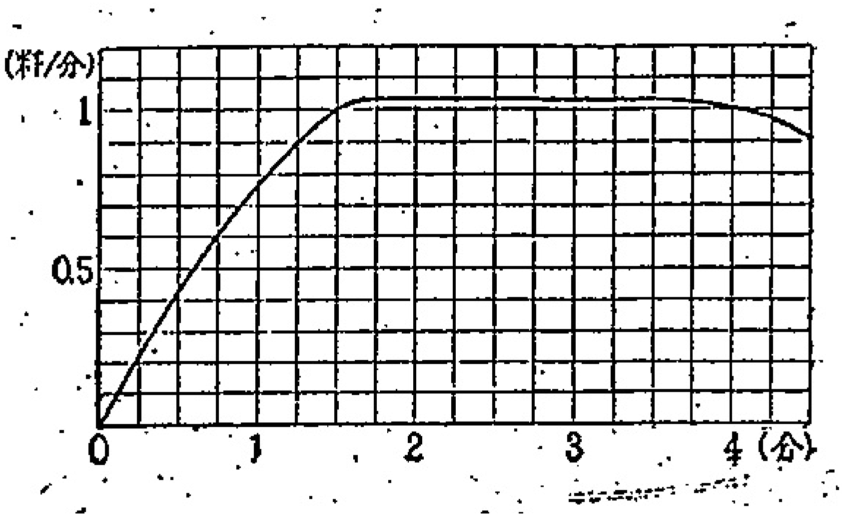


図 2.21　§ 2 問 6，問 7 で扱われるグラフ

問 6 では，列車が発車後 4 分間に進む距離を近似的に求めさせる．問 5 で，進行距離がグラフの下の部分の面積に等しいことを得たが，今回はグラフ自体に曲線部分が含まれていることと，両軸の単位の長さが等しくないのでこの方法は適用できない．そこで，0 分から 1 分 30 秒までについて，以下に示す図 2.22 のように階段状のグラフとして近似すると，15 秒ごとの進行距離を求めることができる．また，1 分 30 秒から 4 分までについては速さは一定とし，その値を 1 粁/分と近似する．そのときの近似値を実際に求めてみると，3.35 粁となる．

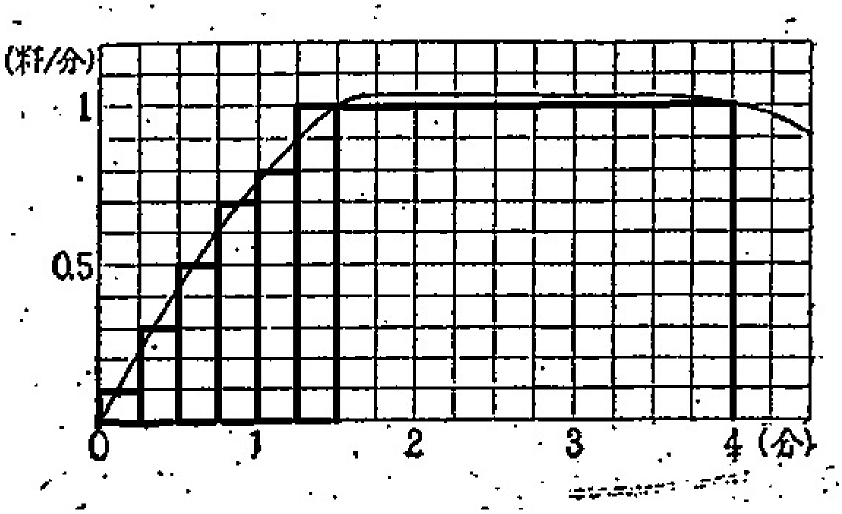


図 2.22　§ 2 問 6，問 7 で扱われるグラフを階段上に近似した

さらに，問 7 では，両軸の単位の長さを等しいものにし，そのグラフから列車の進行距離を求める方法を考えさせる．前問とは異なり両軸の単位の長さを等しくしたことにより，グラフの下の部分の面積がそのまま進行距離となる．ただし，グラフに曲線部分が含まれてはいるが，ここで，第

1 節，第 2 節で扱った考え方を想起させ，曲線を階段関数グラフの極限と捉えることで，この下部の面積が距離を表すことが示される．

ところで，問 1 から問 4 では物体の移動距離と時間を表すグラフから速さを求める構成であり，微分の導入である．ここでは，今日の数学教科書と同様，まず平均の速さを認識させ，経過時間を短くしていくことで，瞬間の速さに辿りつく流れとなっている．しかし，具体的な関数式を与えおらず，速さを正確に計算させることは行わない．例えば，問 3 の「列車ノ発車 1 分後ニ於ケル速サヲ図上デ求メヨ」という問では，あくまでもグラフ上で作図等をし，描いた図から傾きを読み取らせ，速さを認識させることになる．このように，グラフ上で実測操作をさせることにより，微分の概念構成を図っている点は，『数学 第一類』の著しい特徴といえる．この点は，積分においても同様である．問 5 から問 7 では，速さと時間のグラフから進行距離を求める積分の導入部分であるが，ここでも，速さが具体的な関数を与えず，図示されたグラフから，両軸の単位の長さが等しいグラフを考え，グラフに囲まれた図形の面積が移動距離と一致することを明らかにしている．

§ 1 の練習問題は 5 問で構成されており，主に本編の類似問題である．ここでは，後§ 2 の問 2 で取り上げることから，練習問題 3 を検討してみたい．練習問題 3 は直線上の動点の位置と速さの関係に関する問題である．練習問題 3 で用いるグラフを図 2.23 に示す．

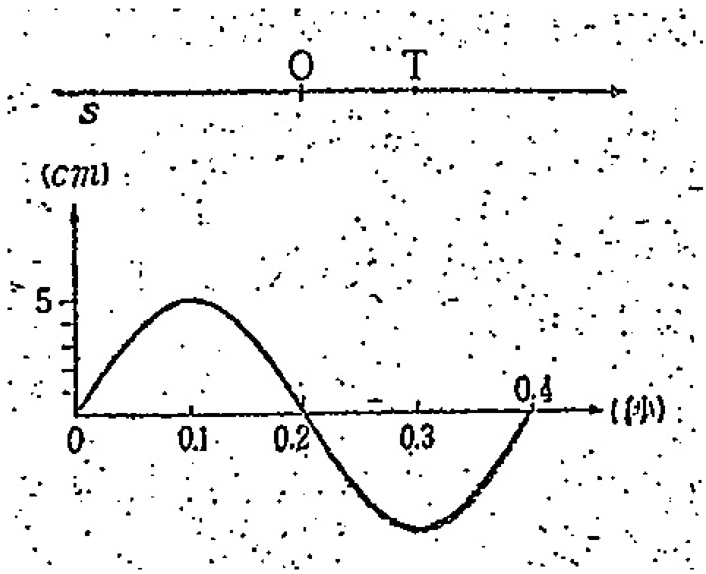


図 2.23　§ 1 練習問題 3

図 2.23 の上図は直線 s 上に原点 O と動点 T があることを示しており，下図は T の座標と時間との関係を表している．このとき，0 秒，0.1 秒後，0.2 秒後，0.3 秒後での T の速さが問われている．下図のグラフから，T の座標を $y(cm)$，経過時間を x(秒) とおくことにより，y と x の間には $y = 5\sin 5\pi x$ の関係があることがわかる．ここで，本来ならば y の $x = 0$, 0.1, 0.2, 0.3 における微分係数を求めればそれぞれの時刻での T の速さが求められるのだが，微分係数は現時点で学習していない．よってこの問でもグラフに接線を定規で引き，その傾きを計算するしかないだろう．実際に筆者が接線を引いて傾きを計算し速さを求めてみると，順に約 $75cm/$秒，約 $0cm/$秒，

約-75cm/秒，約 0cm/秒となった．微分係数を計算すると順に 25πcm/秒，0cm/秒，-25πcm/秒，約 0cm/秒を得る．よって定規で接線を引く方法でもおおむね正確に速さ求めることができる．

2.2.2 § 2. 速サト距離ノ圖表

「速サト距離ノ圖表」について，『趣意書』は，

> 前節デ確立シタ箇々ノ時刻ニ於ケル速サ及ビ箇々の時間ニ於ケル進行距離ノ概念カラ進ンデ，函数トシテノ速サト進行距離ノ概念ヲ導入シ，同時ニ圖表トノ関係ヲ明ラカニスル．

と記されている．また，教科書には，

> 時間ト距離トノ関係ヲ表ハス圖表カラ，時間ト速サトノ関係ヲ表ハス圖表ヲ作ル方法及ビ逆ニ，後者カラ前者ヲ作ル方法ニツイテ考究シヨウ．

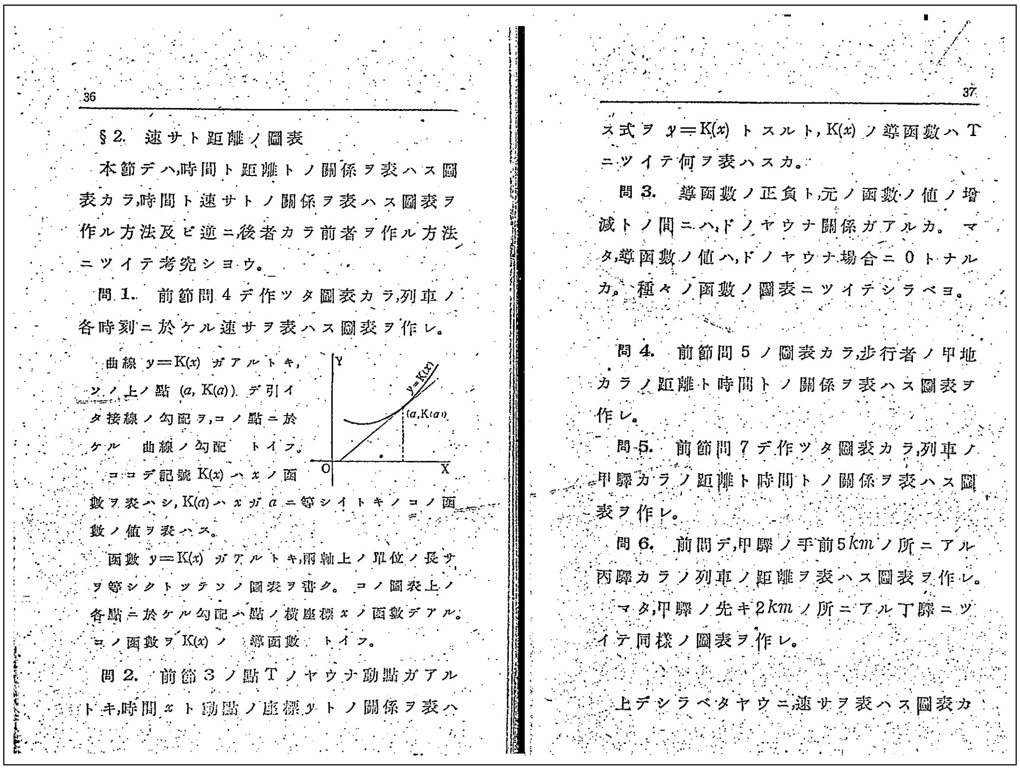
とある．

前節においては，専ら，各時刻における距離を示した $s-t$ グラフを利用して，その勾配に着目し，速さを導出すること，およびその逆として，各時刻の速さを示した $v-t$ グラフを利用して，その下部の面積から進行距離を導出することを行ったが，この節では，進行距離と速さの両者を，それぞれ時刻の関数として捉え，それらを表現した $s-t$ グラフと $v-t$ グラフの一方から他方を導かせる．すなわち関数と関数との関係について考究させるのである．さらには，変化する勾配を新たな関数とし，「導関数」の語を，導関数の元の関数として「原始関数」を定義する．

「速サト距離ノ圖表 問 1〜10」を図 2.24 及び 2.25 に示し，各問の概要を表 2.7 に示す．

表 2.7 「§ 2. 速サト距離ノ圖表」の概要

問番号	テーマ
1	時間と移動距離のグラフから時間と速さのグラフの作成
2	移動距離の導関数
3	導関数の正負と元の関数の増減の考察
4	時間と速さのグラフから時間と移動距離のグラフの作成
5	問 4 と同様
6	1 つの速さのグラフから複数の移動距離のグラフの作成
7	導関数のグラフと直線が囲む面積
8	原始関数の性質
9	導関数のグラフの作成
１０	原始関数のグラフの作成



36

§2. 速サト距離ノ圖表

本節デハ,時間ト距離トノ關係ヲ表ハス圖表カラ,時間ト速サトノ關係ヲ表ハス圖表ヲ作ル方法及ビ逆ニ後者カラ前者ヲ作ル方法ニツイテ考究シヨウ。

問 1. 前節問 4 デ作ツタ圖表カラ,列車ノ各時刻ニ於ケル速サヲ表ハス圖表ヲ作レ。

曲線 $y=K(x)$ ガアルトキ,ソノ上ノ點 $(a, K(a))$ デ引イタ接線ノ勾配ヲ,コノ點ニ於ケル曲線ノ勾配トイフ。

ココデ記號 $K(x)$ ハ x ノ函數ヲ表ハシ, $K(a)$ ハ x ガ a ニ等シイトキノコノ函數ノ値ヲ表ハス。

函數 $y=K(x)$ ガアルトキ,兩軸上ノ單位ノ長サヲ等シクトツテソノ圖表ヲ畫ク。コノ圖表上ノ各點ニ於ケル勾配ハ點ノ横座標 x ノ函數デアル。コノ函數ヲ $K(x)$ ノ導函數トイフ。

問 2. 前節 3 ノ點 T ノヤウナ動點ガアルトキ,時間 x ト動點ノ座標 y トノ關係ヲ表ハ

37

ス式ヲ $y=K(x)$ トスルト, $K(x)$ ノ導函數ハ T ニツイテ何ヲ表ハスカ。

問 3. 導函數ノ正負ト,元ノ函數ノ値ノ増減トノ間ニハ,ドノヤウナ關係ガアルカ。マタ,導函數ノ値ハ,ドノヤウナ場合ニ 0 トナルカ。種々ノ函數ノ圖表ニツイテシラベヨ。

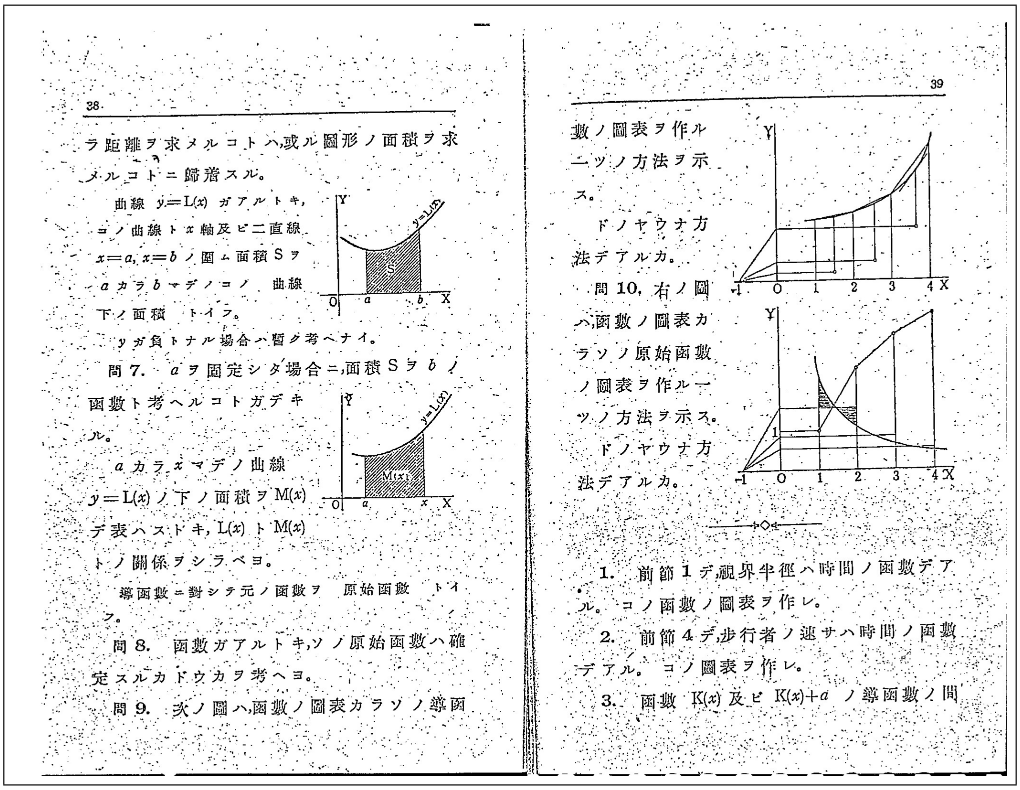
問 4. 前節問 5 ノ圖表カラ,歩行者ノ甲地カラノ距離ト時間トノ關係ヲ表ハス圖表ヲ作レ。

問 5. 前節問 7 デ作ツタ圖表カラ,列車ノ甲驛カラノ距離ト時間トノ關係ヲ表ハス圖表ヲ作レ。

問 6. 前問デ,甲驛ノ手前 5km ノ所ニアル丙驛カラノ列車ノ距離ヲ表ハス圖表ヲ作レ。マタ,甲驛ノ先キ 2km ノ所ニアル丁驛ニツイテ同様ノ圖表ヲ作レ。

上デシラベタヤウニ速サヲ表ハス圖表カ

図 2.24　速サト距離ノ圖表 問 1〜10(1)



38

ラ距離ヲ求メルコトハ,或ル圖形ノ面積ヲ求メルコトニ歸着スル。

曲線 $y=L(x)$ ガアルトキ,コノ曲線ト x 軸及ビ二直線 $x=a$, $x=b$ ノ圍ム面積 S ヲ a カラ b マデノコノ曲線下ノ面積トイフ。

y ガ負トナル場合ハ暫ク考ヘナイ。

問 7. a ヲ固定シタ場合ニ,面積 S ヲ b ノ函數ト考ヘルコトガデキル。

a カラ x マデノ曲線 $y=L(x)$ ノ下ノ面積ヲ $M(x)$ デ表ハストキ, $L(x)$ ト $M(x)$ トノ關係ヲシラベヨ。

導函數ニ對シテ元ノ函數ヲ原始函數トイフ。

問 8. 函數ガアルトキ,ソノ原始函數ハ確定スルカドウカヲ考ヘヨ。

問 9. 次ノ圖ハ,函數ノ圖表カラソノ導函

39

數ノ圖表ヲ作ルニツノ方法ヲ示ス。

ドノヤウナ方法デアルカ。

問 10. 右ノ圖ハ函數ノ圖表カラソノ原始函數ノ圖表ヲ作ルニツノ方法ヲ示ス。

ドノヤウナ方法デアルカ。

1. 前節 1 デ,視界半徑ハ時間ノ函數デアル。コノ函數ノ圖表ヲ作レ。

2. 前節 4 デ,歩行者ノ速サハ時間ノ函數デアル。コノ圖表ヲ作レ。

3. 函數 $K(x)$ 及ビ $K(x)+a$ ノ導函數ノ間

図 2.25　速サト距離ノ圖表 問 1〜10(2)

問 1 では，前節の問 4 で作った移動距離のグラフから，各時刻における速さを表すグラフを作らせる．移動距離のグラフにおいて，各時刻における速さはグラフの接線の勾配（横軸となす角の正接）で表されることが確認済みであるから，20 秒毎で速さを求めて対応する点を打ち，それらを繋げてグラフを作成すればよいだろう．この問題は導関数のグラフの導入となっており，教科書では導関数を以下のように定義している．

> 函數 $y = \mathrm{K}\ (x)$ ガアルトキ，兩軸上ノ單位ノ長サヲ等シクトツテソノ圖表ヲ書ク．コノ圖表上ノ各點ニ於ケル勾配ハ點ノ横座標 x ノ函數デアル．コノ函數ヲ $\mathrm{K}(x)$ の 導函數 トイフ．

ここで，「各點ニ於ケル勾配」とは，グラフの各点での接線の勾配を表す．よって問 1 から移動距離を表す関数の導関数が，速さの関数を表していることがわかる．

問 2 は前節の練習問題 3 に関連した問題である．動点 T について，時間を x，座標を y としたとき，x と y の関係を $y = \mathrm{K}\ (x)$ とすると，$\mathrm{K}(x)$ の導関数は T の何を表しているかが問われている．ここまでで学習したことから，$\mathrm{K}(x)$ の導関数は動点 T の各時刻における速さを表していることがわかる．

問 3 では，導関数の正負と元の関数の増減にどのような関係があるか，さらに導関数の値が 0 になるのはどのような場合であるかを種々の関数について調べさせる．任意の関数において，対応する区間で導関数が正ならば増加し，負なら減少する．導関数の値が 0 になる点では，元の関数の接線の傾きが 0 になる．この問題では，導関数から元の関数のグラフの概形を考えることができることを示唆している．また，今日の教科書においては，導関数の値が 0 になる点で元の関数は極値をとるとしているが，極値という言葉は本教科書では使われていない．

問 4 では，前節の問 5 のグラフから，時刻と歩行者の移動距離の関係を表すグラフを作らせる．前節問 5 で与えられたグラフは，時間と速さの関係のグラフであり，このグラフは，出発から 0〜2 時間では $4km/$時，2〜3 時間では $5km/$時，3〜5 時間では $4.5km/$時 となっており，一定時間毎の等速度運動を示す階段関数となっている．本問では，このグラフを元にして，時間と移動距離のグラフを作らせる．ここで出来るグラフは折れ線となり，各時刻の速さは，グラフの傾きとして現れる．さらに，作成したグラフの各時刻における値は，元のグラフにおける下の部分の面積と一致することがわかる．本問では，階段関数が扱われており，生徒は容易に捉えることができるだろう．問 1，問 2 では、移動距離のグラフから速さのグラフを作ったが，問 4 では速さから移動距離のグラフを作るのであるから，問 1，2 と逆の操作である．これは原始関数の導入であるといえる．また，原始関数と導関数の関係性を暗示するものとなっている．

問 5 では，前節の問 7 で作ったグラフから時刻と列車の移動距離の関係を表すグラフを作らせる．曲線下の面積を考えることにより移動距離を求めることができたので，各時刻における列車と甲駅の距離は容易に求められ，それをグラフに反映すればよい．この問も原始関数の導入である．

問 6 は問 5 に関連して，甲駅の手前 $5km$ の場所にある丙駅と列車の距離を表すグラフと，甲駅の $2km$ 先にある丁駅と列車の距離を表すグラフを作らせる問題である．それぞれのグラフは問 5 で作成したグラフを y 軸方向に 5 平行移動したものと，y 軸方向に-2 平行移動したものである．どちらも前節問 7 の関数の原始関数のグラフとなっており，原始関数は一つに定まらないことを示唆

している．

以降問 7，問 8 にかけて原始関数についての記述がなされている．まず，問 4 から問 6 を根拠として，速さを表すグラフから移動距離を求めることはグラフの下の部分の面積を求めることに帰着することに言及している．そして，今までの列車の移動距離や速さのような具体的事象とはうって変わって一般の関数について曲線下の面積を以下のように定義している．

> 曲線 $y = \mathrm{L}\ (x)$ ガアルトキ，コノ曲線ト x 軸及ビ二直線 $x = a$，$x = b$ ノ圍ム面積 S ヲ a カラ b マデノコノ曲線下ノ面積トイフ．

ただし，y が負となる場合は考えないとしている．

問 7 では上記の面積 S について，a を固定し b を変数 x とした場合，面積 S を x の関数 $\mathrm{M}(x)$ で表せることを言及し，その上で $\mathrm{L}(x)$ と $\mathrm{M}(x)$ の関係を調べさせる．これまで学習した速さと移動距離の関係に基づいて考えると，$\mathrm{L}(x)$ を速さを表す関数，$\mathrm{M}(x)$ を移動距離を表す関数とすれば，$\mathrm{L}(x)$ は $\mathrm{M}(x)$ の導関数であるといえる．以上の解答はこれまでの学習から導いた推測によるものであり，この推測を確かめる方法が『趣意書』に記載されている．微小時間 h における運動から 2 つの関数の関係を導くものである．図 2.26 において，図形 PQRS の面積と矩形 PQRS' の面積が等しくなるように $t \in (x, x+h)$ を選ぶ．このとき，図形 PQRS の面積は $\mathrm{M}(x+h) - \mathrm{M}(x)$ であり，矩形 PQRS' の面積は $\{(x+h)-x\}\mathrm{L}(t)$ であるから，以下が成り立つ．

$$\mathrm{M}(x+h) - \mathrm{M}(x) = \{(x+h)-x\}\mathrm{L}(t)$$

$$\therefore \quad \frac{\mathrm{M}(x+h) - \mathrm{M}(x)}{(x+h)-x} = \mathrm{L}(t) \tag{2.12}$$

式 (2.11) の左辺は時間 x から時間 $x+h$ までの平均の速さを表している．$h \to 0$ とすると，左辺は時間 x における速さを表す．また，$t \to x$ となるから右辺は $\mathrm{L}(x)$ となる．従って $\mathrm{L}(x)$ は，$\mathrm{M}(x)$ の導関数となることがわかる．なお，$h < 0$ の場合にも同様の議論で示される．

また，『趣意書』には $y = \mathrm{M}(x)$ の勾配と元の図との関連性のから導くという方法も記載されている．この証明方法は前者とは解釈が異なるが式 (2.11) のような結果を導くことができる．このような手法は今日の数学教科書にも用いられている．例えば東京書籍の『数学 II』(平成 27 年 2 月 10 日発行) の P214，215 では，一般の関数 $f(x)$ の曲線下の面積 $S(x)$ が，関数 $f(x)$ の原始関数であることの証明に使われている．

問 7 の直後で原始関数を「導函数ニ對シテ元ノ函数ヲ　原始函数　トイフ.」と定義している．このことから，$\mathrm{L}(x)$ は $\mathrm{M}(x)$ の導関数で，このとき $\mathrm{M}(x)$ は $\mathrm{L}(x)$ の原始関数であるというように 2 つの関数の相互関係から導関数と原始関数を定義する．それに対して今日の数学教科書では $f(x)$ の導関数を $f'(x)$，原始関数を $F(x)$ とし，$f(x)$ を中心として導関数，原始関数についてそれぞれを個別に定義するのが通例である．

問 8 は関数が与えられて，その原始関数は確定するかどうかを問うものである．§ 2 の問 6 からわかるように，原始関数は一つに定まらない．また，問 7 の関数 $\mathrm{M}(x)$ の下端 a の値を変化させることによって $\mathrm{M}(x)$ は変化するが，その導関数 $\mathrm{L}(x)$ は変化しないことからも，原始関数が確定し

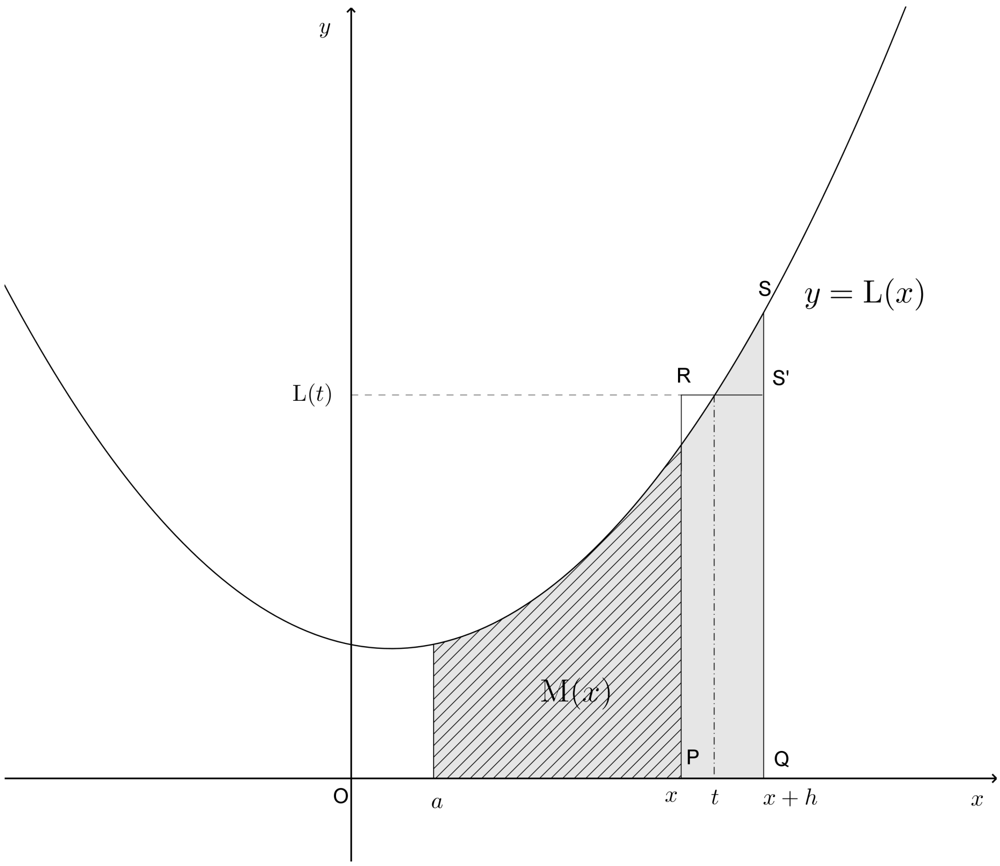


図 2.26　問 7 に関する図

ないことがわかる．

問 9，問 10 は，関数のグラフからそれぞれ導関数と原始関数のグラフを導く様子を描いた図 2.27 が与えられ，それらの方法を考察する問題である．

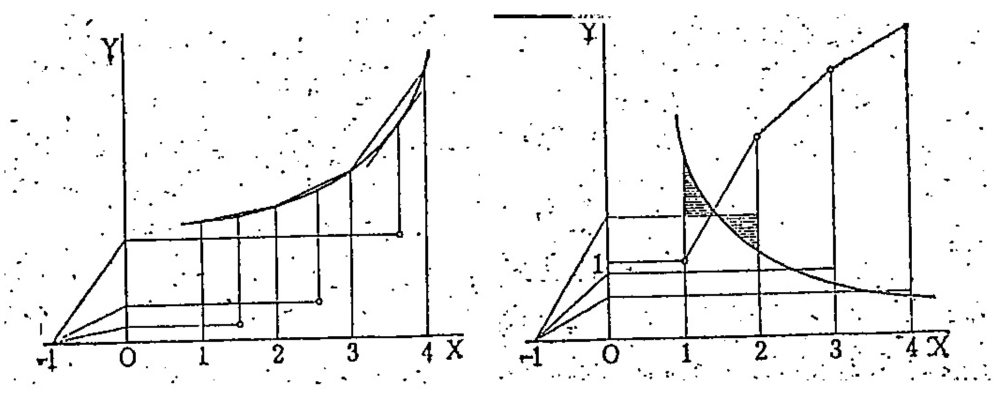


図 2.27　問 9，10 に関する図 (左が問 9，右が問 10)

問 9，問 10 のそれぞれの方法について『趣意書』に記載されている．

まず問 9 の方法について述べる．はじめに直線 $x = 1$，$x = 2$， $x = 3$，$\cdots$ と曲線の隣り合う交点同士を結んで弦をつくる．各弦に平行な曲線の接線の接点 (x_1, y_1)，(x_2, y_2)，(x_3, y_3)，$\cdots$ を目分量で決める．次に点 $(-1, 0)$ を通り各弦に平行な直線を引く．それらの直線と，y 軸との交点を $(0, y_1')$，$(0, y_2')$，$(0, y_3')$，$\cdots$ とする．これらの点を通り，x 軸に平行な直線と，(x_1, y_1)，(x_2, y_2)，(x_3, y_3)，$\cdots$ を通って y 軸に平行な直線との交点はそれぞれ (x_1, y_1')，(x_2, y_2')，(x_3, y_3')，$\cdots$ となる．これらの点を滑らかな曲線で結ぶことで，導関数のグラフを描くことができる．

次に問 10 の方法について述べる．はじめに直線 $x = 1$，$x = 2$， $x = 3$，$\cdots$ で曲線下の面積を区分し，各部と等積な矩形をそれぞれ x 軸上の区間 [1,2]，[2,3]，[3,4]，$\cdots$ 上に目分量で書く．そして，点 (1,1) から区間 [1,2] 上の矩形の高さに等しい勾配で線分を引き，$x = 2$ との交点を $(2, y_2)$ とする．この線分の引き方は，y 座標が矩形の高さと同じ値となるような点を y 軸上にプロットし，その点と $(-1, 0)$ を結んでできる線分を平行移動すればよい．次に $(2, y_2)$ についても同様の操作を行い，$(3, y_3)$ を作る．これらの点を滑らかな曲線で結ぶことで，(1,1) を通る原始関数を描くことができる．これまで物体の移動距離や速さに関するグラフから導関数，原始関数を学んできたが，問 9，問 10 においてはデカルト座標上に同時に一般的な導関数と原始関数を描くことができたことになる．また，問 9，問 10 は互いに逆の操作となっており，微分と積分が逆の演算であることを暗示している．

練習問題は 6 問で構成されており，主に導関数と原始関数の関係について述べさせるものである．例えば，3 は関数 $\mathrm{K}(x)$ とそれを y 軸方向に a だけ移動させた関数 $\mathrm{K}(x) + a$ の導関数にはどのような関係があるか答えさせる問題である．他に，6 は同じ関数の 2 つの原始関数の間にはどのような関係があるか答えさせる問題である．

2.2.3 § 3. 微分

§ 3 の目的は，『趣意書』で以下のように述べている．

> 本節デハ，圖表ニヨツテ直感的ニ定義サレタ導関数ヲ，式ノ上デ求メル方法ヲ考察スルト同時ニ，函数ノ増加率トシテノ意味ヲ明ラカニスル，

すなわち，前節までは導関数をグラフ曲線の勾配として直観的に定義し学んだが，本節ではそれをどのような式で表せるかを関数の増加率と関連付けて考える．

「微分 問 1〜4」を図 2.28 及び 2.29 に示し，各問の概要を表 2.8 に示す．

問 1 は，真空中の物体の落下について，落下開始から x 秒間で $4.9x^2 m$ 落ちるという前提の下で，落下開始から $\frac{1}{10}$ 秒間，$\frac{1}{100}$ 秒間及び h 秒間のそれぞれの平均の速さを求めさせる．それぞれの平均の速さは $0.49m/$秒，$0.049m/$秒，$4.9hm/$秒 と求まる．また，落下開始から $\frac{1}{2}$ 秒後からさらに $\frac{1}{10}$ 秒間，$\frac{1}{100}$ 秒間及び h 秒間経つ時間での平均の速さを求めさせる．それぞれの平均の速さは $5.39m/$秒，$4.949m/$秒，$4.9(1 + h)m/$秒 と計算できる．

40

ニハ,ドノヤウナ關係ガアルカヲ考ヘヨ。

4. 問10ノ方法デ,函數 $y=1-x$ ノ原始函數ノウチ, $x=0$ ノトキ0トナルモノノ圖表ヲ作レ。

5. 定數ハ函數ノ特別ナモノトミルコトガデキル。

函數 $y=2$ ノ導函數ノ圖表ヲ作ツテミヨ。

マタ,函數 $y=0$ ノ原始函數ハドノヤウニナルカヲ考ヘヨ。

6. 同ジ函數ノ二ツノ原始函數ノ間ニハ,ドノヤウナ關係ガアルカヲ考ヘヨ。

§3. 微　分

函數ガ式デ表ハサレテヰルトキ,ソノ導函數ヲ表ハス式ノ求メ方ヲ考究ショウ。

問 1. 眞空中デ物ヲ落スト,始メノ x 秒間ニ凡ソ $4.9x^2 m$ 落チルトイフ。落チ始メテカラ $\frac{1}{10}$ 秒間, $\frac{1}{100}$ 秒間及ビ h 秒間ノソレゾレノ平均ノ速サヲ求メヨ。

図 2.28　微分 問 1〜4(1)

41

マタ,落チ始メテ $\frac{1}{2}$ 秒經ツテカラノ,上ト同様ナ平均ノ速サヲ求メヨ。

問 2. 前問デ考ヘタコトヲ基ニシテ,物體ガ落チ始メテカラ　(1)　$\frac{1}{2}$ 秒經ツタトキ　(2)　a 秒經ツタトキ　(3)　落チ始メノトキノ速サヲ求メヨ。

マタ,落チ始メテカラ x 秒經ツタトキノ速サハ x ノ函數ト考ヘラレル。コノ函數ヲ式デ表ハセ。

x, y ノ小サナ増加ヲ表ハスノニ,記號 $\Delta x, \Delta y$ ヲ用ヒルコトガアル。函數 $y=K(x)$ デ, x ノ値ガ2カラ Δx ダケ増シタトキノ y ノ増加ヲ Δy デ表ハセバ $\Delta y=K(2+\Delta x)-K(2)$ デアル。

コノトキ $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ハ, x ガ2カラ Δx ダケ増ス間ノ y ノ平均ノ増加率デアル。

マタ, Δx ヲ限リナク0ニ近ヅケルトキノ $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ノ極限値ハ, $x=2$ ニ於ケル y ノ増加率デアル。

増加率ハ圖表ノ上デハ勾配デ表ハサレル。随ツテ導函數ハ増加率ヲ x ノ函數トミタモ

42

ノデアル。

マタ,函數 $y=K(x)$ ノ導函數ヲ求メルニハ, Δx ヲ限リナク0ニ近ヅケルトキノ

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{K(x+\Delta x)-K(x)}{\Delta x}$$

ノ極限値ヲ求メレバヨイ。

或ル函數ノ導函數ヲ求メルコトヲ,ソノ函數ヲ微分スルトイフ。

函數 $y=K(x)$ ノ導函數ヲ次ノ記號デ表ハス。

$$y',\quad K'(x),\quad \frac{dy}{dx}$$

問 3. 次ノ函數ヲ微分セヨ。

(1)　$y=x^2$　　(2)　$y=3-2x$

(3)　$y=x^2+x$　　(4)　$y=\left(\frac{1}{2}-3x\right)^2$

問 4. 一邊ガ h cm ノ正方形ノ厚紙ガアル。コノ四隅カラ正方形ヲ切リ落シテ箱ヲ作リ,容積ヲ最モ大キクシタイ。ドレダケノ大キサノ正方形ヲ切リ落シタラヨイカ。

図 2.29　微分 問 1〜4(2)

表 2.8 「§ 3. 微分」の概要

問番号	テーマ
1	物体の自由落下における平均の速さ
2	物体の自由落下における (瞬間の) 速さ
3	関数の微分
4	正方形の厚紙から作られる箱の容積の最大値

問 2 では，問 1 で考えたことを基にして，物体が落ち始めてから $\frac{1}{2}$ 秒後，a 秒後，0 秒後 (落下開始直後) のそれぞれの速さを求めさせる．問 1 において,$\frac{1}{2}$ 秒後からの h 秒間の平均の速さはすでに $4.9(1+h)m/$秒 と求められており, ここで，h を限りなく 0 に近づけたときの速さの収束値が $\frac{1}{2}$ 秒での速さと考えることができるから，$4.9m/$秒 となる．同様に考えて,a 秒での速さは，$9.8a + 4.9h$ の極限値を考えて $9.8a\ m/$ 秒，0 秒での速さは,$4.9h$ の極限として $0m/$秒となる．さらに，問 2 は物体が落ち始めてから x 秒間経過後の速さは x の関数であるとし，その関数の式を求めさせる．これは $\dfrac{4.9(x+h)^2 - 4.9x^2}{h}$ の h を限りなく 0 に近づけたものとなり，その結果は $9.8x\ m$ となる．

そして，問 2 の後に増加率について解説が述べられており，増加率はグラフ上では勾配を表しているから，導関数は増加率を x の関数としてみたものとしている．そして本教科書では導関数を以下のように定義している．

> 函数 $y = \mathrm{K}(x)$ ノ導関数ヲ求メルニハ，Δx ヲ限リナク 0 ニ近ヅケルトキノ
>
> $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\mathrm{K}(x+\Delta x) - \mathrm{K}(x)}{\Delta x}$$
>
> ノ極限値ヲ求メレバヨイ．

ここでの Δx，Δy はそれぞれ x，y の増分を表している．さらに，「或ル函数ノ導関数ヲ求メルコトヲ，ソノ函数ヲ 微分スル トイフ」としている．

問 3 では，基本的な関数の微分の問題が 6 問ある．『趣意書』には，

> 直チニ形式的ナ演算ニ導クコトナク，一應問 1，問 2 ト同様ナ過程ヲ繰リ返シ，微分ノ意義ヲヨク理會サセルヨウニ力ムベキデアル．

と書かれており，すなわち，$(x^n)' = nx^{n-1}$ のような公式を使わず導関数の定義に従って微分することを推進している．本問以降でも $(x^n)' = nx^{n-1}$ のような微分公式は記載されておらず，関数を微分するに当たっては導関数の定義を用いることを基本としている．しかし，§ 4 では微分の逆演算として原始関数を求める問題が存在するため，微分公式の指導もなされたと考えられる．

問 4 では，一辺が h の正方形の厚紙があり，その四隅から正方形を切り落として箱を作る．このとき，箱の体積が最大となるときの切り落とす正方形の大きさを求めさせる．切り落とす正方形の

一辺を $x(0 < x < h)$ とすると，箱の体積は $x(h-2x)^2$ と表され，x の 3 次関数としてみることができる．この式を微分し増減を調べ，グラフから最大値を求めることができる．

練習問題は 6 問で構成されており，主に§ 3 で行った問題の応用問題となっている．1 は関数の微分の演習，2 は導関数のグラフと元の関数のグラフの関係を問う．3 は関数のグラフの概形を描かせる問題である．4，5 は問 4 の類似問題であり，特に 5 は扇形から円錐を作成するとき，円錐の体積の最大値をとる扇形の中心角は何度かを問う．6 は導関数の線形性に関する問題である．

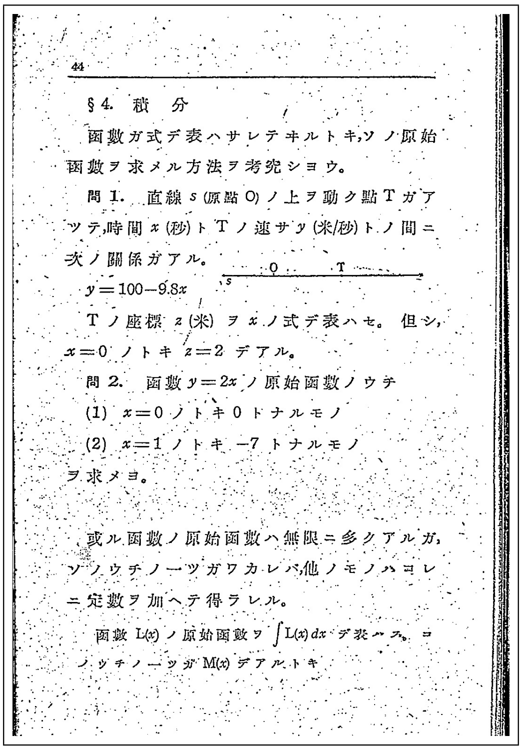
2.2.4　§ 4. 積分

§ 4 の目的は，『趣意書』で以下のように述べられている．

> 本節デハ，先ズ前節ノ結果カラ原始関数ノ求メ方ヲ考究スル．
> 次ニ，和ノ極限トシテノ定積分ノ意義ヲ明ラカニスル．ココハ最モ重要デアル．
> 終ワリニ，定積分ト不定積分トノ関係ヲ用ヒテ定積分ヲ計算スル方法ヲ考究スル．

微分の逆演算として，原始関数を求め方を学ぶ．さらに和の極限として定積分を定義し，不定積分を用いた定積分の計算を行うのが§ 4 の一連の流れである．

「積分 問 1〜6」を図 2.30 及び 2.31 に示し，各問の概要を表 2.9 に示す．



44

§4. 積　分

函數ガ式デ表ハサレテヰルトキ,ソノ原始函數ヲ求メル方法ヲ考究シヨウ。

問 1.　直線 s (原點 O) ノ上ヲ動ク點 T ガアッテ,時間 x (秒) ト T ノ速サ y (米/秒) トノ間ニ次ノ關係ガアル。

$y = 100 - 9.8x$

T ノ座標 z (米) ヲ x ノ式デ表ハセ。但シ, $x=0$ ノトキ $z=2$ デアル。

問 2.　函數 $y=2x$ ノ原始函數ノウチ

(1) $x=0$ ノトキ 0 トナルモノ

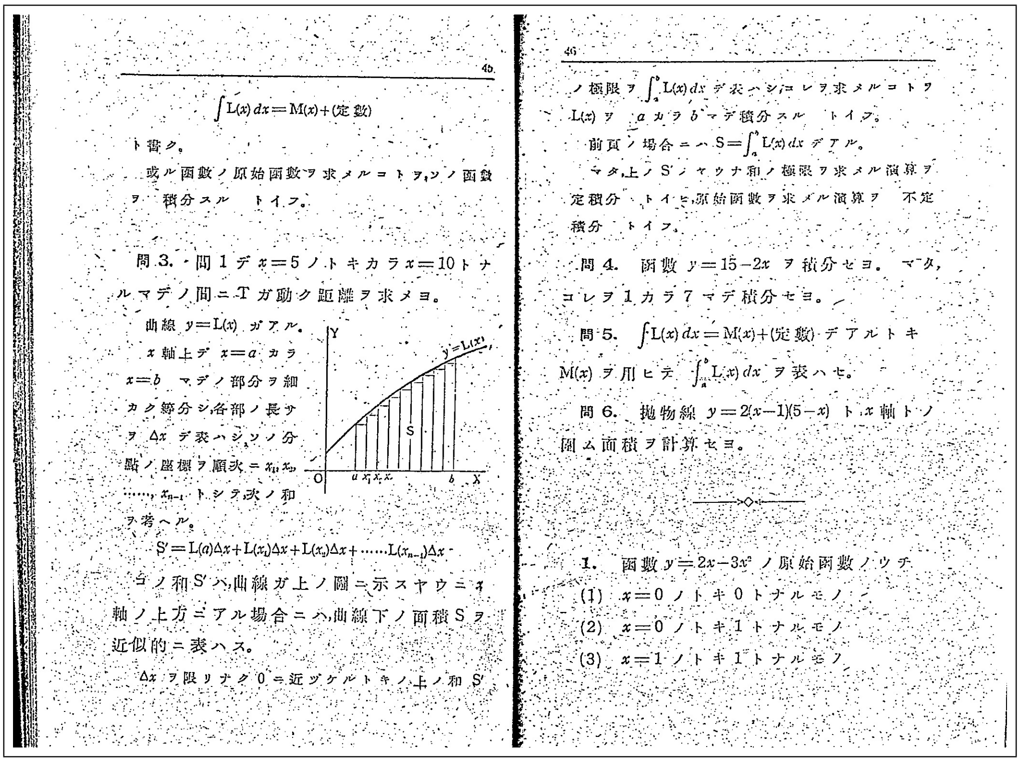
(2) $x=1$ ノトキ -7 トナルモノ

ヲ求メヨ。

或ル函數ノ原始函數ハ無限ニ多クアルガ,ソノウチノ一ツガワカレバ,他ノモノハコレニ定數ヲ加ヘテ得ラレル。

函數 $L(x)$ ノ原始函數ヲ $\int L(x)\,dx$ デ表ハス。コノウチノ一ツガ $M(x)$ デアルトキ

図 2.30　積分　問 1〜6(1)



45.

$$\int L(x)\,dx = M(x) + (\text{定數})$$

ト書ク。

或ル函數ノ原始函數ヲ求メルコトヲ,ソノ函數ヲ　積分スル　トイフ。

問 3.　問 1 デ $x=5$ ノトキカラ $x=10$ トナルマデノ間ニ T ガ動ク距離ヲ求メヨ。

曲線 $y=L(x)$ ガアル。x 軸上デ $x=a$ カラ $x=b$ マデノ部分ヲ細カク等分シ,各部ノ長サヲ Δx デ表ハシ,ソノ分點ノ座標ヲ順次ニ $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_{n-1}$ トシテ次ノ和ヲ考ヘル。

$$S' = L(a)\Delta x + L(x_1)\Delta x + L(x_2)\Delta x + \cdots\cdots L(x_{n-1})\Delta x$$

コノ和 S′ ハ,曲線ガ上ノ圖ニ示スヤウニ x 軸ノ上方ニアル場合ニハ,曲線下ノ面積 S ヲ近似的ニ表ハス。

Δx ヲ限リナク 0 ニ近ヅケルトキノ上ノ和 S′

46

ノ極限ヲ $\int_a^b L(x)\,dx$ デ表ハシ,コレヲ求メルコトヲ L(x) ヲ　a カラ b マデ積分スル　トイフ。

前頁ノ場合ニハ $S=\int_a^b L(x)\,dx$ デアル。

マタ,上ノ S′ ノヤウナ和ノ極限ヲ求メル演算ヲ　定積分　トイヒ,原始函數ヲ求メル演算ヲ　不定積分　トイフ。

問 4.　函數 $y=15-2x$ ヲ積分セヨ。マタ,コレヲ 1 カラ 7 マデ積分セヨ。

問 5.　$\int L(x)\,dx = M(x)+(\text{定數})$ デアルトキ M(x) ヲ用ヒテ $\int_a^b L(x)\,dx$ ヲ表ハセ。

問 6.　拋物線 $y=2(x-1)(5-x)$ ト x 軸トノ圍ム面積ヲ計算セヨ。

1.　函數 $y=2x-3x^2$ ノ原始函數ノウチ
(1)　$x=0$ ノトキ 0 トナルモノ
(2)　$x=0$ ノトキ 1 トナルモノ
(3)　$x=1$ ノトキ 1 トナルモノ

図 2.31　積分　問 1〜6(2)

表 2.9　「§ 3. 積分」の概要

問番号	テーマ
1	時間と速さの関係式から時間と距離の関係式への変換
2	原始関数の導出
3	問 1 に関連した定積分の導入
4	定積分，不定積分
5	定積分の演算方法
6	放物線と x 軸との囲む図形の面積

問 1 は，直線 s(原点 O) 上の動点 T があって，時間 x(秒) と T の速さ y(米/秒) との間に $y=100-9.8x$ の関係があるとき，T の座標 z を x の式で表すものである．ただし，$x=0$ のとき $z=2$ が初期条件として与えられている．『趣意書』には,

先ヅ，計算カマタハ圖表ニヨツテ次々ノ時刻ニ於ケル T ノ座標ヲ概算シ，運動ノ大體ノ模様ヲ掴ンデカラ，問題ノ解決ニ向カツテ進ムガヨイ．
前節ノ逆演算ヲ機械的ニ行フダケデハイケナイ．

と書かれている．すなわち，速さを表す関数の原始関数が移動距離を表すことから，与えられた関数の原始関数を求め，初期条件を適用すれば求めることはできるが，『趣意書』は, その前に，動点 T の運動の様子を捉えることが重要であるとしている．つまり，物体の運動の様子は，元の関数のグラフ下の面積を用いて，zx 平面に求めたい式のグラフを描くことによって捉える．例えば元の関数 $y = 100 - 9.8x$ の区間 [0,1] における直線下の面積は 54.4 であるから，1 秒間に動点 T の進んだ距離は 95.1(米) である．よって，zx 平面には，点 $(0, 2)$ から z 軸方向に 95.1，x 軸方向に 1 平行移動した点 $(1, 95.1)$ に点を打つ．区間 $[1, 2]$，$[2, 3]$，$\cdots$ においても同じ作業を行い，点を結ぶと放物線が描かれる．このようにして動点 T の座標の変化を視覚的に捉えることができる．

その後，z と x の関係式を微分の逆演算を用いて求めればよい．微分の逆演算により，$z = 100x - 4.9x^2$+C(C:定数) という式が導かれるが，$x = 0$ のとき，$z = 2$ という初期条件から C=2 がわかり，求める式は，$z = 100x - 4.9x^2 + 2$ となる．ここで，求められた 2 次関数が，先ほど面積を利用して描いた運動の様子をグラフの示すものと同一のものであることが確かめられる．このことで，この後に続く，面積を求める計算であった区分求積法（定積分）が，微分の逆演算つまり原始関数（不定積分）を利用すれば求められることが示唆できる．

問 2 では，関数 $y = 2x$ の原始関数を求める問題で，(1)$x = 0$ のとき，$y = 0$(2)$x = 1$ のとき，$y = -7$ という初期条件が与えられており，$y = 2x$ の原始関数 $y = x^2$+C(C:定数) にそれぞれの初期条件を当てはめて C を求めればよい．問 1 と問 2 は，$\dfrac{dy}{dx} = f(x)$ の形の微分方程式の特殊解を求める一般的な手法と同じ方法により原始関数を求めている．本教科書には微分方程式という言葉は登場しないが，その初歩的な解法を意識した問題であると考えられる．

その直後，積分についての説明が以下のように記載されている．

> 函数 $L(x)$ ノ原始函数ヲ $\int \mathrm{L}(x)dx$ デ表ハス．コノウチノ一ツガ $\mathrm{M}(x)$ デアルトキ
>
> $$\int \mathrm{L}(x)dx = \mathrm{M}(x) + (\text{定数})$$
>
> ト書ク．或ル函数ノ原始函数ヲ求メルコトヲ，ソノ函数ヲ　積分スル　トイフ．

すなわち，本教科書では原始関数を $\int \mathrm{L}(x)dx = \mathrm{M}(x) + (\text{定数})$ で表し，それを求める演算を「積分する」と名付けているのである．

問 3 では，問 1 において，$x = 5$ から $x = 10$ までで，T が動く距離を求める．『趣意書』には，

> 具體的ナ一ツノ量ヲモトメサセテ不定積分トノ關係ヲ會得サセル．

とあり，$z = 100x - 4.9x^2$+C(C:定数) に $x = 5$ や $x = 10$ を代入したものが何を表すのかを理解させることを目的とする．§ 2 から，z は直線 $y = 100 - 9.8x$ の下の面積を x の関数として表したものである．従って，$z = z(x)$ とすれば，$z(10) - z(5)$ が直線 $y = 100 - 9.8x$ の区間 $[5, 10]$ における下の面積であることがわかり，それが T の動いた距離となる．この問題が定積分の導入となっている．

そして，定積分についての説明がある．区間 $[a,b]$ を Δx の間隔で n 等分し，その分点の x 座標を順に x_1，x_2，$\cdots$，x_{n-1} とする．曲線 $y = \mathrm{L}(x)$ について，区間 $[a,b]$ における曲線下の面積を S'$= \mathrm{L}(a)\Delta x + \mathrm{L}(x_1)\Delta x + \mathrm{L}(x_2)\Delta x + \mathrm{L}(x_{n-1})\Delta x$ と近似する．このとき，Δx を限りなく 0 に近づけたときの S' の極限が曲線下の面積であり，S= $\displaystyle\int_a^b \mathrm{L}(x)dx$ で表すとしている．そして，$\displaystyle\int_a^b \mathrm{L}(x)dx$ を求めることを，「$\mathrm{L}(x)$ ヲ a カラ b マデ積分スル」と定義し，S= $\displaystyle\int_a^b \mathrm{L}(x)dx$ を求める演算を定積分と定義している．ここで原始関数を求める演算を不定積分と定義し，不定積分と定積分の差別化を行っている．この時点では，定積分が不定積分を用いて求められることには触れておらず，あくまで定積分の幾何的意味の理解を重視した説明となっている．

問 4 では，関数 $y = 15 - 2x$ を積分させ，さらに 1 から 7 まで積分させる問題である．原始関数を求めることについては問 1 や問 2 と同様に行えばよい．1 から 7 まで積分することについては，区間 $[1,7]$ における直線下の図形の面積を求めることに帰着するとしながら，問 3 のように，原始関数を用いて定積分を求められることを教授したと考えられる．

問 5 は，$\displaystyle\int \mathrm{L}(x)dx = \mathrm{M}(x) + (\text{定数})$ であるとき，$\mathrm{M}(x)$ を用いて $\displaystyle\int_a^b \mathrm{L}(x)dx$ がどのように表せるかという問題である．これは問 3 の解法を一般化したものであり，$\displaystyle\int_a^b \mathrm{L}(x)dx = \mathrm{M}(b) - \mathrm{M}(a)$ で表されることがわかる．伊藤 (1984)『微分積分学』によると，これが「微分積分学の基本定理」である．この定理の証明は，後の練習問題 3 において課されている．

問 6 は，放物線 $y = 2(x-1)(5-x)$ と x 軸との囲む面積を求める問題である．放物線と x 軸の交点の座標は (1,0)，(5,0) であるから，y を 1 から 5 まで積分すればよい．

練習問題については関数の積分や求積問題，先程述べた「微分積分学の基本定理」の証明など，計 6 問で構成されている．

2.2.5　『数学 中学校用 第一類』の微積分の総括

ここまで，『数学 中学校用 第一類』の微積分の導入から，「微分積分学の基本定理」の創出までの概要を述べた．ここで，その流れを総括しておきたい．

本教科書の微分積分は，「1. 系列の考察」と「2. 連続的変化」の 2 章立てで構成されている．「1. 系列の考察」の第 1 節では，まず，不規則な図形の面積を細長い長方形によって近似し，区分求積法の考え方を実験的に捉えさせる．第 2 節では，その考え方を用いて，$y = x^2$ の区間 [0,1] における下部領域の面積を，区間を 10 等分あるいは n 等分し, 近似的に求めることに取り組ませる．

第 3 節，第 4 節では，数列と数列の和の公式を導入し，第 2 節で近似的に求めた面積が，数列の極限を用いて正確に求めることが可能であることを示す．さらに，第 5 節，第 6 節は，等比数列と無限小数を扱い，習得した極限概念を深めることになる．

「2. 連続的変化」は，第 1 節，第 2 節で，列車等の運動を取り上げ，距離-時間をグラフに示し，その時，速さがグラフの勾配，接線の勾配となって表れることを知らせる．さらに，速さ-時間をグラフに示すことから，曲線下の面積が距離を示すことも学ばせる．

第 3 節では，一般的な関数の増加率，グラフの勾配を表す，新たな関数として導関数を定め，導関数を求めることを「微分する」と定義した．第 4 節では，微分の逆演算により求められる関数を，原始関数 $\int \mathrm{L}(x)dx$ と定め，原始関数を求める演算を「不定積分」とした．導関数と原始関数の関係を導くアプローチがなされているのも本教科書の特徴の一つである．

一方，曲線 $y = \mathrm{L}(x)$ について，区間 $[a, b]$ における曲線下の面積を $\int_a^b \mathrm{L}(x)dx$ と表し，その値を求める演算を「定積分」と定めた．あくまでも，この時点で「定積分」は，原始関数，あるいは「不定積分」とは，別個に作られた概念として存在していることになる．最後に，これらを統合する定理として，原始関数 $\mathrm{M}(x)$ と，その導関数 $\mathrm{L}(x)$ のグラフの曲線下の面積との関係から，$\int_a^b \mathrm{L}(x)dx = \mathrm{M}(b) - \mathrm{M}(a)$（微分積分学の基本定理）を導き，積分法と求積法が同一の概念であることを導くのである．

この章では，我が国の中等教育に初めて微分・積分が導入された時の様相を知るために，当時用いられた 1 種検定教科書『数学第一類 4・5』の内容分析を行ってきた．この微分・積分の課程が定まったのは，第二次世界大戦末期の昭和 17 年の「中学校教授要目」においてである．この微積分の導入時の内容には，いくつか評価すべき点が挙げられる．

まず一つは，定積分の扱いである．現行の高等学校数学では，定積分は不定積分に具体的な 2 つの数を代入したものの差であるとしており，後付けで定積分はグラフ下の面積の値と一致することを述べている．一方，本教科書においては，解析学や数学史に準拠して定積分を定義しており，定積分が曲線下の面積を表しているという核心を突いた教材となっている．

更に，評価すべき点として，物体の運動のような具体的事象から導入を行っていることが挙げられる．具体的事象から抽象的概念へ学習を進めるので，学習者が取り組み易い内容となっている．また，唐突に微分の逆演算が積分であるという現行の高等学校数学の構成に比べて，本教科書のような物体の速さと移動距離の関係から微分と積分の関係性を予想させる構成の方が自然である．

何故なら，アルキメデスらが得た求積法と，フェルマーが得た求接線法は互いに独立して発展し，後にニュートンらがこれらの 2 つのアルゴリズムの可逆性を得た事実があり，本教科書はその事実に沿った構成がなされているからである．これらの評価すべき点は，高等学校数学の微積分教育における課題解決のヒントになり得るだろう．

最後に『数学 第一類』の構成を纏めたものを図 2.32 に示す．

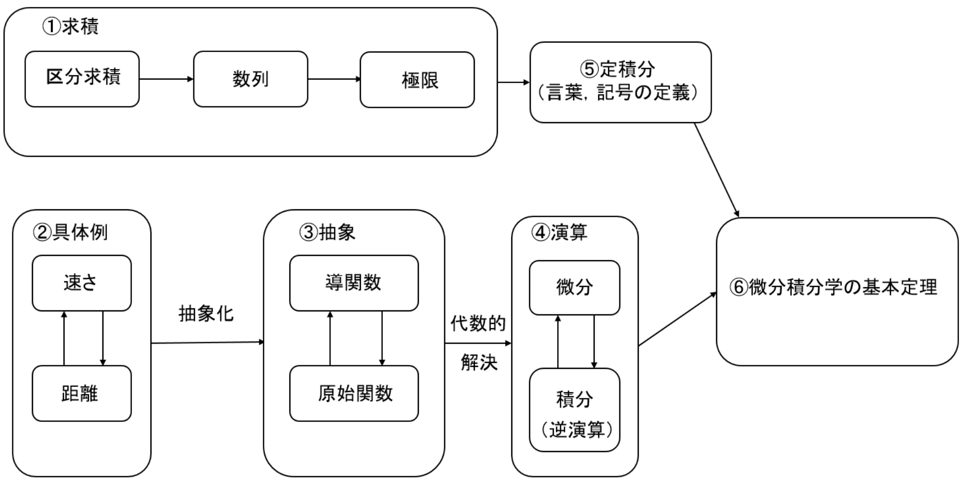


図 2.32　『数学 第一類』の構成

参考文献

[1] 田中義久（2008）「『数学 第一類』における関数の教材内容についての分析と評価ー「事象の数学化」に焦点をあててー」,『学芸大数学教育研究』，東京学芸大学，p88.

第 3 章

高等学校における微積分教育の変遷

第 2 章で述べたように,「数学 中学校用 第一類」が昭和 19 年に発行されたが, 公田藏 *1(1998)[1] の調査によると,

> 十分な準備のないままの急激な大改訂に加えて戦争のため，この要目に沿った形での授業は完全には実施されることなく，終わってしまうのである．

とされている．そして，戦後昭和 23 年発足の新制高等学校にて，本格的に微積分教育が行われたとしている．それ以降，学習指導要領が昭和 26 年に刊行され，高等学校は昭和 31 年，昭和 35 年，それ以降は約 10 年毎に改訂され，現在に至る．このような度重なる改訂により，積分の導入方法に大きな変化が見られた．

この学習指導要領や検定教科書の変遷について，丹念に取り組んだ先行研究を掲げておきたい．それは，金子真隆 *2による論稿「積分概念の導入に関する教科書調査について ― 高等学校学習指導要領の変遷もふまえて ―」[2]（以下,「金子 (2014)」）である．

金子は，我国の数学教育のこうした特異性について，以下のように述べている．

> 海外では，高校段階でほとんどの理工系の学習者が積分の概念に触れるという国はまれであり，多くの場合，大学入学後にまず区分求積法によって積分の概念を導入され，その後に微分の逆算を用いた定積分の計算を学ぶのが一般的である．この点で，日本における積分概念の導入は，世界的にみてかなり特異である．[3]

見てきたとおり，数学史や解析学においては，積分は区分求積法により定義される．そして，積分が微分の逆演算であることは，その後の考究により明らかにするのが一般的である．「金子 (2014)」では，このようなものを微積分の「タイプ A」と呼んでいる．一方，現在の高等学校数学のように，積分を微分の逆演算として定義し，求積をその積分の利用として与えるものを「タイプ B」としている．

*1 立教大学名誉教授

*2 現，東邦大学薬学部教授

次節からは，数学教育史の視点から，戦後の学習指導要領の変遷を追い，高等学校数学は，当初は「タイプ A」を取ってきたが，戦後のある時期を境として，「タイプ B」に変移していった様相を見ていきたい．

3.1 新制高等学校発足直後の微積分教育

昭和 23 年発足の新制高等学校では，昭和 22 年に発行された「解析編 (II)」[4] を用いて微積分教育が行われた．この教科書は，「数列・極限」を 1 つの章とし，区分求積法を含む．その後，「函数の変化とその応用」という章にて，微積分が掲載されている．

「解析編 (II)」には，「数学　中学校用　第一類」で扱われた練習問題の題材がそのまま扱われている様子が伺われる．例えば，区分求積法の練習問題において船の吃水線の断面積を概算する問題が挙げられる．学習順序に関しては，「数学　中学校用　第一類」のように，微分と積分の概念を同時進行で学ぶのでなく，微分，積分の順に学ぶ現行の高校数学ような形式となっている．解説や公式については，発見的方法を重視した従来教科書に比べて詳しく記述されている．また，微分，積分ともに，物体の運動を表すグラフにより導入が行われている．さらに，定積分は

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_a^b f(x)\Delta x$$

$$\left(\sum_a^b \text{の } a,\ b \text{ は，和を取る範囲を表す} \right)$$

と定義されており，「数学　中学校用　第一類」では扱われなかった $\sum$ や lim の記号も扱っている．以上から，この構成は「タイプ A」である．「微分の応用」や「積分の応用」といった章もあり，逆三角関数の微分や微分方程式，現行の学習指導要領では物理で学習するような平面運動についても触れられている．

3.2 昭和 26 年学習指導要領改訂について

新制高等学校は，昭和 23 年 4 月 1 日に発足し，昭和 26 年 11 月 25 日には，戦後初めて，高等学校数学科の教科課程と教科内容およびその扱いの基準を示す『中学校高等学校学習指導要領数学科編（試案）』[5] が刊行された．数学科の科目は，「一般数学」・「解析 I」・「解析 II」・「幾何」の 4 科目が置かれた．この「学習指導要領」第 5 章「§ 1．各科目の性格」には，この 4 科目のうち，「少なくともひとつを必修にすることをたてまえとしている．」[6] とある．微積分は「解析 II」で扱われている．この「学習指導要領」の第 5 章「§ 4 解析 II」の「指導内容」[7] は，以下の 7 つの項目に分かれている．

I　確率を理解し用いること

II　資料を整理し，解釈すること

III　数列や級数を用いること
IV　函数の概念を拡張し，完成すること
V　変化率を用いること
VI　計算において極限を用いること
VII　三角函数を用いること

微積分の内容は，概ね上記のうちの「III」から「VI」までが該当する．第 4 項目の「VI　計算において極限を用いること」[8] において，その目標は以下のように定められている．

1. 極限によって，いろいろな量の大きさが明確にとらえられることを理解する．
2. 積分の記号によって，極限としての量を簡単に表すことができることを理解し，これらを用いる能力をうる．
3. 積分が微分の逆の演算であることを理解し，これを用いる能力をうる．
4. 近似の概念について理解を深め，その良さを知る．

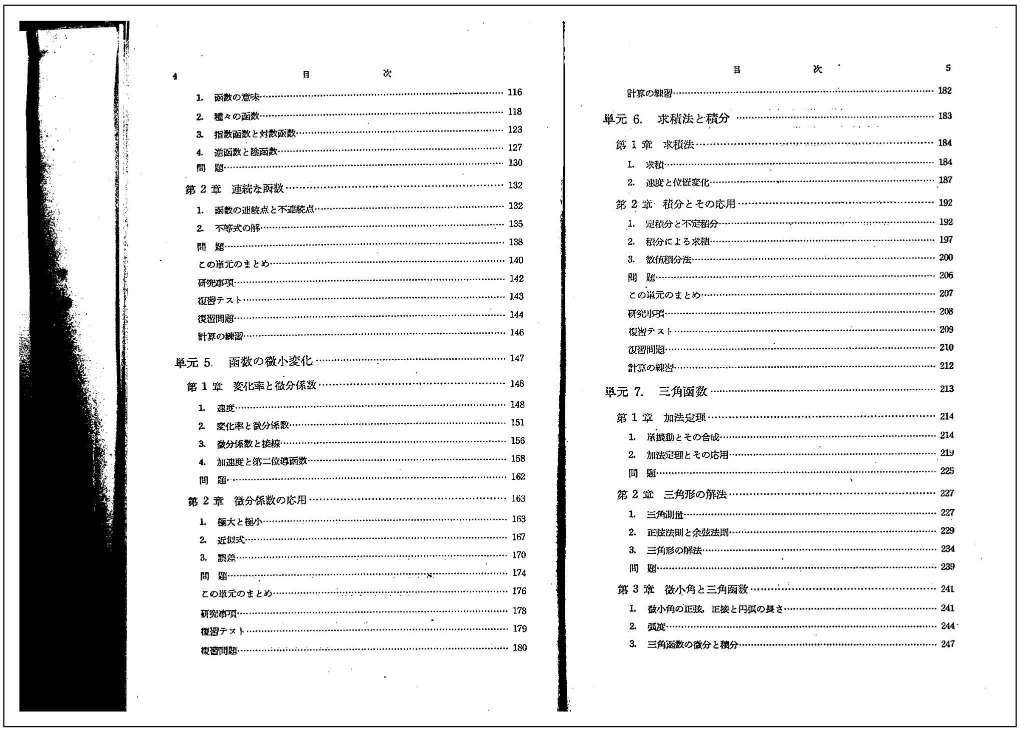
以上を見ると，「区分求積法で極限の考えを用いて積分を定義し，その後， 積分が微分の逆の演算であることを見出させる」という一連の流れを読み取ることが出来る．これは，言うまでもなく「タイプ A」であり，解析学や数学史の流れと一致する．昭和 26 年の「学習指導要領」では，数学科は，分科主義の理念で編成されている．すなわち，微積分の内容が，履修学年で分断される等の要素をあまり顧みず，数学として，微積分の本来の構成法である「タイプ A」で構成されたのである．

昭和 22 年に発行された「解析編 (II)」と比べて，内容は大幅に削られたが，現行の高等学校数学では学習しない数値積分法が含まれている，図 3.1 は「大日本図書株式会社　解析 II」[9] の目次，図 3.2 は同書における積分の導入部分である．

3.3　昭和 31 年学習指導要領改訂について

昭和 26 年に刊行された『高等学校学習指導要領数学科編（試案)』は，この後，「試案」の文字が削除されたものとして，昭和 30 年に『高等学校学習指導要領 数学科編 昭和 31 年度 改訂版』[10]（以下『昭和 31 年度改訂版』）として改訂・告示される．これにより，高等学校数学から，生活単元学習を基盤とした「一般数学」が廃止され，「学習指導要領」の理念が，数学の系統を重視した系統学習へと移行されることになる．

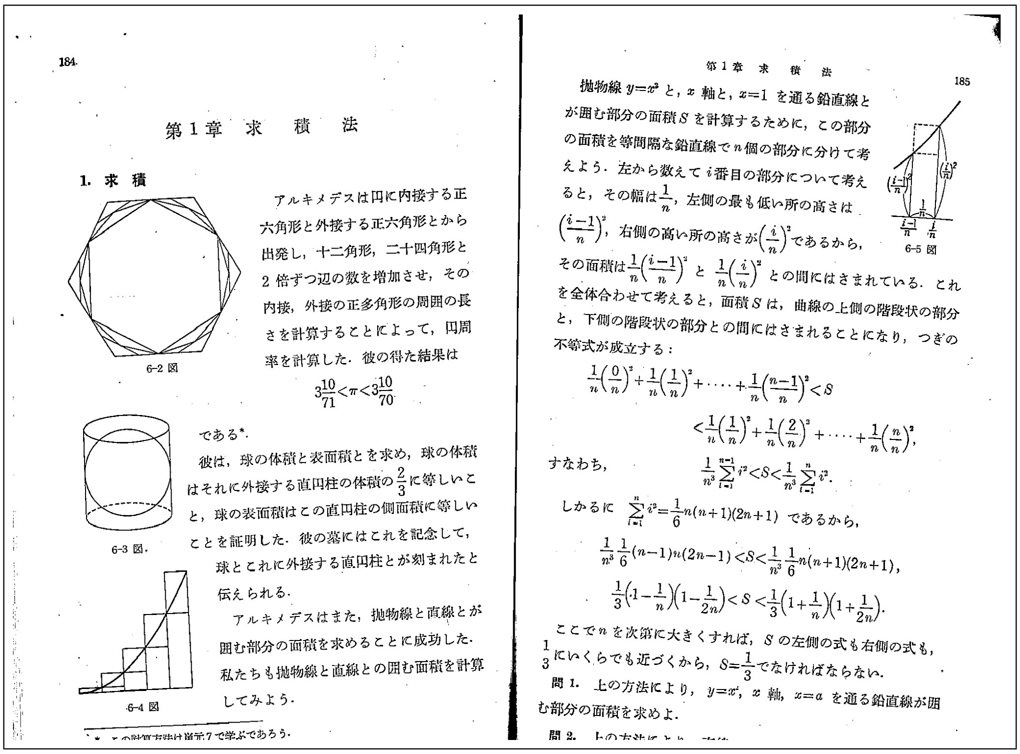
科目は，「解析」や「幾何」といった分科を廃止し，年次を追って順に学ばせる内容を構成し，「数学 I」·「数学 II」·「数学 III」·「応用数学」の 4 科目が置かれた．「数学 I」はすべての生徒に履修させる科目．「数学 II」は「数学を含めて一般教養に重点をおくもの」を対象とした選択科目．「数学 III」は，「数学に関係の深い科目群に重点をおくもの」を対象とした選択科目である．これは勿論、「数学 II」の後に学ばせるものとした．なお，「応用数学」は，定時制課程等を想定した選択科目である．



4　目　次

目　次　5

図 3.1　「大日本図書株式会社　解析 II」の目次



184

第 1 章　求　積　法

1. 求　積

6-2 図

アルキメデスは円に内接する正六角形と外接する正六角形とから出発し，十二角形，二十四角形と 2 倍ずつ辺の数を増加させ，その内接，外接の正多角形の周囲の長さを計算することによって，円周率を計算した．彼の得た結果は

$$3\frac{10}{71}<\pi<3\frac{10}{70}$$

である*．

6-3 図．

彼は，球の体積と表面積とを求め，球の体積はそれに外接する直円柱の体積の $\frac{2}{3}$ に等しいこと，球の表面積はこの直円柱の側面積に等しいことを証明した．彼の墓にはこれを記念して，球とこれに外接する直円柱とが刻まれたと伝えられる．

6-4 図

アルキメデスはまた，抛物線と直線とが囲む部分の面積を求めることに成功した．私たちも抛物線と直線との囲む面積を計算してみよう．

* この計算方法は単元 7 で学ぶであろう．

第 1 章　求　積　法　185

抛物線 $y=x^2$ と，x 軸と，$x=1$ を通る鉛直線とが囲む部分の面積 S を計算するために，この部分の面積を等間隔な鉛直線で n 個の部分に分けて考えよう．左から数えて i 番目の部分について考えると，その幅は $\frac{1}{n}$，左側の最も低い所の高さは $\left(\frac{i-1}{n}\right)^2$，右側の高い所の高さが $\left(\frac{i}{n}\right)^2$ であるから，

6-5 図

その面積は $\frac{1}{n}\left(\frac{i-1}{n}\right)^2$ と $\frac{1}{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2$ との間にはさまれている．これを全体合わせて考えると，面積 S は，曲線の上側の階段状の部分と，下側の階段状の部分との間にはさまれることになり，つぎの不等式が成立する：

$$\frac{1}{n}\left(\frac{0}{n}\right)^2+\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\cdots\cdots+\frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^2<S$$
$$<\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^2+\cdots\cdots+\frac{1}{n}\left(\frac{n}{n}\right)^2,$$

すなわち，

$$\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n-1}i^2<S<\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2.$$

しかるに $\sum_{i=1}^{n}i^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ であるから，

$$\frac{1}{n^3}\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)<S<\frac{1}{n^3}\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1),$$
$$\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{2n}\right)<S<\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{2n}\right).$$

ここで n を次第に大きくすれば，S の左側の式も右側の式も，$\frac{1}{3}$ にいくらでも近づくから，$S=\frac{1}{3}$ でなければならない．

問 1.　上の方法により，$y=x^2$，x 軸，$x=a$ を通る鉛直線が囲む部分の面積を求めよ．

問 2.　上の方法により，

図 3.2　「大日本図書株式会社　解析 II」の積分の導入部分

分科が廃止されたこともあってか，微分が「数学 II」で導入され，積分は「数学 III」から扱う構成になっており，微分と積分の導入が 2 つの科目に亘り分断されたことが特徴である． つまり，当時，「数学 II」までで高等学校での数学の履修を終えた生徒は，微積分のうち微分だけを学習し，積分は学ばずに卒業した事になる．この『昭和 31 年度改訂版』の第 5 章「数学科 数学 III」の「2. 内容の説明」の「c 積分」[11] では，積分の内容説明がなされている．以下の記述がそれである．

> 長さ・面積・体積などの量が極限を考えることによって正確にとらえられること，ならびに極限による計量が多くの場合に積分となることを明らかにし，積分の応用や計算に習熟させる．
>
> (1) 面積・体積・道のりなどの概念を明らかにし，一次式や二次式で表わされる数量関係に区分求積法を用いることを扱い，この場合に極限の考えが重要な役割を果たしていることを明らかにする．
>
> (2) 定積分の意味を明らかにし，定積分によっていろいろな量を表わすことを扱う．
>
> (3) 微分と積分の関係ならびに不定積分の意味を明らかにする．
>
> (4) 積分が微分の逆の操作であることを利用して定積分を計算することを扱う．積分計算の対象は，b[*3]における微分の逆として求められるものの程度とし，積分特有のくふうを要するものの（ママ）は扱わない．
>
> (5) 定積分の数値を求める近似解法として，台形公式やシンプソンの公式を扱う．

上記の (1)(2) で，区分求積法として定積分を導入し，(3) で微分の逆算としての不定積分について言及．(4) で，(2) で示された求積法としての定積分と，微分の逆算で原始関数を求める不定積分との関係を知ることになる．すなわち，ここで「微分積分学の基本定理」が扱われるのである．

微分の逆演算として原始関数を求めること自体に「不定積分」という語を用いてはいるものの，まずは，区分求積法で積分を捉え，求積法である積分が微分の逆演算であることを，後から発見する構成となっており，「タイプ A」が踏襲されていることが分かる．

特筆しておきたいのは，この時代，いわゆる「文系」の生徒は，微積分を全く学ばないか，もしくは微分までの学習に留まり，「理系」の生徒は，「タイプ A」に沿った本来の積分の構成法を学習させる教育課程編成が行われていたことである．このように，「積分は理系のみ」という教育課程とすることによって，数学への志向の強い生徒だけに対して，無限数列とその和を導入し，区分求積を用いた積分の定義法が展開できるよう工夫されていたと言ってよいだろう．

3.4 昭和 35 年学習指導要領改訂について

昭和 35 年 11 月に『高等学校学習指導要領』[12] が刊行され，数学は，「数学 I」・「数学 IIA」・「数学 IIB」・「数学 III」・「応用数学」の 5 科目が設置された．このうち，「数学 I」（5 単位）はすべての生徒に習得させるものである．普通科においては，「数学 IIA」（4 単位）または［数学 IIB」

*3 『高等学校学習指導要領数学科編昭和 31 年改訂版』では，「c 積分」の前の項目として「b 微分」がある．

（5 単位）のいずれかを選択必修，また，職業教育を主とする学科においては，「数学 IIA」，「数学 IIB」，「応用数学」（6 単位）の 3 つからのうちのどれかを選択必修することとなっていた．したがって，特別な事情がある場合を除いて，高等学校の課程では，すべての生徒が，この科目のどれかを履修しなければならなかった．

整関数のみを扱うものではあるが，微分はもちろん積分までの内容が，「数学 IIA」，「数学 IIB」，「応用数学」のどの科目にも組み入れられているから，すべての高校生が微分と積分の両方を学んで卒業することになった．これは事実上の「微積分の必修化」である．前掲の『昭和 31 年度改訂版』の折には，微積分を全く学ばない者，微分のみを学ぶ者，微分・積分の両方を学ぶ者の 3 通りが存在したことに比べ，これは著しい特徴と言える．しかも，次節で述べるように，この「微積分の必修化」の編成方針が，「タイプ B」の構成法が議論の遡上にのる契機となるのである．この「学習指導要領」の「第 2 章 各教科・科目」の「第 3 節 数学」，「数学 IIB」[13] を取り上げる．「数学 IIB」の内容は，以下の 6 つに定められている．

(1) 順列と組合せ
(2) 数列と級数
(3) 三角関数とベクトル
(4) 図形と座標
(5) 微分法
(6) 積分法

上記の「(2) 数列と級数」[14] では，以下の 3 項目を学習させるものとしている．

ア 等差数列，等比数列
イ その他の数列
　一般項が n^2，n^3 の程度とする．
ウ 無限等比級数

「(5) 微分法」[15] は，以下の 3 項目．

ア 微分係数
イ 導関数とその計算
　関数の和・差・積の導関数
ウ 導関数の応用
　接線，関数値の増減，速度など

「(6) 積分法」[16] は，以下の 3 項目が扱われた．

ア 積分の意味
イ 積分の計算
ウ 積分の応用

面積，体積，道のりなど

この昭和 35 年の「学習指導要領」において，「(2) 数列と級数」の冒頭には，

簡単な数列について，自然数との対応関係を考え，その数列の特徴をとらえさせる．また，数列について，極限の概念を理解させる．

と記されている．「(2) 数列と級数」に関する単元では，無限数列とその級数までが扱われていることがわかり，後に学ぶ「(6) 積分法」において，区分求積で定積分を扱うための素地が作られていることが分かる．これは，変わらず「タイプ A」が展開され得ることを示している．このような構成は，「数学 IIA」「応用数学」においても，同様である．

しかしながら，昭和 31 年と昭和 35 年の「学習指導要領」を比較してみると，興味深い事実が見出される．「学習指導要領」の各科目の「内容の説明」において，各項目の末尾には，教育課程上初出となる「用語と記号」が列挙されるが，昭和 31 年と昭和 35 年では，積分に関するものの順序が異なるのである．それは以下の通りである．昭和 31 年の「数学 III」[17] では，順次，

区分求積法　定積分　積分する　不定積分　積分定数　台形公式　シンプソンの公式 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \quad \int f(x)dx$

と記されている．ところが，昭和 35 年の「数学 IIB」[18] では，

不定積分　積分定数　$\displaystyle\int f(x)dx$　定積分　$\displaystyle\int_a^b f(x)dx$

となっている．昭和 31 年のものは，区分求積法から定積分を定義し，後に不定積分を導入する「タイプ A」に従った順序である．一方，昭和 35 年のものは，定積分に先行して不定積分が表れている．これは，明らかに，「タイプ B」の流れである．とりわけ，積分記号の登場順が，昭和 31 年は，

$$\int_a^b f(x)dx \quad \rightarrow \quad \int f(x)dx$$

であるのに対し，昭和 35 年は，これが逆転し，

$$\int f(x)dx \quad \rightarrow \quad \int_a^b f(x)dx$$

となっていることは顕著である．

昭和 35 年の『高等学校学習指導要領』を見る限り，「積分法」に先行して「数列と級数」が扱われていることから，「タイプ A」で積分を展開できるように編成されているものの，「用語と記号」の記述においては，明らかに「タイプ B」の構成法が示唆されていることが分かる．

したがって，昭和 35 年の「学習指導要領」は，「タイプ A」でも「タイプ B」でも積分を扱うことのできる「汎用性のある構成」となっている．さらに，昭和 31 年の指導要領の「第 1 章 数学科の目標」と，昭和 35 年の指導要領の「第 3 節 数学 第 1 款 目標」を比較すると，高等学校数学の近代化を示唆するような変化が見られる．昭和 31 年の目標は以下のようになっている．

1. 数学の基本的な概念・原理・法則等を理解し，これらを応用する能力を養う.
2. 数学が体系的にできていることと，その体系を組み立てていく考え方とを理解し，その意義を知る.
3. 数学的な用語や記号の正しい使い方を理解し，これらによって数量的な関係を簡潔明確に表現し，処理する能力を養う.
4. 論理的な思考の必要性を理解し，筋道を立ててものごとを考えていく能力と習慣とを身につける.
5. 数学的な物の見方，考え方の意義を知るとともに，これらに基づいてものごとを的確に処理する能力と態度とを身につける.

一方，昭和 35 年の目標は以下のようになっている.

1 数学における基本的な概念，原理・法則などを理解させ，より進んだ数学的な考え方や処理のしかたを生み出す能力を伸ばす.

2 数学における基本的な知識の習得と基本的な技能の習熟を図り，それらを的確かつ能率的に活用する能力を伸ばす.

3 数学的な用語や記号を用いることの意義について理解を深め，それらによって，数学的な性質や関係を簡潔，明確に表現したり，思考したりする能力を伸ばす.

4 ものごとを数学的にとらえ，その解決の見通しをつける能力を伸ばすとともに，論理的な思考の必要性を理解し，筋道を立ててものごとを考えていく能力と態度を養う.

5 数学が体系的にできていることと，その体系を組み立てていく考え方を理解させ，その意義を知らせる.

6 数学が生活に役だつことや，数学と科学・技術その他との関係などを知らせ，数学を積極的に活用する態度を養う.

以上の記述で筆者が注目したのは，昭和 35 年の目標の項目 6 の記述「数学が生活に役だつことや，数学と科学・技術その他との関係などを知らせ，数学を積極的に活用する態度を養う。」である．昭和 30 年代は，当時「三種の神器」と呼ばれた，電気洗濯機，電気冷蔵庫，テレビの流行や，公衆電話の普及など，我が国の科学技術の発展が顕著にみられた時代である．そして，更なる科学技術の発展を目指したことが，項目 6 に反映されたと考えられる.

3.5 微積分の必修化と再構成の議論

さて，前節で見た昭和 35 年の『高等学校学習指導要領』は，昭和 35 年 10 月 15 日の文部省令第 16 号「学校教育法施行規則の一部を改正する省令」とともに告示され，昭和 38 年度から学年進行実施となる．その告示の前後の昭和 30 年代半ば，「微積分の必修化」に伴う教育課程編成に関する数学教育界の議論を，『日本数学教育会誌』に見て取ることができる.

昭和 34 年 11 月 1 日発行の『日本数学教育会誌第 41 巻第 11 号』には，東京教育大学附属高等

学校の井上義夫[*4]が,「高等学校数学科教育課程について—日数教名古屋大会報告—」[19](以下,「井上 (1959)」)を載せている.

この記事は,昭和 34 年 8 月,名古屋にて,日本数学教育会第 41 回研究大会が開催された際,そこにおいて,高等学校教育課程の改訂に向け,各地区,各研究団体が教育課程案を発表し,そこで交わされた議論の内容報告である.これによると,教育課程案を持ち寄った各地区及び,各研究団体は,以下の 7 つである.

(1) 九州数学教育会高等学校数学科教育課程研究委員会 第 5 次 中間報告
(略称 九数教案)
(2) 四国地区数学教育研究会
(略称 四数教案)
(3) 兵庫県数学教育会高校部会
(略称 兵庫案)
(4) 愛知県高校数学教育研究会
(略称 愛知案)
(5) 東京都高校数学教育研究会
(略称 都数研案)
(6) 東京理科大学数学教育研究会
(略称 理大案)
(7) 日数教教育課程研究委員会
(略称 日数教課研)

この「井上 (1959)」には,上記の (1)〜(6) に「(8) 東京教育大学付属高等学校案」(略称 教大付高案)を加えた都合 7 つの教育課程案が掲載されている.表 3.1 がそれである.

このうち「理大案」のみは,必修の内容が 12 単位で,他の 6 案はすべて 9 単位とし,「愛知案」以外は必修内容の中に微分と積分の両方の内容を組み入れている.このように,高等学校数学科の必修単位数を最低 9 とすることと,高等学校数学科の必修科目の中に微積分の初歩を入れることは,昭和 33 年 8 月 22 日,日本数学教育会が文部大臣灘尾弘吉宛に提出した「全国数学教育研究大会における要望決議文」[20] に,明記されており,各案はこの日数教の方針に従ったものと言える.また,井上 (1959) では,必修微積分の展開方法について以下のように言及されている.

> 各案に現われた展開方法を大別すると,
> I 微分 → 数列の和 →(区分求積・定積分)→不定積分
> II 微分 → 不定積分(微分の逆算)→定積分
> 上記 I の展開方法による場合には,定積分の学習の前に,数列の和の極限という難関が入るが,それさえ通過すれば定積分の基本概念は,II の展開方法によるよりも明確に捉えられる

*4 当時,東京教育大学附属高等学校

表 3.1　各地区・各研究会案の必修・選択の主な内容と単位数 ([19]，p174)

	必　　修	選　　択
九数教案	**数 I 代数** (5 単位) (1) 式の取り扱い　(2) 関数の変動 (3) 関数の積分と微分　(4) いろいろな関数と対数 **数 I 幾何** (4 単位) (1) 空間図形 (2) 図形と方程式 (3) 三角函数 計　9 単位 (但し必修のみで終る者には，必修の内容に統計を加える)	**数 II**　(3 単位) (1) 微分法　微分とその応用 (2) 積分法　積分とその応用 **数 III**　(6 単位) (1) 微積分の拡充 (3 単位) 微積分の基礎と応用 (2) 代数方程式 (1 単位) (3) 順列・組合わせ・確率統計 (2 単位)
四数教案	**数 I**　(6 単位) (1) 数・式のまとめ　(2) グラフのまとめ (3) 方程式・不等式　(4) 対数　(5) 三角関数 (6) 平面幾何のまとめ (7) 解析幾何の導入 **数 II**　(3 単位) (1) 数列　(2) 微分　(3) 積分 計　9 単位 (但し，職業課程は 6 単位)	**数 II**　(3 単位) (1) 解析幾何 (2) 立体幾何 **数 III**　(3 又は 5 単位) (1) 微分・積分の応用 (2) 順列・組合せ，確率統計
兵庫案	**解析篇**　(6 単位) (1) 数と式　(2) 方程式と不等式 (3) 関数と変化率 (4) 簡単な数列 (5) 積分 (6) 統計 **幾何編**　(3 単位) (1) 幾何学の構成 (2) 三角関数 (3) 図形と方程式 計　9 単位	**解析篇**　(3~5 単位) (1) 数列と極限　(2) 微分とその応用 (3) 積分とその応用 (4) 順列組合せ，二項定理 (5) 確率と統計 **幾何篇**　(3 単位) (1) 三角関数　(2) 座標変換とベクトル (3) 2 次曲線の分類　(3) 空間の座標 (5) いろいろな曲線と方程式
愛知案	**数学 I**　(9 単位) (1) 数と式 (2) 方程式と不等式 (3) 関数と変化率 (4) 対数　(5) 統計 (6) 平面図形　論証，三角比，軌跡，座標と方程式 (7) 空間図形　計　9 単位	**数 II**　(3 単位) (1) 図形と方程式　(2) 三角関数　(3) 確率 **数 III**　(5 単位) (1) 数列　(2) 微分　(3) 積分
都数研案	**1 年 A**　(4 単位) (1) 数・式の計算 (2) 方程式と不等式 (3) 整関数の微分と積分 **1 年 B**　(2 単位) (4) 空間図形 (5) 三角形と三角関数 **2 年 A**　(3 単位) (6) 数列と級数 (7) 図形と方程式 (8) 確率と統計 計　9 単位	**2 年 B**　(3 単位) (1) 複素数　(2) 行列式とベクトル　(3) 補充 **3 年 A**　(3 単位) (1) 微分とその応用　(2) 積分とその応用 (3) 関数の展開と微分方程式 **3 年 B**　(2 単位) (1) 投影と射影　(2) 計算法
教大付高案	**解析篇**　(6 単位) (1) 数と式　(2) 方程式と不等式 (3) 関数と変化率 (4) 積分　(5)確率と統計 **幾何編**　(3 単位) (1) 三角函数 (2) 図形と方程式 (3) 球面の幾何 計　9 単位	**解析篇**　(4 単位) (1) 数列と極限　(2) 微分とその応用 (3) 積分とその応用 **幾何篇**　(4 単位) (1) 解析幾何　行列式，座標変換，空間図形，ベクトル (2)投影と射影　図形の投影，図形の射影
理大案	**1 年 A**　(3 単位) (1) 式の計算 (2) 方程式と不等式　(3) 関数とグラフ (4) 対数 **1 年 B**　(3 単位) (1) 空間図形 (2) 式と図形(1)　(3) 三角関数 **2 年 A**　(3 単位) (1) 数列 (2) 微分 (3) 積分 (4) 確率・統計 **2 年 B**　(3 単位) (1) 式と図形(2)　(2) 複素数とベクトル (3) 計算法　計　12 単位	**3 年 A**　(3 単位) (1) 微 分 (2) 積 分 **3 年 B**　(3 単位) (1) 行列式 (2) 微積分 (3) 集合と群

であろう．これに対して II の展開方法による場合には，「数列の極限」という難関を避けることができ，また将来微分方程式への発展が容易であろう．[21]

言うまでもなく，I は「タイプ A」，II は「タイプ B」である．7 つの案のうち，「タイプ A」の構成となっているものは，「九数教案」，「兵庫案」，「理大案」の 3 案，「タイプ B」は「都数研案」および「教大付高案」の 2 案である．「愛知案」には，積分が必修課程には組み入れられておらず，「四数教案」の詳細は割愛されている．また，井上は，

III　自然数と級数→区分求積→極限・定積分→連続的変化の考察（極限・接線）→関数の変化（極値）

という昭和 17 年の数学科教授要目による，「数学 中学校用 第一類」のような展開方法も提案している．

表 3.2　各案の必修課程のうちの解析的内容の比較対照表 ([19]，pp176-177) *6

九数教案	兵庫案	愛知案	都数研案	教大付属案(ママ)	理大案
〔2〕函数の変動 1.　変化率 2.　導関数 x^n，和，差の微分 3.　関数の増減と極大・極小 簡単な高次関数のグラフと高次方程式の根 〔3〕函数の積分と微分 1.　数列の和 等差，等比，$\sum k^2$ 2.　グラフの下の面積 区分求積 3.　定積分 $\lim\sum f(x)\Delta x$ $=\int_a^b f(x)dx$ 4.　積分と微分 5.　積分の応用 面積，回転体の体積	〔3〕函数と変化率 1.　函数とその変化 平均変化率，簡単な極限 2.　変化率，導関数，4次，分数 函数 3.　曲線の接線 4.　函数の変化・極値 5.　導関数の応用 速度，加速度，グラフ，3 次方程式の根 〔4〕簡単な数列 1.　等差　2.　等比 2.　$\sum k^2$，$\sum k^3$ 〔5〕積分 1.　区分求積と定積分 2.　定積分の計算 3.　微分の逆演算としての積分 4.　積分の応用 面積，回転体の体積	〔3〕函数と変化率 1.　函数とグラフ 二次函数のグラフ 2.　変化率 3.　導函数 三次函数まで 4.　導関数の応用 増減と極大・極小 (三次函数まで) 接線，速さ 〔4〕等差数列・等比数列 (対数の章の中で)	〔3〕整函数と微分と積分 1.　二次函数の極大，極小，グラフ 2.　微小変化と極限値 3.　導関数 整函数の微分法 4.　増減，極大・極小・グラフ 5.　接線の方程式，近似式 6.　不定積分　微分の逆算 7.　面積，回転体の体積 〔4〕数列と級数 1.　等差　2.　等比 3.　$\sum k^2$　4.　無限等比	〔3〕函数と変化率 1.　函数とグラフ 2.　函数とその変化 平均変化率 3.　変化率，導関数 4.　曲線の接線 5.　函数の変化，極値数係数の四次 $\frac{c}{ax+b}$，$\frac{a}{x^2}$ $\sqrt{ax+b}$，$\sqrt{x^3}$ 6.　導函数の応用 〔4〕積分 1.　微分の逆演算としての積分 2.　グラフの下の面積 3.　定積分 4.　積分の応用	〔3〕函数とグラフ 1.　二次函数 2.　変化率 簡単な三次函数まで 3.　簡単な分数・無理函数 〔5〕数列 1.　等差，等比 2.　いろいろな数列 〔6〕微分 1.　微分係数 導関数（代数函数まで） 2.　微分法（和，差，積，商） 3.　函数の変化（増減，極大・極小） 4.　微分の応用 （速度膨張係数） 〔7〕積分 1.　定積分 2.　不定積分 3.　積分の応用 （面積，体積）

「日数教課研」の案については，井上 (1959) では割愛されているが，昭和 34 年 11 月 1 日に発

*6　表内の各項目は，「微積分」の構成に関わるもののみ，筆者が抜粋して引用

行された『日本数学教育会誌第 41 回総会特集号』に掲載された「高等学校第 3 分科会新教育課程（代数・微積分）報告」で確認することができる．この中に，8 月に名古屋で行われた第 41 回総会の第 3 分科会において，日本数学教育会教育課程委員会に所属する白石勲司*7による「高校必修課程における微積分について」[22] と題した報告がある．この報告の内，積分の学習について述べたものを以下に記す．（原文ママ）

4．不定積分より積分に入る．

（1）$y=x^3$ ならば $\dfrac{dy}{dx}=3x^2$，$\dfrac{d}{dx}(x^3+1)=3x^2$，だから $\dfrac{dy}{dx}=3x^2$ ならば，$y=x^3+C$，C は積分定数．

$\displaystyle\int 3x^2dx=x^3+C$

（2）速度 → 距離　$v=kt$　$\dfrac{ds}{dt}=kt$，$S=\displaystyle\int vdt=\frac{1}{2}kt^2+C$，$t=0$ の時，$S=2$ である時，$2=0+C$，

$\therefore\ C=2$

$\therefore\ S=\dfrac{1}{2}kt^2+2$

（3）加速度 → 速度 → 距離，同様に行う．

5．グラフの下の面積を指導しながら定積分に入る．

ΔA は $y\Delta x$ と $(y+\Delta y)\Delta x$ の間，$\dfrac{\Delta A}{\Delta x}$ は y と Δy の間

$\Delta x\to 0$，$\dfrac{\Delta A}{\Delta x}\to\dfrac{dA}{dx}$，$\Delta y\to 0$

$\therefore\quad \dfrac{dA}{dx}=y$，$\therefore\quad \dfrac{dA}{dx}=\dfrac{1}{10}x^2+5$

$\therefore\quad A=\dfrac{1}{30}x^3+5x+C$，$x=2$ の時，$A=0$

$\therefore\quad C=-\dfrac{8}{30}-10$，$x=10$ の時

$A=\dfrac{1}{30}\times 10^3+5\times 10-\dfrac{8}{30}-10=73\dfrac{1}{15}$

$A=\left(\dfrac{1}{30}\times 10^3+5\times 10\right)-\left(\dfrac{1}{30}\times 2^3+5\times 2\right)$

$\dfrac{1}{30}x^3+5x$ に $x=10$ を代入，$x=2$ を代入

定積分　$\displaystyle\int_2^{10}\left(\frac{1}{10}x^2+5\right)dx=\left[\frac{1}{30}x^3+5x\right]_2^{10}$

$\displaystyle=\left(\frac{1}{30}\times 10^3+5\times 10\right)-\left(\frac{1}{30}\times 2^3+5\times 2\right)=73\frac{1}{15}$ [23]

この記述によれば，4（1）において，微分の逆演算として不定積分を定義する導入を行っている．$y=x^3$ と，$y=x^3+1$ の導関数がともに $3x^2$ であることから，$3x^2$ の不定積分は x^3+C（C は積分定数）と表せると述べているのである．4（2），（3）では，物体の運動における不定積分の応用について述べている．

5 では，定積分を導入している．図 3.3 において，放物線 $y=\dfrac{1}{10}x^2+5$ の区間 $[2,x]$ における

*7 当時，茨城県立取手第一高等学校

下の面積を，x を変数とする関数 A とすれば，A の導関数が $y = \dfrac{1}{10}x^2 + 5$ となる．このことから，グラフ下の区間 $[2, 10]$ における面積が，$y = \dfrac{1}{10}x^2 + 5$ の不定積分に $x = 10$ を代入した値と，$x = 2$ を代入した値の差で表されることがわかる．このような面積を求める演算を定積分としているのである．

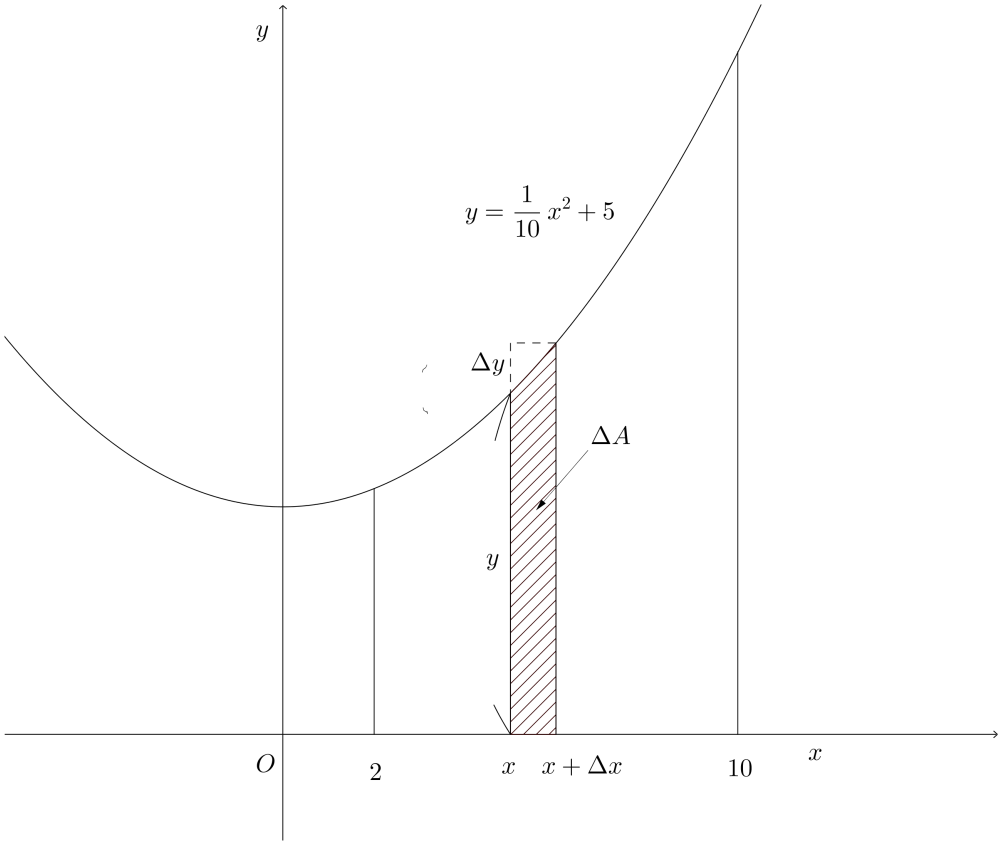


図 3.3　「日数教課研」案における定積分の導入

以上から「日数教課研」も「タイプ B」を提案していることがわかる．白石は，本案に関する協議にて，計算にのみ走りがちで，微積分の本質を忘れてはいないかという問いかけに対して，以下のように述べている．

> これで微積分が完成するとは考えていない．機械的ではあるが，第一段階なのだ．この程度なら程度のひくい生徒でも理解出来るのではないか．したがってどうしても少し計算中心になるのは止むをえないと思う．

上述から，白石は「タイプ B」による指導では微積分を完成させることはできないが，微積分を必修にするからには生徒に理解させることを第一に考え，計算中心の課程を提案したことがわかる．

井上 (1959) の記述を見ると，当時の教育課程の議論で「タイプ B」が検討されるに至ったのは，以下の 2 つの理由によるものと捉えられる．

① 必修数学を 9 単位以上とし，そこに微積分を組み入れるという方針を貫くため，すべての高校生が学ぶ状況を考え，難関とされる内容を必修数学の中から取り除き，選択科目へ移行させる必要性に迫られたこと．

② ① において，「数列の和の極限」（級数）を難関と捉え，これを回避する方策として，「微分の逆算」として積分を定義することに考えが至ったこと．また，このことにより，微分方程式への発展も容易としていること．

さらに，井上 (1959) は，「高等学校数学の近代化と微積分の必修」として，上記のように，「必修化」に至った社会的背景にも触れている．それを以下に記す．

> 「微積分を必修に加えよという主張は，次に述べるように，前年来叫ばれてきた「高校教育における数学教育の近代化」の 1 つの具体的な姿とみてよいであろう．
> さて，「高校における数学教育の近代化」の必要が強く叫ばれた原因の 1 つは，近年我が国の産業界・経済界における飛躍的な技術革新であり，他の 1 つの原因は，今世紀における数学そのものの進歩発展であろう．
> 　そして我が国の科学技術の振興，将来の産業界の望ましい発展計画，その他の各方面の社会的な要求を考慮して．必要と思われる近代的な内容を取り入れ，新しい教育数学の体系を確立することの必要が叫ばれたのである．
> 　そして，上記の「必要と思われる近代的な内容」として，まず第 1 に必修の範囲に取り入れようとしたものが，微積分の初歩である．という理由は，微積分は，数量の変化の状態を函数的に考察する場合に最も基本的なものであり，また数学と自然科学との関連という面から考えても最も基本的なものであるからである．[25]

科学技術の振興，産業界の発展というニーズと，数学そのものの進歩から，「数学教育の近代化」が叫ばれ，その「近代的な内容」の尖兵として，微積分が取り上げられ，これが高等学校において必修化に至ったことが分かる．

さらには，「新しい教育数学の体系を確立すること」の必要性を訴えていることは，解析学や数学史に準拠した数学体系へのこだわりを捨て「タイプ B」へ移行することと関連付く．これは極めて示唆的な言及と言えよう．

続いて，昭和 35 年 3 月 1 日発行の『日本数学教育会誌第 42 巻第 3 号』を取り上げる．この号には，「高等学校数学科教育課程研究委員会中間報告」[26] が掲載されている．この中間報告を見ると，昭和 34 年 10 月 9 日に，この委員会が発足し，さらに，委員会を A，B，C の 3 つのグループに分割し，本格的な議論に入ったことが分かる．各グループの担当は以下の通りである．

A： 数学教育の意義，社会や生産との関係，高校教育と数学教育の関係，時間配当（世話人 横地 清）

B： 代数，解析の教材に関する内容や配列の検討（世話人　三上繁太郎）

C： 幾何の教材に関する内容や配列の検討（世話人 吉田 寿）

3 つのグループには，横地，三上，吉田の各世話人がそれぞれ定められているが，大学関係の世話人として，別途，田島一郎*8，の名も記されている．さて，微分・積分に関する事柄は B グループが担当した．B グループでは，必修の微積分に対して，以下の問題点 [27] が指摘され，議論が行われたことが記されている．ただし，原典には通し番号はない．筆者が付したものである．

1. 用語・記号の問題
2. 微分で取り扱う函数の範囲（整函数を主として，分母を単項式または一次式程度の函数（ママ）・無理函数）
3. 積分を必修に入れることの可否
4. 数列と無関係に積分を微分の逆演算として導入する
5. 定積分と不定積分の関係をどうするか
6. 応用としては面積・体積（回転体だけ）および（簡単な）物理的なものを取り扱う
7. 選択の積分との体系的関連

注目すべきは「3」「4」「5」である．積分を必修とする際，それをいかに易しく教えるかが議論されたと考えられる．そこで，積分を微分の逆算とし，区分求積法を回避しつつ，原始関数で定義する不定積分を，定積分に先行して教え，不定積分の関数値の差を定積分とするアイデアが検討されたことが分かる．つまり，この B グループでの議論が，「 数列と無関係に積分を微分の逆演算として導入する」と，従来の微積分の構成法を再構成し，「タイプ B」への移行に向けての方向性を与えたものと評価できる．

以上のような議論がまとめられ，昭和 35 年 3 月 28 日に，「高等学校数学科教育課程研究委員会報告」[28]（以下，「井上 (1960)」）がなされた．この報告は，昭和 35 年 5 月 1 日発行の『日本数学教育会誌第 42 巻第 5 号』で知ることができる．この報告書は，全部で 12 ページにも亘る詳細なもので，報告者は，当該委員長の井上義夫である．「井上 (1960)」において，必修の微積分に関する記述を見てみたい．微積分は「a4 関数とそのグラフ」（1.5 単位）に組み入れられている．積分に関しては，以下の 2 項目 [29] が記されている．

(4) 微分の逆算としての積分の導入．

(5) 積分の応用

i) 面積・体積への応用

ii) 理科への応用

また，上記 2 項目に，以下の註記が付されている．

(4) 積分の導入は微分の逆算による．

記号 $\displaystyle\int f(x)dx$ を用いるが，定積分の記号 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ は用いない．

(5) 積分の応用では，求積，物理教材においても三次までの整関数で表わされるものを取

*8 当時，慶応義塾大学教授

扱う．

さらに，「審議経過」[30] として，以下が記されている．

> (4) の「積分の導入」の項では，微分の逆算として積分を扱うことには，特に定積分との関係に問題があった．結論としては，定積分の概念や記号にふれずに，不定積分だけを用いて，求積への応用を扱うことにした．したがって，積分定数は具体的な場面に応じて決めるということを考えている．

つまり，微分の逆算として積分を導入する行き方には，区分求積法からくる定積分との関係に問題がある．しかしながら，その問題を認めつつ，これを採用することにし，定積分の記号を扱わず，不定積分だけで求積を扱うよう工夫したのである．求積は，あくまでも「積分の応用」である．

日本数学教育会では，必修微積分の導入とその方法にについて，極めて活発で詳細な議論が交わされた．結果，「タイプ A」から「タイプ B」へ移行することを，問題を指摘しつつも結論として導いた．こうした一連の議論は，当時の文部省「教材等調査研究委員会中学校高等学校数学小委員会」による「学習指導要領」の改訂に，少なからず影響を与えたものと推察できる．それは，日本数学教育会と文部省のそれぞれの委員の兼務状況からも窺える．

昭和 35 年 6 月 16 日，「高等学校学習指導要領改訂草案」が，文部省により示される．結果的に微積分に関するものは，後に告示される「学習指導要領」の記述と全く同一のものとなる．この「高等学校学習指導要領改訂草案」を受け，日本数学教育会研究部は，昭和 35 年 7 月 23 日，東京都高等学校数学教育研究会と共催で，「高等学校学習指導要領改訂草案に対する研究会」を開催した．文部省から，初等中等教育局中等教育課教科調査官の大野清四郎*9が招かれている．この研究会の詳細は，昭和 35 年 9 月 1 日発行の『日本数学教育会誌第 42 巻第 9 号』で知ることができる．改訂草案に対しては，大野から説明があった．その中で，大野は，「数学 IIB」の微積分に関して，

> 微分法については，整関数の範囲で和，差，積まで扱い積分法については，区分求積法から入るか，微分の逆演算から入るかは，指示していない [31]．

と述べている．これは，興味を惹く言である．「学習指導要領」作成の担当者自身が，「タイプ A」，「タイプ B」どちらを取るかについては，「指示しない」と述べているのである．もちろん，これについては，当時見解が分かれるところであったが，そんな状況下で，日本数学教育会は，一応の「タイプ B」への移行という結論を見たところであった．しかし，大野は，どちらとも見解を示していないのである．本稿では，第 4 節において，昭和 35 年の「学習指導要領」に対して，「タイプ A」，「タイプ B」のどちらでも構成可能な「汎用性のある構成」と指摘したが，このスタンスは，当時の文部省内の「教材等調査委員会作成委員会」自身の葛藤の表れと読み取れる．

*9 当時，文部省初等中等教育局中等教育課教科調査官．

3.6 教科書の様相

前掲の「金子 (2014)」は，当時の教科書を丹念に調査し，当時の教科書が「タイプ A」,「タイプ B」のどちらの構成法を採っているかが，示されている．以下に「金子 (2014)」に掲載された表を「表 3.3」,「表 3.4」として引用する．ただし，金子は，主要著者も明記しているが，ここでは外した．

表から明らかなように，昭和 26 年，31 年の「学習指導要領」下では，大日本図書の「数学 III」を除くすべてが,「タイプ A」の構成法を採用している．

一方，昭和 35 年の方は,「タイプ A」と「タイプ B」が混在していることが見て取れる．

見てきたとおり，昭和 35 年の当時は，2 つの構成法のどちらを取るかについては，議論が分かれるところであり，そのような状況を受けて,「学習指導要領」もどちらの構成でも教科書が編集され得る状況にあった．「金子 (2014)」で明らかにされた教科書の様相は，そのようの状況が映し出されたものと見て良いだろう．

表 3.3 昭和 26 年と昭和 31 年の指導要領下での教科書の状況 （金子 2014）

<table>
<tr><th></th><th>解析Ⅱ</th><th>数学Ⅲ</th></tr>
<tr><td>東京書籍</td><td></td><td>タイプ A</td></tr>
<tr><td>数研出版</td><td></td><td>タイプ A</td></tr>
<tr><td>啓林館</td><td></td><td>タイプ A</td></tr>
<tr><td rowspan="2">実教出版</td><td>タイプ A</td><td>タイプ A</td></tr>
<tr><td colspan="2">定積分の上端を x として不定積分を定義</td></tr>
<tr><td rowspan="2">好学社</td><td>タイプ A</td><td>タイプ A</td></tr>
<tr><td colspan="2">速度と変位の関係に言及</td></tr>
<tr><td rowspan="2">大日本図書</td><td>タイプ A</td><td>タイプ B</td></tr>
<tr><td colspan="2">速度と変位の関係に言及</td></tr>
<tr><td rowspan="2">帝国書院</td><td rowspan="2"></td><td>タイプ A</td></tr>
<tr><td>速度と変移の関係に言及</td></tr>
<tr><td>三省堂</td><td>タイプ A</td><td>タイプ A</td></tr>
<tr><td rowspan="2">日本書院</td><td>タイプ A</td><td>タイプ A</td></tr>
<tr><td colspan="2">速度と変位の関係に言及</td></tr>
<tr><td>昇龍堂</td><td>タイプ A</td><td>タイプ A</td></tr>
<tr><td rowspan="2">清水書院</td><td rowspan="2"></td><td>タイプ A</td></tr>
<tr><td>速度と変位の関係に言及</td></tr>
</table>

表 3.4　昭和 35 年改訂の指導要領下での教科書の状況 （金子 2014）

<table>
<tr><th></th><th>数学ⅡA</th><th>数学ⅡB</th></tr>
<tr><td>東京書籍</td><td>タイプ B</td><td>タイプ A</td></tr>
<tr><td>数研出版</td><td>タイプ A</td><td>タイプ A</td></tr>
<tr><td rowspan="2">啓林館</td><td>タイプ A</td><td>タイプ A</td></tr>
<tr><td colspan="2">求積法→不定積分→定積分</td></tr>
<tr><td>実教出版</td><td>タイプ B
区分求積法
に言及</td><td>タイプ A</td></tr>
<tr><td rowspan="2">学校図書</td><td>タイプ B</td><td>タイプ B</td></tr>
<tr><td colspan="2">区分求積法に言及</td></tr>
<tr><td rowspan="2">大日本図書</td><td>タイプ A</td><td>タイプ A</td></tr>
<tr><td colspan="2">速度と変位の関係に言及
求積法→不定積分→定積分</td></tr>
<tr><td>学研書籍</td><td>タイプ B</td><td>タイプ B</td></tr>
<tr><td rowspan="2">旺文社</td><td>タイプ A</td><td>タイプ A</td></tr>
<tr><td colspan="2">不定積分→求積法→定積分</td></tr>
<tr><td rowspan="2">帝国書院</td><td>タイプ A</td><td>タイプ A</td></tr>
<tr><td colspan="2">速度と変位の関係に言及
不定積分→求積法→定積分</td></tr>
<tr><td>三省堂（Ⅰ）</td><td>タイプ A
速度と変位の関係に言及</td><td>タイプ B
区分求積法に言及</td></tr>
<tr><td rowspan="2">三省堂（Ⅱ）</td><td>タイプ A</td><td>タイプ A</td></tr>
<tr><td colspan="2">不定積分→求積法→定積分</td></tr>
<tr><td>昇龍堂</td><td>タイプ A</td><td>タイプ A</td></tr>
<tr><td>清水書院</td><td>タイプ A</td><td>タイプ B
区分求積法に言及</td></tr>
</table>

3.7　「微分法の逆算としての積分法」の定着

昭和 35 年の「学習指導要領」は，昭和 38 年からの 10 年間の実施年度を経ることになる．そして，昭和 45 年 10 月 15 日告示の『高等学校学習指導要領』が出されるまで，高等学校ではこれに準拠した教育が行われたのである．

当然，授業実践においても，「タイプ A」，「タイプ B」の両者の構成法が混在したわけだが，両者に対する学校現場の評価はどうであったのか．また，どちらのタイプの教科書が，高等学校現場では多く採択されたのか，興味は尽きない．だが，これに関する調査は今後の課題としたい．

昭和 45 年の『高等学校学習指導要領』[32] は，昭和 48 年度からの学年進行実施となったが，この学習指導要領では，「タイプ B」への完全移行がなされることになる．この「学習指導要領」で

は，数学の必修科目については，「『数学 I』または『数学一般』」と明示され，微分と積分がともに導入される「数学 IIA」または「数学 IIB」は選択科目となる．したがって，この改訂においては，前回の改訂時「タイプ B」への移行の契機となった「微積分の必修」は解消されたことになる．

この時，2 年次履修を想定して作られた「数学 IIA」(5 単位) から，数列に関する一切の項目が削除され，「数学 III」履修の前提となる「数学 IIB」(6 単位) からも「無限数列」は削除され「有限数列」のみに限定されてしまう．すなわち，「タイプ A」の構成法をとるために不可欠な「無限数列とその級数」の概念が「数学 III」へと送られたのである．これは，積分が導入される「数学 IIA」と「数学 IIB」で，区分求積法に触れることができなくなり，「タイプ A」による積分の構成法は不可能となったことを意味する．

昭和 45 年の『高等学校学習指導要領』第 2 章「第 3 節 数学」に定められた，「数学 IIB」[33] の数列と微積分に関する項目を，以下に引用しておく．無限数列や級数に関する項目が一切ないことが確認できる．

> 二項定理，有限数列
>
> 二項定理や数列を通して数学的帰納法について理解させる．また，簡単な数列について，その特徴をとらえさせ，帰納的に定義するしかたとその意義を理解させる．
>
> ア 二項定理
>
> イ 簡単な数列
>
> 　等差数列，等比数列など
>
> ウ 数学的帰納法，帰納的定義
>
> エ 用語および記号
>
> 二項定理，数学的帰納法，数列，一般項，等差数列，公差，等比数列，公比，$\sum$
>
> 微分法と積分法
>
> 微分係数と導関数の意味を理解させ，簡単な整関数の範囲で，導関数を求めたり，それを用いたりすることができるようにする．また，積分の意味を理解させ，それを簡単な整関数の範囲で応用できるようにする．
>
> ア 微分係数の意味
>
> イ 導関数とその計算
>
> 　関数の和・差・積の導関数
>
> ウ 導関数の応用
>
> 　接線，関数値の増減，速度など
>
> エ 積分の意味
>
> オ 積分の応用
>
> 　面積，体積など
>
> カ 用語および記号

区間，増分，Δx，極限値，lim，　微分係数，導関数，$f'(x)$，y'，$\dfrac{dy}{dx}$，　極大，極小，極値，不定積分，積分定数，$\displaystyle\int f(x)dx$，定積分，$\displaystyle\int_a^b f(x)dx$

このようにして，昭和 45 年の「学習指導要領」改訂により，「微分の逆演算としての積分の導入」である「タイプ B」が定着するに至った．以下は，昭和 26 年から昭和 45 年の学習指導要領の数列，微分・積分に関する単元の比較表である．

表 3.5　学習指導要領の数列，微分・積分に関する単元の比較表

昭和 26 年(タイプ A)	昭和 31 年(タイプ A)	昭和 35 年(汎用性のある構成)	昭和 45 年(タイプ B)
・解析Ⅱ Ⅲ.数列や級数を用いること Ⅴ.変化率を用いること （微分） Ⅵ．計算において極限を用いること （積分）	・数学Ⅱ b 函数とそのグラフ （微分） ・数学Ⅲ a 数列と級数 b 微分 c 積分	・数学ⅡA (3) 数列と極限 (4) 微分法と積分法 ・数学ⅡB (2) 数列と級数 (5) 微分法 (6) 積分法 ・応用数学 (4) 数列と級数 (5) 微分法 (6) 積分法 ※数学Ⅰを履修した生徒が，以上 3 科目から 1 科目選択． ※応用数学は主として職業教育を主とする学科において履修させる． ・数学Ⅲ (1) 微分法とその応用 (2) 積分法とその応用 ※数学Ⅲは数学ⅡB を選択した場合のみ，数学Ⅲを履修	・数学ⅡA B 解析 (1) 微分法と積分法 ・数学ⅡB A 代数・幾何 (5) 二項定理・有限数列 B 解析 (1) 微分法と積分法 ・応用数学 (2) 微分法と積分法(Ⅰ) (4) 有限数列 (6) 微分法と積分法(Ⅱ) ※数学Ⅰを履修した生徒が，以上 3 科目から 1 科目選択 ※応用数学は主として職業教育を主とする学科において履修させる． ・数学Ⅲ A 解析 (1) 数列の極限 (2) 微分法とその応用 (3) 積分法とその応用 ※数学Ⅲは数学ⅡB を選択した場合のみ，数学Ⅲを履修

参考文献

[1] 公田藏 (1998),「「近代数学」と学校数学:数学の普及の歴史から (数学史の研究)」,『数理解析研究所講究録』, 京都大学, pp75-91.

[2] 金子正隆 (2014),「積分概念の導入に関する教科書調査について-高等学校学習指導要領の変遷もふまえて-」,『東邦大学教養紀要第　46 号』, pp75-89.

[3] 前掲 [2], p76.

[4] 阿部眞之助『解析編 (II)』中等学校教科書株式会社.

[5] 文部省 (1951),『中学校高等学校学習指導要領数学科編（試案）』, 中部図書.

[6] 前掲 [5], p.139.

[7] 前掲 [5], pp.157-168.

[8] 前掲 [5], p.166.

[9] 末綱恕一, 菅原正巳 (1952),『解析 II』, 大日本図書株式会社.

[10] 文部省 (1995),『高等学校学習指導要領数学科編昭和 31 年度改訂版』, 好学社.

[11] 前掲 [10], pp39-40.

[12] 文部省 (1960),『高等学校学習指導要領』, 大蔵省印刷局.

[13] 前掲 [12], pp67-69.

[14] 前掲 [12], p68.

[15] 前掲 [12], p69.

[16] 前掲 [12], p69.

[17] 前掲 [10], pp39-40.

[18] 前掲 [12], p69.

[19] 井上義夫 (1959),「高等学校数学科教育課程について一日数教名古屋大会報告一」,『日本数学教育会誌第 41 巻 第 11 号』, 日本数学教育会, pp173-178.

[20] 佐藤良一郎 (1958),「全国数学教育研究大会における要望決議文を文部大臣に提出」,『日本数学教育会誌第 41 巻 第 1 号』, 日本数学教育会, p.24.

[21] 前掲 [19], p175.

[22] 白石勲司 (1959)「高校必修課程における微積分について」,『日本数学会誌第 41 巻　臨時増刊総会特集号』, pp212-213.

[23] 前掲 [22], p213.

[24] 前掲 [22]，p214.
[25] 前掲 [19]，p175.
[26] 日本数学教育会 (1960),「高等学校数学科教育課程研究委員会中間報告」,『日本数学教育会誌第 42 巻 第 3 号』, 日本数学教育会，p.55-58.
[27] 前掲 [26]，p57.
[28] 井上義夫 (1960),「高等学校数学科教育課程研究委員会報告」,『日本数学教育会誌第 42 巻 第 5 号』, 日本数学教育会，pp.69-82.
[29] 前掲 [28]，p72.
[30] 前掲 [28]，p73.
[31] 日本数学教育会研究部・東京都高等学校数学教育研究会 (1960),「高等学校学習指導要領改訂草案に関する研究会」,『日本数学教育会誌第 41 巻 第 1 号』, 日本数学教育会，p.162.
[32] 文部省 (1970),『高等学校学習指導要領』, 大蔵省印刷局.
[33] 前掲 [32]，pp.60-62.

第 4 章

高等学校における微積分教育の再検討に基づく提案授業

本章では，筆者がこれまでの研究に基づいて作成したカリキュラムの実践について述べる．筆者は，平成 27 年 12 月から平成 28 年 1 月にかけて三重県立津東高校で研究授業として，全 8 時の授業実践を行った．対象となったクラスは 3 年次に開講される教養講座である．教養講座とは，12 月から 1 月にかけて，特別編成される講座であり，12 月時点で就職内定または，私大，短大への入学が内定している生徒を対象としている．教養講座を履修している生徒の内訳は男子 9 名，女子 13 名の計 22 名である．

4.1　実践に向けて

4.1.1　生徒について

第 1 時授業の最初に対象生徒の実態を把握するために，事前アンケート調査を行った．調査人数は，1 名欠席のためアンケートの 21 名（男子 9 名，女子 12 名）である．質問項目とその結果を以下に示す．図 4.1 は実際に用いた事前アンケート紙である．

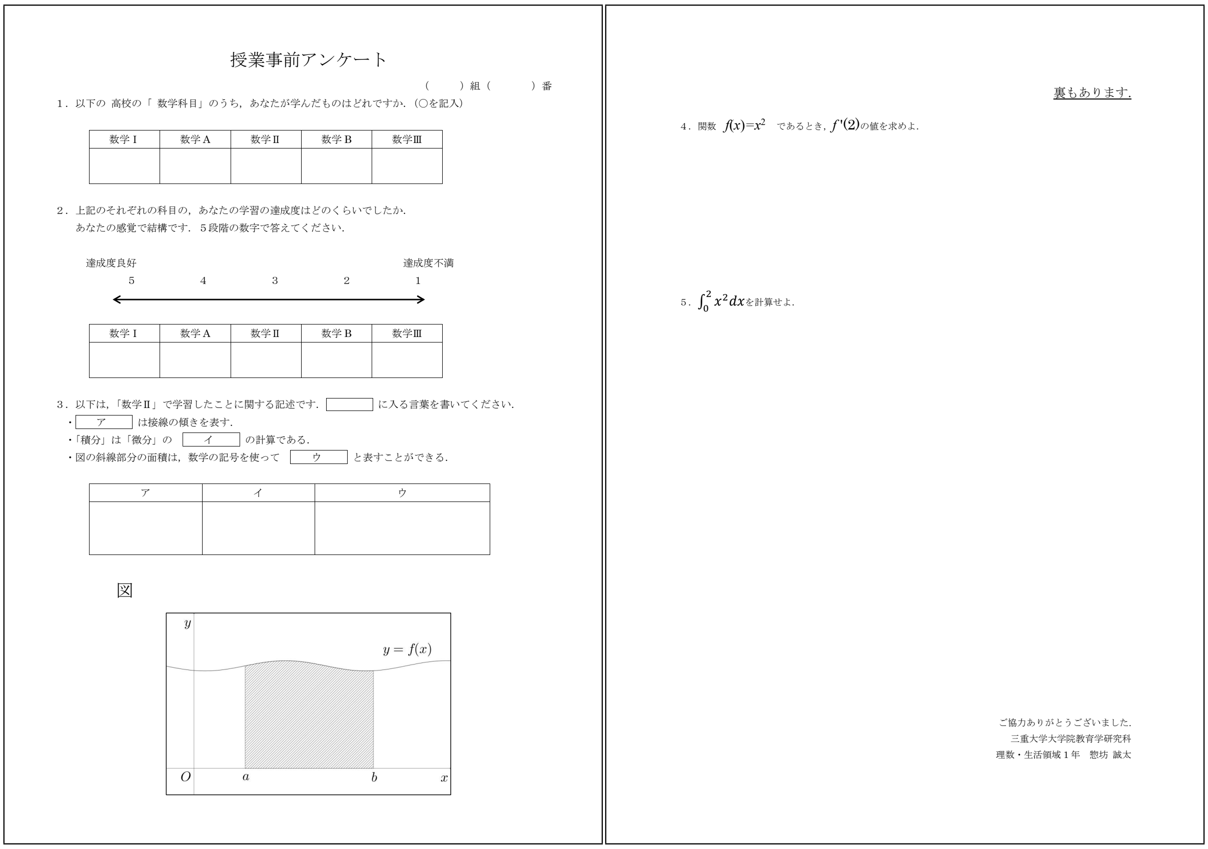
> 質問 1．数学科目の履修状況を教えてください．

質問 1 の回答を表 4.3 に示す．

表 4.1　質問 1 の回答

数学 I	数学 A	数学 II	数学 B	数学 III
21	21	21	19	1

表 4.3 から，全員が本校における必修科目である数学 I・A・II を履修し，19 人が数学 B を履修していることがわかる．数学 III を履修しているのは 1 人だけであった．ほとんどの生徒が区分求



授業事前アンケート

（　　）組（　　）番

1．以下の 高校の「 数学科目」のうち，あなたが学んだものはどれですか．（○を記入）

数学Ⅰ	数学A	数学Ⅱ	数学B	数学Ⅲ

2．上記のそれぞれの科目の，あなたの学習の達成度はどのくらいでしたか．
あなたの感覚で結構です．5段階の数字で答えてください．

達成度良好　　達成度不満

5　4　3　2　1

数学Ⅰ	数学A	数学Ⅱ	数学B	数学Ⅲ

3．以下は，「数学Ⅱ」で学習したことに関する記述です．□に入る言葉を書いてください．

・ア は接線の傾きを表す．

・「積分」は「微分」の イ の計算である．

・図の斜線部分の面積は，数学の記号を使って ウ と表すことができる．

ア	イ	ウ

図

裏もあります．

4．関数 $f(x)=x^2$ であるとき，$f'(2)$の値を求めよ．

5．$\int_0^2 x^2 dx$を計算せよ．

ご協力ありがとうございました．
三重大学大学院教育学研究科
理数・生活領域1年　惣坊 誠太

図 4.1　事前アンケート紙

積法を学習していないことが見て取れる．

> 質問 2．履修した科目について，達成度を 5 段階で自己評価してください．（1〜5 の 5 段階で，数字が大きいほど良評価とする．）

質問 2 の回答を表 4.2 に示す．

表 4.2 から，数学 II・B を苦手としている生徒が数学 I・A に比べて多いことがわかる．どの科目も 4 以上の評価をつけた生徒が少なく，数学を得意と自負している生徒は少ないと考えられる．以上の結果から，区分求積法及び微分における極限の扱いに関しては細心の注意を払い指導する必要がある．

> 質問 3．関数 $f(x) = x^2$ について，$f'(2)$ の値を求めなさい．

質問 3 は，途中式を含め正解したのは 10 人（正答率 48.6%）であった．ただし，途中式に誤りがあるが正解の値を導いている者，もしくは正解の値のみ記入した者は 7 人であった．

表 4.2　質問 2 の回答

評価	数学 I	数学 A	数学 II	数学 B	数学 III
5	0	0	0	1	0
4	4	3	1	1	0
3	<u>6</u>	<u>7</u>	4	2	0
2	<u>6</u>	5	6	5	1
1	5	6	<u>10</u>	<u>11</u>	0
平均	2.43	2.33	1.80	1.80	2.0

（単位:人）

質問4．$\displaystyle\int_0^2 x^2 dx$ を計算しなさい．

質問4は，途中式を含め正解したのは 6 人（正答率 28.6%）であった．途中式に誤りがあるが正解の値を導いている，もしくは正解の値のみ記入したのは 3 人であった．　質問 3・4 の結果から微分・積分で学習する基本計算を正確に身に着けている生徒は半数にも及ばないことがわかる．

質問 5. 次の文章の空白を埋めなさい．
(1)「積分」は「微分」の___の計算である．
(2) 図（図 4.1 参照）の斜線部分の面積は，数学の記号を使って，___と表すことができる．

質問 5(1) の期待される回答は「逆」であるが，正解したのは 3 人（正答率 14.9%）であった．また, 質問 5(2) の期待される回答は「$\displaystyle\int_a^b f(x)dx$」であるが正解は 1 人（正答率 4.8%）であった．

この結果から，微分と積分を逆の演算であると認識していないにも関わらず積分計算ができる生徒が存在し，大半の生徒が定積分の幾何的あるいは計量的な意味を理解していないことがわかる．非常に残念なことであるが，研究授業の対象となった生徒は微積分を学習してきてはいるものの，その習熟度は極めて低いと言える．

4.1.2　教材について

今回使用する教材は，本稿第二章で紹介した，『数学 第一類 4・5』の「1 系列ノ考察」，「2 連続的変化」を参考に，筆者が作成したものである．『数学 第一類 4・5』は，第二章で述べたように解析学や数学史に準拠した教材である．しかし，計 8 時限という限られた授業数において，内容を網羅することは難しい．よって，学習の流れはそのままに，例題や練習問題等を必要最低限の量に抑え，微分積分学の基本定理の導出を目標とする教材を作成した．また，この教材を作成するにあ

たって，成田慎之介[*1]，「微分積分学の基本定理の創出過程に関する一考察–『数学 第一類』の分析を手がかりとして–」[1] において，『数学 第一類』による微分積分学の基本定理の創出過程の分析を参考にした．また，教材の物体の運動に関する内容については，黒田俊郎著『微分のひ・み・つ』[2]，『積分のい・ず・み』[3] を大いに参考にした．

作成した教材は以下の内容とした．

1. 区分求積
2. グラフに囲まれた図形の面積
3. 面積の極限及び積分の定義
4. $v-t$ グラフから移動距離の導出
5. $s-t$ グラフから速度の導出と微分の定義
6. 微分積分学の基本定理とその利用

1. 区分求積

『数学 第一類 4・5』では，区分求積法の導入として，不規則な曲線で囲まれた図形の面積を，幾つかの長方形の面積の和に近似する方法を扱った．筆者は，この方法を参考にし，「滋賀県全体と琵琶湖の面積の比を求める」という教材を作成した．この問題は，A3 紙面に印刷された滋賀県の地図を用いて，滋賀県全体の土地の面積と琵琶湖の面積の比を求める問題である．印刷された滋賀県の地図には予め 1.5cm 間隔で点線を垂直方向に引いた．この点線を用いて紙面上の地図の面積の近似値を求めることがねらいである．図 4.2 は本課題の該当テキストと，A3 プリントである．

実際，国土交通省国土地理院の「平成 26 年全国都道府県市区町村別面積調」によれば，滋賀県全体の面積は $4017.68km^2$，琵琶湖の面積は $669.23km^2$ であり，その比の値は 6.0034···となっている．なので，A3 紙面上での比の値についても約 6 になるはずである．また，テキスト下部の文章「より正確に面積の比を求めるには____.」の空欄部分には，「縦線の間隔を狭くする」等の文章が入る．垂直方向に引かれた点線の間隔を狭めることで，より細かく土地を長方形で取り尽くすことができることに気づけば，積分で用いる極限概念の理解の手立てとなる．

2. グラフに囲まれた図形の面積

本節では，図 4.3 のような 3 問の求積問題を導入とした．(1)，(2）は，三角形，台形の面積公式を使用することで，簡単に面積を求められる．(3）については，「数学 II」の積分を用いて求められるが，今回はそれを使用せずに求めるにはどうすればよいかを，誘導しながら考えさせる．

始めに，図 4.4 のように領域面積を複数の長方形の面積で近似することを考える．(1）では，4

[*1] 現，東京学芸大学附属国際中等教育学校

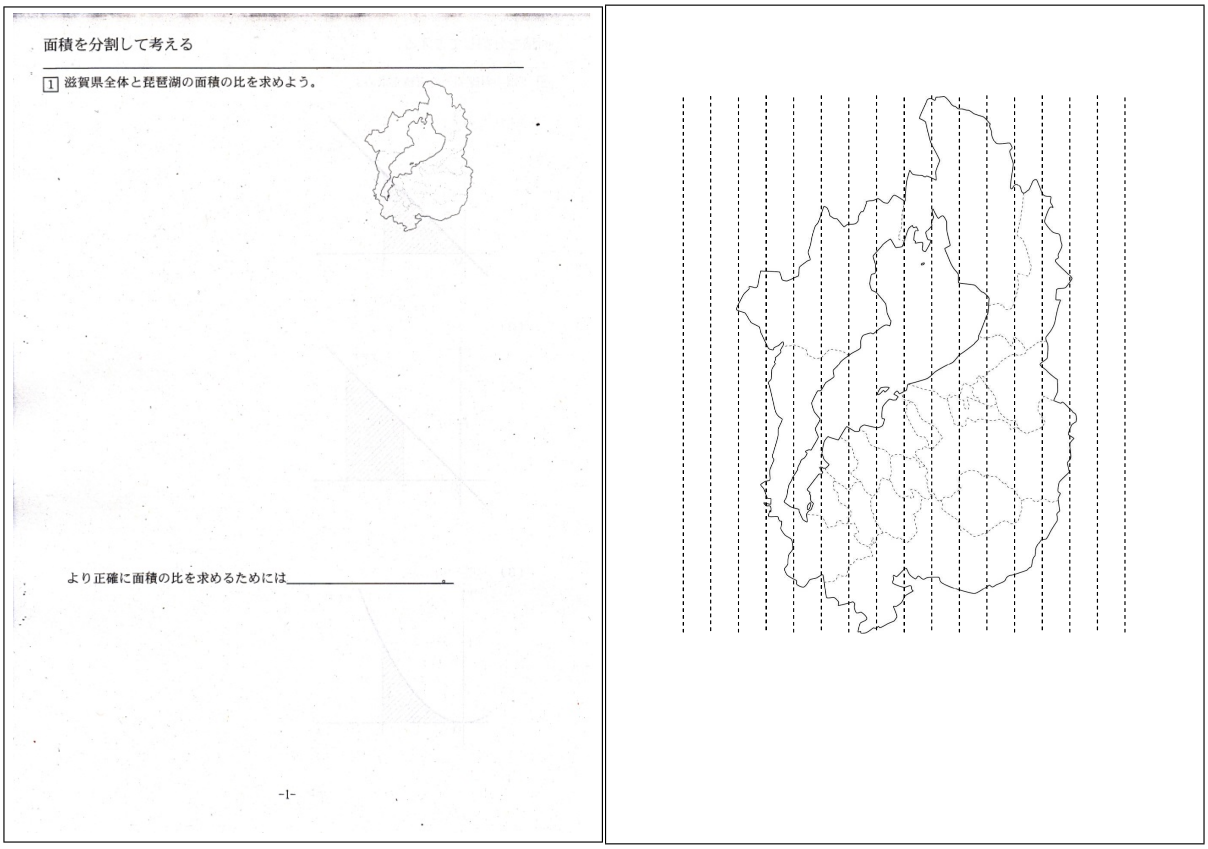


図 4.2　授業テキストと滋賀県 A3 プリント

つの長方形を用いて近似を行う．実際，4 つの長方形の面積の和は

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{4}\times\left(\frac{2}{4}\right)^2+\frac{1}{4}\times\left(\frac{3}{4}\right)^2+\frac{1}{4}\times\left(\frac{4}{4}\right)^2\\
=&\frac{1^2+2^2+3^2+4^2}{4^3}\\
=&\frac{15}{32}\\
=&0.46875
\end{aligned}
$$

となる．勿論，長方形の面積を 1 つずつ求めてから和を求める解答もあり得るが，後の一般化を見据えて，上記のような式変形を模範解答としておく．同様にして，(2) の長方形の面積の和は $\frac{91}{216} \fallingdotseq 0.4213$ と求められる．

図 4.4 の下部の文章「正確な面積を求めるためには…」の空欄部分には，「より細かく斜線部分を分割すればよい」等の文章が入る．この解答は，「1. 区分求積」で用いた方法からヒントを得て生み出されることが期待できる．

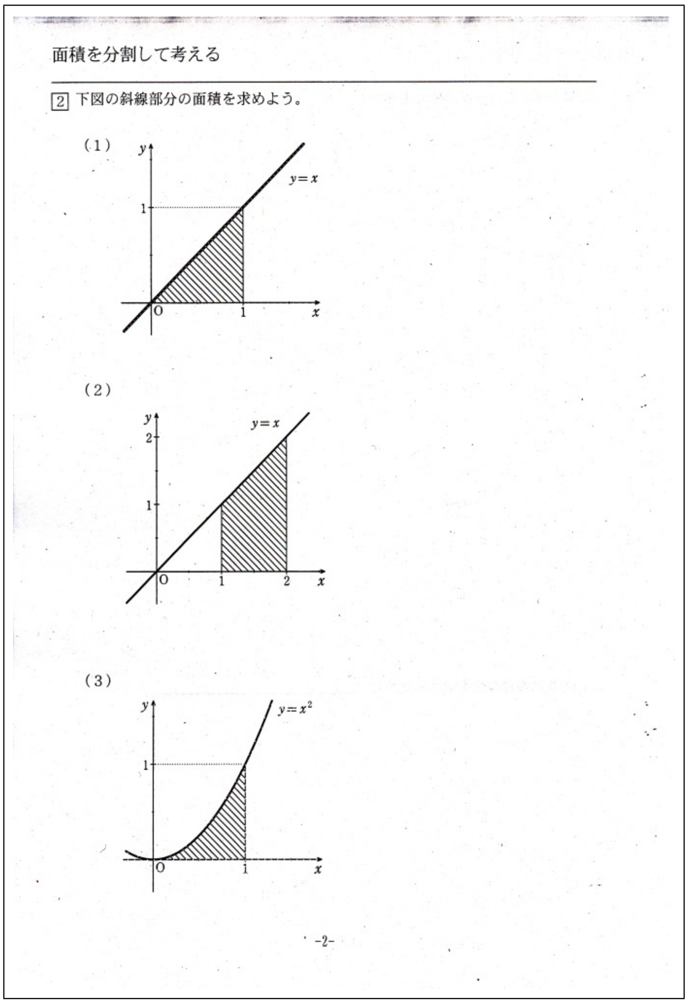
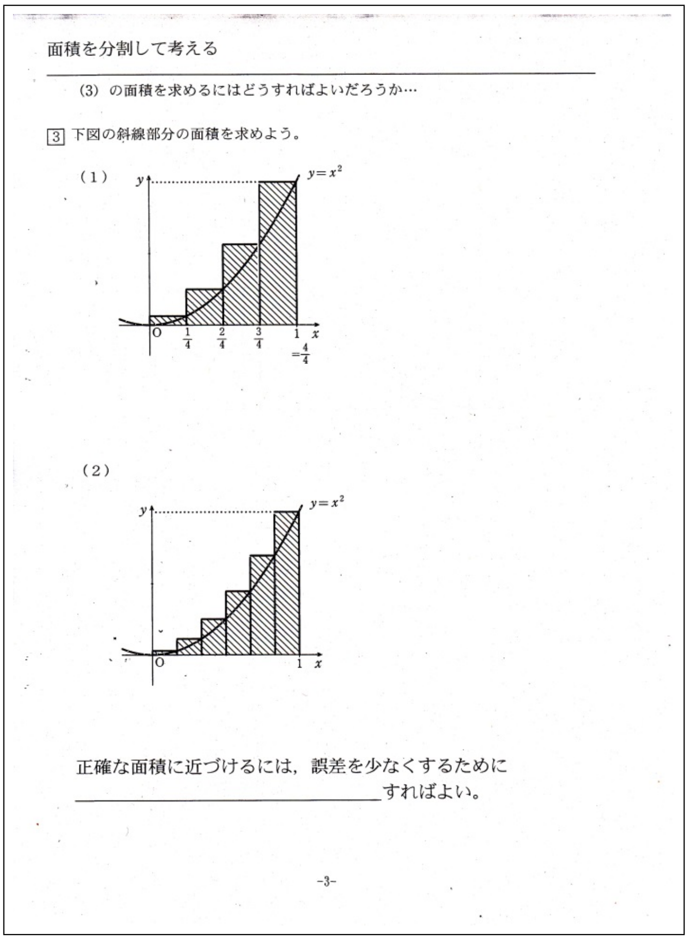


図 4.3　授業テキスト（グラフに囲まれた図形の面積 1）

上記 2 問の答え合わせには，関数グラフ作成ソフトウェア「GRAPES」*2を用いた．GRAPES を用いると，領域の分割数が増加するにつれて，長方形の面積の和が放物線の下部領域の面積に近づく様子を視覚的に確認できる．それとともに，画面の左上に面積の値が示されているため，長方形の面積が 0.3333⋯，つまり $\dfrac{1}{3}$ に近づいていく様子も見ることができる．図 4.5 の 1 枚目は GRAPES を用いて図 4.4 の（2）を描写したもので，$[0,1]$ 区間を 6 分割して長方形を構成している．これらの長方形の面積の和は 0.4123 と表示される．2 枚目は，$[0,1]$ 区間を 50 分割して長方形を構成しており，それらの面積の和は 0.3434 と表示される．次に，領域を n 個の長方形に分割した場合の，長方形の面積の和を考える．この課題を示したテキストが図 4.6 である．

n 個の長方形の作図については，生徒が戸惑う可能性もあり，指導者が誘導しながら取り組ませる．長方形の面積の和 $\dfrac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}$ については，前問の解答と同様にして求めることができる．また，生徒の実態を考慮し，$\sum$ は使用しない．

*2 参照 URL:www.osaka-kyoiku.ac.jp/ tomodak/grapes/volume.html



面積を分割して考える

(3) の面積を求めるにはどうすればよいだろうか…

3 下図の斜線部分の面積を求めよう。

(1)

(2)

正確な面積に近づけるには，誤差を少なくするために
____________________すればよい。

-3-

図 4.4　授業テキスト（グラフに囲まれた図形の面積 2）

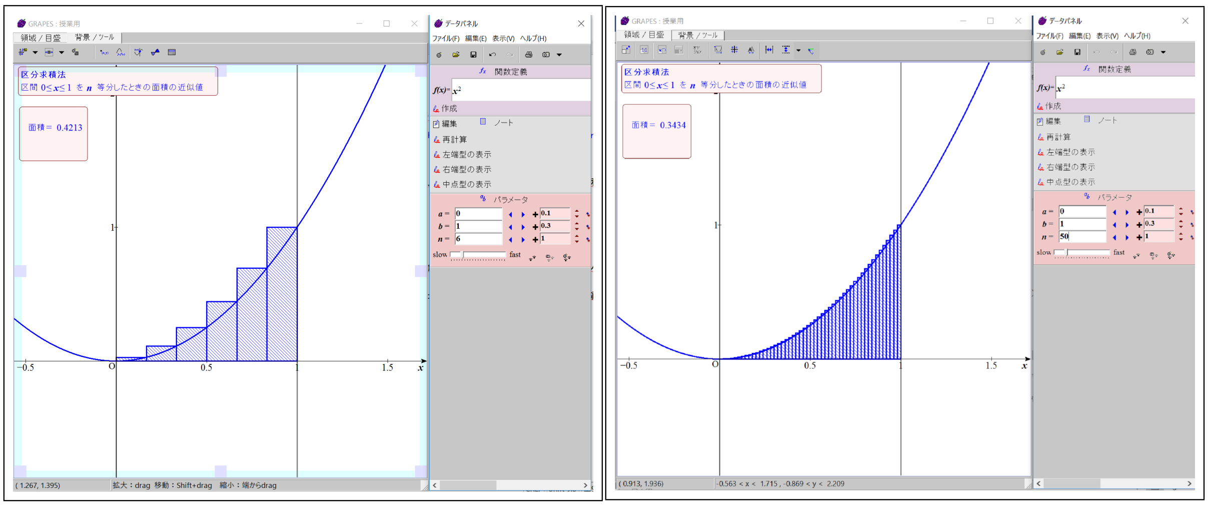
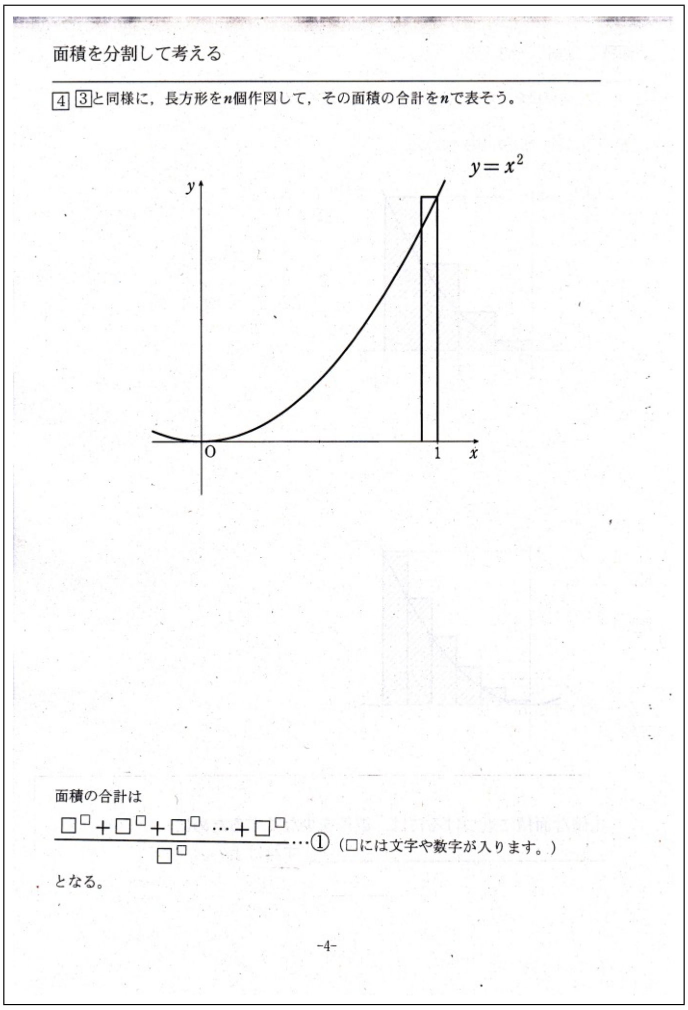


図 4.5　GRAPES による区分求積


面積を分割して考える

4 3と同様に，長方形をn個作図して，その面積の合計をnで表そう。

面積の合計は

$$\frac{\square^{\square}+\square^{\square}+\square^{\square}\ \cdots+\square^{\square}}{\square^{\square}}\cdots①$$ （□には文字や数字が入ります。）

となる。

-4-

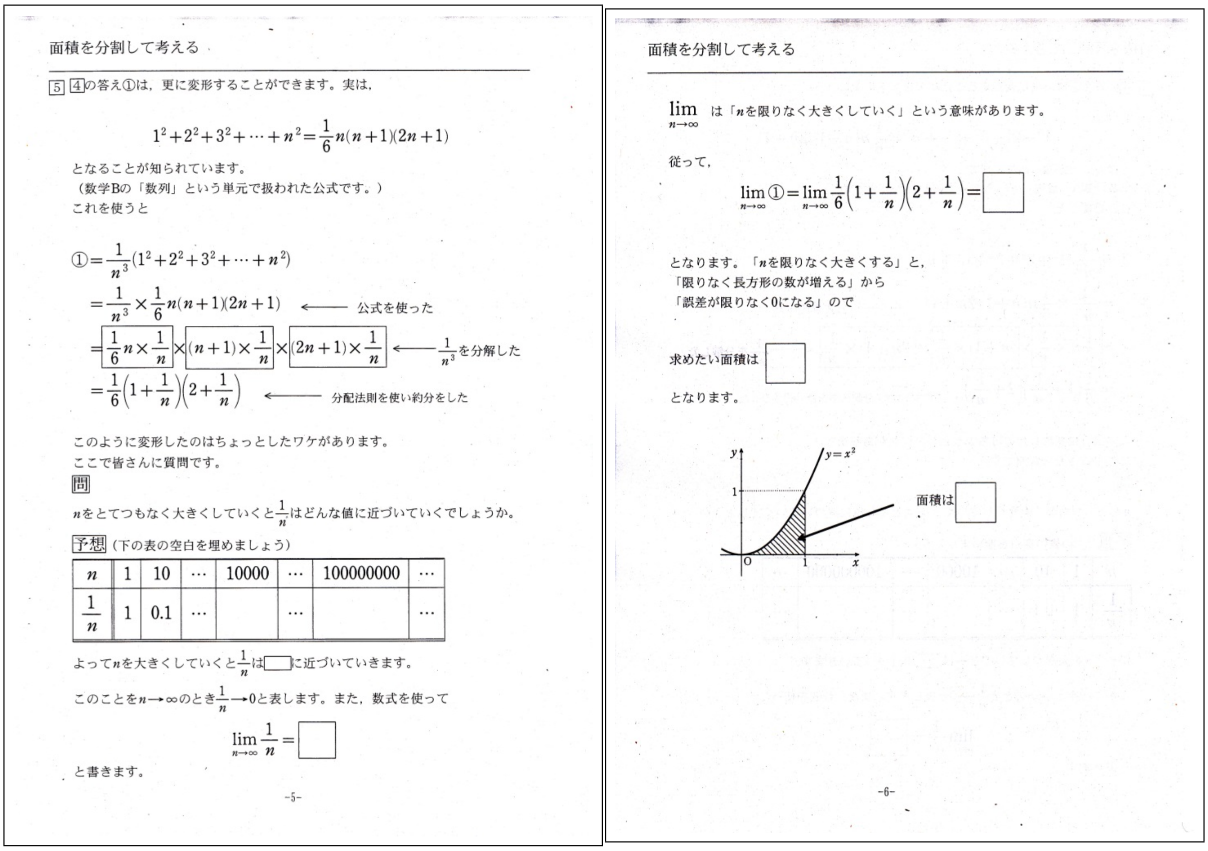
図 4.6　授業テキスト（グラフに囲まれた図形の面積 3）

3. 面積の極限及び積分の定義

次に，n 個の長方形の和について，$n \to \infty$ としたときの極限を求めさせる．すなわち，領域を分割する長方形の個数を限りなく大きくすると，どのような値に近づいていくかを考えさせる．今回授業を受ける生徒は，数学 B の「数列」において数列の和は学習しているが，数学 III を履修している生徒は殆どいないこともあり，極限の指導については丁寧な誘導を行う．図 4.7 は，本節で用いた極限に関するテキストである．

ところで，区分求積法を指導するにあたって，本来ならば，今回扱った上積分（第一章参照）だけでなく，下積分を求める必要がある．しかし，現行の高等学校数学で学習する数学 III の区分求積法では，扱う関数の大抵が可積分関数で，上積分，下積分のどちらかを積分値として了承していることもあり，本授業でも上積分のみを扱うことにした．

そして，図 4.8 で示すテキストを用いて定積分，不定積分に関する解説を行った．生徒は既に数



面積を分割して考える

5 4の答え①は，更に変形することができます。実は，

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

となることが知られています。
（数学Bの「数列」という単元で扱われた公式です。）
これを使うと

$$①=\frac{1}{n^3}(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)$$
$$=\frac{1}{n^3}\times\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \longleftarrow \text{公式を使った}$$
$$=\boxed{\frac{1}{6}n\times\frac{1}{n}}\times\boxed{(n+1)\times\frac{1}{n}}\times\boxed{(2n+1)\times\frac{1}{n}} \longleftarrow \frac{1}{n^3}\text{を分解した}$$
$$=\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) \longleftarrow \text{分配法則を使い約分をした}$$

このように変形したのはちょっとしたワケがあります。
ここで皆さんに質問です。

問

nをとてつもなく大きくしていくと$\frac{1}{n}$はどんな値に近づいていくでしょうか。

予想（下の表の空白を埋めましょう）

n	1	10	…	10000	…	100000000	…
$\frac{1}{n}$	1	0.1	…		…		…

よってnを大きくしていくと$\frac{1}{n}$は$\boxed{}$に近づいていきます。

このことを$n\to\infty$のとき$\frac{1}{n}\to 0$と表します。また，数式を使って

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=\boxed{}$$

と書きます。

-5-

面積を分割して考える

$\lim_{n\to\infty}$ は「nを限りなく大きくしていく」という意味があります。

従って，

$$\lim_{n\to\infty}①=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)=\boxed{}$$

となります。「nを限りなく大きくする」と，
「限りなく長方形の数が増える」から
「誤差が限りなく0になる」ので

求めたい面積は$\boxed{}$

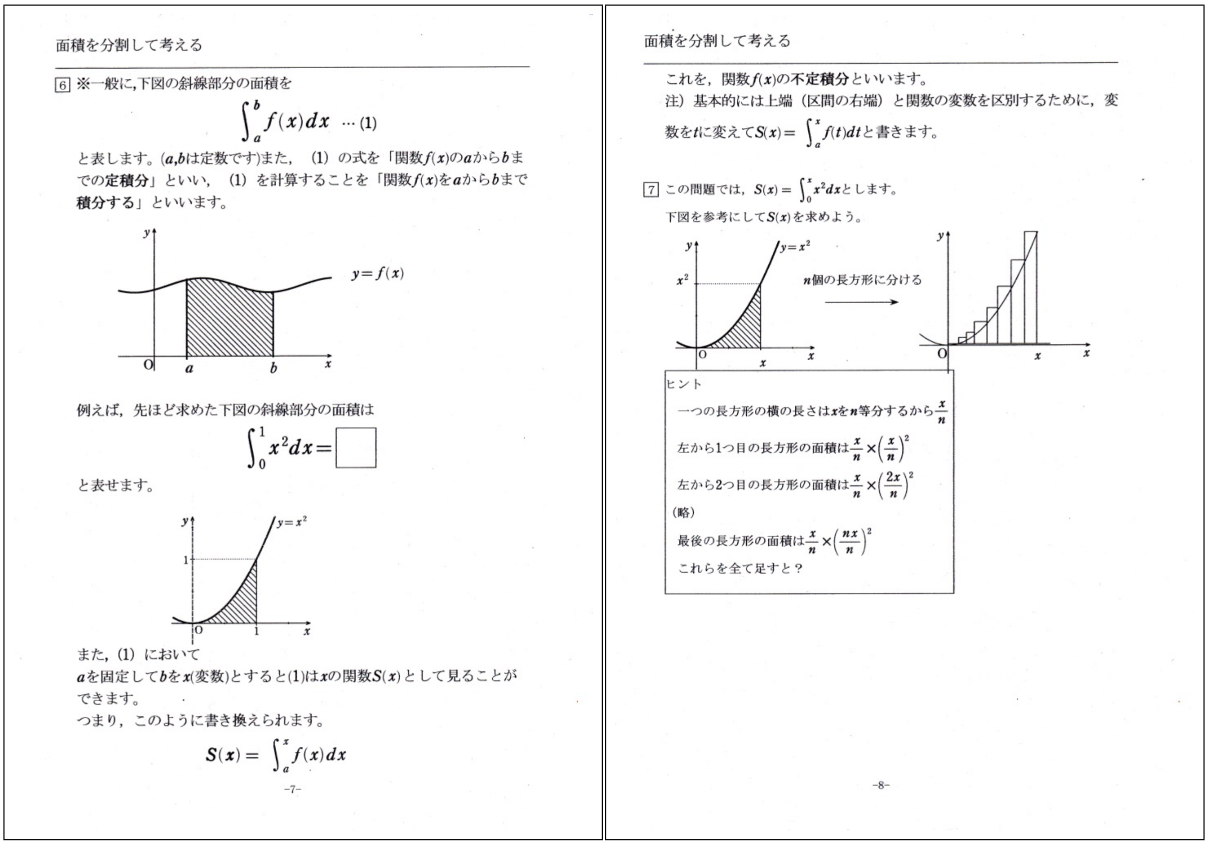
となります。

-6-

図 4.7　授業テキスト（面積の極限及び積分の定義 1）

学 II で，微分の逆演算としての積分を学習しており，現段階ではそのイメージを取り去り，あくまで定積分はグラフ下領域の面積であることを主張することを心掛ける．

不定積分の指導では，$\displaystyle\int_0^x x^2dx$ の値を区分求積法で求めさせる．前問までは，積分区間が $[0,1]$ であったため，混同を避けるためにヒントを与えて求めさせることにした．本来，不定積分の計算で現れる積分定数を意識させるために，$\displaystyle\int_a^x x^2dx$ を求めさせる必要があったが，授業時間や難易度を考慮して，避けることにした．さらに，$\displaystyle\int_a^x x^2dx$ は，変数の混同を避けるために，新たな変数 t を用いて $\displaystyle\int_a^x t^2dt$ と表記すべきであった．しかし，直交座標において，生徒らに馴染み深い変数 x，y で統一するため，積分変数に t を用いず，あえて積分区間の上端と同様の x を用いた．



面積を分割して考える

$\boxed{6}$ ※一般に,下図の斜線部分の面積を

$$\int_a^b f(x)dx \quad \cdots (1)$$

と表します。(a,bは定数です)また，(1) の式を「関数$f(x)$のaからbまでの**定積分**」といい，(1) を計算することを「関数$f(x)$をaからbまで**積分する**」といいます。

$y=f(x)$

例えば，先ほど求めた下図の斜線部分の面積は

$$\int_0^1 x^2 dx = \boxed{}$$

と表せます。

$y=x^2$

また，(1) において

aを固定してbをx(変数)とすると(1)はxの関数$S(x)$として見ることができます。

つまり，このように書き換えられます。

$$S(x) = \int_a^x f(x)dx$$

-7-

面積を分割して考える

これを，関数$f(x)$の**不定積分**といいます。

注) 基本的には上端（区間の右端）と関数の変数を区別するために，変数をtに変えて$S(x)=\int_a^x f(t)dt$と書きます。

$\boxed{7}$ この問題では，$S(x)=\int_0^x x^2 dx$とします。

下図を参考にして$S(x)$を求めよう。

$y=x^2$

n個の長方形に分ける

ヒント

一つの長方形の横の長さはxをn等分するから$\frac{x}{n}$

左から1つ目の長方形の面積は$\frac{x}{n}\times\left(\frac{x}{n}\right)^2$

左から2つ目の長方形の面積は$\frac{x}{n}\times\left(\frac{2x}{n}\right)^2$

(略)

最後の長方形の面積は$\frac{x}{n}\times\left(\frac{nx}{n}\right)^2$

これらを全て足すと？

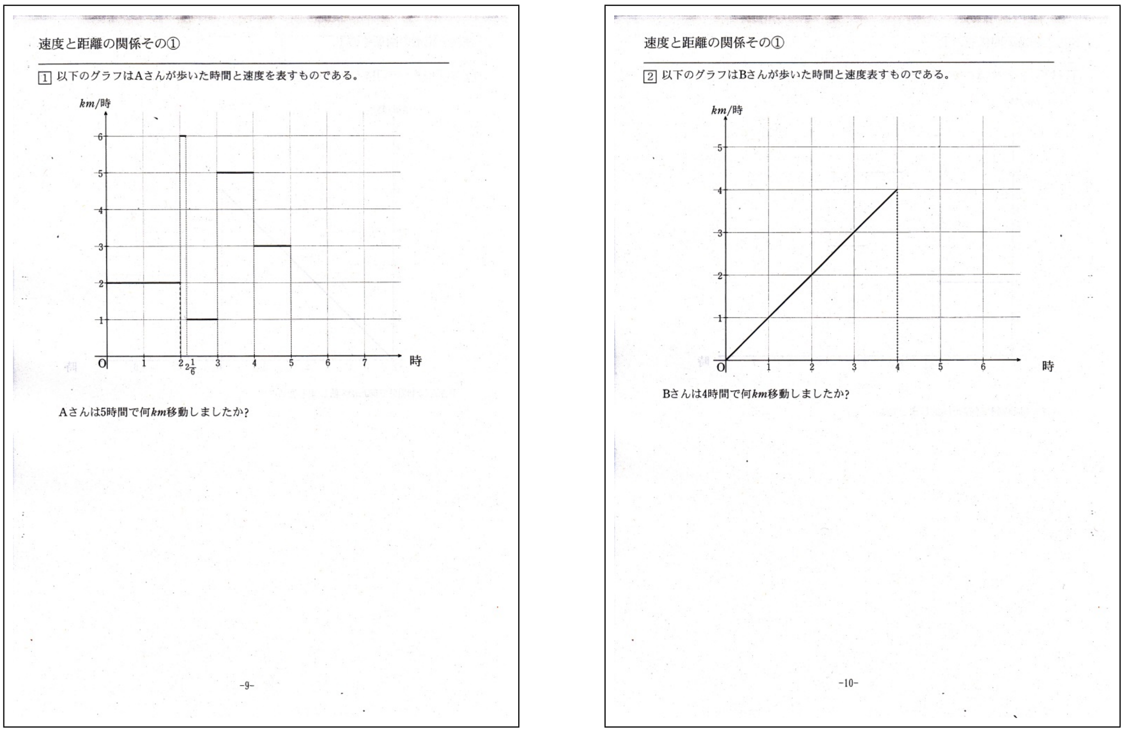
-8-

図 4.8　授業テキスト（面積の極限及び積分の定義）

4.$v-t$ グラフから移動距離の導出

積分の定義を学習後，微分への接続のために，物体の運動と積分の関連付けを行う．扱ったテキストは図 4.9，4.10 で示すものである．

問題$\boxed{1}$，$\boxed{2}$は，それぞれ等速度運動，等加速度運動であり，移動距離がグラフ下の領域の面積と一致することが理解できれば，容易に解答することができる．$\boxed{3}$も，グラフ下の面積を利用して移動距離を求めればよいが，区分求積法を用いなければならず，計算に手間がかかる．そこで，先ほど求めた $\displaystyle\int_0^x x^2dx$ の計算結果である $\frac{1}{3}x^3$ に，2 にを代入して面積を求めればよい．そして，速度と時間の関係を表すグラフから，移動距離を求めるためには，積分を用いればよいということを生徒に気付かせる．ここでは，微分積分学の基本定理への接続のために，「速度を積分すると移動距離となる」と印象づけることが重要である．


速度と距離の関係その①

1 以下のグラフはAさんが歩いた時間と速度を表すものである。

Aさんは5時間で何kmを移動しましたか?

-9-

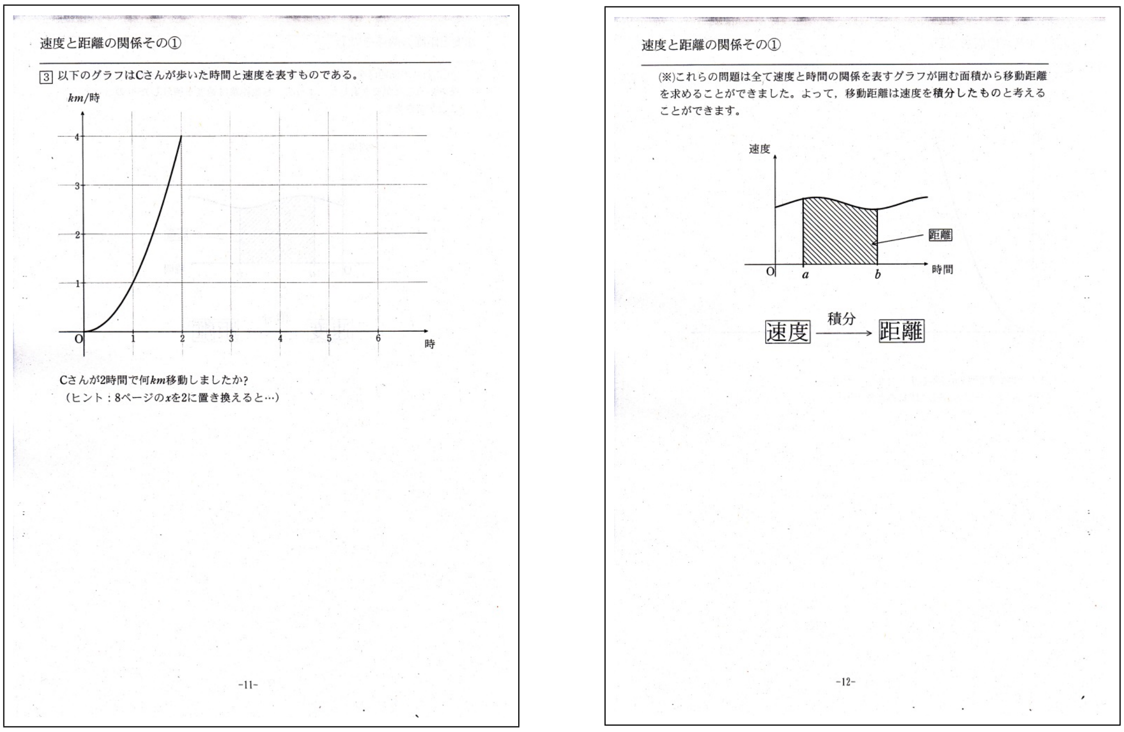
速度と距離の関係その①

2 以下のグラフはBさんが歩いた時間と速度表すものである。

Bさんは4時間で何kmを移動しましたか?

-10-

図 4.9　授業テキスト（$v-t$ グラフから移動距離の導出 1）


速度と距離の関係その①

3 以下のグラフはCさんが歩いた時間と速度を表すものである。

Cさんが2時間で何kmを移動しましたか?
（ヒント：8ページのxを2に置き換えると…）

-11-

速度と距離の関係その①

(※)これらの問題は全て速度と時間の関係を表すグラフが囲む面積から移動距離を求めることができました。よって，移動距離は速度を積分したものと考えることができます。

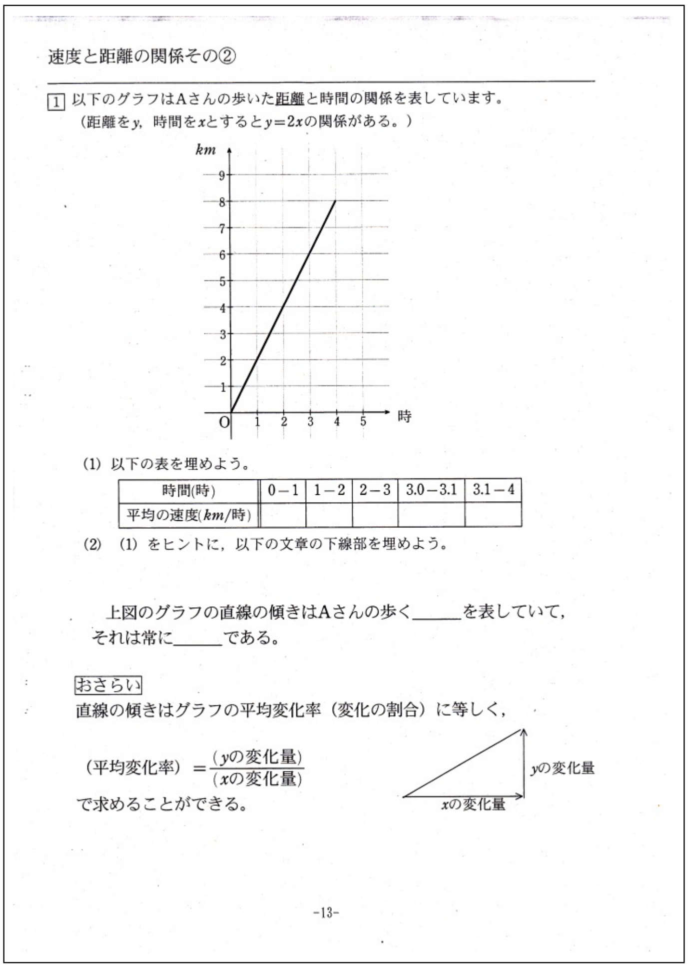
速度 $\xrightarrow{\text{積分}}$ 距離

-12-

図 4.10　授業テキスト（$v-t$ グラフから移動距離の導出 2）

5. $s-t$ グラフから速度の導出と微分の定義

この節では，微分の導入に加えて，微分積分学の基本定理への接続を兼ねて，移動距離と時間の関係から速度を求める問題を扱うことにした．最初に，図 4.11 のような，等速度運動を表すグラフで速度を導入した．このようなグラフでは，速度が常に一定（$4km$/時）で，それは直線の傾きを表していることに気付かせる．


速度と距離の関係その②

1 以下のグラフはAさんの歩いた距離と時間の関係を表しています。
（距離をy，時間をxとすると$y=2x$の関係がある。）

(1) 以下の表を埋めよう。

時間(時)	0−1	1−2	2−3	3.0−3.1	3.1−4
平均の速度(km/時)					

(2) (1) をヒントに，以下の文章の下線部を埋めよう。

上図のグラフの直線の傾きはAさんの歩く＿＿＿を表していて，
それは常に＿＿＿である。

おさらい
直線の傾きはグラフの平均変化率（変化の割合）に等しく，

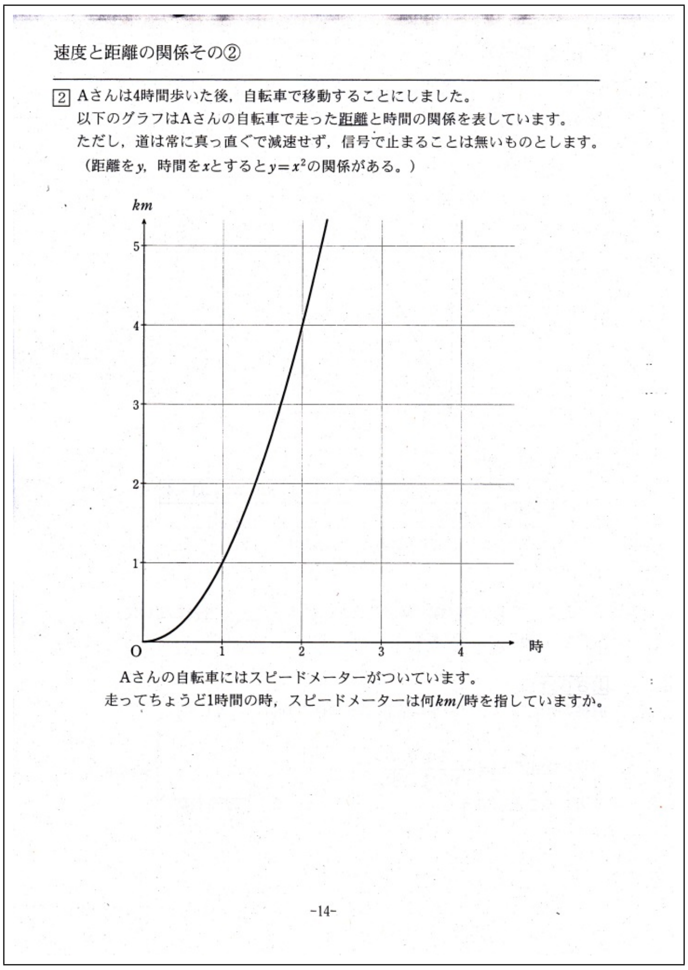
$$（平均変化率）=\frac{（y の変化量）}{（x の変化量）}$$

で求めることができる。

-13-

図 4.11　授業テキスト（$s-t$ グラフから速度の導出と微分の定義 1）

次に，図 4.12 のような等加速度運動を表すグラフから，ある時間における瞬間の速度を求める課題を提示する．


速度と距離の関係その②

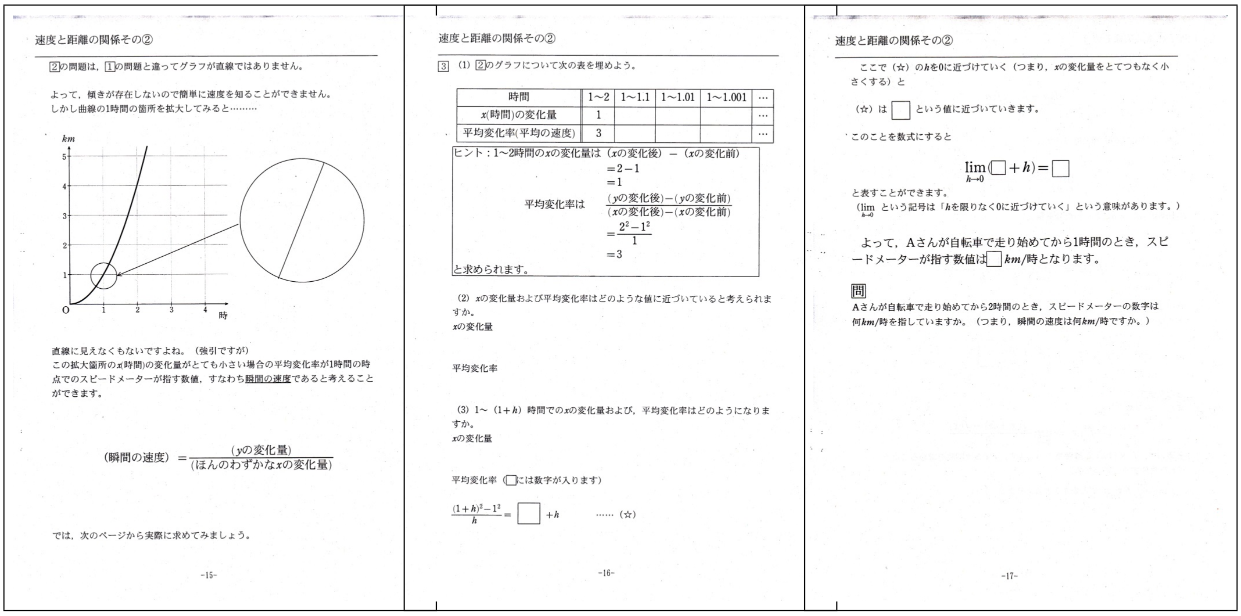
2 Aさんは4時間歩いた後，自転車で移動することにしました。
以下のグラフはAさんの自転車で走った**距離**と時間の関係を表しています。
ただし，道は常に真っ直ぐで減速せず，信号で止まることは無いものとします。
（距離をy，時間をxとすると$y=x^2$の関係がある。）

Aさんの自転車にはスピードメーターがついています。
走ってちょうど1時間の時，スピードメーターは何km/時を指していますか。

-14-

図 4.12　授業テキスト（$s-t$ グラフから速度の導出と微分の定義 2）

図 4.11 とは違い，グラフが曲線であるため，傾きを求めることができない．そこで図 4.13 のような誘導を与えて，瞬間の速度を求める手順を指導する．



速度と距離の関係その②

$\boxed{2}$の問題は，$\boxed{1}$の問題と違ってグラフが直線ではありません。

よって，傾きが存在しないので簡単に速度を知ることができません。
しかし曲線の1時間の箇所を拡大してみると………

直線に見えなくもないですよね。（強引ですが）
この拡大箇所のx(時間)の変化量がとても小さい場合の平均変化率が1時間の時点でのスピードメーターが指す数値，すなわち瞬間の速度であると考えることができます。

$$（瞬間の速度）=\frac{(y\text{の変化量})}{(\text{ほんのわずかな}x\text{の変化量})}$$

では，次のページから実際に求めてみましょう。

-15-

速度と距離の関係その②

$\boxed{3}$ (1) $\boxed{2}$のグラフについて次の表を埋めよう。

時間	1〜2	1〜1.1	1〜1.01	1〜1.001	…
x(時間)の変化量	1				…
平均変化率(平均の速度)	3				…

ヒント：1〜2時間のxの変化量は（xの変化後）－（xの変化前）
$=2-1$
$=1$
平均変化率は $\dfrac{(y\text{の変化後})-(y\text{の変化前})}{(x\text{の変化後})-(x\text{の変化前})}$
$=\dfrac{2^2-1^2}{1}$
$=3$
と求められます。

(2) xの変化量および平均変化率はどのような値に近づいていると考えられますか。
xの変化量

平均変化率

(3) 1〜（$1+h$）時間でのxの変化量および，平均変化率はどのようになりますか。
xの変化量

平均変化率（$\square$には数字が入ります）

$$\frac{(1+h)^2-1^2}{h}=\square+h \quad \cdots\cdots（☆）$$

-16-

速度と距離の関係その②

ここで（☆）のhを0に近づけていく（つまり，xの変化量をとてつもなく小さくする）と

（☆）は $\square$ という値に近づいていきます。

このことを数式にすると

$$\lim_{h\to 0}(\square+h)=\square$$

と表すことができます。
（$\lim\limits_{h\to 0}$ という記号は「hを限りなく0に近づけていく」という意味があります。）

よって，Aさんが自転車で走り始めてから1時間のとき，スピードメーターが指す数値は$\square$ km/時となります。

$\boxed{問}$
Aさんが自転車で走り始めてから2時間のとき，スピードメーターの数字は何km/時を指していますか。（つまり，瞬間の速度は何km/時ですか。）

-17-

図 4.13　授業テキスト（$s-t$ グラフから速度の導出と微分の定義 3）

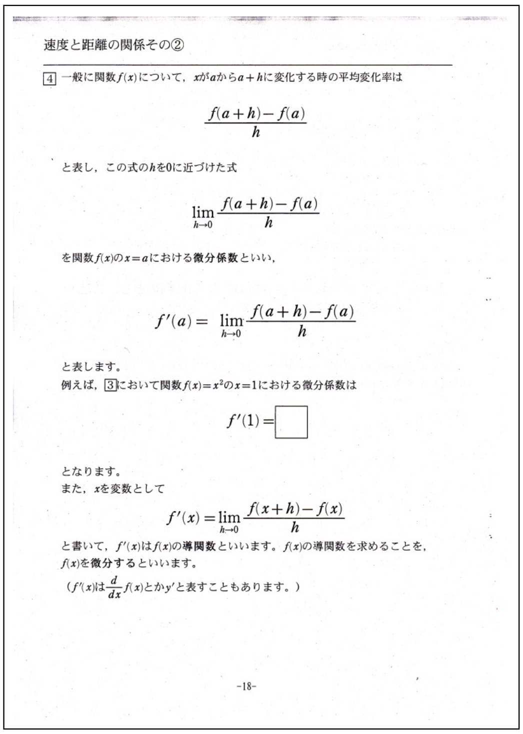
始めに，グラフの走り始めてから 1 時間の箇所を拡大すると，直線のように見えるとし，図 4.11 と同じような方針で求めていくことを認識させる．次に，1〜2 時間，1〜1.1 時間，1〜1.01 時間 $\cdots$ での平均変化率を求め，x の変化量が小さくなるにつれて，平均変化率，すなわち平均の速度がどのような値に近づくかを予想する．最後に，1〜(1+h) 時間での平均の速度を求め，それを $h \to 0$ としたときの値が瞬間の速度であることがわかる．

そして，図 4.14 で示すテキストを用いて，瞬間の速度を求めることに対応して，微分係数，導関数の解説をし，問題を解かせる．そして，移動距離と時間の関係を表すグラフから速度を求めるためには，微分を用いればよいことを生徒に気付かせる．ここでも，微分積分学の基本定理への接続のために，「移動距離を微分すると速度となる」ことを印象づけたい．また，本授業の主旨とは離れるが，微分係数と接線の関係についても図 4.15 で示すテキストで触れる．

微分積分学の基本定理とその利用

ここまで，「速度を積分すると移動距離となる」，「移動距離を微分すると速度となる」という二つの事柄を認識できた生徒は，「微分と積分は逆演算ではないか」と予想することが期待できる．本節では，「微分と積分が逆演算であること」の証明と，その利用を，図 4.16，4.17 で示すテキストを用いて解説する．

この証明方法は，現行の高等学校数学で用いられる手法である．殆どの生徒がはさみうちの原理



速度と距離の関係その②

4 一般に関数$f(x)$について，xがaから$a+h$に変化する時の平均変化率は

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

と表し，この式のhを0に近づけた式

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

を関数$f(x)$の$x=a$における**微分係数**といい，

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

と表します。

例えば，3において関数$f(x)=x^2$の$x=1$における微分係数は

$$f'(1)=\boxed{}$$

となります。

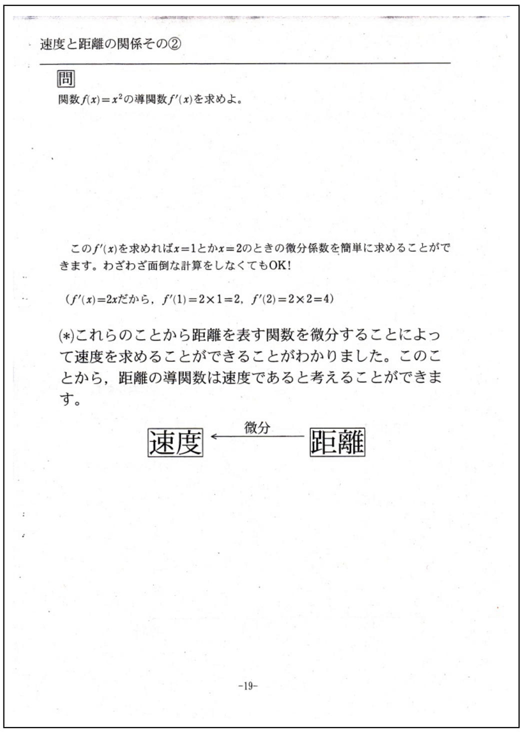
また，xを変数として

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

と書いて，$f'(x)$は$f(x)$の**導関数**といいます。$f(x)$の導関数を求めることを，$f(x)$を**微分する**といいます。

（$f'(x)$は$\frac{d}{dx}f(x)$とかy'と表すこともあります。）

-18-



速度と距離の関係その②

問

関数$f(x)=x^2$の導関数$f'(x)$を求めよ。

このf'(x)を求めれば$x=1$とか$x=2$のときの微分係数を簡単に求めることができます。わざわざ面倒な計算をしなくてもOK!

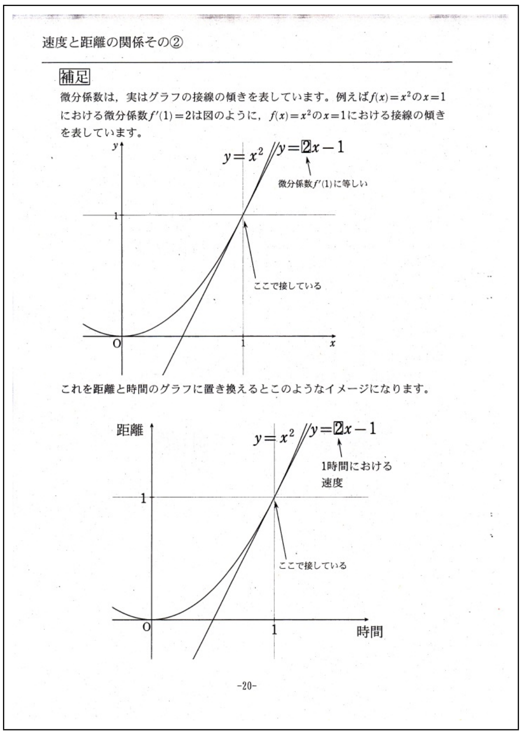
($f'(x)=2x$だから，$f'(1)=2\times1=2$，$f'(2)=2\times2=4$)

(*)これらのことから距離を表す関数を微分することによって速度を求めることができることがわかりました。このことから，距離の導関数は速度であると考えることができます。

$$\boxed{\text{速度}} \xleftarrow{\text{微分}} \boxed{\text{距離}}$$

-19-

図 4.14　授業テキスト（$v-t$ グラフから移動距離の導出 4）



速度と距離の関係その②

補足

微分係数は，実はグラフの接線の傾きを表しています。例えば$f(x)=x^2$の$x=1$における微分係数$f'(1)=2$は図のように，$f(x)=x^2$の$x=1$における接線の傾きを表しています。

これを距離と時間のグラフに置き換えるとこのようなイメージになります。

-20-

図 4.15　授業テキスト（$s-t$ グラフから速度の導出と微分の定義 5）

微分積分学の基本定理

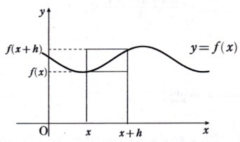
今まで学習してきたことを まとめました。（____部分を埋めよう）

距離 $\xrightarrow{\text{\_\_\_する}}$ 速度

距離 $\xleftarrow{\text{\_\_\_する}}$ 速度

____と____は逆の演算？

証明



上図の $\square$ の面積は$S(x+h)-S(x)$で表せます。

注）$S(x)=\int_a^x f(x)dx$

$\square$（大きい方の長方形）の面積は________，

$\square$（小さい方の長方形）の面積は________と表せます。

-21-

微分積分学の基本定理

面積を比較すると

$\square < \square < \square$

となるので，

$$\_\_\_\_\_\_ < S(x+h)-S(x) < \_\_\_\_\_\_$$

各辺をhで割って

$$\_\_\_\_\_\_ < \frac{S(x+h)-S(x)}{h} < \_\_\_\_\_\_$$

各辺$h\to 0$とすると

$$\_\_\_\_\_\_ \leq \lim_{h\to 0}\frac{S(x+h)-S(x)}{h} \leq \_\_\_\_\_\_$$

よって，$\lim_{h\to 0}\frac{S(x+h)-S(x)}{h}=S'(x)=f(x)$なので（はさみうちの原理といいます）

$S(x)$を微分すると，その導関数は$f(x)$となることがわかりました。

これで微分と積分が逆の演算だということがわかりました。
このことを**微分積分学の基本定理**といいます。

-22-

図 4.16　授業テキスト（微分積分学の基本定理とその利用 1）

微分積分学の基本定理

微分と積分が逆の演算であることがわかれば非常に便利なことがあります。

実は

$$f(x)=x^n \ (n\text{は自然数})$$

を微分すると

$$f'(x)=nx^{n-1}$$

となることが知られています。
例えば，$f(x)=x^2$を微分すると，$f'(x)=2x^{2-1}=2x$となります。

例題

$f(x)=x^3$を微分すると$f'(x)=\boxed{}$　となる。

微分と積分が逆の演算ならば

$\int_a^x 2x\ dx$を計算すると，答えは微分して$2x$ となる式である。

つまり，答えはx^2+C（Cは任意の定数）となるのです。
ちなみに，

$$\int_a^x x^n dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}-\frac{1}{n+1}a^{n+1}$$

となります。これをxで微分するとx^nに戻ります。

一般に関数$F(x)$を微分すると$f(x)$となるような$F(x)$を$f(x)$の**原始関数**といいます。
このとき，

$$\int_a^b f(x)dx=\Big[F(x)\Big]_a^b=F(b)-F(a)$$

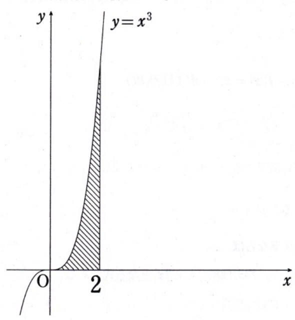
と表します。

このことを使えば難しそうな面積の計算も簡単にできます。

-23-

微分積分学の基本定理

問　下図の斜線部分の面積を求めよ。



-24-

図 4.17　授業テキスト（微分積分学の基本定理とその利用 2）

を学習していないので，それを用いる場面では，直感的理解を得るためにあえて

$$f(x) \leq \lim_{h\to 0}\frac{S(x+h)-S(x)}{h} \leq f(x)$$

と表記した．そして，最後の問で，$\displaystyle\int_0^2 x^3dx$ を，区分求積法を用いずに求めることができる良さを実感させることがこの節の最大の目的である．

4.2　実践

本節は，平成 27 年 12 月から平成 28 年 1 月にかけて行った，8 回の実践授業の概要と授業記録である．

T:筆者

S 番号:生徒

SS:クラス全体の発言

4.2.1　第 1 時

第 1 時概要

時間	学習内容	生徒の活動	教師の指導，留意点
0分	事前アンケート	アンケートに答える	
10分	面積を分割して考える$\boxed{1}$ 滋賀県と琵琶湖の面積の比を求めよう。		
	土地の面積の比を細かい図形に分割してもとめる。		発問「滋賀県と琵琶湖の面積の比はどれくらいだと思いますか。」 数人の生徒に予想を聞いた後，ワークシートを配る。
20分		一組4~5人のグループワークによりワークシートの滋賀県全体の土地を長方形に分割して面積の近似値を求める。	プロジェクターでパワーポイントによって琵琶湖の面積の求め方を見せる。琵琶湖の面積の近似値を伝える。
50分			各班の求めた滋賀県全体の面積を提示し，実際の面積の比（6:1）との比較を行う.

第 1 時授業記録

T: 今日は皆さんに，グループに分かれて滋賀県全体の面積と琵琶湖の面積の比を求めてもらいます．

T: では，指示した通りにグループに分かれて机をくっつけてください．

グループ分けを行い，面積の求め方の説明を行う．

T: 皆さん，前のテレビ画面（図 4.18) に注目してください．今，お配りした A3 の紙に記載されている滋賀県の地図と全く同じものが写っています．この滋賀県の地図には 1.5cm 幅で縦線が引かれていて，これを利用して面積の近似値を求めていきます．

T: このように，琵琶湖をいくつかの長方形で近似し，それらの面積を全て足したものを琵琶湖の面積の近似値とします．

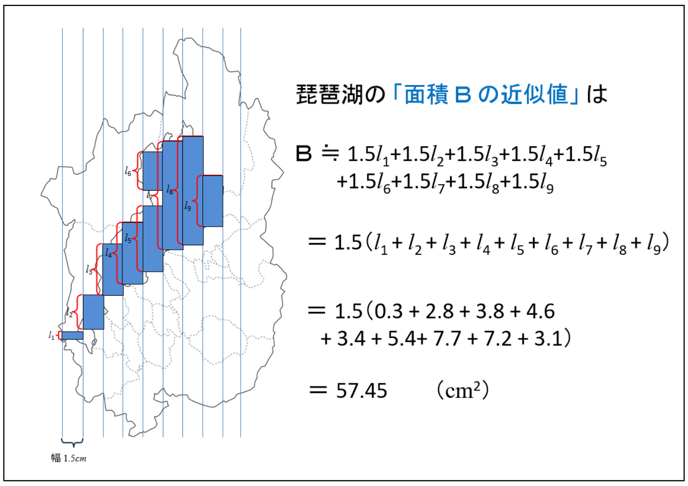


図 4.18　powerpoint による面積の近似方法の説明

T: 実際に測ってみると $57.45cm^2$ でした．それでは，皆さんも同じように滋賀県全体の面積を測ってみてください．

（作業開始）

（作業中の生徒の会話）

S1: めっちゃ曲がってるところとかどうやって線引いたらええの．

S2: ちょうど打ち消すように真ん中に引いたらええんちゃう．

S1: そういうことか．

（作業終了）

T: それでは，グループの代表が前のホワイトボードの表に求めた数値を書きに来てください．

（表 4.3）

T: 皆さんの数字が出揃いましたね．では，実際の滋賀県全体と琵琶湖の面積を調べてきたので比較してみましょう．滋賀県の面積は約 $4017km^2$，琵琶湖の面積は約 $670km^2$ です．それでは比の値はどうなるでしょうか．電卓で計算してみてください．S2 さん，できましたか．

表 4.3　各グループの測定結果

班	滋賀県(cm^2)	琵琶湖(cm^2)	比
1	341.00	54.75	5.9355…:1
2	341.65	54.75	5.9817…:1
3	341.65	54.75	5.9817…:1
4	343.25	54.75	5.9765…:1
5	344.24	54.75	5.991933 : 1
6	345.3	54.75	6.0104:1

S2: 5.995223
T: ということは，比は 5.995223:1 となって，比は整数で大体 6:1 と言えます．
S2: なんで，5:1 じゃないの．
T: 5.995223 は，5 より 6 の方が近い位置にあるからです．
T: この中では 5 班がとても近い数字を出せていますね．6 班も優秀でした．
T: このように，複雑な図形の面積も長方形などの図形を用いておおまかな数値で評価できます．

4.2.2　第 2 時

第 2 時概要

時間	学習内容	生徒の活動	教師の指導，留意点
0分		テキスト$\boxed{1}$の後半部分の文章の下線部を埋める。	パワーポイントで前回の授業の生徒が行ったワークシートで秀逸なものを2枚提示する。 その後，ワークシートの滋賀県の縦線の間隔が狭くなっていく様子を見せ，テキストの下線部に入る文章を考えさせる。 複数人当てて，正解を導き出す。
15分	面積を分割して考える$\boxed{2}$ 下図の斜線部分の面積を求めよう。		
	直線とグラフで囲まれた面積を求める。	テキストの問題を解く。 (3)は定積分を用いなければ解けない。	
25分	面積を分割して考える$\boxed{3}$ 下図の斜線部分の面積を求めよう。		
	関数$y=x^2$のグラフ，x軸および直線$x=1$で囲まれた領域の面積を4つまたは6つの長方形に分割して求める。		(1),(2)は解答を板書させる。 解答は小数点表示にするように指示する。 生徒が問題を解いている間にテキスト$\boxed{3}$拡大図用紙(1)をホワイトボードに貼る。 解答できた生徒を当ててテキスト$\boxed{3}$拡大図用紙(1)の隣に途中式も含めた解答を板書させる。
35分			生徒の板書の解答が「分数を約分してから計算」や「長方形の横幅の$\frac{1}{4}$を括りだしていない場合は教師が$\frac{1^2+2^2+3^2+4^2}{4^3}$に帰着するような途中式を含めた解答を板書する。 スクリーンにGRAPESで図と解答を見せる。
50分			GRAPESでnの値（長方形の数）を大きくすると，誤差が少なくなっていく様子を見せる。

4.2.3　第 2 時授業記録

T: はじめに，前回行ったことの復習をしようと思います．テレビ画面を見てください．皆さんの作業シートの中で特によかったものをお見せします．（図 4.19）

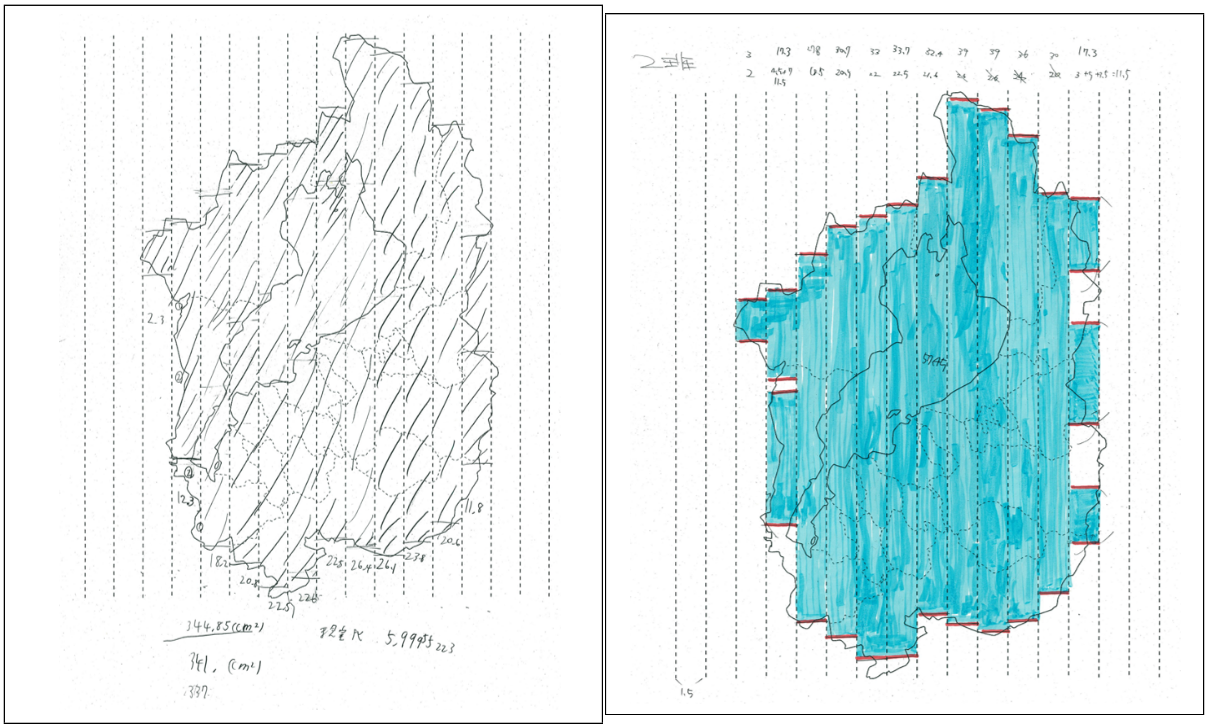


図 4.19　2 人の生徒の作業シート

T: 1 枚目のものは，近似後の滋賀県の形がわかりやすくなっています．2 枚目は勝手に色を塗らせて頂きましたが，一つ一つの長方形がわかりやすく，とても丁寧な作業をしてくれました．

T: ここで，皆さんに質問です．より正確に面積の比を求めるためにはどうしたらよいか考えてみてください．では，S1 さん，どうすればよいと思いますか．

S1: わかりません．

T: ではテレビの画面を見てください．（図 4.20）

（画面に図を映し出す）

S1: あっ

T: わかりましたか．

S1: 縦線の幅を狭くする．

T: なぜ縦線の幅を狭くするとより正確に面積の比を求められるのですか．

S1: より細かく面積を近似することができるからです．

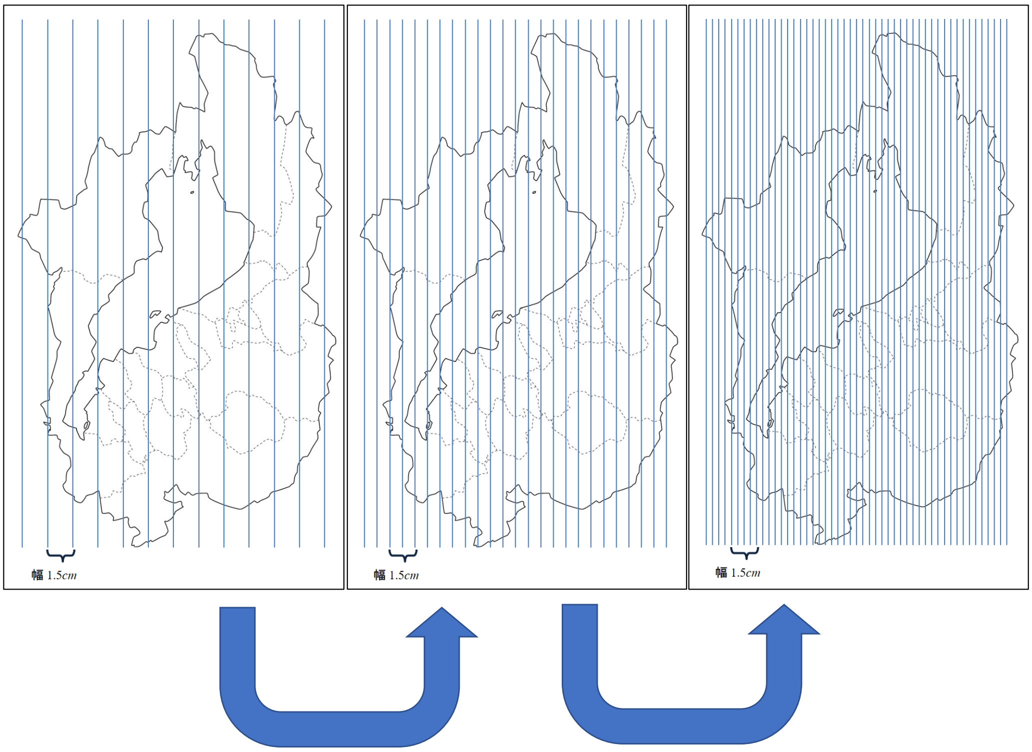


図 4.20　PowerPoint による縦線の幅が狭まる様子

T: その通り．テキスト 1 ページの下の文章『より正確に面積の比を求めるには___.』を見てください．空欄がありますが，『縦線の幅を狭くする』などの言葉が入ります．自分の言葉で空欄を埋めておいてください．この考え方は次の課題で重要になるので覚えておいてください．

T: ではテキスト 2 ページをみてください．面積を求める問題が 3 問ありますね．今からこの問題を，高校 1 年生になったつもりで，数学 II で習った積分を使わずに解いてください．（解答時間を 5 分与えた.）

T: できましたか．では S2 さんが (1)，S3 さんが (2) を板書してください．

S2，S3:（解答を板書，図 4.21）

(3) は積分を用いずに解くことが出来た人はいますか．

SS:（無言）

T: では（3）は後回しにしましょう．

T: 二人とも正解ですね．三角形と台形の面積はこのように簡単に求められますが，放物線の面積は高校 1 年生では求められません。では数学 II の積分を使わずに面積を求める方法を考えましょう．S4 さん，数学 II の積分が使えないならどうやって求めればよいと思いますか．

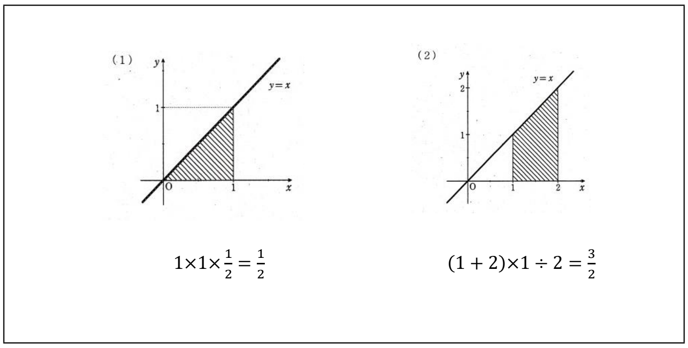


図 4.21　$\boxed{2}$ の S2，S3 による板書

ヒントは前回の授業です．

S4: 長方形で近似する．

T: その通り．滋賀県の面積と同じように長方形で近似して求めていきましょう．ではテキストの 3 ページを見てください．この 2 問は先ほどの大問 2 の（3）の斜線部分を長方形によってそれぞれ 4 個，6 個に分割したものです．長方形の和を求めてみましょう．解答は電卓を使って小数点表示で表してください．

（解答時間を 5 分与えた）

T: では S5 さんが（1），S6 さんが（2）を板書してください．

S5，S6:（解答を板書，図 4.22）

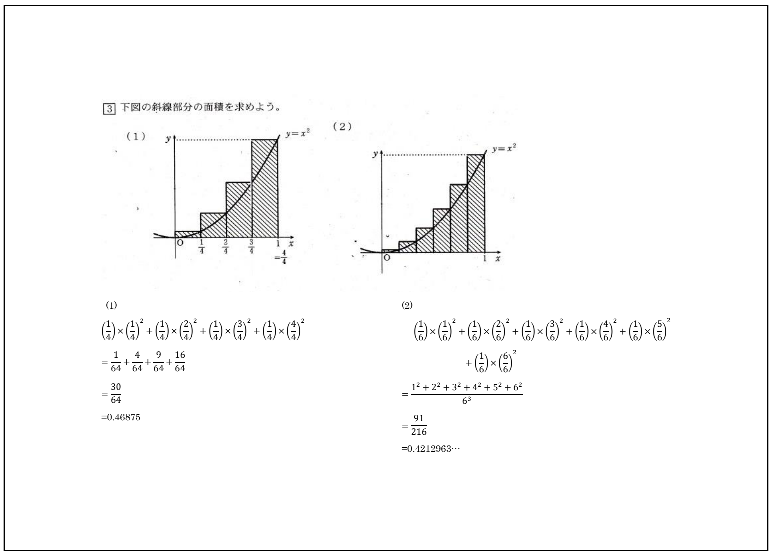


図 4.22　$\boxed{3}$ の S5，S6 による板書

T: できましたね．S6 さんは分母を纏めてから計算してくれました．この計算方法は後で用いるので頭に入れておいてください．では，テレビの画面を見て下さい．

（GRAPES をテレビに映す）

T: 今写っているものは，$y = x^2$ のグラフと x 軸，および 2 直線 $x = 0$，$x = 1$ で囲まれた領域を長方形で近似したものを表しています．今，4 個の長方形で近似しており，面積は 0.46875 と表示されています．これは S5 さんが求めたものと同じですね．では，長方形の個数を 6 個にしてみます．（図 4.23）

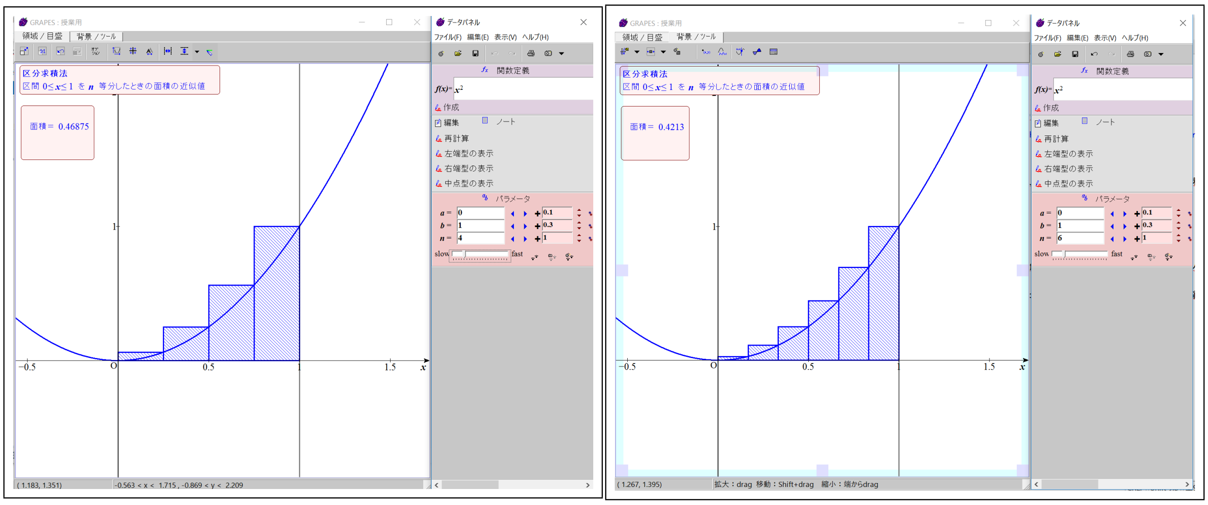


図 4.23　GRAPES による $\boxed{3}$ の描写

T: 面積は 0.4213 と表示されています．二人とも正解です．（1）の値が 0.46875，（2）の値が約 0.4213 となりますね．実はこのソフトでは長方形の数を次々に増やしていく様子を見ることができます．

（長方形の個数が増えていく様子を見せる）

T: 表示されている面積に注目してください．この数はある値に近づいています．S7 さん，どのような値に近づいていますか．

S7: 0.33333333$\cdots$

T: そうですね，確かに 0.33333…に近づいています．長方形の面積の和と本来の面積の和との誤差，つまり上にはみ出ている部分が削られ，徐々に本来の面積近づいているのです．ということで，3 ページの下の文章『正確な面積に近づけるには，誤差を小さくするために，___ すればよい．』の空欄にはどのような文章が入りますか．S8 さん．

S8: より多くの長方形で近似．

T: その通りです．皆さんも空欄を埋めておいてください．次回はこの領域の本来の面積を手計算で求めることを考えていきます．

4.2.4　第 3 時

第 3 時概要

時間	学習内容	生徒の活動	教師の指導，留意点
0分			
	面積を分割して考える$\boxed{4}$ $\boxed{3}$と同様に，長方形をn個作図して，その面積の合計をnで表そう。		
	領域をいくつかの長方形で近似した時の面積の一般化。	$\boxed{4}$を解く。	途中式を含め解答できた生徒がいれば板書させるが，いなければ教師が説明する。
25分			
	面積を分割して考える$\boxed{5}$		
		説明を聞きながらテキストの空欄を埋めていく。	一般化された長方形の面積の和の極限について解説する．テキストの空欄は生徒を指名し，答えさせる。
50分			

第 3 時授業記録

T: 今回は，放物線によって囲まれた面積を手計算で求める方法を考えていきます．テキストの 4 ページを開いてください．放物線と，長方形が一つだけ描かれています．そのグラフに領域を分割する n 個の長方形を描いていきます．私が前に作図していくので，真似して描いてみてください．（図 4.24）

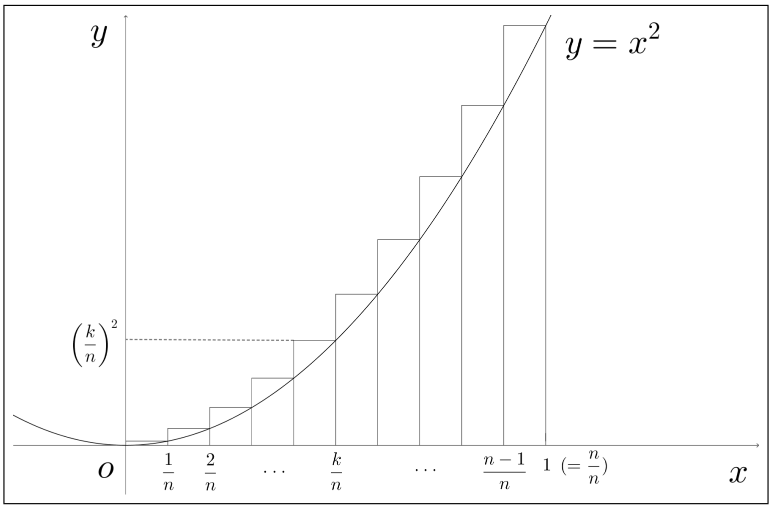


図 4.24　筆者の板書

T: 見かけ上は 10 個の長方形ですが，n 個の長方形であると考えてください．今から n 個の長方形の面積の和を考えていきます．では，時間を与えるので考えてみてください．

（解答時間を 10 分与えたが，途中式は書かずに答えの穴埋めだけできている生徒がほとんどであった．）

T: 結果は前回の授業の$\boxed{3}$と穴埋めから予測できましたね．では計算過程も皆で確かめてみましょう．S9 さん，一番左にある長方形の横の長さは何ですか．

S9: わかりません．

T: $\boxed{3}$の（1）は 1 を 4 等分しているから $\frac{1}{4}$ でした．（2）は 6 等分しているから $\frac{1}{6}$ でした．今回は 1 を何等分していますか．

S9: n 等分．

T: ということは，横の長さは何ですか．

S9: $\frac{1}{n}$

T: その通り，では縦の長さは何ですか．

S9: $\left(\frac{1}{n}\right)^2$

T: ということは，一番左の長方形の面積は何ですか．

S9: $\frac{1}{n} \times \left(\frac{1}{n}\right)^2$

T: そう，正解です．では S10 さん，左から 2 番目の長方形の面積は何ですか．

S10: $\frac{1}{n} \times \left(\frac{2}{n}\right)^2$

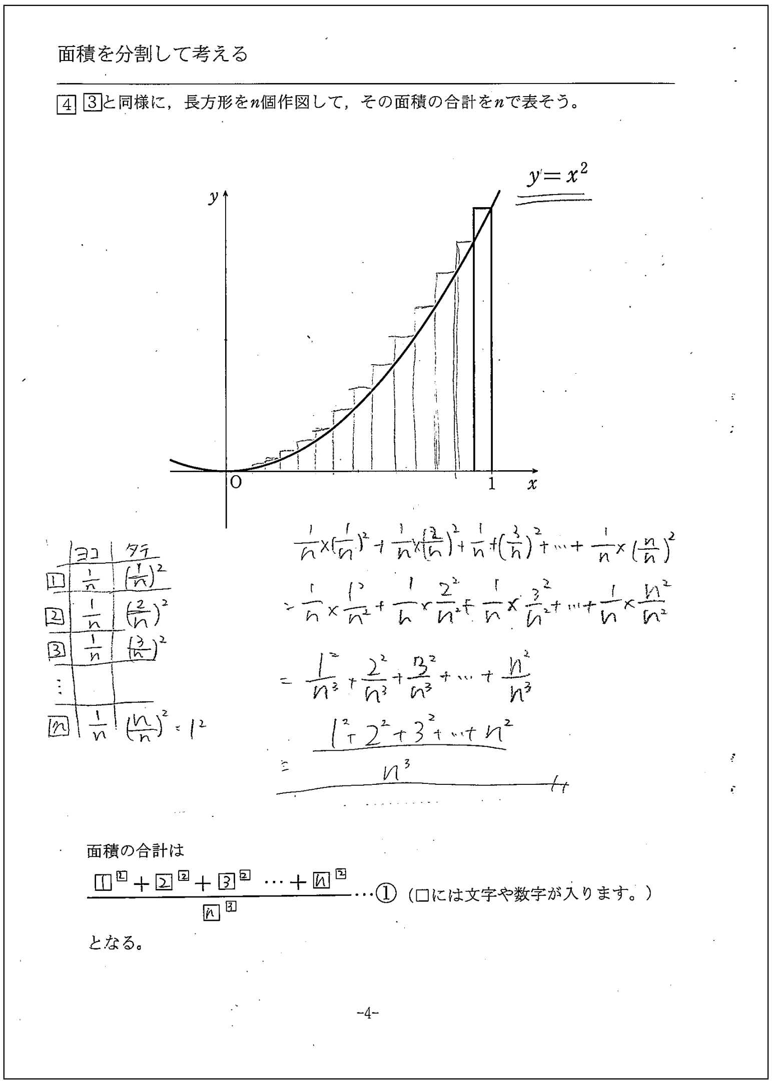
T: 正解です．同じように，3 番目の長方形の面積は $\frac{1}{n} \times \left(\frac{3}{n}\right)^2$ となります．これらを全て足していくと

$$\frac{1}{n} \times \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n} \times \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \frac{1}{n} \times \left(\frac{3}{n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{n} \times \left(\frac{n}{n}\right)^2$$

となります．すべての項の分母が n^3 となるので

$$\frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2}{n^3}$$

と纏めることができます．これが n 個の長方形の和です．次はこの式を変形していきます．テキストの 5 ページを見てください．


面積を分割して考える

$\boxed{4}$ $\boxed{3}$と同様に，長方形をn個作図して，その面積の合計をnで表そう。

	ヨコ	タテ
$\boxed{1}$	$\frac{1}{n}$	$\left(\frac{1}{n}\right)^2$
$\boxed{2}$	$\frac{1}{n}$	$\left(\frac{2}{n}\right)^2$
$\boxed{3}$	$\frac{1}{n}$	$\left(\frac{3}{n}\right)^2$
⋮		
$\boxed{n}$	$\frac{1}{n}$	$\left(\frac{n}{n}\right)^2 = 1^2$

$$\frac{1}{n}\times\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\times\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\times\left(\frac{3}{n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{n}\times\left(\frac{n}{n}\right)^2$$
$$= \frac{1}{n}\times\frac{1^2}{n^2} + \frac{1}{n}\times\frac{2^2}{n^2} + \frac{1}{n}\times\frac{3^2}{n^2} + \cdots + \frac{1}{n}\times\frac{n^2}{n^2}$$
$$= \frac{1^2}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + \frac{3^2}{n^3} + \cdots + \frac{n^2}{n^3}$$
$$= \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2}{n^3}$$

面積の合計は

$$\frac{\boxed{1}^{\boxed{2}} + \boxed{2}^{\boxed{2}} + \boxed{3}^{\boxed{2}} \cdots + \boxed{n}^{\boxed{2}}}{\boxed{n}^{\boxed{3}}} \cdots①$$ (□には文字や数字が入ります。)

となる。

-4-

図 4.25　生徒のテキスト 4 ページ

T: ここでは，数学 B で学習した公式

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

を使います．これを用いれば，長方形の面積の和はテキストに書いてあるように

$$\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)$$

と変形することができます．（テキストと同様に式変形の解説を板書で行った）実はこのように変形するのは理由があって，$\frac{1}{n}$ がとても重要です．では，テキスト 5 ページの $\boxed{\text{問}}$ を読んで，その下の表の空欄を埋めてみてください．

T: では，2 つの空欄にはどんな数字が入りますか．S11 さん．

S11: $n=10000$ のとき 0.0001，$n=100000000$ のとき 0.00000001 です．

T: その通りですね．$n=10000$ のとき $\frac{1}{n}=0.0001$，$n=100000000$ のとき $\frac{1}{n}=0.00000001$ となります．このことから，$\frac{1}{n}$ は n を大きくしていくとどんな値に近づきますか．S12 さん．

S12: わかりません．

T: S12 さん，0.00000001 ってとてつもなく小さいですよね．ここから n の値をもっと大きくしていけばずっと 0 が続くような値になります．

S12: 0 ですか．

T: その通り，$\frac{1}{n}$ は n を大きくしていくと 0 に近づいていきます．テキストの空欄を埋めておいてください．（ここで終了のチャイムが鳴る）中途半端ですが続きは次回にしましょう．

4.2.5　第 4 時

第 4 時概要

時間	学習内容	生徒の活動	教師の指導，留意点
0分		面積を分割して考える$\boxed{6}$	
	積分の定義，用語，記号の確認。		7ページを説明する。 積分の記号を用いて面積を表す練習問題を板書し解かせる。 8ページを説明する。パワーポイントを用いて上端の変数によって面積が変化する様子を見せる。
30分		面積を分割して考える$\boxed{7}$	
50分		$\mathrm{S}(x)=\int_0^x x^2dx$ の値を区分求積法で求める。	始めはヒントを用いて解かせる。 10分程経過したら教師が解説する。

第 4 時授業記録

T: 前回は $y = x^2$ と x 軸，および 2 直線 $x = 0$，$x = 1$ で囲まれた図形の面積を n 個の長方形で分割し，その面積を求めました．そして，その面積は $\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)$ と表すことが出来ましたね．そこで長方形の数 n を限りなく大きくするとどうなるかを考えました．すると，$\frac{1}{n}$ は n を大きくしていくと 0 に近づいていくことがわかったので図形の面積はどうなりますか．S13 さん．

S13: $\frac{1}{3}$

T: そうですね．$\frac{1}{n}$ が 0 になるので，図形の面積は $\frac{1}{6}(1+0)(2+0) = \frac{1}{3}$ となります．これを小数点表示すると $0.3333\cdots$ となるので，予想した値と一致しますね．テキストの空欄を埋めておいてください．ではテキストの 7 ページを見てください．

ここでは，テキスト 7-8 ページを用いて講義形式で積分記号の解説を行った．また，テキストには記載されていないが，記号の練習と称して，指定された領域の面積を積分記号で表す練習問題を行った．その授業風景が図 4.26 である．

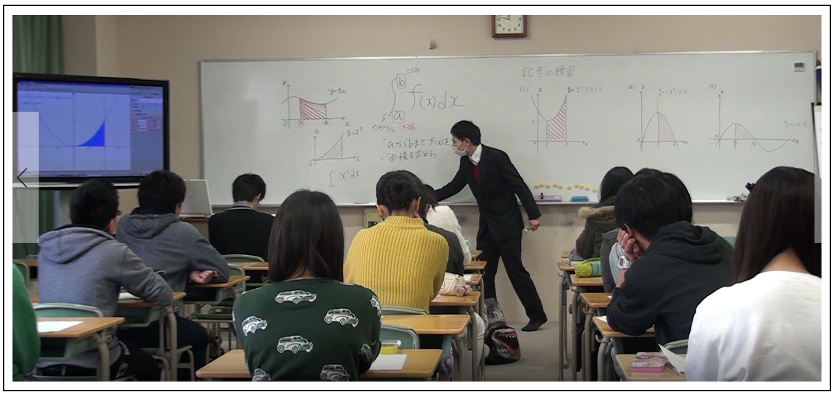


図 4.26　授業風景

T: では，テキストの 8 ページ $\boxed{7}$ を見てください．この問題は今まで求めてきた $\int_0^1 x^2 dx$ の上端 1 を変数 x に変えたものです．ヒントを見ながら求めてみてください．

（解答時間を 5 分与えたが，解けた生徒は一人もいなかったので，時間の都合上解説を行うことにした．）

T: この問題，ヒントにも書いてあるのですが，一つの長方形の横の長さが $\frac{x}{n}$ となっています．そして，左から 1 番目の長方形の縦の長さが $\left(\frac{x}{n}\right)^2$，2 番目の長方形の縦の長さが $\left(\frac{2x}{n}\right)^2$ と続き，最後の長方形の縦の長さが $\left(\frac{nx}{n}\right)^2$ となっています．これらの面積を全て足すことにより

$$
\begin{aligned}
&\frac{x}{n}\times\left(\frac{x}{n}\right)^2+\frac{x}{n}\times\left(\frac{2x}{n}\right)^2+\frac{x}{n}\times\left(\frac{3x}{n}\right)^2+\cdots+\frac{x}{n}\times\left(\frac{nx}{n}\right)^2\\
&=x^3\times\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}\\
&=x^3\times\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}
$$

となります．そして n を限りなく大きくすることにより

$$
\begin{aligned}
S(x)&=\lim_{n\to\infty}\left\{x^3\times\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)\right\}\\
&=\frac{1}{3}x^3
\end{aligned}
$$

となります．テキストに写しておいてください．今日の授業はここまでにします．

4.2.6　第 5 時

第 5 時概要

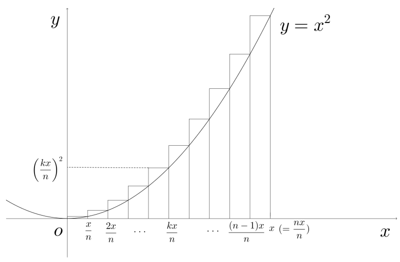
時間	学習内容	生徒の活動	教師の指導，留意点
0分 10分	12月16日の授業の復習。	$\int_0^x x^2 dx$の計算方法を確認する。	生徒に復習用プリントを配布し，pdfにより，$\int_0^x x^2 dx$の計算方法を説明する。
		速度と距離の関係その①$\boxed{1}$	
	速度と時間のグラフから移動した距離を求める。	問題を解く。	速さと時間と距離の関係がわからない生徒がいるようならヒントを与える。 様子を見て答え合わせ。 求めた答えがグラフの囲む面積であることに留意させる。
		速度と距離の関係その①$\boxed{2}$	
25分			わからない生徒がいる場合，前問がヒントになっていることに気付かせる。 様子を見て答え合わせ。
		速度と距離の関係その①$\boxed{3}$	
35分 45分 50分			面積を分割して考える$\boxed{7}$がヒントになっていることを伝える。 様子をみて答え合わせ。 12ページでこれらの 3 問から，速度を一定時間で積分すれば距離が導かれることを説明する。

第 5 時授業記録

T: 前回，$\boxed{7}$の問題がとても急ぎ足になってしまったので，復習プリントを配ります．もう一度ざっくりと解説するのでプリントを見ながら聞いてください．

図 4.27 に示すプリントを配布し，もう一度$\boxed{7}$の解説を行った．

面積を分割して考える$\boxed{7}$の復習



上図において

一つの長方形の横の長さが $\frac{x}{n}$

左から 1 番目の長方形の縦の長さが $\left(\frac{x}{n}\right)^2$

2 番目の長方形の縦の長さが $\left(\frac{2x}{n}\right)^2$

$\cdots$

最後の長方形の縦の長さが $\left(\frac{nx}{n}\right)^2$

これらの面積を全て足すことにより

$$\begin{aligned} & \frac{x}{n} \times \left(\frac{x}{n}\right)^2 + \frac{x}{n} \times \left(\frac{2x}{n}\right)^2 + \frac{x}{n} \times \left(\frac{3x}{n}\right)^2 + \cdots + \frac{x}{n} \times \left(\frac{nx}{n}\right)^2 \\ = & \ x^3 \times \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2}{n^3} \\ = & \ x^3 \times \frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

これを $n \to \infty$ としたものが $S(x)$ であるから

$$\begin{aligned} S(x) &= \lim_{n\to\infty} \left\{ x^3 \times \frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right) \right\} \\ &= \frac{1}{3}x^3 \end{aligned}$$

従って $S(x) = \int_0^x x^2 dx = \frac{1}{3}x^3$ である．

1

図 4.27　$\boxed{7}$の復習プリント

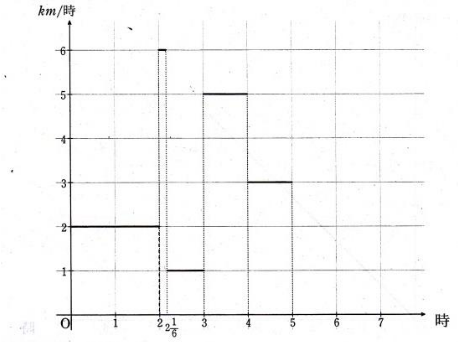
T: それでは，テキストの 9 ページのグラフを見てください．これは A さんの移動の様子を，横軸に時間，縦軸に速度をとって表したグラフです．このようなグラフのことを $v-t$ グラフといいます．v は速度を英訳した velocity の頭文字で，t は時間を英訳した time の頭文字です．このグラフから A さんの移動した距離を求めてみましょう．

（解答時間を 5 分与えた）

T: では，S14 さん，A さんの移動距離はどうなりましたか．計算過程も含めて前に書いてみて

ください．

S14:（解答を板書，図 4.28）



$$2\times 2+6\times\frac{1}{6}+1\times\frac{5}{6}+5\times 1+3\times 1=\frac{83}{6}(km)$$

図 4.28　S14 の板書

T: 正解です．帯分数に惑わされることなく計算できていますね．移動距離は速度と移動時間の積で求めることができます．ところで，この計算はこのグラフ上に現れる，とある数値を求める計算と同じです．S14 さん，とある数値とは何でしょう．

S14: 面積

T: そう，グラフの下部の面積ですね．今回のグラフは例えば，0 時間から 2 時間後までは $2km/$時というように，部分的に一定速度で歩いています．人間の歩行にしては相当遅いですが．なのでグラフは時間軸に平行で，その下部に現れる長方形の面積が移動距離になります．では，テキストの 10 ページを見てください．同様に A さんの移動距離を求めてみましょう．（解答時間を 5 分与えた）

T: では S15 さん，計算過程を含めて前に解答を書いてください．

S15:（解答を板書，図 4.29）

T: S15 さん，どうしてこのような計算方法になったのですか．

S15: グラフの下の部分の面積を考えればよいと思いました．

T: その通りですね．今回の $v-t$ グラフは時間が経過するにつれて，速度が上がっていく様子を表しています．先ほどの問題とは形が違い，速度と時間の積で求めるわけにはいきませ

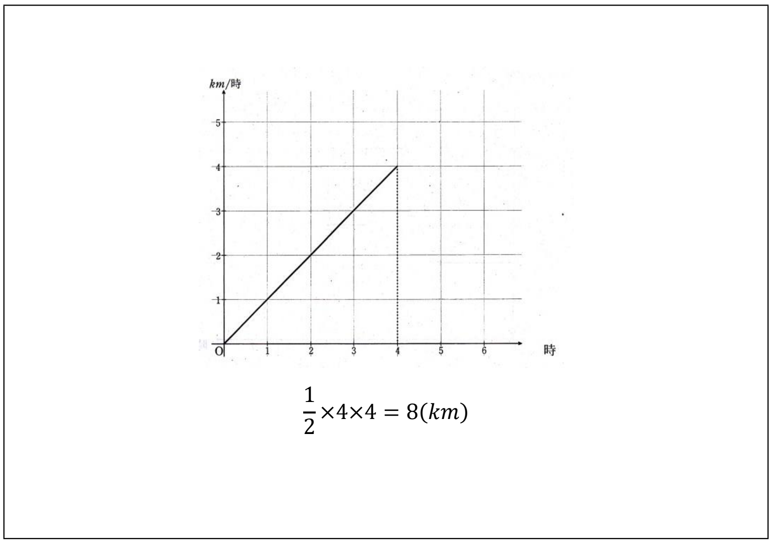


図 4.29　S15 の板書

ん．しかし，グラフの下部の図形の面積が移動距離を表すことを知っていれば容易に解くことができます．グラフの下部の図形は直角三角形となっているのでその面積を求めればよいです．

T: ところで，グラフの下部の図形の面積を求めることを積分するといいました．この面積を積分の形で表現するとどのように書けますか．S16 さん．

S16: $\int_0^4 xdx$

T: そうです．よく覚えてましたね．この直線は $y = x$ の形をしていて，求める面積は $y = x$ と x 軸，および 2 直線 $x = 0$，$x = 4$ が囲む図形の面積となりますね．皆さんテキストに書いておいてください．

T: それでは，テキストの 11 ページを見てください．先ほどの 2 問と同じような問題ですが，グラフの形が放物線となっています．それでは考えてみてください．ヒントは今日復習したプリントにあります．

（解答時間を 5 分与えたができている生徒は S17 を含め 5 人程度であった．）

T: では S17 さん，計算過程を含めて前に解答を書いてください．

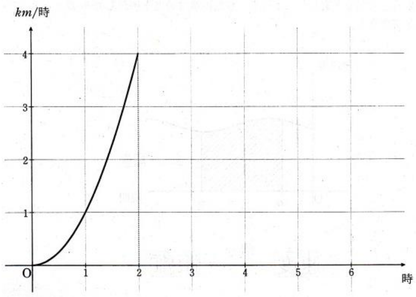
S17:（解答を板書，図 4.30）

T: この計算はどのように行いましたか．

S17: さっきもらったプリントみたら $\int_0^x x^2dx = \frac{1}{3}x^3$ だったので，上端の x を 2 に変えて，結果の x に 2 を代入しました．

T: 素晴らしい．よくできましたね．$y = x^2$ を 0 から x まで積分したものが $\frac{1}{3}x^3$ であったので，0 から 2 まで積分したものを求めるときは，$\frac{1}{3}x^3$ の x に 2 を代入すればよいですね．

T: それではテキストの 12 ページを見てください．ここまで，速度と時間の関係から移動距離



$$\int_0^2 x^2 dx = \frac{1}{3} \times 2^3 = \frac{8}{3} (km)$$

図 4.30　S17 の板書

を求めるという問題を 3 問取り組みました．移動距離を求めるためにはグラフの下部の面積を求める．すなわち，速度のグラフを積分すればよいということがわかりました．単純に表現すれば，速度を積分すれば移動距離になるということです．これは大事なことなので覚えておいてください．

4.2.7　第 6 時

第 6 時概要

時間	学習内容	生徒の活動	教師の指導，留意点
0分	速度と距離の関係その②$\boxed{1}$		
	直線で表される$s-t$グラフから一定時間ごとの平均の速度vを求める。		$\boxed{1}$のグラフは縦軸が移動距離，横軸が時間を表すグラフ，つまり$s-t$グラフであることを主張し問題（1），（2）に取り組ませる。
5分		問題を解く	テキストP13の下部の$\boxed{おさらい}$で平均変化率について説明する。
15分	速度と距離の関係その②$\boxed{2}$		
		問題を読み,問われていることを理解する。	グラフを板書する これから取り組む課題の前問との違いを説明する。 $\boxed{1}$はグラフが直線であったが$\boxed{2}$は曲線であることを主張する。 その場合の瞬間の速度の求め方をP15を用いて説明する。
25分	速度と距離の関係その②$\boxed{3}$		
	放物線で表される$s-t$グラフからある時間の瞬間の速度vを求める。	（1）を解く。 （1）の答え合わせをする。 （2）でxの変化量および平均変化率がどのような値に収束するか予想する。 （2）の答え合わせをする。	1~2時間の平均変化率については教師が解説し，残りの表の空欄を埋めさせる。 （1）の空欄に入る数字を生徒を当てて答えさせる。 （2）の解答を生徒を当てて答えさせる。
50分			

第 6 時授業記録

T: 本日は，積分から離れて別の事柄を学習していきます．テキストの 13 ページを見てください．今回扱うグラフは $s-t$ グラフといって，移動距離を縦軸，時間を横軸にとったものです．$s-t$ の s は space の頭文字で，空間とか間隔を意味しているそうです．それでは，テキストの $\boxed{1}$（1），（2）を続けて取り組んでみてください．

（解答時間を 5 分与えた）

T: では，S18 さん．（1）の空欄を埋めていきましょう．0-1 時間のときの平均の速度はどうですか．

S18: 2 です．

T: そうですね．グラフを見ると，1 時間で進んだ距離が $2km$ であったから平均の速度は $2km/$時と考えられます．では，それ以外の空欄はどうですか．

S18: 全部 2 です．

T: そうです．この問題，平均の速度はいつでも $2km/$時となっているんです．このグラフは直線で，時間に対する，移動距離の割合が常に一定です．0-1 時間だろうが，3.0-3.1 時間だろうがどこをとっても平均の速度は変わりません．不安のある人は計算してみてください．それを踏まえて（2）の空欄に入る言葉はどうなるでしょうか．S18 さん．

S18: 最初の空欄が速度で，次の空欄が一定です．

T: 正解です．文章を通して読むと『上図のグラフの直線の傾きは A さんの歩く速度を表していて，それは常に一定である．』となります．直線の傾きは式 $y=2x$ の 2 です．また，直線の傾きは平均変化率に等しいです．平均変化率についてはテキストの下の方に書いてあるので忘れた人は復習しておいてください．

T: では．テキスト 14 ページを見てください．$\boxed{2}$のグラフは A さんが自転車に乗り換えて移動したときの様子を表しています．A さんの自転車にはスピードメーターがついていて，常に自分の速度がわかる状態です．この問題は走り始めてからちょうど 1 時間のときの速度を求めるものです．グラフが直線ならば先ほどのように傾きを考えたらよいのですが，今回は放物線なのでそうはいきませんね．ではどうするか．15 ページをみてください．走り始めてから 1 時間の箇所をものすごく拡大してみれば，直線に見えなくもないと思います．この箇所を直線として見立てて，点 (1,1) から微小な時間の変化に対する平均変化率を求めていきます．それを瞬間の速度と呼ぶことにしましょう．その瞬間の速度が，スピードメーターが示す数値です．

T: それでは，テキスト 16 ページを見てください．$\boxed{3}$の（1）の表の空欄を埋めてください．先ほどの直線のようにはいきませんよ．

（解答時間を 5 分与えた）

T: できましたか．では，S19 さん，x の変化量と平均変化率を左から順に数字を教えてください．

S19: x の変化量が 0.1，0.01，0.001 で，平均変化率は 2.1，2.01，2.001 です．

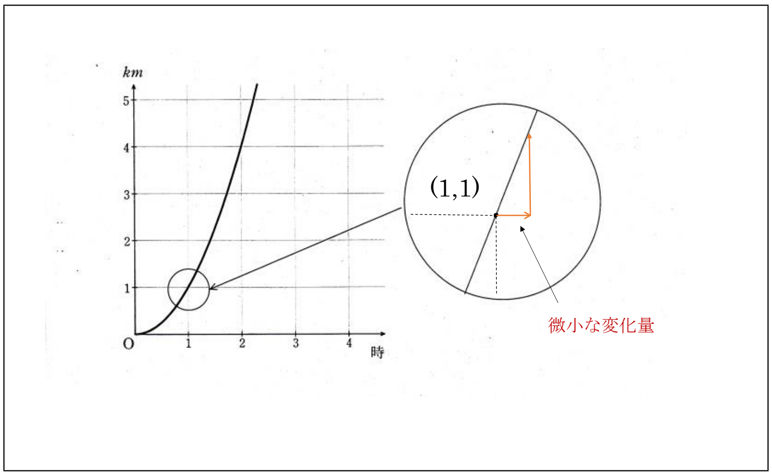


図 4.31　筆者の板書

T: その通りですね．
（念のため，計算過程は全て解説した）

T: それを踏まえて S1 さん，テキストの $\boxed{3}$（2）を見てください．x の変化量と平均変化率はそれぞれどのような値に近づいていますか．

S1: x の変化量が 0 で，平均変化率が 2 です．

T: そうですね．x の変化量，つまり出発 1 時間後からの経過時間が 0 に近づくに連れて，平均変化率，すなわち平均の速度が 2 に近づいています．なので，ちょうど出発 1 時間後の瞬間の速度は $2km/$時ではないかと予想できます．今日は時間がないのでここまでにします．

4.2.8　第 7 時

第 7 時概要

時間	学習内容	生徒の活動	教師の指導，留意点
0分	速度と距離の関係その② $\boxed{3}$		
	放物線で表される$s-t$グラフからある時間の瞬間の速度vを求める。		$\boxed{3}$（3）に取り組む前に（1）と（2）から$\boxed{2}$の答えが$2km$/時であることが予想されることを復習する。
5分		（3）を解く	（3）を解説する。
		（3）の答え合わせをする。	
		$\boxed{2}$の答えが$2km$/時であることがわかる。	P17を解説しながら生徒に空欄を埋めさせる。
15分		P17の$\boxed{問}$を解く。	P17の$\boxed{問}$は$\boxed{3}$の（3）の手順で取り組めばよいことを説明する。
20分		P17の$\boxed{問}$の答え合わせをする。	P17の$\boxed{問}$の解説をする。
	速度と距離の関係その② $\boxed{4}$		
	微分係数，導関数及び「微分する」ことについて	具体例として「関数$f(x)=x^2$の$x=1$における微分係数」を求める。	関数$y=f(x)$の$x=a$における微分係数の定義の解説をする。および導関数の解説を行う。
50分			

第 7 時授業記録

T: 今日はテキスト 16 ページの続きから入りましょう．前回は 16 ページの（1），（2）において，$y = x^2$ について，$x = 1$ からの x の変化量が 0 に近づくに連れて，平均変化率が 2 に近づく，すなわち瞬間の速度が予想を立てることができました．今回はその予想を数式で表して立証してみましょう．16 ページの（3）を見てください．ここでは出発後 1 時間から，出発後 $1 + h$ 時間の x の変化量と平均変化率を求めます．では，計算してみてください．
（解答時間を 3 分与えた）

T: では，S2 さん．x の変化量はどうなりますか．

S2: h です．

T: そうですね，平均変化率はどうなりましたか．

S2: $2 + h$ です．

T: 正解です．では皆さん，17 ページを見てください．x の変化量が h，平均変化率が $2 + h$ となりました．私たちはここまで，x の変化量が 0 に近づくに連れて，平均変化率が 2 に近づくだろうという予想を立てました．では，今求めた x の変化量 h を限りなく 0 に近づければ，x の変化量はどうなるでしょうか．もちろん限りなく 0 に近づきます．そのとき，平均変化率の式に含まれる h も限りなく 0 に近づきます．平均変化率は 2 に限りなく 0 に近づきます．これを数式で表現すると $\lim_{h \to 0}(2 + h) = 2$ と書くことができます．lim の記号は積分でも使いましたね．
以上のことから，A さんの出発後 1 時間のときの瞬間の速度は $2km/$時ということになりますね．自転車の速度が $2km/$時というのも可笑しな話ですけどね．では，ここまでの話の流れに則って，17 ページの下の問を解いてみてください．
（解答時間を 5 分与えた）

T: では，S3 さん．前に解答を書いてください．

S3:（解答を板書，図 4.32）

$$\frac{(2+h)^2 - 2^2}{(2+h) - 2} = 4 + \mathrm{h}$$

$$\lim_{h \to 0}(4 + h) = 4$$

答　$4km/$時

図 4.32　S3 の板書

T: いいですね．先ほどと同様に出発後 2 時間から $2+h$ 時間の平均変化率を求め，$h \to 0$ とすることによって，出発後 2 時間のときの瞬間の速度が $4km/$時であることがわかります．よくできました．

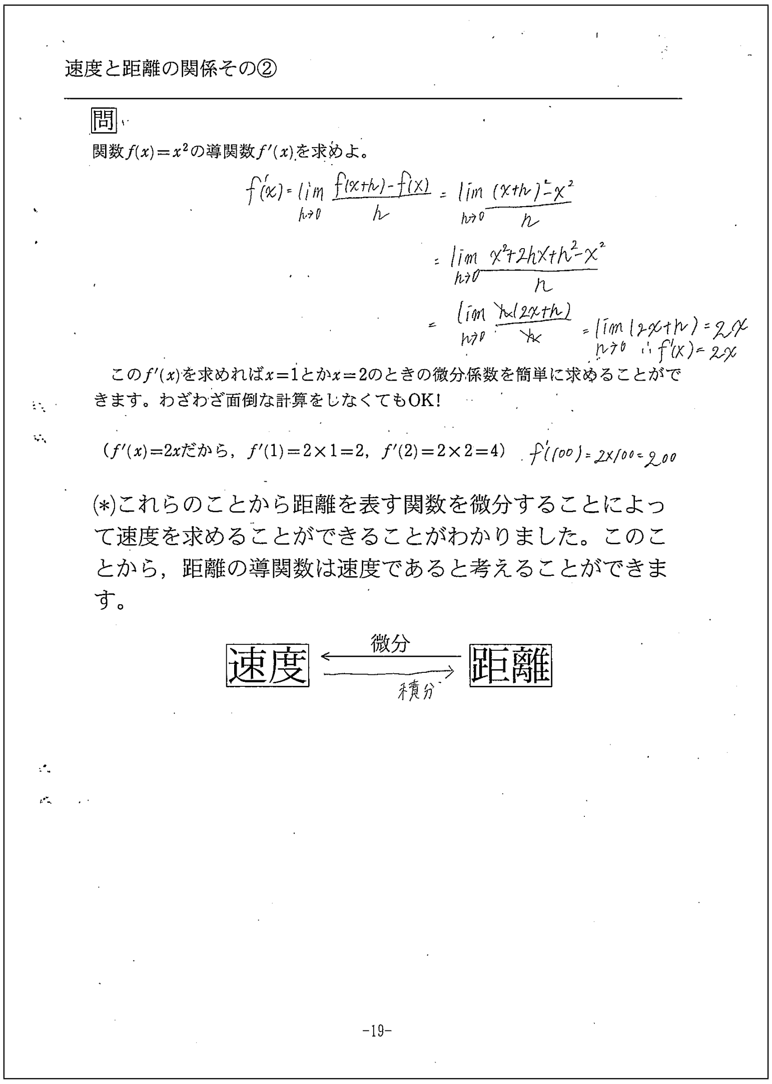
その後，テキスト 18 ページを用いて，微分係数，導関数に関する解説を講義形式で行った．

T: それでは，テキストの 19 ページを開いてください．上の問をやってみてください．導関数を求める問題です．

（解答時間を 5 分与えた）

T: 時間がないので私が解説していきますね．瞬間の速度を求めたときと同じように行えばよいです．

（テキスト 18 ページの問を解説した）



速度と距離の関係その②

問

関数 $f(x)=x^2$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ。

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{x^2+2hx+h^2-x^2}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(2x+h)}{\cancel{h}}=\lim_{h\to 0}(2x+h)=2x \quad \therefore f'(x)=2x$$

このf′(x)を求めれば $x=1$ とか $x=2$ のときの微分係数を簡単に求めることができます。わざわざ面倒な計算をしなくてもOK!

（$f'(x)=2x$ だから，$f'(1)=2\times1=2$，$f'(2)=2\times2=4$） $f'(100)=2\times100=200$

(*)これらのことから距離を表す関数を微分することによって速度を求めることができることがわかりました。このことから，距離の導関数は速度であると考えることができます。

$$\boxed{\text{速度}} \underset{\text{積分}}{\overset{\text{微分}}{\leftrightarrows}} \boxed{\text{距離}}$$

-19-

図 4.33　生徒のテキスト 19 ページ

T: ここまで，$s-t$ グラフから瞬間の速度を求めることを考えてきました．瞬間の速度を求め

るということは，移動距離を表す関数を微分して求めるということになります．簡潔に言えば，距離を微分すれば速度が求められるということになります．このことは重要なので，次回までに忘れないようにしてください．また，テキストの 20 ページでは，補足として，微分係数の図形的意味を解説しています．微分係数は，実は接線グラフの接線の傾きを表しています．時間がないので，ここは割愛します．では，授業を終わります．

4.2.9　第 8 時

第 8 時概要

時間	学習内容	生徒の活動	教師の指導，留意点
0分	これまでの学習内容から微分と積分が逆演算であることが予想でき，それを証明する。	板書を見てP21，P22の穴埋めを行う。	微分積分学の基本定理を証明する。ただし，この証明は$S(x) < S(x+h)$の場合のみ扱っており，$S(x) \geq S(x+h)$の場合も同様に証明できることを伝える。
25分	微分積分学の基本定理が成り立つという条件の元で問題演習。	P23の理解，P24$\boxed{問}$を解く。	P23を解説し，それを用いるP24の求積問題を解かせる。 P24$\boxed{問}$を解説する。
		P24の答え合わせをする。	
35分 50分	授業アンケート		

第 8 時授業記録

T: 今日は，今まで行ったことの集大成です．テキストの 21 ページの空欄を埋めながら聞いてください．これまでの授業を振り返ってみましょう．グラフに囲まれた図形の面積を求めることを積分するといい，$v-t$ グラフから移動距離を求めるには積分を行えばよいことがわかりました．また，$s-t$ から速度を求めるためには微分を行えばよいことがわかりました．すなわち，速度を積分すれば距離，距離を微分すれば速度となるのです．すなわち，微分と積分は逆の操作を行っているのではないでしょうか．そのことを証明していきましょう．$f(x)$ の不定積分 $S(x)=\displaystyle\int_a^x f(x)dx$ を微分すると元の $f(x)$ に戻ることを示せば，微分と積分が逆演算であることがわかります．

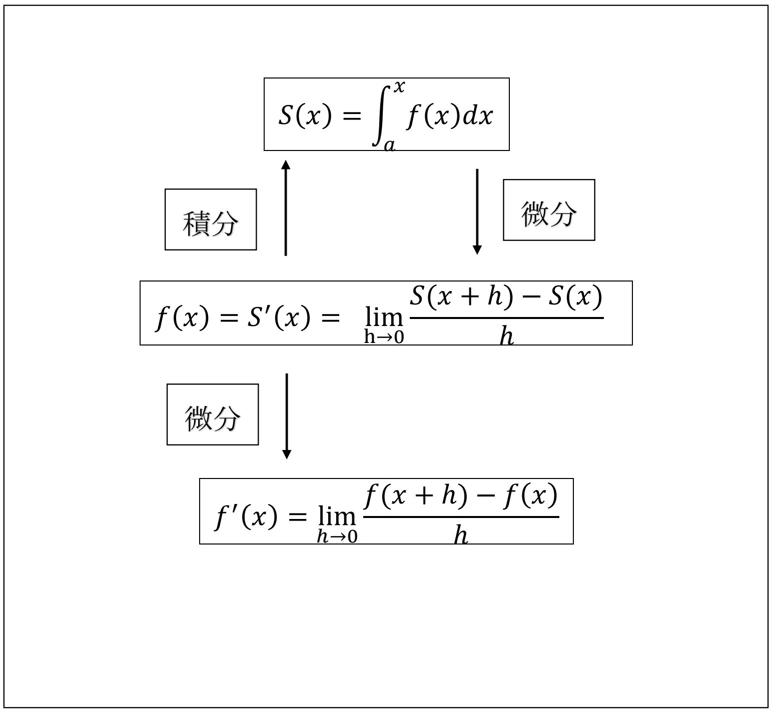


図 4.34　筆者の板書

その後，テキスト 21 ページ，22 ページを用いて，$S'(x)=f(x)$ であることの証明を解説した．今回は，$S(x)$ が単調増加である部分を用いて証明したが，勿論，単調減少の場合も示せることを説明した．また，図 4.35 はその授業風景である．

T: これで，$S'(x)=f(x)$ となることがわかりました．つまり，$f(x)$ を積分し，微分すると元に戻るということです．これを微分積分学の基本定理といいます．それでは，テキストの 23 ページを見てください．

（ここでは，x^n の微分が nx^{n-1} となることを利用して，x^n の積分の解説を行った．）

T: 最後にテキスト 24 ページの問題を解いてみてください．

（解答時間を 5 分与えた）

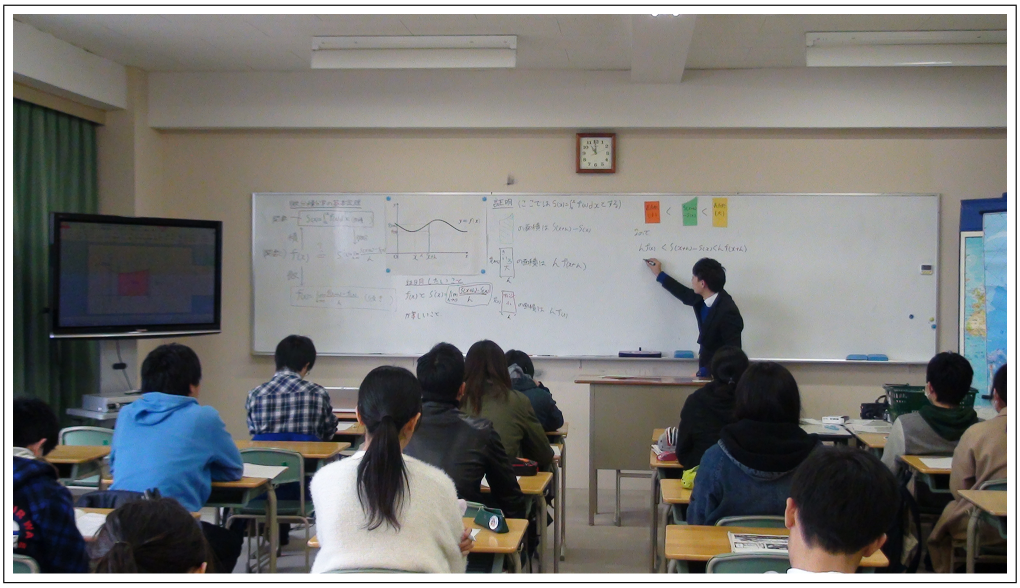


図 4.35　授業風景

T: では，S4 さん．前に解答を書いてください．(図 4.36)

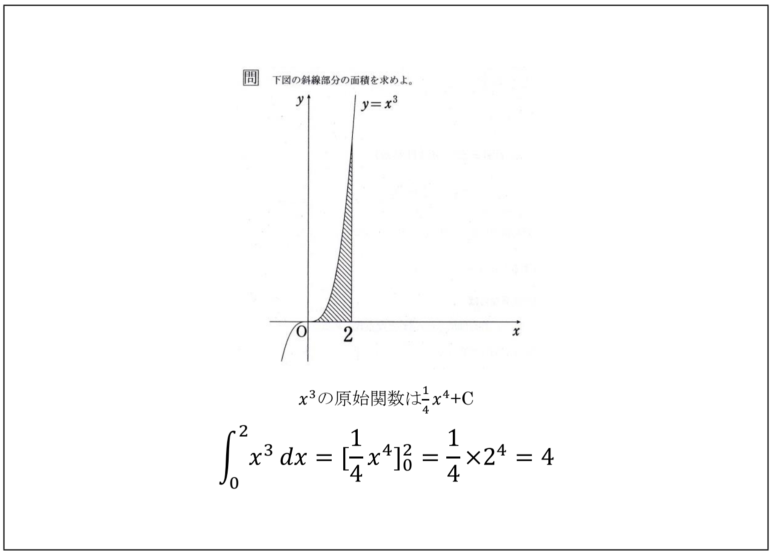


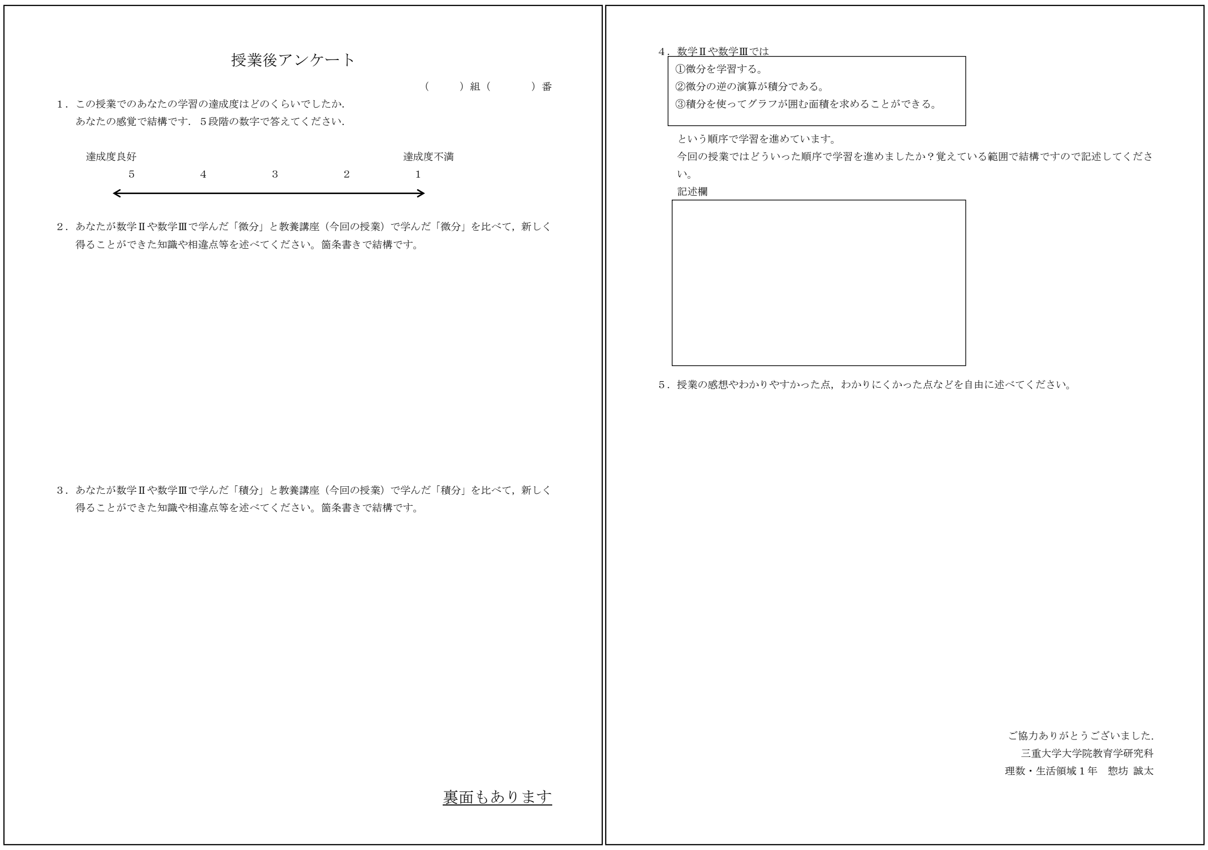
図 4.36　筆者の板書

T: そうですね，正解です．丁寧に原始関数を書いてから面積を求めてくれました．このように，区分求積で求めるのが大変そうな図形の面積も，微分の逆演算による積分で簡単に面積を求めることができます．皆さんが学校で習ったような微分と積分は，本当は別々に発展し，あとから逆演算ということがわかったのです．このことが，世界の科学の発達に大きく貢献しました．それでは，授業はこれで終ります．

4.3　実践を終えて

4.3.1　事後アンケートについて

第 8 時授業の終了前に事後アンケートを行った．今回の実践では，あくまで，数学 II で微積分を学習した生徒に対するものであった．よって，本アンケートは，「数学 II」における微分積分との印象比較調査である．質問項目は全部で 5 項目で，以下順次，質問項目とその回答結果を記し，考察を述べていくことにする．第 8 時は 5 人が欠席であったため，出席した 17 人に対して調査を行った．図 4.37 は実際に用いた事後アンケート紙である．



授業後アンケート

（　　）組（　　　）番

1．この授業でのあなたの学習の達成度はどのくらいでしたか．
　あなたの感覚で結構です．５段階の数字で答えてください．

達成度良好　5　4　3　2　1　達成度不満

2．あなたが数学Ⅱや数学Ⅲで学んだ「微分」と教養講座（今回の授業）で学んだ「微分」を比べて，新しく得ることができた知識や相違点等を述べてください。箇条書きで結構です。

3．あなたが数学Ⅱや数学Ⅲで学んだ「積分」と教養講座（今回の授業）で学んだ「積分」を比べて，新しく得ることができた知識や相違点等を述べてください。箇条書きで結構です。

裏面もあります

4．数学Ⅱや数学Ⅲでは

①微分を学習する。
②微分の逆の演算が積分である。
③積分を使ってグラフが囲む面積を求めることができる。

という順序で学習を進めています。
今回の授業ではどういった順序で学習を進めましたか？覚えている範囲で結構ですので記述してください。

記述欄

5．授業の感想やわかりやすかった点，わかりにくかった点などを自由に述べてください。

ご協力ありがとうございました．
三重大学大学院教育学研究科
理数・生活領域１年　惣坊 誠太

図 4.37　事後アンケート紙

> 質問 1. 本授業についての理解度の自己評価をしてください．（1〜5 の 5 段階評価で数字が大きい程，良評価とします．）

表 4.4 に，質問 1 の結果を示す．

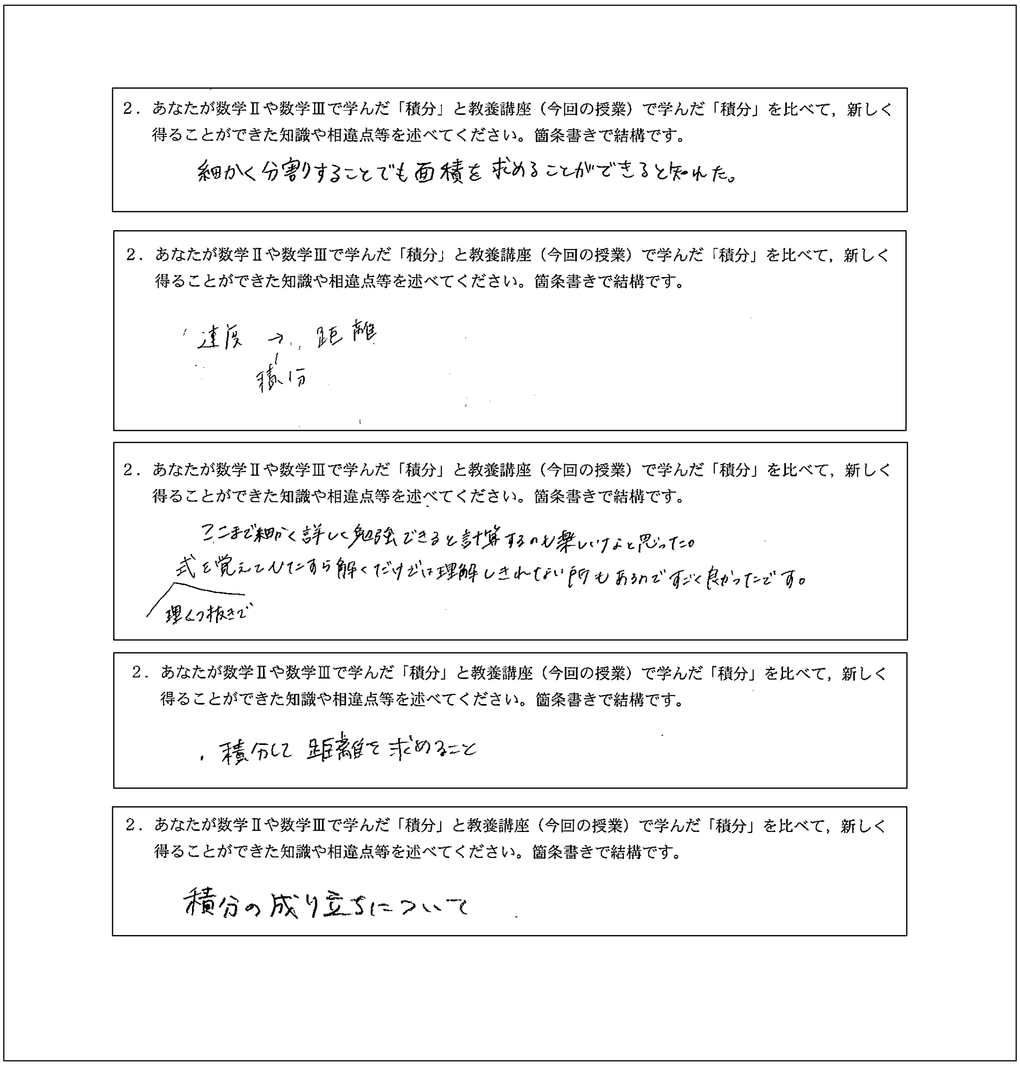
表 4.4　質問 1 の結果

評価	1	2	3	4	5
人数	0	3	1	9	4

上記の結果から，過半数の生徒が 4 以上と評価し，平均値は 3.83 で，生徒にとってはおおむね満足できた授業であると考えられる．

質問 2.「数学 II」で学習した積分と今回の授業で学習した積分の相違点について自由に記述してください．

質問 2 の回答の中で，抜粋した 4 人の回答を図 4.38 に示す．


2．あなたが数学Ⅱや数学Ⅲで学んだ「積分」と教養講座（今回の授業）で学んだ「積分」を比べて，新しく得ることができた知識や相違点等を述べてください。箇条書きで結構です。

細かく分割することでも面積を求めることができると知れた。

2．あなたが数学Ⅱや数学Ⅲで学んだ「積分」と教養講座（今回の授業）で学んだ「積分」を比べて，新しく得ることができた知識や相違点等を述べてください。箇条書きで結構です。

・速度 → 距離
積分

2．あなたが数学Ⅱや数学Ⅲで学んだ「積分」と教養講座（今回の授業）で学んだ「積分」を比べて，新しく得ることができた知識や相違点等を述べてください。箇条書きで結構です。

ここまで細かく詳しく勉強できると計算するのも楽しいなと思った。
式を覚えてひたすら解くだけでは理解しきれない所もあるのですごく良かったです。
理くつ抜きで

2．あなたが数学Ⅱや数学Ⅲで学んだ「積分」と教養講座（今回の授業）で学んだ「積分」を比べて，新しく得ることができた知識や相違点等を述べてください。箇条書きで結構です。

・積分して距離を求めること

2．あなたが数学Ⅱや数学Ⅲで学んだ「積分」と教養講座（今回の授業）で学んだ「積分」を比べて，新しく得ることができた知識や相違点等を述べてください。箇条書きで結構です。

積分の成り立ちについて

図 4.38　質問 2 の回答

質問 2 の回答は，積分の成り立ちや，速度と距離に関する関係についての記述がみられた．また，「理屈抜きで式を覚えてひたすら問題を解くだけでは理解しきれない所もあるのですごく良かったです」という回答から，この生徒は，現行の高等学校の微積分教育において，積分は計算中心の単元であるというイメージが先行していたと考えられる．しかし，本授業では，積分対して，興味・関心を獲得することができたと解釈できる．しかし，中には「学校で習った積分と同じだった」という回答も見られた．

項目 3.「数学 II」で学習した微分と今回の授業で学習した微分の相違点について自由に記述してください．

質問 3 の回答の中で，抜粋した 6 人の回答を図 4.39 に示す．

質問 3 の回答は，$s-t$ グラフから，微分を用いて速度を求めることに関しての記述が多く見られたが，特に着目すべきなのは，導関数 $f'(x)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ について述べられたことである．数学 II において，微分係数，導関数の定義は微積分の導入で学習し，本授業との相違点として認識されるべきでない事項である．しかし，生徒の持つ微分のイメージは代表的な微分公式 $(x^n)'=nx^{n-1}$ が先行し，本来の微分係数，導関数の定義が忘れ去られていると考えられる．また，こちらも「学校で習った微分と同じだった」という回答が見られた．

質問 4.「数学 II」では，

1. 微分を学習する
2. 微分の逆の演算が積分である
3. 積分を使ってグラフが囲む面積を求めることができる

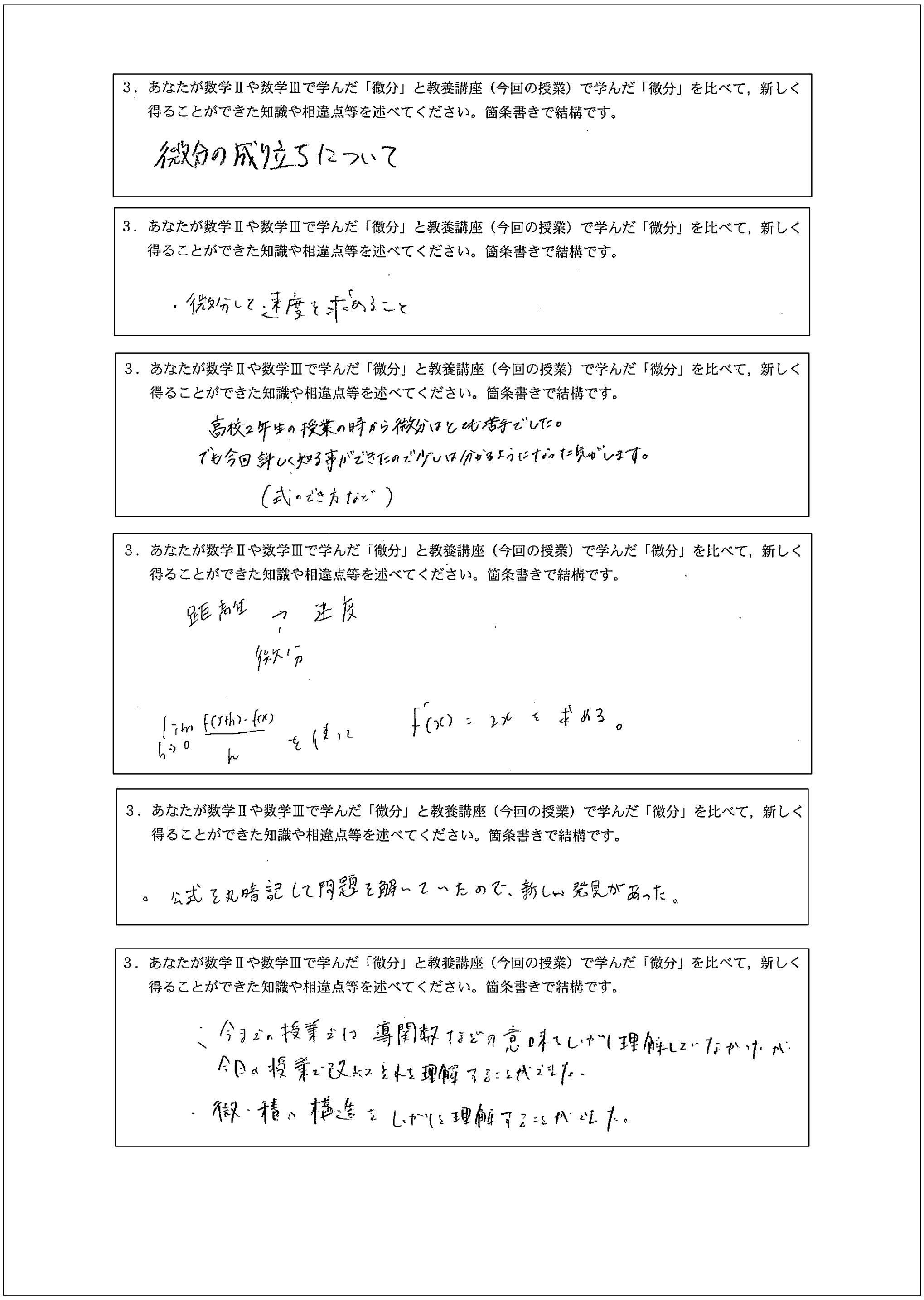
のような順序で微分積分の学習を進めました．
今回の授業ではどういった順序で微分・積分の学習を進めましたか．

質問 4 の回答は，期待できる解答例として，

1. （面積としての）定積分を学習する
2. 微分を学習する．
3. 微分と積分が逆演算である．

が挙げられる．このような正しい順序で記述できている生徒は 10 人であった．

「同じだった」という回答や，記述欄が空白であったり，質問の意図を汲み取らず記述されているものもあった．



3．あなたが数学Ⅱや数学Ⅲで学んだ「微分」と教養講座（今回の授業）で学んだ「微分」を比べて，新しく得ることができた知識や相違点等を述べてください。箇条書きで結構です。

微分の成り立ちについて

3．あなたが数学Ⅱや数学Ⅲで学んだ「微分」と教養講座（今回の授業）で学んだ「微分」を比べて，新しく得ることができた知識や相違点等を述べてください。箇条書きで結構です。

・微分して速度を求めること

3．あなたが数学Ⅱや数学Ⅲで学んだ「微分」と教養講座（今回の授業）で学んだ「微分」を比べて，新しく得ることができた知識や相違点等を述べてください。箇条書きで結構です。

高校2年生の授業の時から微分はとても苦手でした。
でも今回詳しく知る事ができたので少しは分かるようになった気がします。
（式のでき方など）

3．あなたが数学Ⅱや数学Ⅲで学んだ「微分」と教養講座（今回の授業）で学んだ「微分」を比べて，新しく得ることができた知識や相違点等を述べてください。箇条書きで結構です。

距離 $\xrightarrow{\text{微分}}$ 速度

$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ を使って $f'(x)=2x$ を求める。

3．あなたが数学Ⅱや数学Ⅲで学んだ「微分」と教養講座（今回の授業）で学んだ「微分」を比べて，新しく得ることができた知識や相違点等を述べてください。箇条書きで結構です。

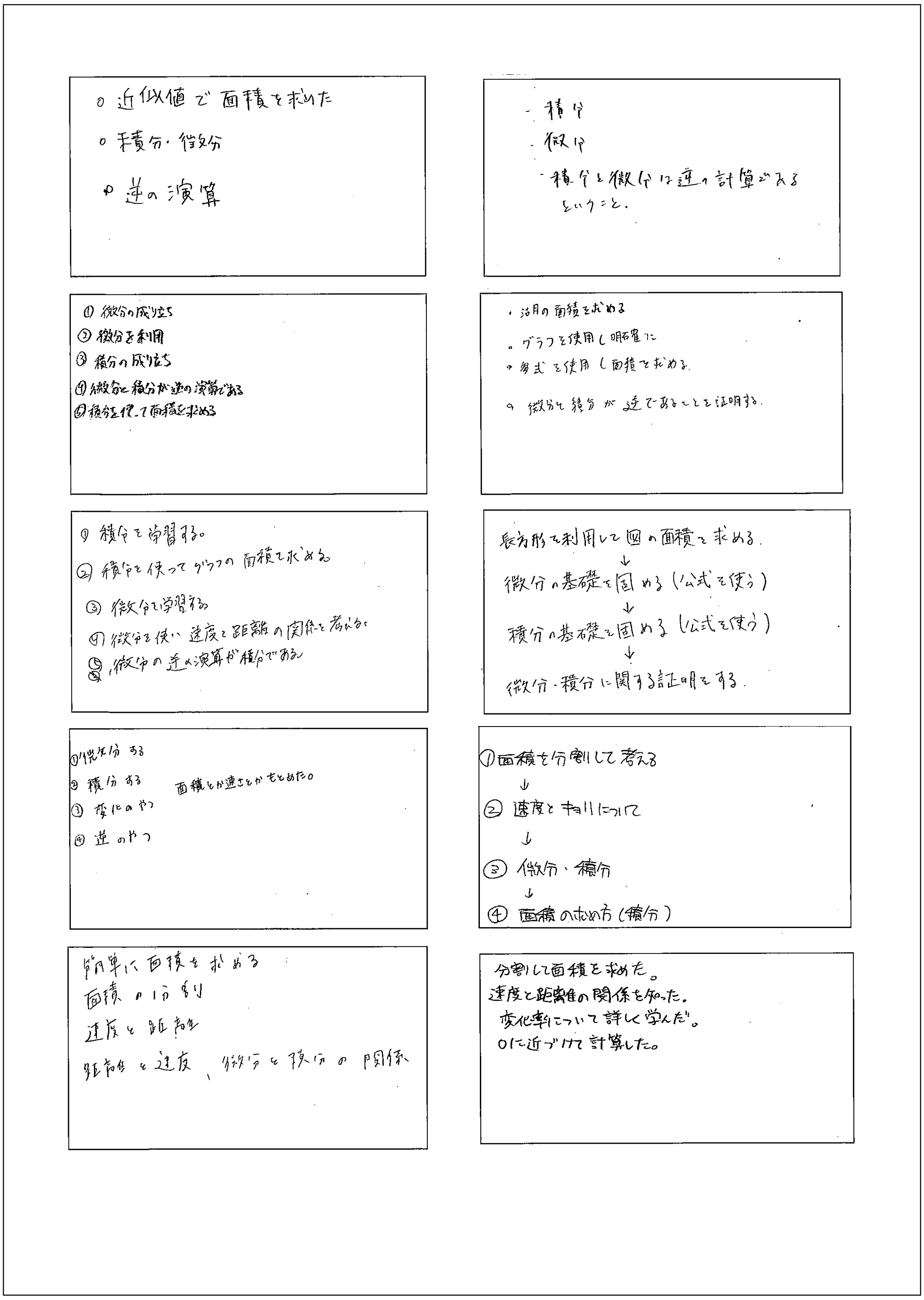
。公式を丸暗記して問題を解いていたので、新しい発見があった。

3．あなたが数学Ⅱや数学Ⅲで学んだ「微分」と教養講座（今回の授業）で学んだ「微分」を比べて，新しく得ることができた知識や相違点等を述べてください。箇条書きで結構です。

、今までの授業では導関数などの意味をしっかり理解していなかったが
今回の授業で改めてそれを理解することができた。
・微・積の構造をしっかりと理解することができた。

図 4.39　質問 3 の回答

質問 4 の回答の中で，抜粋した 10 人の回答を図 4.40 に示す．


○ 近似値で面積を求めた
○ 積分・微分
○ 逆の演算

・積分
・微分
・積分と微分は逆の計算であるということ。

① 微分の成り立ち
② 微分を利用
③ 積分の成り立ち
④ 微分と積分が逆の演算である
⑤ 積分を使って面積をもとめる

・[illegible]の面積をもとめる
・グラフを使用し明確に
・多式を使用し面積をもとめる
・微分と積分が逆であることを証明する。

① 積分を学習する。
② 積分を使ってグラフの面積を求める。
③ 微分を学習する。
④ 微分を使い速度と距離の関係を考える。
⑤ 微分の逆の演算が積分である。

長方形を利用して図の面積を求める。
↓
微分の基礎を固める（公式を使う）
↓
積分の基礎を固める（公式を使う）
↓
微分・積分に関する証明をする。

① 微分する
② 積分する
③ 変化のやつ
④ 逆のやつ
面積とか速さとかもとめた。

① 面積を分割して考える
↓
② 速度とキョリについて
↓
③ 微分・積分
↓
④ 面積の求め方（積分）

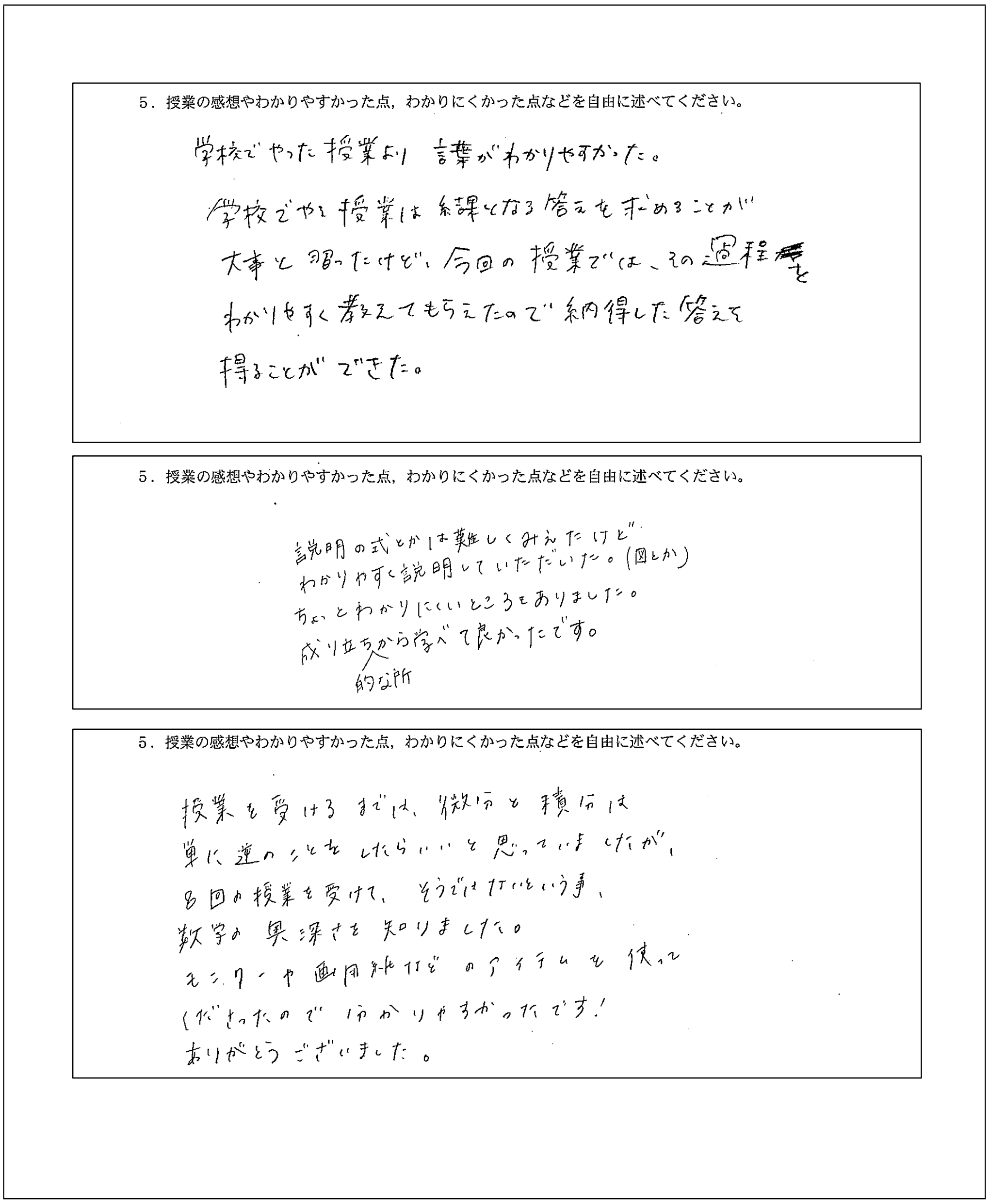
簡単に面積をもとめる
面積の分割
速度と距離
距離と速度、微分と積分の関係

分割して面積を求めた。
速度と距離の関係を知った。
変化率について詳しく学んだ。
0に近づけて計算した。

図 4.40　質問 4 の回答

質問 5. この授業の感想を自由に述べてください．

質問 5 の回答は，指導者の授業技術に対する評価と，学習内容に対する評価が混在していたが，今回は学習内容の評価のみに着目する．質問 5 の回答の中で，抜粋した 3 人の回答を図 4.41 に示す．



5．授業の感想やわかりやすかった点，わかりにくかった点などを自由に述べてください。

学校でやった授業より講義がわかりやすかった。
学校でやた授業は結果となる答えを求めることが
大事と習ったけど、今回の授業では、その過程を
わかりやすく教えてもらえたので納得した答えを
得ることができた。

5．授業の感想やわかりやすかった点，わかりにくかった点などを自由に述べてください。

説明の式とかは難しくみえたけど
わかりやすく説明していただいた。(図とか)
ちょとわかりにくいところもありました。
成り立ちから学べて良かったです。
的な所

5．授業の感想やわかりやすかった点，わかりにくかった点などを自由に述べてください。

授業を受けるまでは、微分と積分は
単に逆のことをしたらいいと思っていましたが、
8回の授業を受けて、そうではないという事、
数学の奥深さを知りました。
モニターや画用紙などのアイテムを使って
くださったのでわかりやすかったです!
ありがとうございました。

図 4.41　質問 5 の回答

図 4.41 に見ると

「学校の授業は結果となる答えを求めることが大事と習ったけど，今回の授業では，その過程をわかりやすく教えてもらえたので納得した答えを得ることができた」
「授業を受けるまでは，微分と積分は単に逆のことをしたらいいと思っていましたが，8 回の

授業を受けて，そうではないという事，数学の奥深さを知りました」

といった回答があった．このように，高校数学では学習しない微分・積分についての本質に迫り，その満足感が現れる感想が見られた．現在の「数学 II」の微分・積分は，計算することを中心に捉えがちになり，生徒はその魅力を感じない傾向にあると考えられる．

4.3.2　実践の成果

今回の実践の成果は，生徒の積分に対する姿勢の変化であろう．現行の高等数学のカリキュラムでは，積分は「単なる計算問題」のように扱われ，パターン化されたアルゴリズムにより問題を解くという印象が強い．実際，事後アンケートにおいても「式を理屈抜きで覚え $\cdots$」,「公式を丸暗記していたので $\cdots$」などの意見も存在していた．しかし,「求積」としての積分の導入により，積分の印象大きく変え,「単なる計算問題」からの脱却を図ることができた．これは，微分係数を求めることについても同様のことが言えるだろう．

そして，今回は土地の面積を区分求積により近似することを積分の導入とした．複雑な図形の面積を，長方形などの単純な図形の面積を近似することは，日常生活における一種の知恵であり，生徒は積分を身近なものに感じることができたといえるだろう．

また，今回は物体の運動に関するグラフを利用して，微分積分学の基本定理を発見するというカリキュラムを作成した．これについては，高等学校理科の科目の一つである「物理」の力学分野との関連付けにより，次期学習指導要領改訂で設置が検討されている選択科目「数理探求（仮称)」によって扱うことが可能である．

4.3.3　実践の課題

まず，カリキュラムの実現そのものに課題が残る．区分求積法を学習するためには,「数列」及び「数列の極限」を学習しなければならない．今回の実践では，$\frac{1}{n}$ の極限のみを扱ったが，本格的な区分求積法の学習を行うとすれば，それだけでは不十分である．よって，本カリキュラムを実現させるためには，微積分よりも先に数列，数列の極限を学習させるために，高等学校数学教育全体のカリキュラムの見直しが必要となる．第 3 章で述べたように，昭和 30 年代の学習指導要領改訂に関わる議論において，数列の極限の指導は難関であるという現場の声が挙がっている．よって，数列の極限は必修単元から外されることになった．この事実を踏まえると，全生徒に対する区分求積法による積分の導入は困難を極めるだろう．

しかし，数論としてのトピックス的な扱いがなされている数列が，数列 $\to$ 極限 $\to$ 微積という解析学の体系に忠実な数学カリキュラムが構成され得ることから，生徒にとって数列を学ぶ意義がわかりやすくなるだろう．

もう一つの課題として，$y = x^2$ の閉区間 [0,1] における下部領域を分割する n 個の長方形の和，すなわちリーマン和の導出が挙げられる．今回の実践では，リーマン和を自力で導き出せた生徒は

僅かであり，その指導に関して丹念な教材研究が必要である．

更に，今回の実践では，本来必要であるべき授業の理解度調査を行わず，内容の印象のみの調査のみを行った．理由としては，対象生徒は数列の極限を学習していない者が殆どであり，区分求積法に関する問題の理解度調査を行うのは困難であると判断したからである．

今後実践を行うならば，対象は既に数列の極限を学習した者，もしくは数学 II の微積分を学習していない者が適切であろう．数学 II の微積分を学習していない者に対しては，数列，数列の極限からカリキュラムを作成し実践を行わなければならないが，数学 II の微積分を学習した生徒との比較調査が可能になるだろう．

参考文献

[1] 成田慎之助 (2014),「微分積分学の基本定理の創出過程に関する一考察–『数学 第一類』の分析を手がかりとして–」,『日本数学教育学会誌 2014 第 96 巻』, pp129-136.

[2] 黒田俊郎 (1999),『微分のひ・み・つ』, 三省堂.

[3] 黒田俊郎 (1999),『積分のい・ず・み』, 三省堂.

終章

研究の成果

第 1 章

第 1 章の目的は，解析学の微積分概念の理論的厳密性を基に，高等学校数学の微積分を検討することであった．

高等学校数学の積分は微分の逆演算として定義され，論理に矛盾のない構成がなされているのは確かである．しかし，解析学の視点から高等学校数学の積分を見渡すと，本来積分を構成するために必要な極限の概念が取り払われていることがわかる．しかし，高等学校数学において，数列の極限に $\varepsilon - N$ 論法を取り入れる等といった，厳密さを求める必要はあるだろうか．初等，中等教育における極限の概念は，円の面積公式の導出を始め，直感的思考を重視したものであり，数学科へ進学しない生徒はそれで十分であろう．勿論，区分求積による積分の導入に関しても，関数の積分可否の判定等の厳密性を取捨せねばならない．しかし，区分求積による導入は，生徒の，積分が求積計算であるというイメージを大いに育む方法であり，高等学校数学の現カリキュラムの範囲内をもって，厳密性を取り去りながらも活用されるべきと考えられる．

第 2 章

第 2 章の目的は，『数学 第一類』の調査を行い，具体的事象の考察を織り交ぜた微積分カリキュラムの構成の手立てとすることであった．

『数学 第一類』における微積分は，解析学のような理論的厳密性は取り払われているものの，構成自体は解析学と同じく，積分と微分を個々に導入し，後に基本定理を導くというものある．この構成は，現行の高等学校数学とは異なるが，物体の運動を始めとする具体的事象を大いに盛り込まれた教材となっている．よって，具体的な事象の考察により，微積分の考えを理解させ，有用性を認識させることさせることが可能であり，現行の高等学校数学の微積分教育に活用することができるだろう．

第 3 章

第 3 章の目的は，戦後の学習指導要領や，教科書の変化とその背景に迫ることであった．

本稿では，高等学校数学科では，戦後しばらくは，解析学の方法に準拠した積分の構成法を取ってきたが，科学技術の振興が謳われた昭和 30 年代,「微積分の必修化」を契機として，今日のような形態が形成されたことを明らかとなった．それは，必修化にともなって，すべての生徒が学ぶ積分から，難解とされる数列の和の極限の学習を課すことを回避させるために採用された構成法であることが分かった．

第 4 章

第 4 章の目的は，筆者が作成した微積分カリキュラムを高校生に対して実践し，その功罪を明らかにすることであった．

今回の実践において，アンケート調査から，生徒の積分に対する姿勢の変化が見られ,「求積」としての積分の導入により，積分の印象大きく変え,「単なる計算問題」からの脱却を図ることができた．これは，微分係数を求めることについても同様のことが言えるだろう．

今後の課題

今後の課題の一つに，二つの積分の導入法が混在した時期における学校現場の調査が挙げられる．

昭和 35 年告示の「学習指導要領」によって，昭和 38 年からの 10 年間は，二つの積分の導入による構成法が混在したわけだが，両者に対する学校現場の評価はどうであったのか．また，どちらのタイプの教科書が，高等学校現場では多く採択されたのかを調査を行い，今後のカリキュラム構成に役立てたい．

また，第 4 章でも述べたが，実践に関する課題が挙げられる．

今回の実践では，対象生徒は数列の極限を学習していない者が殆どであり，区分求積法に関する問題の理解度調査を行うのは困難であると判断し行わず，内容の印象のみの調査のみを行った．

今後の実践では，既に数列の極限を学習した者を対象にする．もしくは数学 II の微積分を学習していない者を対象に行い，数学 II の微積分を学習した生徒との比較調査を行う．そして，理解度調査も行い，区分求積による積分の導入指導の効果を明らかにする．

謝辞

本研究に関して終始ご指導ご鞭撻を頂きました本学中西正治教授に心より感謝致します．また，論文の執筆にあたって，日頃からお忙しい中，親身にご指導頂きました本学田中伸明准教授に深謝致します．そして，本研究について，数学に関する大変貴重なアドバイスを頂きました本学数学教育コースの先生方に心より感謝致します．

最後に，貴重な時間を割いて本研究の実践にご協力頂きました，三重県立津東高等学校松岡泰之校長を始め，先生方及び教養講座を受講された方々に深く感謝致します．