

—修士論文—

安定性を考慮した状態フィードバックゲインの  
入出力データを用いた直接調整法に関する研究

A Study on Direct Tuning of State Feedback Gains  
with Stability Constraint Using I/O Data

平成28年度

三重大学大学院工学研究科  
博士前期課程 電気電子工学専攻  
電機システム研究室  
青木翔吾

# 目次

第1章 緒言	1
1.1 研究背景と目的	1
1.2 論文の構成	4
第2章 入出力データのみを用いた制御器の設計法	5
2.1 モデル参照制御問題	5
2.2 データ駆動型制御器設計法を用いた状態フィードバックゲイン調整法	6
2.2.1 問題設定	7
2.2.2 FRITに基づく直接調整法	8
2.2.3 状態フィードバックゲイン調整法の手順	10
2.3 状態フィードバックゲイン調整法の問題点	10
第3章 安定性を考慮した状態フィードバックゲイン調整法	11
3.1 従来の状態フィードバックゲイン調整法	11
3.2 小ゲイン定理に基づく安定判別法	11
3.2.1 一巡伝達関数の入出力データ導出	13
3.2.2 スペクトル解析法による一巡伝達関数 $T(\mathbf{F})$ の推定	14
3.3 安定性を考慮した調整法	16
第4章 状態フィードバックゲインの調整法の拡張と小ゲイン定理の問題点	17
4.1 状態フィードバックゲイン調整法の拡張	17
4.1.1 問題設定	17
4.1.2 特定の出力を考慮した状態フィードバックゲインの直接調整法	19
4.2 シミュレーション	21
4.2.1 シミュレーション条件	21
4.2.2 シミュレーション結果	21

<b>第 5 章</b>	<b>保守性を低減する安定制約の提案</b>	<b>24</b>
5.1	ナイキスト軌跡に基づく安定制約の提案 . . . . .	24
5.1.1	ベースとなる安定制約の考え方 . . . . .	24
5.1.2	積分器の影響を受けない安定制約への拡張 . . . . .	27
5.1.3	小ゲイン定理に基づく安定制約との違い . . . . .	29
5.2	シミュレーション . . . . .	29
5.2.1	シミュレーション条件 . . . . .	29
5.2.2	シミュレーション結果 . . . . .	30
<b>第 6 章</b>	<b>推定点間を保証した安定制約の提案</b>	<b>33</b>
6.1	安定制約の拡張 . . . . .	33
6.1.1	安定制約の問題点 . . . . .	33
6.1.2	推定点間の不確かさ . . . . .	34
6.1.3	推定点間を考慮した安定制約 . . . . .	36
6.1.4	不確かさの決定方法 . . . . .	37
6.1.5	従来の安定制約との違い . . . . .	38
6.2	シミュレーション . . . . .	39
6.2.1	シミュレーション条件 . . . . .	39
6.2.2	シミュレーション結果 . . . . .	40
<b>第 7 章</b>	<b>実機実験</b>	<b>43</b>
7.1	実験 . . . . .	43
7.1.1	実験条件 1 . . . . .	43
7.1.2	実験結果 1 . . . . .	44
7.1.3	実験条件 2 . . . . .	49
7.1.4	実験結果 2 . . . . .	49
<b>第 8 章</b>	<b>結言</b>	<b>53</b>
	謝辞	56
	論文目録	57

# 第1章 緒言

## 1.1 研究背景と目的

状態フィードバックは線形時不変システムに対する基本的な安定化手法の1つである。状態フィードバックゲインを設計するためには制御対象の数式モデルが必要となるが、運動方程式により導かれた数式モデルや同定実験に基づいて作られた数式モデルには、パラメータ誤差や線形化により無視した非線形特性、制御対象の変動等の原因により、制御対象の特性が十分に反映されないことが多くある。そのため、その数式モデルを用いて設計した状態フィードバックゲインを実装したとしても、目標とする特性を得られないことが生じる恐れがある。所望の特性を得るためには、制御対象の特性を評価する、つまりパラメータ誤差や劣化等によるモデル化誤差を無くすことが重要である。

一般に制御器設計法として、制御対象の動特性を数式モデルで表し、その数式モデルを用いて設計仕様に応じた制御器を設計するモデルベース制御器設計法が幅広く用いられている。その設計法の考え方をを用いると、モデル化誤差等により所望の特性を得られない場合、実験結果から数式モデルの再同定と状態フィードバックゲインの更新を繰り返していくアプローチがある。しかし、数式モデルに制御対象の特性を完全に反映するには、一般的に高次数な数式モデルが必要となるため非常に煩雑さを伴う。さらに繰り返し実験を行わなければならないため、実験を行うたびに温度等が原因で制御対象の特性が変化してしまい、必ずしも完全に制御対象の特性を反映できるとは限らず、また時間も掛かる。

このような問題を解決するために、モデルベース制御器設計法と同様に広く活用され得るシーズという立場で、近年、研究が盛んに行われている設計法がある。その設計法はデータ駆動型制御器設計法と呼ばれ、制御器設計に数式モデル化を介さず、制御対象の入出力データのみを用いて所望の特性を実現する制御器を設計する手法である。この設計法の考え方をを用いると、モデルベース制御器設計法を用いた場合の数式モデルの再同定を行う必要がなくなり、実験データから状態フィードバックゲインを直接調整ができる。そのため、時間や煩雑さの削減が期待できる。

実際に、このデータ駆動型制御器設計法の 1 つである Fictitious Reference Iterative Tuning<sup>[1]</sup>(以下 FRIT と略す)の考え方をを用いて、繰り返し実験を行うことなく、状態フィードバックゲインの再調整を可能している手法が提案されている<sup>[2, 3]</sup>。

文献 [2] の手法は、数式モデルの再同定を介すことなく、1 回の実験により、周波数応答に基づく安定性、制御性能を考慮した状態フィードバックゲインの再調整が可能であり、数値例及び実機実証では良好な結果は得られている。しかし、必ずしも閉ループシステムを安定化する状態フィードバックゲインを求められるとは限らず、制御性能の向上には試行錯誤を伴う。さらに、評価関数が非線形な問題で表現されるため局所解に陥る恐れがあり、最適化の結果として得られる状態フィードバックゲインを適用した閉ループ系と目標とした参照モデルとの関係が示されておらず、手法の妥当性が理論的に検証されていない大きな問題点がある。

文献 [3] の手法は、数式モデルの再同定を介すことなく、1 回の実験、最小二乗法という簡易な計算により、状態フィードバックゲインの再調整が可能である。この手法は、各状態量それぞれに所望の特性を与え、実験により得られた各状態量のデータとの差を平均的に最小化することで所望の特性を実現する調整法であり、手法の妥当性が理論的に検証されている。しかし、状態フィードバックゲインを適用した閉ループシステムと安定な伝達関数との差を小さくするという意味で不安定化の回避を意図しているが、必ずしも再調整した状態フィードバックゲインが閉ループシステムを安定化するとは限らない。

データ駆動型制御器設計法における閉ループシステムの安定性は、設計パラメータを用いて実際に運用してみなければ評価できない。そのため、この設計法において、閉ループシステムの安定性をデータのみを用いて保証する問題は、最も重要な問題の 1 つである。従来のデータ駆動型制御器設計法では、小ゲイン定理を用いて閉ループシステムの安定性を保証しながら制御器パラメータを設計している手法が提案されている<sup>[4]</sup>。しかし、この調整法に用いられている小ゲイン定理に基づく安定制約は、安定性の十分条件であるため保守性が生じ、所望の特性を得られない恐れがある。さらに、文献 [4] は時系列データのみで安定性を保証するために、スペクトル解析法<sup>[5]</sup>を用いて周波数応答を制御対象の入出力データの 1 周期のデータ数とサンプリングタイムに依存する周波数点刻みで推定している。そのため、それら推定点ごとでは安定性を保証できるが、推定点間の振る舞いまでは保証できず、それが原因で調整後の閉ループシステムが不安定化する恐れがある。この推定点間の振る舞い問題を解決している手法は既に提案されており<sup>[6]</sup>、文献 [7] の推定点間の振る舞いの基本的な考えに基づいてい

る。文献 [6, 7] に関しては, 6 章で説明を行う。

このような背景から, 理論的な検証が行われている文献 [3] の考え方に基づいて, 安定性を保証する状態フィードバックゲイン調整法を提案することを目的とする。さらに安定制約は, 小ゲイン定理の問題点である保守性を低減した新たな安定制約を複数のオリジナルアイデアを用いて提案する。さらに, 文献 [6, 7] の考え方をを用いて推定点間を振る舞いを保証する安定制約へと拡張を行う。また, 文献 [3] の調整法は, 調整後の閉ループシステムの安定性を暗に考慮するために, 各状態量それぞれの所望の特性と各状態量のデータとの差を平均的に最小化する状態フィードバックゲインを導出していた。しかし, 安定性を理論的に保証することで安定性を暗に考慮した平均的な最小化に囚われることなく, 状態量 1 つのみを重点的に所望の特性を近づける等, 様々な調整法に応用できることも示す。なお, 本論文において制御対象は Single Input Single Output システム (以下 SISO システム) に限定する。

## 1.2 論文の構成

本論文は全 8 章で構成されており，その内容は以下のとおりである。

第 2 章では，データ駆動型制御器設計法の基本的な設計問題であるモデル参照制御問題，および拡張のベースとなる文献 [3] について述べる。第 3 章では，従来手法の閉ループシステムの安定制約を考慮していない問題を解決するために，文献 [4] に基づいて小ゲイン定理に基づく安定制約を提案する。第 4 章では，安定制約を考慮することにより，従来の手法の自由度をより増やせること，第 3 章で示した小ゲイン定理の安定制約の問題点を述べる。第 5 章では，小ゲイン定理の安定制約の問題点を解決するために新たにナイキスト軌跡に基づく安定制約の提案を行う。第 6 章では，第 5 章で提案した安定制約をより実用的な制約へと拡張し，第 7 章にて，提案手法の有効性を実機実験により示す。第 8 章をもって本稿のまとめとする。

## 第2章 入出力データのみを用いた制御器の設計法

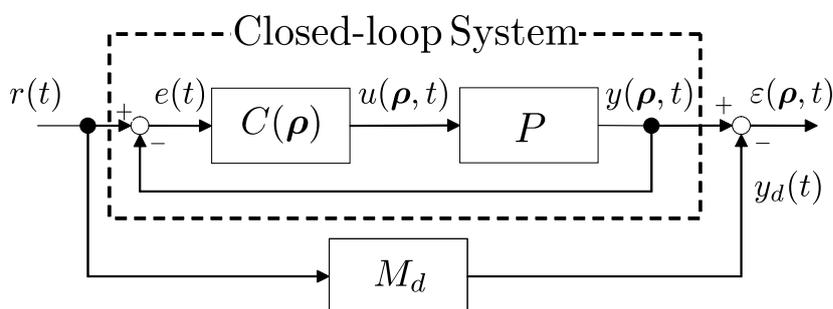


図 2.1: モデル参照制御問題

本章では、データ駆動型制御器設計法に共通する設計問題であるモデル参照制御問題について述べる。さらに、拡張する手法であるデータ駆動型制御器設計法を用いた状態フィードバックゲインの調整法<sup>[3]</sup>は詳細に述べる。

### 2.1 モデル参照制御問題

設計目的は、図 2.1 のように設計者が任意に決定できる参照モデル  $M_d$  と、未知な制御対象  $P$  とパラメータベクトル  $\rho$  により記述される制御器  $C(\rho)$  から構成される閉ループシステムとの特性の差が何らかのノルムに関して最小となるような固定次数制御器  $C(\rho)$  を設計することである。この問題は例えば (2.1) 式のように参照モデル  $M_d$  と閉ループシステムの差の 2 ノルムの 2 乗の最小化問題として定式化できる。

$$J_{MR}(\rho) = \|M_d - (1 + PC(\rho))^{-1}PC(\rho)\|_2^2 \quad (2.1)$$

(2.1) 式は、達成された閉ループシステム及び参照モデル  $M_d$  に対して参照信号  $r(t)$  を印加した時に得られる (2.2) 式の出力誤差  $\varepsilon(\rho, t)$  の 2 ノルムの 2 乗を最小化する制御器

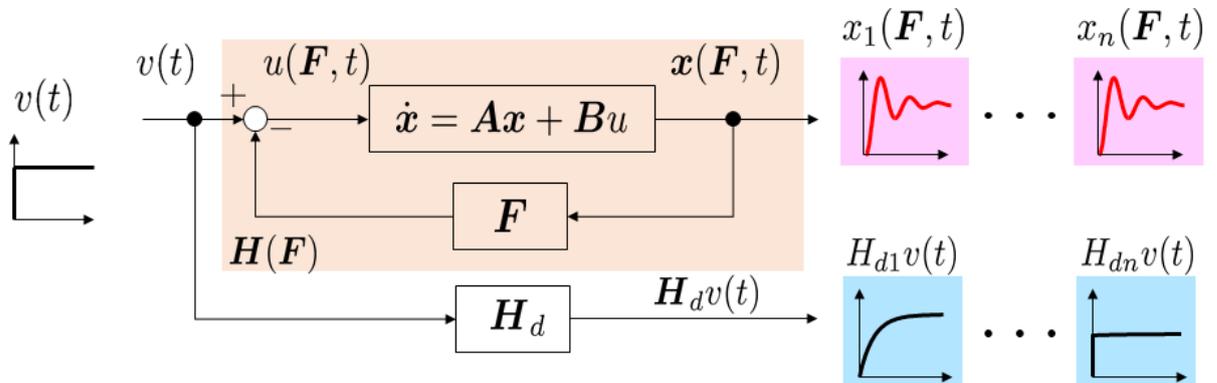


図 2.2: 従来手法のマッチング問題

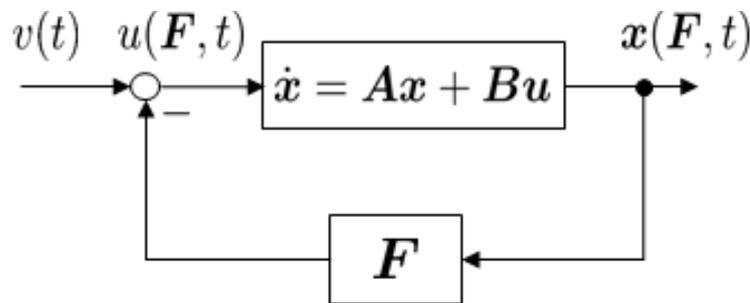


図 2.3: 状態フィードバック制御

パラメータ  $\hat{\rho}$  を求める問題と等価である。

$$\varepsilon(\rho, t) = y_d(t) - y(\rho, t) \quad (2.2)$$

$$\hat{\rho} = \arg \min_{\rho} \|\varepsilon(\rho, t)\|_2^2 \quad (2.3)$$

データ駆動型制御器設計法において、モデル参照制御問題 (2.3) 式が典型的な制御器設計問題として扱われている。

## 2.2 データ駆動型制御器設計法を用いた状態フィードバックゲイン調整法

モデル化誤差を有する数式モデルを用いて状態フィードバックゲインを設計し、実際の閉ループシステムに実装したとしても、目標とした特性を得られないことは容易に起こりえる。その状況が起こったとき、データ駆動型制御器設計法の考え方を用いて、実験データを直接用いて状態フィードバックゲインを再調整をできれば、時間や煩雑さの削減が期待される。本節では、文献 [3] の調整法の手順について詳細に述べる。

### 2.2.1 問題設定

制御対象は、(2.4) 式で表される厳密にプロパーな  $n$  次で可制御な線形時不変 1 入力システムを取り扱う。ただし、すべての状態量はセンサ等から取得可能であり、初期状態は零であるとする。

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \\ y = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{cases} \quad (2.4)$$

この制御対象のパラメータ  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  は未知であるが、そのノミナルパラメータ  $\mathbf{A}_n$ ,  $\mathbf{B}_n$  は同定実験等により得られているとする。出力行列  $\mathbf{C}$  は、1 入力システムに対応した任意の行列である。また、状態量は  $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n]^T$ 、状態フィードバックゲインを  $\mathbf{F} = [f_1 \ f_2 \ \cdots \ f_n]$  と定義し、図 2.2 の閉ループシステムを考える。(2.4) 式の制御対象に (2.5) 式の状態フィードバックを施した閉ループシステム (図 2.3) の特性  $\mathbf{H}(\mathbf{F}, s)$  は (2.6) 式となる。ここで、入力  $v$  は (2.6) 式を評価するために任意に印加する信号である。なお、式中の  $\bullet(\mathbf{F})$  は状態フィードバックゲイン  $\mathbf{F}$  の関数であることを表す。

$$u(\mathbf{F}) = -\mathbf{F}\mathbf{x} + v \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{F}, s) &= (s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{F})^{-1}\mathbf{B} \\ &= \begin{bmatrix} H_1(\mathbf{F}, s) & H_2(\mathbf{F}, s) & \cdots & H_n(\mathbf{F}, s) \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (2.6)$$

そして、外部からの入力  $v$  から状態  $\mathbf{x}$  までの所望の閉ループ特性  $\mathbf{H}_d(s)$  を (2.7) 式と定義する。

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_d(s) &= (s\mathbf{I} - \mathbf{A}_n + \mathbf{B}_n\mathbf{F}_0)^{-1}\mathbf{B}_n \\ &= \begin{bmatrix} H_{d1}(s) & H_{d2}(s) & \cdots & H_{dn}(s) \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (2.7)$$

(2.7) 式中の  $\mathbf{F}_0$  は、ノミナルパラメータ  $\mathbf{A}_n$ ,  $\mathbf{B}_n$  に対して極配置法などを用いて  $\mathbf{H}_d(s)$  を実現するように設計した初期状態フィードバックゲインである。ただし、 $\mathbf{A}_n$ ,  $\mathbf{B}_n$  より設計した  $\mathbf{F}_0$  を適用した図 2.2 の閉ループシステムは必ず安定とし、 $\mathbf{F}_0$  を用い、 $v(t)$  を与えたときに得られるデータを  $u(\mathbf{F}_0, t)$ ,  $\mathbf{x}(\mathbf{F}_0, t)$  と表す。

ここで、一般的にノミナルモデルと実際の制御対象の間には不確かさがあり、 $v(t)$  に対する初期出力  $\mathbf{x}(\mathbf{F}_0, t)$  は  $\mathbf{x}(\mathbf{F}_0, t) \neq \mathbf{H}_d(s)v(t)$  となる。そこで  $u(\mathbf{F}_0, t)$ ,  $\mathbf{x}(\mathbf{F}_0, t)$  を直接用いて  $\mathbf{x}(\mathbf{F}, t)$  が  $\mathbf{H}_d(s)v(t)$  に近づくように状態フィードバックゲイン  $\mathbf{F}$  をデータ駆動型制御器設計法の 1 つである FRIT の考え方を用いて再調整する方法を与える。

これ以下では記述がない限り,  $\mathbf{H}_d(s)$ ,  $\mathbf{H}(\mathbf{F}, s)$  をそれぞれ  $\mathbf{H}_d$ ,  $\mathbf{H}(\mathbf{F})$  と省略して記述する。

### 2.2.2 FRIT に基づく直接調整法

1 回の実験により得られた入出力データ  $u(\mathbf{F}_0, t)$ ,  $\mathbf{x}(\mathbf{F}_0, t)$  を用いて (2.8) 式で表される擬似外生信号  $v(\mathbf{F}, t)$  を導入する。

$$v(\mathbf{F}, t) = u(\mathbf{F}_0, t) + \mathbf{F}\mathbf{x}(\mathbf{F}_0, t) \quad (2.8)$$

(2.8) 式で表される擬似外生信号は閉ループシステムに対する参照信号ではなく, どのようなゲインを用いても現在の入出力データ  $u(\mathbf{F}_0, t)$ ,  $\mathbf{x}(\mathbf{F}_0, t)$  を保つために擬似的に印加する外生信号であり, 図 2.2 より簡単に計算される。(2.8) 式を用いることで得られる擬似的な図 2.2 の閉ループシステムの出力誤差が (2.9) 式で得られる。

$$\begin{aligned} \mathbf{e}(\mathbf{F}, t) &= \mathbf{x}(\mathbf{F}_0, t) - \mathbf{H}_d v(\mathbf{F}, t) \\ &= \begin{bmatrix} e_1(\mathbf{F}, t) & e_2(\mathbf{F}, t) & \cdots & e_n(\mathbf{F}, t) \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (2.9)$$

ただし,  $e_n(\mathbf{F}, t) = x_n(\mathbf{F}_0, t) - H_{dn}v(\mathbf{F}, t)$  である。(2.9) 式の最小化を考え, 取得データ列による (2.10) 式の評価関数  $J(\mathbf{F})$  を定義する。

$$J_c(\mathbf{F}) = \|\mathbf{x}(\mathbf{F}_0) - \mathbf{H}_d v(\mathbf{F}, t)\|_2^2 \quad (2.10)$$

また, 評価関数は (2.11) 式と書き直すこともできる。

$$J_c(\mathbf{F}) = \|(\mathbf{H}(\mathbf{F}) - \mathbf{H}_d)v(\mathbf{F}, t)\|_2^2 \quad (2.11)$$

(2.11) 式より, 評価関数  $J_c(\mathbf{F})$  を 0 にすることは, 状態フィードバックゲインを適用した閉ループシステムとノミナルモデルの特性を一致することと等価となる。

ここで, 評価関数  $J_c(\mathbf{F})$  は (2.8) 式を用いて (2.12) 式と表される。

$$\begin{aligned} J_c(\mathbf{F}) &= \|\mathbf{x}(\mathbf{F}_0, t) - \mathbf{H}_d v(\mathbf{F}, t)\|_2^2 \\ &= \sum_{j=1}^n \|x_j(\mathbf{F}_0, t) - H_{dj}v(\mathbf{F}, t)\|_2^2 \\ &= \sum_{j=1}^n \|x_j(\mathbf{F}_0, t) - H_{dj}u(\mathbf{F}_0, t) - H_{dj}\mathbf{F}\mathbf{x}(\mathbf{F}_0, t)\|_2^2 \end{aligned} \quad (2.12)$$

(2.12) 式のノルム内部の右辺第 1, 2 項及び 3 項をまとめ, それぞれ  $\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\Gamma}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{W}$  を用いて定義すると (2.13) 式と表せる。ただし  $N$  はデータ数を表す。また, 式中の  $\bullet(\mathbf{F}_0, i)$  は,  $i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, N$ ) 番目の時系列データを表す。

$$\boldsymbol{\gamma}_j = \begin{bmatrix} x_j(\mathbf{F}_0, 1) - H_{dj}u(\mathbf{F}_0, 1) \\ \vdots \\ x_j(\mathbf{F}_0, i) - H_{dj}u(\mathbf{F}_0, i) \\ \vdots \\ x_j(\mathbf{F}_0, N) - H_{dj}u(\mathbf{F}_0, N) \end{bmatrix} \in R^{N \times 1}$$

$$\boldsymbol{w}_j = \begin{bmatrix} H_{dj}\boldsymbol{x}(\mathbf{F}_0, 1)^T \\ \vdots \\ H_{dj}\boldsymbol{x}(\mathbf{F}_0, i)^T \\ \vdots \\ H_{dj}\boldsymbol{x}(\mathbf{F}_0, N)^T \end{bmatrix} \in R^{N \times n}$$

$$\boldsymbol{\Gamma} = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{bmatrix}, \boldsymbol{W} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{w}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{w}_n \end{bmatrix}$$

$$J_c(\boldsymbol{F}) = (\boldsymbol{\Gamma} - \boldsymbol{W}\boldsymbol{F}^T)^T(\boldsymbol{\Gamma} - \boldsymbol{W}\boldsymbol{F}^T) \quad (2.13)$$

(2.13) 式より,  $J_c(\boldsymbol{F})$  を最小化する状態フィードバックゲイン  $\boldsymbol{F}$  は (2.14) 式で求められる。

$$\boldsymbol{F}^T = (\boldsymbol{W}^T\boldsymbol{W})^{-1}\boldsymbol{W}^T\boldsymbol{\Gamma} \quad (2.14)$$

このように (2.10) 式の評価関数  $J_c(\boldsymbol{F})$  に (2.8) 式で表される擬似外生信号を代入してもわかるように, 最適化計算には初期状態フィードバックゲイン, 実験して取得したデータ  $u(\mathbf{F}_0, t), \boldsymbol{x}(\mathbf{F}_0, t)$  のみが必要である。すなわち, 最初の入出力データを固定し, 所望の応答を状態フィードバックゲインに依存する形で調整することで新たに実験をすることなく, オフラインで (2.10) 式の評価関数を最小化するゲインを求めることができる。また, (2.13) 式は, 状態フィードバックゲイン  $\boldsymbol{F}$  に対して線形で定義されているため, 最小二乗法を用いて評価関数  $J_c(\boldsymbol{F})$  を最小にする状態フィードバックゲイン  $\boldsymbol{F}$  を求めることができる。

### 2.2.3 状態フィードバックゲイン調整法の手順

この直接調整法は、以下の 3 つの手順により所望の特性を実現する状態フィードバックゲイン  $\mathbf{F}$  を得る。

**Step1** 初期入出力データの取得

ノミナルパラメータ  $\mathbf{A}_n$ ,  $\mathbf{B}_n$  より設計された初期状態フィードバックゲイン  $\mathbf{F}_0$  を適用し、初期データ  $u(\mathbf{F}_0, t)$ ,  $\mathbf{x}(\mathbf{F}_0, t)$  を取得する。

**Step2** 擬似外生信号  $v(\mathbf{F}, t)$  の生成

$$v(\mathbf{F}, t) = u(\mathbf{F}_0, t) + \mathbf{F}\mathbf{x}(\mathbf{F}_0, t)$$

**Step3** 評価関数  $J_c(\mathbf{F})$  の最小化

$$J_c(\mathbf{F}) = \|(H(\mathbf{F}) - H_d)v(\mathbf{F}, t)\|_2^2$$

以上の 3 つの手順を行うことにより、所望の特性に近い特性を実現できる。

## 2.3 状態フィードバックゲイン調整法の問題点

先程までに述べた文献 [3] は、所望の状態量の応答と実際の状態量との差を平均的に最小化することのみ考慮しており、閉ループシステムの安定性は理論的に考慮されていない。そのため、調整後の状態フィードバックゲインを適用した閉ループシステムが不安定化する恐れがある。ただし、安定な伝達関数との差を平均的に最小化しているという意味で暗に閉ループシステムの安定性を考慮している。

そこで、次章では状態フィードバックゲイン調整時に評価関数に対して文献 [4] の手法に基づいて小ゲイン定理に基づく安定制約を提案し、調整後の状態フィードバックゲインを適用した閉ループシステムの安定性を保証する。

## 第3章 安定性を考慮した状態フィードバックゲイン調整法

本章では、小ゲイン定理を状態フィードバックゲイン調整法に適用し、調整後の状態フィードバックゲインを適用した閉ループシステムの安定化を図る。また、データのみを用いて安定制約を記述するために、オリジナルのアイデアを1つ用いる。

### 3.1 従来の状態フィードバックゲイン調整法

前章の状態フィードバックゲイン調整法は、初期状態フィードバックゲイン  $F_0$  がモデル化誤差を有するノミナルモデルより設計され、所望の特性が得られなかったとき、その状態フィードバックゲインを再調整することで所望の特性に近い特性を実現できる。さらに、調整前にある程度の知見があり安定性を陽に考慮していない応答誤差を最小化の問題(暗には考慮している)を解くだけでも閉ループシステムが不安定化しないことを前提としていた。しかし、非線形特性の未考慮、制御対象の変動等により、調整前に十分な知見が得られるとは限らないため、調整した状態フィードバックゲインによって閉ループシステムが不安定化する恐れがある。このような問題に対し、データ駆動型制御器設計において、文献[4]にて安定性を考慮した制御器設計法が提案されている。この安定制約を状態フィードバックゲイン調整法に適用し、安定性を考慮した状態フィードバックゲイン調整法を提案する。

### 3.2 小ゲイン定理に基づく安定判別法

従来手法は応答誤差の平均的な最小化のみを考慮している。また、実際の制御対象の数式モデルを用いることができないため、調整した状態フィードバックゲインを適用した閉ループシステムが安定化しているかどうかは実際に実装するまでわからない。そこで文献[4]に用いられている小ゲイン定理に基づく安定制約を状態フィードバックゲイン調整法に適用することで、閉ループシステムの安定性を保証しながら状態フィードバックゲインの調整が可能となる。

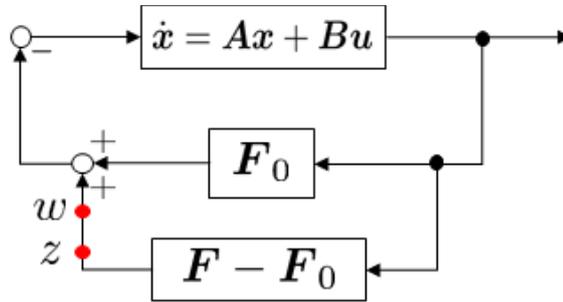


図 3.1: 初期状態フィードバックゲインを用いた閉ループシステム

ここで、調整された状態フィードバックゲイン  $F$  と  $\dot{x} = Ax + Bu$  のブロックから構成される閉ループシステムの安定条件について考える。このとき、閉ループシステムは初期状態フィードバックゲイン  $F_0$  を用いて図 3.1 のように表現できる。文献 [4] では小ゲイン定理を適用するために参照モデルを実現する理想制御器を導入しているが、データを用いた状態フィードバックゲイン調整法では、極配置法等を用いて設計した初期状態フィードバックゲイン  $F_0$  を適用した閉ループシステムは必ず安定化している条件のもと、状態フィードバックゲインの再調整が行われている。そのため理想的な状態フィードバックゲインを導入する必要は無い。図 3.1 で示されるブロック線図は、初期状態フィードバックゲインを用いた安定な閉ループシステムに  $F - F_0$  の加法的な状態フィードバックゲインの変動があるとみなせば、加法的変動に対するロバスト安定化問題と考えられる。このとき、図 3.1 における入力  $w$  から出力  $z$  までの一巡伝達関数を考えたとき、閉ループシステムの安定性は一巡伝達関数の  $H_\infty$  ノルムが 1 未満であれば、小ゲイン定理の十分条件により保証される。

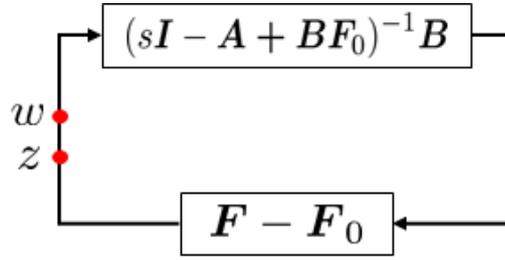
まず、数式モデルを用いて一巡伝達関数を図 3.1 より導出し、データを用いた安定制約に利用することを考える。図 3.1 の  $F - F_0$  の入力を  $b$ 、出力を  $a$  とすると状態方程式は (3.1), (3.2) 式となる。

$$\dot{b} = Ab + Bu \quad (3.1)$$

$$u = -F_0 b - a \quad (3.2)$$

(3.1) 式に (3.2) 式を代入し、ラプラス変換を行うと (3.3) 式となる。

$$\begin{aligned} \dot{b} &= Ab - B(F_0 b + a) \\ sb &= Ab - Ba - BF_0 b \end{aligned} \quad (3.3)$$


 図 3.2:  $w$  から  $z$  までの一巡伝達関数

(3.3) 式を整理すると (3.4) 式となる。

$$\begin{aligned}
 (sI - A + BF_0)b &= -Ba \\
 b &= -(sI - A + BF_0)^{-1}Ba \\
 &= -H(F_0)a
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

よって, (3.4) 式より図 3.1 は図 3.2 のように書き直すことができ,  $w$  から  $z$  までの一巡伝達関数  $T(\mathbf{F})$  を (3.5) 式と定義する。ここで,  $T(\mathbf{F})$  の  $H_\infty$  ノルムを  $\zeta(\mathbf{F})$  とする。このとき, 閉ループシステムが安定であるための十分条件は, 小ゲイン定理により (3.6) 式となる。

$$T(\mathbf{F}, s) = (\mathbf{F} - \mathbf{F}_0)\mathbf{H}(\mathbf{F}_0) \tag{3.5}$$

$$\zeta(\mathbf{F}, s) = \|T(\mathbf{F}, s)\|_\infty < 1 \tag{3.6}$$

しかし, (3.6) 式には制御対象のパラメータ  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  を含んでおり, データ駆動型制御器設計法の考え方では制御対象のパラメータ  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  を利用できない。そのため, 利用可能な制御対象の入出力データから (3.6) 式を評価する必要がある。そこで制御対象の入出力データを用いて, スペクトル解析法により  $T(\mathbf{F}, s)$  の周波数特性を推定する。ただし, スペクトル解析法を用いるには推定する一巡伝達関数の入出力データが必要となるため, 一巡伝達関数の入出力データを導出する。

### 3.2.1 一巡伝達関数の入出力データ導出

本節がオリジナルアイデアである。

入力  $w$  から出力  $z$  までの一巡伝達関数  $T(\mathbf{F}, s)$  を利用可能なデータ  $v(\mathbf{F}, t)$ ,  $u(\mathbf{F}_0, t)$ ,  $x(\mathbf{F}_0, t)$  で表現することを考える。まず, 図 3.3 より, 入力  $v$  から状態量  $x$  までの伝達

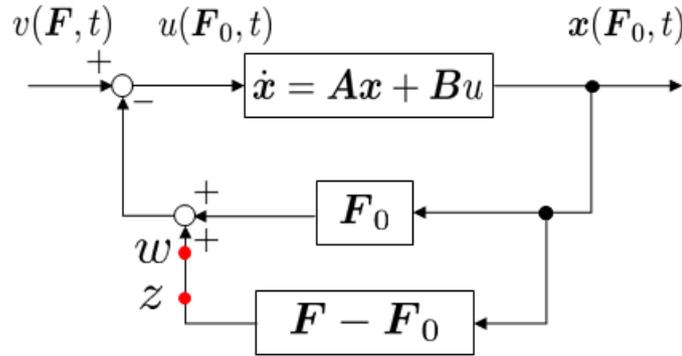


図 3.3: 一巡伝達関数の入出力データ

関数は簡単な計算により (3.7) 式と表すことができる。

$$\mathbf{G}_{xv} = (s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{F}_0)^{-1}\mathbf{B} \quad (3.7)$$

また,  $\mathbf{G}_{xv}$  に入力  $v(\mathbf{F}_0, t)$  を印加したとき,  $\mathbf{x}(\mathbf{F}_0, t)$  が出力されることは自明な関係である。ここで,  $T(\mathbf{F}, s)$  と  $\mathbf{G}_{xv}$  の間には (3.8) 式の関係がある。

$$T(\mathbf{F}, s) = (\mathbf{F} - \mathbf{F}_0)\mathbf{G}_{xv} \quad (3.8)$$

$v(\mathbf{F}_0, t)$  と  $\mathbf{x}(\mathbf{F}_0, t)$  の入出力関係を用いると, 一巡伝達関数  $T(\mathbf{F}, s)$  に入力として  $v(\mathbf{F}_0, t)$  を印加したとき,  $(\mathbf{F} - \mathbf{F}_0)\mathbf{x}(\mathbf{F}_0, t)$  が出力される。つまり, 一巡伝達関数の入力を  $v(\mathbf{F}_0, t)$ , 出力を  $(\mathbf{F} - \mathbf{F}_0)\mathbf{x}(\mathbf{F}_0, t)$  とし, スペクトル解析法を用いることで  $T(\mathbf{F}, s)$  を推定できる。すなわち,

$$\begin{cases} w(t) = v(\mathbf{F}_0, t) \\ z(\mathbf{F}, t) = (\mathbf{F} - \mathbf{F}_0)\mathbf{x}(\mathbf{F}_0, t) \end{cases} \quad (3.9)$$

を考えればよい。

このように入出力データを求めることで2つの利点がある。まず, この入出力データは, 閉ループシステムの初期入出力データおよび初期状態フィードバックゲイン, 設計パラメータより構成されており, 安定性を考慮するために新たに実験を行う必要はない。さらに, (3.9) 式の  $z(\mathbf{F}, t)$  が状態フィードバックゲインに対して線形で定義されていることにより, 安定制約を線形な問題として記述することができる。

次にスペクトル解析法<sup>[5]</sup>を用いて一巡伝達関数を推定する。

### 3.2.2 スペクトル解析法による一巡伝達関数 $T(\mathbf{F})$ の推定

(3.9) 式で表される入力  $w(t)$ , 出力  $z(\mathbf{F}, t)$  を用いて, 一巡伝達関数の推定値  $\hat{T}(\mathbf{F}, j\omega_k)$  は文献 [5] より, スペクトル解析法を用いて (3.10) 式のように計算できることが知られ

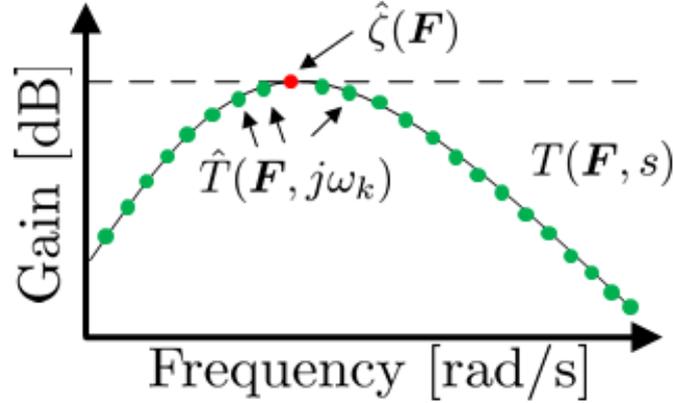


図 3.4: スペクトル推定の概念図

ている。

$$\hat{T}(\mathbf{F}, j\omega_k) = \frac{\hat{\Phi}_{wz}(\mathbf{F}, j\omega_k)}{\hat{\Phi}_w(j\omega_k)} \quad (3.10)$$

$$\hat{\zeta}(\mathbf{F}) = \max_{\{j\omega_k | \hat{\Phi}_w(j\omega_k) \neq 0\}} \left| \frac{\hat{\Phi}_{wz}(\mathbf{F}, j\omega_k)}{\hat{\Phi}_w(j\omega_k)} \right| < 1 \quad (3.11)$$

小ゲイン定理より, (3.11) 式の制約を満たすことで, 閉ループシステムの安定性を保証できる。ただし,  $\omega_k = 2\pi k / (N_h \times T_s)$ ,  $k = 0, \dots, [(N_h - 1)/2]$  であり,  $T_s$  はサンプリングタイム,  $N_h$  は入力信号の 1 周期のデータ数である。(3.10) 式中の  $\hat{\Phi}_w(j\omega_k)$  は入力  $w(t)$  のパワースペクトル密度の推定値 (3.12) 式,  $\hat{\Phi}_{wz}(\mathbf{F}, j\omega_k)$  は入力  $w(t)$  と出力  $z(\mathbf{F}, t)$  のパワースクロスペクトル密度の推定値 (3.13) 式を表している。

$$\hat{\Phi}_w(j\omega_k) = \sum_{\tau=0}^{N-1} \hat{R}_w(\tau) e^{-j\tau\omega_k} \quad (3.12)$$

$$\hat{\Phi}_{wz}(\mathbf{F}, j\omega_k) = \sum_{\tau=0}^{N-1} \hat{R}_{wz}(\mathbf{F}, \tau) e^{-j\tau\omega_k} \quad (3.13)$$

(3.12) 式は, (3.14) 式で表される入力  $w(t)$  の自己相関関数  $\hat{R}_w(\tau)$  を離散フーリエ変換していることを表している。また, (3.13) 式は, (3.15) 式で表される入力  $w(t)$  と出力  $z(\mathbf{F}, t)$  の相互相関関数  $\hat{R}_{wz}(\mathbf{F}, \tau)$  を離散フーリエ変換していることを表している。

$$\hat{R}_w(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N w(t-\tau)w(t) \quad (3.14)$$

$$\hat{R}_{wz}(\mathbf{F}, \tau) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N w(t-\tau)z(\mathbf{F}, t) \quad (3.15)$$

また、一巡伝達関数の入力  $w(\mathbf{F}, t)$  は任意の入力信号  $v(t)$  と等価である。そのため、初期出力  $\mathbf{x}(\mathbf{F}_0)$  に観測雑音が重畳したとしても、スペクトル推定時に  $w(\mathbf{F}, t)$  と  $z(\mathbf{F}, t)$  の相互相関関数をとることで、その影響を抑制しながら推定が行える。

以上より、スペクトル推定により推定された一巡伝達関数  $\hat{T}(\mathbf{F}, j\omega_k)$  を用いることでデータのみを用いて安定制約を (3.11) 式と記述でき、(3.11) 式を満たすような状態フィードバックゲイン  $\mathbf{F}$  を (2.10) 式の評価関数を最小化するように再調整することで閉ループシステムの安定性を保証できる。

### 3.3 安定性を考慮した調整法

従来の調整法<sup>[3]</sup> は、安定な伝達関数と各状態量との差を平均的に最小化することで閉ループシステムの安定性を暗に考慮しており、取得可能な状態量が多くなればなるほど調整後の閉ループシステムは安定化されることが期待される。しかし、すべての状態量に対し所望の特性との差を平均的に最小化しているため、その状態量すべてを設計者の望む特性へと近づけることは困難である。例えばある状態量1つのみ、所望の特性へ近づけることを設計者が望むとする。そのとき、(2.10) 式で表現されている評価関数にある1つの状態量のみを考慮するように変換すれば、ある1つの状態量を所望の特性へと近づけることができる。しかしながら、安定性を保証しないままでは、評価していない状態量が所望の特性から大きくずれることが原因で閉ループシステムが不安定化する恐れが高くなってしまう。そのため、従来の調整法は、閉ループシステムの安定性の観点から、限られた状況(全ての状態量を平均的に所望の特性へと近づけること)のみにしか対応できなかった。

対して、安定性を理論的に考慮した調整法は、状態フィードバックゲイン  $\mathbf{F}$  と  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$  のブロックから構成される閉ループシステムを必ず安定化させる。そのため、任意の状態量のみを所望の特性へと近づけるように調整しても、閉ループシステムが不安定化することは起こりえない。

そこで、次章では、簡単な変換により、従来の調整法の自由度をさらに上げられることを示し、小ゲイン定理の保守性について述べる。

## 第4章 状態フィードバックゲインの調整法の拡張と小ゲイン定理の問題点

本章では、前章で提案した安定制約を用いて文献 [3] の状態フィードバックゲインの調整法を拡張し、さらに自由度の高い調整法を提案する。さらに、小ゲイン定理に基づく安定制約の問題点をシミュレーションにより確認する。

### 4.1 状態フィードバックゲイン調整法の拡張

従来の調整法は、安定な伝達関数と状態量との差を平均的に最小化することで安定性を暗に考慮していたため、限られた状況のみにしか対応できなかった。対して、前章で提案した安定性を理論的に考慮した調整法は、状態フィードバックゲイン  $\mathbf{F}$  と  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$  のブロックから構成される閉ループシステムを必ず安定化させる。そのため、特定の状態量のみを所望の特性へと近づけるように調整しても、閉ループシステムが不安定化することは起こりえない。従来の調整法に基づき、状態フィードバックゲインの調整法を拡張する。

ただし、読みやすさのために第2章と同様である条件、および式についても再度改めて記述する。

#### 4.1.1 問題設定

図 4.1 の閉ループシステムを考える。制御対象は、(4.1) 式で表される厳密にプロパーな  $n$  次の線形時不変システムを取り扱う。ただし、すべての状態量は取得可能であり、初期状態は零であるとする。

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \\ y = \mathbf{Cx} \end{cases} \quad (4.1)$$

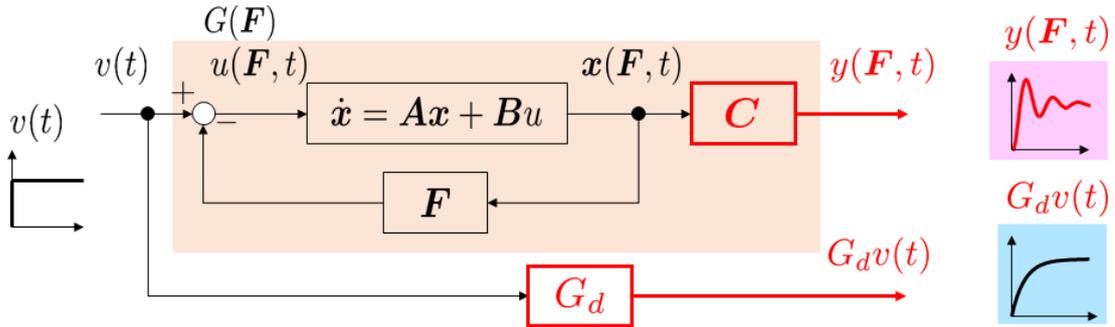


図 4.1: 拡張したマッチング問題

この制御対象のパラメータ  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  は未知, ノミナルパラメータ  $\mathbf{A}_n$ ,  $\mathbf{B}_n$  は既知である。また, 状態量は  $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n]^T$  である。そして, 制御対象は SISO システムであるため, そのいずれか 1 つ, 例えば  $x_1$  が出力  $y$  となるように選ぶ。このとき, 出力行列  $\mathbf{C}$  は (4.2) 式となる。

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}_{1 \times (n-1)} \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

(4.1) 式の制御対象に (4.3) 式の状態フィードバックを施した閉ループシステムの特性を (4.4) 式とし, 入力  $v$  は (4.4) 式を評価するために任意に印加する信号である。なお, 式中の  $\bullet(\mathbf{F})$  は状態フィードバックゲイン  $\mathbf{F}$  の関数であることを表す。

$$u(\mathbf{F}) = -\mathbf{F}\mathbf{x} + v \quad (4.3)$$

$$G(\mathbf{F}, s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{F})^{-1}\mathbf{B} \quad (4.4)$$

そして, 外部からの入力  $v$  から出力  $y$  までの所望の閉ループ特性を (4.5) 式と定義する。

$$G_d(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_n + \mathbf{B}_n\mathbf{F}_0)^{-1}\mathbf{B}_n \quad (4.5)$$

(4.5) 式中の  $\mathbf{F}_0$  は, ノミナルパラメータ  $\mathbf{A}_n$ ,  $\mathbf{B}_n$  に対して極配置法などを用いて  $G_d(s)$  を実現するように設計した初期状態フィードバックゲインである。ただし,  $\mathbf{A}_n$ ,  $\mathbf{B}_n$  より設計した  $\mathbf{F}_0$  を適用した図 4.1 の閉ループシステムは必ず安定とし,  $\mathbf{F}_0$  を用い,  $v(t)$  を与えたときに得られるデータを  $u(\mathbf{F}_0, t)$ ,  $\mathbf{x}(\mathbf{F}_0, t)$ ,  $y(\mathbf{F}_0, t)$  と表す。

一般的にノミナルモデルと実際の制御対象の間には不確かさがあり,  $v(t)$  に対する初期出力  $y(\mathbf{F}_0, t)$  は  $y(\mathbf{F}_0, t) \neq G_d(s)v(t)$  となる。そこで  $u(\mathbf{F}_0, t)$ ,  $\mathbf{x}(\mathbf{F}_0, t)$ ,  $y(\mathbf{F}_0, t)$  を直接用いて  $y(\mathbf{F}, t)$  が  $G_d(s)v(t)$  に近づくように状態フィードバックゲイン  $\mathbf{F}$  をデータ駆動型制御器設計法の 1 つである FRIT の考え方を用いて再調整する方法を与える。

これ以下では記述がない限り,  $G_d(s)$ ,  $G(\mathbf{F}, s)$  をそれぞれ  $G_d$ ,  $G(\mathbf{F})$  と省略して記述する。

#### 4.1.2 特定の出力を考慮した状態フィードバックゲインの直接調整法

本提案手法の直接調整法は, 以下の 3 つの手順により所望の出力特性を実現する状態フィードバックゲイン  $\mathbf{F}$  を得る。

##### Step1 初期入出力データの取得

ノミナルパラメータ  $\mathbf{A}_n$ ,  $\mathbf{B}_n$  より設計された初期状態フィードバックゲイン  $\mathbf{F}_0$  を適用し, 初期データ  $u(\mathbf{F}_0, t)$ ,  $\mathbf{x}(\mathbf{F}_0, t)$ ,  $y(\mathbf{F}_0, t)$  を取得する。

##### Step2 擬似外生信号 $v(\mathbf{F}, t)$ の生成

(4.6) 式はある状態フィードバックゲイン  $\mathbf{F}$  を用いたとき, 初期の入出力データを保つために擬似的に印加すべき外生信号である。

$$v(\mathbf{F}, t) = u(\mathbf{F}_0, t) + \mathbf{F}\mathbf{x}(\mathbf{F}_0, t) \quad (4.6)$$

##### Step3 評価関数 $J(\mathbf{F})$ の最小化

評価関数  $J(\mathbf{F})$  は (4.7) 式で定義され,  $J(\mathbf{F})$  の最小化は出力応答と所望の応答との二乗和の最小化と等価である。

$$J(\mathbf{F}) = \|y(\mathbf{F}_0, t) - G_d v(\mathbf{F}, t)\|_2^2 \quad (4.7)$$

ここで (4.7) 式の評価関数  $J(\mathbf{F})$  は (4.8) 式と書き直すこともできる。

$$J(\mathbf{F}) = \|(G(\mathbf{F}) - G_d)v(\mathbf{F}, t)\|_2^2 \quad (4.8)$$

(4.8) 式より, 評価関数を 0 にすることは, 状態フィードバックゲインを適用した閉ループシステムの特性和設計者の望む特性が一致することと等価となる。ここで, 評価関数  $J(\mathbf{F})$  は (4.6) 式を用いて (4.9) 式と表される。

$$\begin{aligned} J(\mathbf{F}) &= \|y(\mathbf{F}_0, t) - G_d v(\mathbf{F}, t)\|_2^2 \\ &= \|y(\mathbf{F}_0, t) - G_d u(\mathbf{F}_0, t) - \\ &\quad G_d \mathbf{F} \mathbf{x}(\mathbf{F}_0, t)\|_2^2 \end{aligned} \quad (4.9)$$

(4.9) 式のノルム内部の右辺第 1, 2 項および 3 項をまとめ, それぞれ  $\alpha$ ,  $\beta$  で定義すると (4.10) 式と表せる。

$$\alpha = \begin{bmatrix} y(\mathbf{F}_0, 1) - G_d u(\mathbf{F}_0, 1) \\ \vdots \\ y(\mathbf{F}_0, i) - G_d u(\mathbf{F}_0, i) \\ \vdots \\ y(\mathbf{F}_0, N) - G_d u(\mathbf{F}_0, N) \end{bmatrix}$$

$$\beta = \begin{bmatrix} G_d \mathbf{x}(\mathbf{F}_0, 1)^T \\ \vdots \\ G_d \mathbf{x}(\mathbf{F}_0, j)^T \\ \vdots \\ G_d \mathbf{x}(\mathbf{F}_0, N)^T \end{bmatrix}$$

$$J(\mathbf{F}) = (\alpha - \beta \mathbf{F}^T)^T (\alpha - \beta \mathbf{F}^T) \quad (4.10)$$

(4.10) 式より,  $J(\mathbf{F})$  を最小化する状態フィードバックゲイン  $\mathbf{F}$  は最小二乗法より (4.11) 式で求められる。

$$\mathbf{F}^T = (\beta^T \beta)^{-1} \beta^T \alpha \quad (4.11)$$

(4.10) 式のように, 最適化計算には初期状態フィードバックゲインを適用して取得したデータ  $u(\mathbf{F}_0, t)$ ,  $\mathbf{x}(\mathbf{F}_0, t)$ ,  $y(\mathbf{F}_0, t)$  のみが必要であることがわかる。すなわち, 最初の入出力データを固定し, オフラインで (4.7) 式の評価関数を最小化する状態フィードバックゲイン  $\mathbf{F}$  を求めることができる。

以上の手順より, 評価関数を最小化する状態フィードバックゲイン  $\mathbf{F}$  を求めることで, 所望の出力特性を実現する。

拡張した調整法と文献 [3] には, 出力である状態量の 1 つのみを考慮するか, 状態量すべてを考慮するかの違いがある。文献 [3] では, 各状態量ごとに所望の特性を設定し, その差を平均的に最小化することで, 閉ループシステムの安定性を暗に考慮していた。それに対して, 出力のみに所望の特性を設定した調整法は, 出力以外の状態量については考慮しておらず, それら状態量が所望の特性からずれることにより閉ループシステムが不安定化する恐れがあるが, 前章で提案した小ゲイン定理に基づく安定制約を利用することで不安定化を必ず回避できる。

このように, 従来手法は, 安定性を暗に考慮するために調整の自由度を制限せざるを得なかったが, 安定性を陽に保証することでさらに優れた調整法へと簡単に拡張できる。

## 4.2 シミュレーション

不安定極を有する倒立 2 輪ロボットの数式モデルを用いてシミュレーションを行う。シミュレーションでは、安定制約の有効性を確かめるため、観測雑音のない理想状態を考える。そして、ノミナルモデルに不確かさが存在し、所望の特性が得られない場合、状態フィードバックゲインの再調整を従来手法を用いたとき、および (4.7) 式を最小化したときの比較を行う。ここでは、文献 [3] を従来手法、(4.7) 式を最小化したときを提案手法と記述する。

本節では、小ゲイン定理の保守性が原因で所望の特性が得られないことを示す。

### 4.2.1 シミュレーション条件

不確かさを有するノミナルな数式モデルを (4.12) 式で表す。(4.12) 式は倒立二輪ロボットの運動方程式を解くことにより導出した。状態量  $\mathbf{x} = [\dot{\theta} \ \theta \ \dot{\phi} \ \phi]^T$  とし、制御対象の真の特性を表す数式モデルを (4.13) 式に示す。サンプリングタイム 5 [ms]、入力として 15 段の M 系列信号を 2 周期印加した。また初期状態フィードバックゲインをノミナルモデルから試行錯誤的に  $\mathbf{F}_0 = [-5.98 \ -50.5 \ -1.53 \ -3.21]$  と設計し、出力行列  $\mathbf{C} = [1 \ 0 \ 0 \ 0]$  とする。ただし、 $\theta$ 、 $\phi$  はそれぞれ本体の角度、タイヤの回転角度であり、 $\dot{\theta}$ 、 $\dot{\phi}$  はそれぞれの時間微分を表す。

$$\dot{\mathbf{x}}_d = \begin{bmatrix} -0.0057 & 164 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.013 & -378 & -13 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_d + \begin{bmatrix} -13 \\ 0 \\ 42 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad (4.12)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -0.0061 & 156 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.017 & -432 & -20 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} -16 \\ 0 \\ 64 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad (4.13)$$

### 4.2.2 シミュレーション結果

表 4.1, 図 4.2 にシミュレーション結果を示す。ただし、表 4.1 は、調整手法と安定制約の有無、一巡伝達関数の無限大ノルム、閉ループシステムの極、閉ループシステムにステップ外乱を印加したときの応答との二乗誤差を表している。また、表中の × は、

表 4.1: シミュレーション結果

	安定制約	$\zeta(\mathbf{F})$	閉ループシステムの極	二乗誤差
調整無し		0	$-4.75 \pm 18.0i, -4.82 \pm 2.0i$	1.6746
従来手法	無し	1.930	$-31.2, -3.4 \pm 10.3i, -0.062$	0.31
提案手法	無し	1.563	$-25.3, -4.1 \pm 11.0i, \mathbf{0.765}$	×
提案手法	小ゲイン定理	0.999	$-12.8, -6.1 \pm 12.4i, -1.2$	0.44

調整後の状態フィードバックゲインを適用した閉ループシステムが不安定化し、データ取得が不可能となったことを表す。図 4.2 は、推定した一巡伝達関数のベクトル軌跡を表しており、図中に示されているのは、提案手法における安定制約が無い場合と小ゲイン定理を用いたときの結果である。

まず、閉ループシステムの安定性について述べる。シミュレーション結果より、安定制約の無い提案手法は閉ループシステムが不安定化しているが、従来手法、小ゲイン定理を用いた提案手法は、不安定化を回避している。従来手法では、無限大ノルムは 1.93 と 1 を大きく超えているが不安定化していない。これは、従来手法が安定な伝達関数と実際の状態量との差を平均的に最小化していることに起因している。対して、安定制約の無い提案手法は、ある 1 つの安定な伝達関数とそれに対応する状態量との差を最小化しているため、他の状態量が所望の特性からずれることで閉ループシステムが不安定化していると考えられる。そして、小ゲイン定理を用いることで閉ループシステムの安定性が保証されていることがわかる。

次に、従来手法と小ゲイン定理を用いた提案手法の二乗誤差を比較する。表 4.1 の二乗誤差より、小ゲイン定理を用いた提案手法は所望の出力に対して十分な追従性が得られていない。これは小ゲイン定理が安定性の十分条件である (図 4.2 に示すように無限大ノルムが 1 未満に抑えられる) ためであることに起因すると考えられる。

以上より、本章までに提案した小ゲイン定理に基づく安定制約では、安定性の十分条件であるため十分な追従性を実現が困難である。次章で小ゲイン定理の保守性を低減するための新しい安定制約の提案を行う。

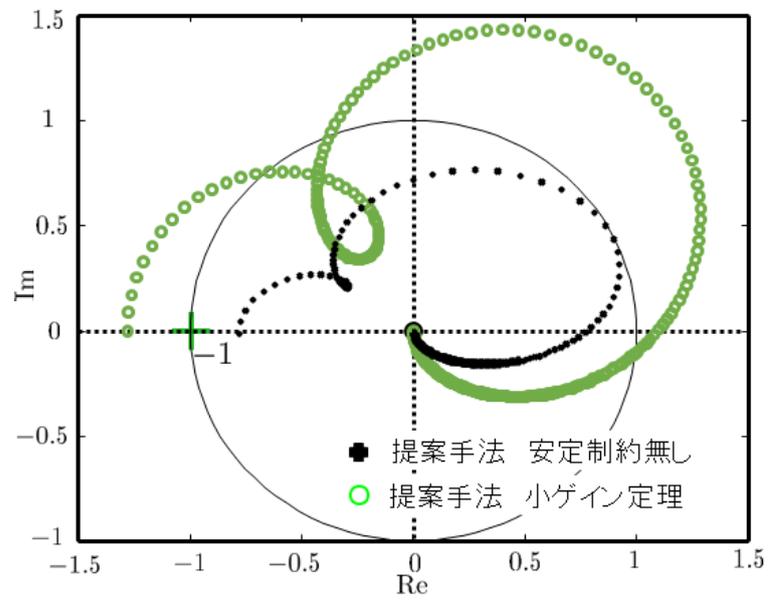


図 4.2: 一巡伝達関数のベクトル軌跡

# 第5章 保守性を低減する安定制約の提案

本章では、小ゲイン定理の保守性を低減する安定制約の提案を2つのオリジナルアイデアを用いて行う。そのアイデアの2つ目に関しては、数式と図それぞれを用いて述べ、小ゲイン定理との違いも与える。さらにシミュレーションにより有効性を示す。

## 5.1 ナイキスト軌跡に基づく安定制約の提案

前節までに述べた小ゲイン定理に基づく安定制約は安定性の十分条件であるため保守性が生じ、所望の特性を得られない恐れがあった。そこで保守性を低減するためにナイキスト軌跡に基づいた安定制約を2つのオリジナルアイデアを用いて与える。

### 5.1.1 ベースとなる安定制約の考え方

本節がオリジナルアイデアの1つ目である。

図 2.3 の閉ループシステムの一巡伝達関数  $L(\mathbf{F}, s)$  は、

$$L(\mathbf{F}, s) = \mathbf{F}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} \quad (5.1)$$

と表される。初期状態フィードバックゲイン  $\mathbf{F}_0$  は少なくとも図 2.3 の閉ループシステムを安定化するので (5.2) 式を満たしながら状態フィードバックゲイン  $\mathbf{F}_i$  を更新すれば閉ループシステムの安定性は維持される。

$$|S_L(\mathbf{F}_{i-1}, j\omega)|^{-1} > |L(\mathbf{F}_{i-1}, j\omega) - L(\mathbf{F}_i, j\omega)| \quad \forall \omega \quad (5.2)$$

ここで、 $S_L$  は (5.3) 式で定義される感度関数である。

$$\begin{aligned} S_L(\mathbf{F}, s) &= (1 + L(\mathbf{F}, s))^{-1} \\ &= (1 + \mathbf{F}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B})^{-1} \end{aligned} \quad (5.3)$$

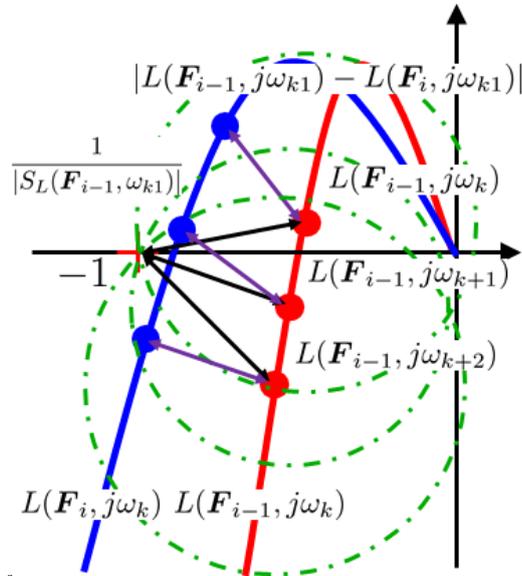


図 5.1: ベースとなる安定制約の図的解釈

(5.2) 式の左辺は、各周波数点における  $L(\mathbf{F}_{i-1}, j\omega)$  のベクトル軌跡と臨界点との距離を表している。右辺は、 $i-1$  回目と  $i$  回目の更新の前後で生じるベクトル軌跡  $L(\mathbf{F}_{i-1}, \omega)$  と  $L(\mathbf{F}_i, \omega)$  の各周波数点ごとの変化量を表している。(5.2) 式を満たすとき、つまりベクトル軌跡の変化量が各周波数点ごとで感度関数の逆数  $|S_L(\mathbf{F}_{i-1}, j\omega_k)|^{-1}$  よりも小さいとき、初期状態フィードバックゲインを適用した  $L(\mathbf{F}_0, s)$  と  $i$  回目に更新される状態フィードバックゲイン  $\mathbf{F}_i$  を適用した  $L(\mathbf{F}_i, s)$  のベクトル軌跡が臨界点を回る回数は必ず変化しない(図 5.1 参照)。それゆえ、更新される状態フィードバックゲイン  $\mathbf{F}_i$  が常に (5.2) 式を満たしていれば閉ループシステムの安定性は常に維持される。

しかしながら、有限のデータ長である実験データのみを利用する場合、以下の問題が発生する。理想的なデータであればスペクトル解析法により全ての周波数が推定できるため、(5.2) 式を満たすことで閉ループシステムの安定性を保証できるが実際の実験データは有限長である。そのため、全ての周波数情報を完全に推定することは困難となり、(5.2) 式では閉ループシステムの安定性を保証できない場合がある。特に積分器を含むとき、ベクトル軌跡  $L(\mathbf{F}, s)$  が無限遠点 ( $\omega = 0$ ) から描かれるとき、調整後の状態フィードバックゲインを用いた閉ループシステムが不安定する恐れがある。

ここで、図 5.2 を考える。図中の  $\omega_1$  は推定できる最低の周波数点を表している ( $\omega = 0$  を除く)。また、 $\mathbf{F}_0, \mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$  を適用した閉ループシステムは全て安定であり、 $L(\mathbf{F}_0, s), L(\mathbf{F}_1, s), L(\mathbf{F}_2, s)$  は、制御対象が積分器を有しており、図のように正の無限遠点から描かれるものと仮定する。 $\mathbf{F}_0$  は初期状態フィードバックゲインであり、 $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$  はそ

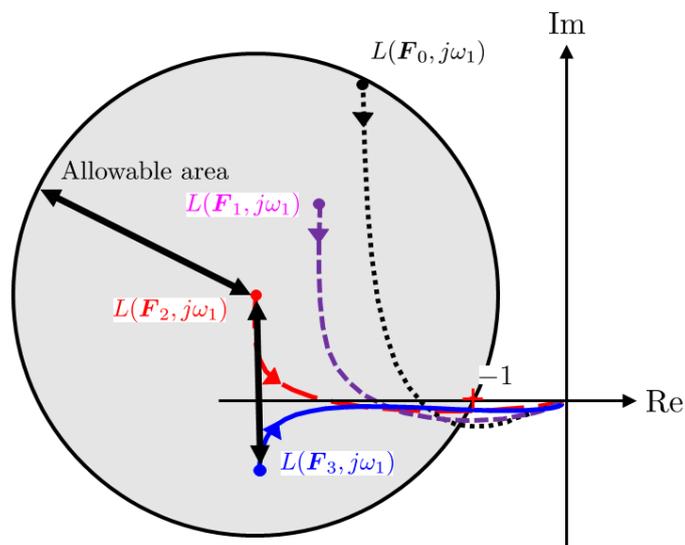


図 5.2: ベースとなる安定制約を用いたときの不安定化するケース

それぞれ  $F_0$ ,  $F_1$  に基づいて更新された状態フィードバックゲインである。同様に,  $F_3$  も  $F_2$  に基づいて更新された状態フィードバックゲインである。図 5.2 に示されているように, 3 回目の更新で得られたベクトル軌跡  $L(F_3, s)$  の臨界点を回る回数は, 初期状態フィードバックゲインを用いたのベクトル軌跡  $L(F_0, s)$  のときから変わっているように見える。しかしながら, ゼロ周波数点  $\omega = 0$  における周波数情報は未知であるため,  $F_3$  を適用した閉ループシステムの安定性を正確に評価するのは困難である。理想的には, スペクトル解析法により全ての周波数が推定できるが, 制御対象に積分器が含まれている場合, 実験データからゼロ周波数点を推定することは困難となるため, 正確に評価することが困難となってしまふ。たとえ, ゼロ周波数点が推定できたとしても, (5.2) 式の左辺は無限大となってしまふ。それゆえ, ゼロ周波数点における (5.2) 式の評価は不適切である。

この問題を解決する方法は, 2 つある。1 つ目は, サンプルングタイムを細かくする, データ数を増やすなど, スペクトル解析法の周波数推定刻みをより細かくする方法である。2 つ目は (5.2) 式を積分器を含まない新たな関数を定義することで, 積分器の影響を無くす方法である。1 つ目の方法は直接的な解決にならず, 制御対象や PC のスペックなどの物理的制約によっては, 制御自体が困難となり, 劣化や破壊の原因となる。そこで, 2 つ目の解決策に着目する。

### 5.1.2 積分器の影響を受けない安定制約への拡張

本節がオリジナルアイデアの 2 つ目である。

(5.2) 式は、制御対象が積分器を含む場合、安定性の評価が困難であった。そこで、積分器の影響を受けない安定制約へと (5.2) 式を拡張する。

ここで、 $S_L(\mathbf{F}, s)$  と (5.4) 式で定義する  $S_T(\mathbf{F}, s)$  の関係を考える。

$$\begin{aligned} S_T(\mathbf{F}, s) &= (1 + T(\mathbf{F}, s))^{-1} \\ &= (1 + (\mathbf{F} - \mathbf{F}_0)(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{F}_0)^{-1}\mathbf{B})^{-1} \end{aligned} \quad (5.4)$$

Doyle の表記法 [9] に従うと、 $S_L(\mathbf{F}, s)$  と  $S_T(\mathbf{F}, s)$  は

$$\begin{aligned} S_L(\mathbf{F}, s) &= \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{F} & 1 \end{array} \right]^{-1} \\ &= \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{F} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{F} & 1 \end{array} \right] \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} S_T(\mathbf{F}, s) &= \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{F}_0 & \mathbf{B} \\ \mathbf{F} - \mathbf{F}_0 & 1 \end{array} \right]^{-1} \\ &= \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{F} & \mathbf{B} \\ -(\mathbf{F} - \mathbf{F}_0) & 1 \end{array} \right] \end{aligned} \quad (5.6)$$

と表現できる。(5.5) 式と (5.6) 式より、 $S_L(\mathbf{F}, s)$  と  $S_T(\mathbf{F}, s)$  の  $\mathbf{A}$  行列はともに  $\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{F}$  を持つ。この関係を利用すると、図 3.1 の閉ループシステムの安定制約は (5.2) 式に相当する (5.7) 式で与えられる。

$$|(1 + T(\mathbf{F}_{i-1}, j\omega))^{-1}|^{-1} > |T(\mathbf{F}_{i-1}, j\omega) - T(\mathbf{F}_i, j\omega)| \quad \forall \omega \quad (5.7)$$

実験データのみを用いて、

$$\left| \left( 1 + \frac{\hat{\Phi}_{wz}(\mathbf{F}_{i-1}, j\omega_k)}{\hat{\Phi}_w(j\omega_k)} \right)^{-1} \right|^{-1} > \left| \frac{\hat{\Phi}_{wz}(\mathbf{F}_{i-1}, j\omega_k)}{\hat{\Phi}_w(j\omega_k)} - \frac{\hat{\Phi}_{wz}(\mathbf{F}_i, j\omega_k)}{\hat{\Phi}_w(j\omega_k)} \right| \quad \forall \omega_k \quad (5.8)$$

と表現できる。(5.8) 式の左辺は、各周波数点における臨界点と  $\hat{T}(\mathbf{F}_{i-1}, \omega_k)$  のベクトル軌跡との距離を表しており、右辺は各周波数点における  $\hat{T}(\mathbf{F}_{i-1}, \omega_k)$  と  $\hat{T}(\mathbf{F}_i, \omega_k)$  のベクトル軌跡の距離を表している。(5.8) 式より、閉ループシステムの安定性を保証するために  $L(\mathbf{F}, s)$  に代わり、 $T(\mathbf{F}, s)$  のベクトル軌跡を使えばよい。さらに (5.8) 式の左

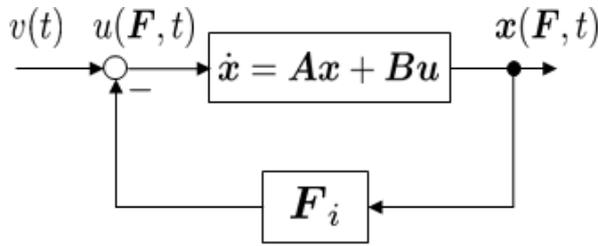


図 5.3: 安定性を考慮したい閉ループシステム

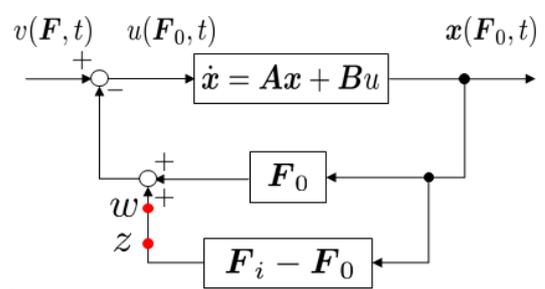


図 5.4: 図 5.3 の等価変換図

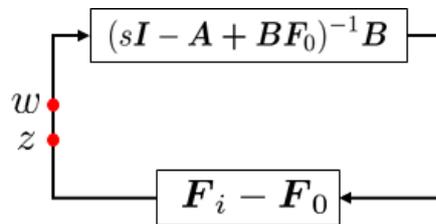


図 5.5: 図 5.4 の等価変換図

辺は既知定数，右辺は状態フィードバックゲイン  $\mathbf{F}$  に対して凸で記述されているため，凸制約として記述できる。

ここで，初期状態フィードバックゲインを適用した閉ループシステムは必ず安定であることから，一巡伝達関数の  $T(\mathbf{F}, s)$  は必ず積分器は有さない (状態フィードバック制御はすべての状態量を零へとする制御であるため，原点極は不安定とみなす)。そのため，いかなる制御対象を用いても  $T(\mathbf{F}, s)$  のベクトル軌跡は  $\omega = 0$  においては必ず実軸上の点から描かれる。よって，低周波領域の情報の欠如により閉ループシステムの安定性を保証できない問題を解決することが期待される。

以上より，(5.8) 式を満たすように (4.7) 式の評価関数  $J(\mathbf{F})$  を最小化するような状態フィードバックゲイン  $\mathbf{F}$  を繰り返し計算により求解することで，閉ループシステムの安定性を保証しながら所望の特性を実現する状態フィードバックゲイン  $\mathbf{F}$  を調整できる。

また，2つ目のオリジナルアイデアは図を用いて次のようにも考えられる。状態フィードバックゲイン  $\mathbf{F}$  と  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$  のブロックから構成される閉ループシステム (図 5.3) を再度考える。図 5.3 は初期状態フィードバックゲイン  $\mathbf{F}_0$  を用いて図 5.4 のように変換できる。また，図 5.4 の  $w$  から  $z$  までに着目すると図 5.5 のように変換できることを第 3 章で示した (再度図を載せておく)。このとき，図 5.5 は図 5.3 を等価変換したものである。つまり， $w$  から  $z$  までの閉ループシステムが安定であることは，本来安

定性を保証したい閉ループシステムも安定であることと等価である。それゆえ、図 5.3 の閉ループシステムの安定制約は図 5.5 の安定性を評価することで保証できる。

### 5.1.3 小ゲイン定理に基づく安定制約との違い

小ゲイン定理と (5.8) 式の安定制約の違いを述べる。小ゲイン定理は、図 5.3 をロバスト安定化問題と解釈し、一巡伝達関数  $T(\mathbf{F}, s)$  の無限大ノルムが 1 未満、言い換えれば、一巡伝達関数  $T(\mathbf{F}, s)$  のベクトル軌跡が全ての周波数で単位円内に存在することで閉ループシステムは安定となる。それに対して (5.8) 式の安定制約は、 $S_L(\mathbf{F}, s)$  と  $S_T(\mathbf{F}, s)$  の極が等価、図 5.5 が図 5.3 を等価変換したものであることに着目し、一巡伝達関数  $T(\mathbf{F}, s)$  のベクトル軌跡の臨界点を回る回数が初期状態フィードバックゲインを用いたときから変化しなければ、閉ループシステムは安定となる。

さらに、(5.8) 式を用いたとき、第 1 回目の更新を考えると、初期状態フィードバックゲインを用いたとき一巡伝達関数  $T(\mathbf{F}, s)$  のベクトル軌跡は必ず原点に存在する。つまり、全ての周波数で臨界点までの距離は 1 となる。それゆえ、第 1 回目の更新は、一巡伝達関数  $T(\mathbf{F}, s)$  のベクトル軌跡が単位円の中に存在すること (小ゲイン定理を用いたときと同じ解) になる。そして、その解を前回の解として更新を行っていく。

以上のことより、(5.8) 式を用いることで小ゲイン定理以上の解を選択できる。

## 5.2 シミュレーション

制御対象は、積分器を有する倒立 2 輪ロボットとしてシミュレーションを行う。シミュレーションでは、安定制約の有効性を確かめるため、観測雑音のない理想状態を考える。そして、ノミナルモデルに不確かさが存在し、所望の特性が得られない場合、状態フィードバックゲインの再調整を従来手法<sup>[3]</sup>を用いたとき、および (4.7) 式を最小化したときの比較を行う。ここでは、文献 [3] を従来手法、(4.7) 式を最小化したときを提案手法と記述する。

### 5.2.1 シミュレーション条件

シミュレーション条件は前章と同じであるが、分かりやすさのために再度記述する。

不確かさを有するノミナルな数式モデルを (5.9) 式で表す。(5.9) 式は倒立二輪ロボットの運動方程式を解くことにより導出した。状態量  $\mathbf{x} = [\dot{\theta} \ \theta \ \dot{\phi} \ \phi]^T$  とし、制御対

象の真の特性を表す数式モデルを (5.10) 式に示す。サンプリングタイム 5 [ms], 入力として 15 段の M 系列信号を 2 周期印加した。また初期状態フィードバックゲインをノミナルモデルから試行錯誤的に  $\mathbf{F}_0 = \begin{bmatrix} -5.98 & -50.5 & -1.53 & -3.21 \end{bmatrix}$  と設計し, 出力行列  $\mathbf{C} = [1 \ 0 \ 0 \ 0]$  とする。ただし,  $\theta$ ,  $\phi$  はそれぞれ本体の角度, タイヤの回転角度であり,  $\dot{\theta}$ ,  $\dot{\phi}$  はそれぞれの時間微分を表す。

$$\dot{\mathbf{x}}_d = \begin{bmatrix} -0.0057 & 164 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.013 & -378 & -13 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_d + \begin{bmatrix} -13 \\ 0 \\ 42 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad (5.9)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -0.0061 & 156 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.017 & -432 & -20 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} -16 \\ 0 \\ 64 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad (5.10)$$

### 5.2.2 シミュレーション結果

表 5.1, 5.2 および図 5.6, 5.7 にシミュレーション結果を示す。ただし, 表 5.1 は調整手法と安定制約の有無を表している。表 5.2 は, 一巡伝達関数の無限大ノルム, 閉ループシステムの極, 閉ループシステムにステップ外乱を印加したときの所望の出力応答との二乗誤差を表している。また, 表中の × は, 調整後の状態フィードバックゲインを適用した閉ループシステムが不安定化し, データ取得が不可能となったことを表す。図 5.6 は  $\hat{T}$  のベクトル軌跡, 図 5.7 は調整した閉ループシステムにステップ外乱を印加したときの応答波形を示す。

まず, 閉ループシステムの安定性について述べる。シミュレーション結果より, Case 4 は閉ループシステムが不安定化しているが, Case 5 は不安定化を回避している。実際に Case 4 では, 低周波領域の情報を十分に含んでいないため, 2 回目の状態フィードバックゲインの更新の時点で閉ループシステムが不安定化していた。対して同条件で Case 5 は閉ループシステムの安定性は, すべての更新で保たれている。この結果より, Case 5 は限られた情報でも良好な結果を得られるといえる。

次に, Case 1, Case 3, Case 5 を比較し, 保守性が低減されているか述べる。表 5.2 の二乗誤差, 図 5.7 より, Case 1 と比べ, Case 3 では小ゲイン定理の保守性により, 所望の出力に対して十分な追従性が得られていない。対して Case 5 では, Case 1 および Case 3 より良好な追従特性が得られている。表 5.2 の  $\zeta(\mathbf{F})$ , 図 5.6 からわかるように,

表 5.1: 調整方法

	調整法	安定制約
Case 0	無し	
Case 1	従来手法	無し
Case 2	提案手法	無し
Case 3	提案手法	(3.11) 式
Case 4	提案手法	(5.2) 式
Case 5	提案手法	(5.8) 式

表 5.2: シミュレーション結果

	$\zeta(\mathbf{F})$	閉ループシステムの極	二乗誤差
Case 0	0	$-4.75 \pm 18.0i, -4.82 \pm 2.0i$	1.6746
Case 1	1.930	$-31.2, -3.4 \pm 10.3i, -0.062$	0.31
Case 2	1.563	$-25.3, -4.1 \pm 11.0i, \mathbf{0.765}$	×
Case 3	0.999	$-12.8, -6.1 \pm 12.4i, -1.2$	0.44
Case 4	1.563	$-25.3, -4.1 \pm 11.0i, \mathbf{0.765}$	×
Case 5	1.555	$-24.3, -4.1 \pm 10.7i, -0.000029$	0.27

Case 3 では、解候補は一巡伝達関数のベクトル軌跡が単位円内に収まる範囲に制限されるが Case 5 であれば、一巡伝達関数のベクトル軌跡の臨界点を回る回数に変化しなければよいため、解候補は単位円内に限定されない。そのため、保守性が低減された結果が得られたと考えられる。

以上より、提案手法を用いることで所望の出力を実現する状態フィードバックゲインを閉ループシステムの安定性を考慮しながら調整可能であることが確かめられた。

しかし、この結果から (5.8) 式を用いたときに最も優れた結果が得られたように見えるが、(5.8) 式にはまだ問題点が残されている。次章で詳しく述べていく。

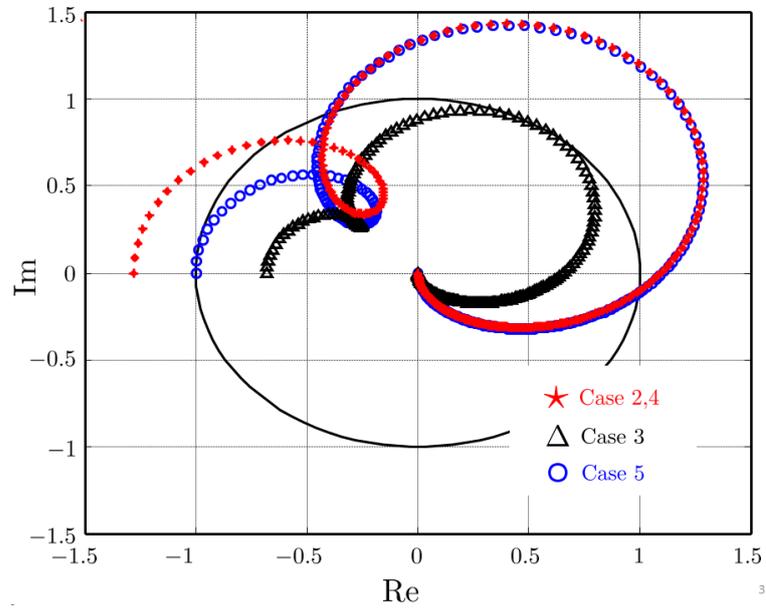


図 5.6: 一巡伝達関数のベクトル軌跡

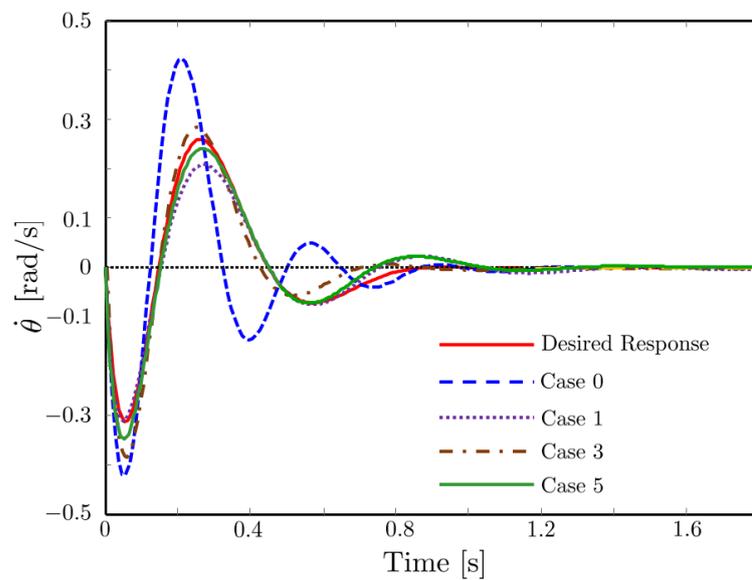


図 5.7: ステップ外乱を加えたときの応答波形

# 第6章 推定点間を保証した安定制約の提案

本章では、前章で提案したナイキスト軌跡に基づく安定制約の問題点を述べ、従来のアイデア<sup>[6, 7]</sup>を用いてその安定制約の拡張を行う。さらに従来の安定制約との違いを図を用いて説明し、それぞれの安定制約の著者の考えを述べる。最後に有効性をシミュレーションにて示す。

## 6.1 安定制約の拡張

前章までに、小ゲイン定理の保守性を低減した安定制約を複数のオリジナルアイデアを用いることで提案してきた。しかし、前章までに提案した安定制約には問題点が残されているため、その問題を従来のアイデア<sup>[6, 7]</sup>を用いて解決する。

### 6.1.1 安定制約の問題点

本節では、前章で提案した安定制約 (5.8) 式の問題点を述べる。(5.8) 式は小ゲイン定理の保守性を低減できる反面、場合によっては安定性を保証できない恐れがある。図 6.1 の例を用いて問題点について述べる。

(5.8) 式と図 6.1 を考える。図中に示されている軌跡は、 $i-1$  回目、 $i$  回目、 $i+1$  回目の更新で得られたベクトル軌跡を表しており、(5.8) 式を満たしているとする。さらに、線路上に示されている点は、スペクトル推定などにより推定された周波数点である。また、 $\mathbf{F}_{i-1}$ 、 $\mathbf{F}_i$  を適用した閉ループシステムは全て安定であるとする。図 6.1 において、 $i-1$  回目の軌跡から、 $i$  回目の軌跡への更新では、軌跡の回転数が変わることなく安定性は維持されたままである。しかし、 $i$  回目の軌跡から、 $i+1$  回目の軌跡への更新では、軌跡の回転数が変わっており、不安定化してしまっている。図 6.1 中の大きな推定点 (2 点) を見ると分かるように (5.8) 式が成り立つのは、線路上のすべての点 (数式モデル) ではなく、その線路上の各推定点  $T(\mathbf{F}_{i-1}, j\omega_k)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, [(N_h - 1)/2]$  に

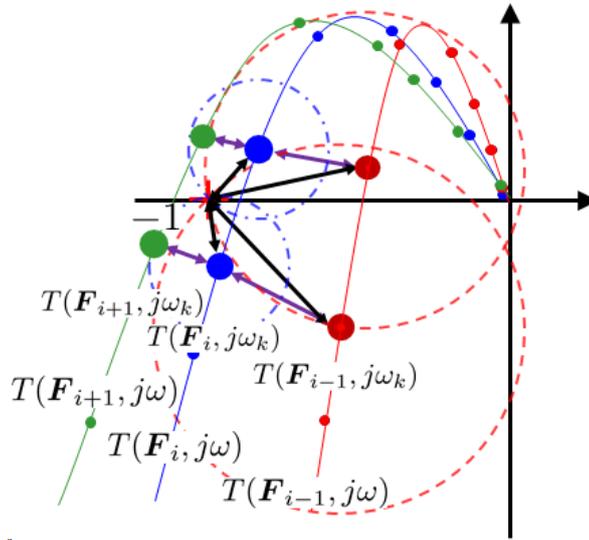


図 6.1: 提案した安定制約の問題点

おいてのみである。そのため、図 6.1 のように更新が行われる場合、安定性を保証することが困難になってしまう。

そこで、この問題を解決するために推定点間における振る舞いについても安定性を保証する安定制約を提案する。

### 6.1.2 推定点間の不確かさ

文献 [7] に基づいて推定点間の不確かさについて述べる。ここで、実際の制御対象から取得したデータより推定した周波数応答を  $\hat{T}(\mathbf{F}, j\omega_k)$  ( $|\omega_{k+1} - \omega_k| = A \quad \forall \omega_k$ ),  $T(\mathbf{F}, j\omega)$  をオリジナルの周波数特性と表す。そして、 $\hat{T}(\mathbf{F}, j\omega_k)$  と  $\hat{T}(\mathbf{F}, j\omega_{k+1})$  における線形補間モデル  $T_\lambda(\mathbf{F}, j\omega)$  ((6.1) 式) を考える。

$$T_\lambda(\mathbf{F}, j\omega) = \lambda \hat{T}(\mathbf{F}, j\omega_k) + (1 - \lambda) \hat{T}(\mathbf{F}, j\omega_{k+1})$$

$$\text{for } \omega_k < \omega < \omega_{k+1} \quad (6.1)$$

ここで、 $\omega$ ,  $\lambda$  は

$$\omega = \lambda \omega_k + (1 - \lambda) \omega_{k+1} \quad (6.2)$$

$$\lambda = \frac{\omega - \omega_{k+1}}{\omega_k - \omega_{k+1}} \quad (6.3)$$

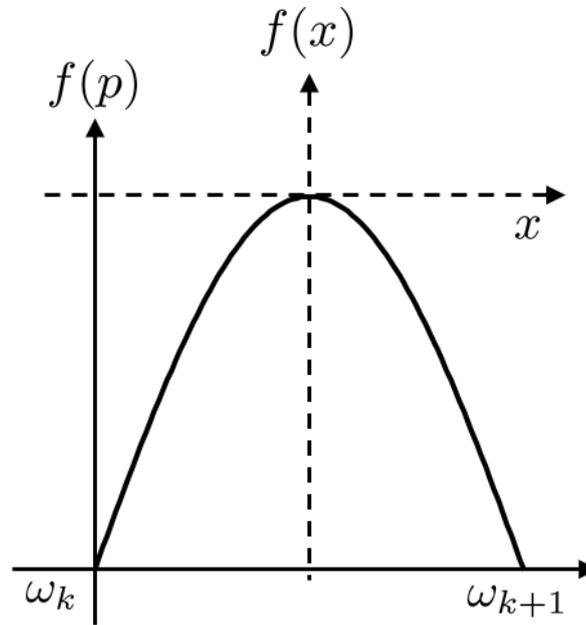


図 6.2: 推定点間の不確かさ

である。ここで、線形補間モデル  $T_\lambda(\mathbf{F}, \omega)$  とオリジナルの周波数特性  $T(\mathbf{F}, j\omega)$  をの差は (6.4) 式として与えられる。

$$|T_\lambda(\mathbf{F}, j\omega) - T(\mathbf{F}, j\omega)| \leq \delta \quad (6.4)$$

ここで、 $A$  の大きさは十分に小さいとし、 $|T_\lambda(\mathbf{F}, j\omega) - T(\mathbf{F}, j\omega)|$  の 1 次導関数が 0 となる点が 1 つのみ存在すると仮定すると、 $\delta$  は

$$\delta = \frac{1}{2} \gamma \left( \frac{\omega_{k+1} - \omega_k}{2} \right)^2 \quad (6.5)$$

$$\gamma = \frac{MB(B+1)}{(B+1)^3} \quad (6.6)$$

と定義できる。 $\gamma$  は  $|T_\lambda(\mathbf{F}, j\omega) - T(\mathbf{F}, j\omega)|$  の 2 次の導関数の最大値を表している。ここで、 $M, B$  は、 $T(\mathbf{F}, j\omega)$  の逆フーリエ変換  $t_I(t)$  が  $|t_I(t)| \leq MB^{-t}$  を満たすように事前に取得したデータより計算する。

ここで、 $\delta$  の導出方法について簡単に説明する。1 次の導関数が 0 となる点が 1 つのみ存在するという仮定から、 $|T_\lambda(\mathbf{F}, j\omega) - T(\mathbf{F}, j\omega)|$  の  $\omega_k < \omega < \omega_{k+1}$  における不確か

さは二次方程式

$$\begin{aligned} f(p) &= -\left(\frac{\gamma}{2}p^2 + bp + c\right) \\ &= -\left(\frac{\gamma}{2}\left(p + \frac{b}{\gamma}\right)^2 + c - \left(\frac{b}{\gamma}\right)^2\right) \end{aligned} \quad (6.7)$$

として表現される。 $b$ および $c$ は定数である。ここで、 $|T_\lambda(\mathbf{F}, j\omega) - T(\mathbf{F}, j\omega)|$  の 1 次の導関数が 0、 $f(p)$  が最大となる軸を図 6.2 のように新たに定義する。

$$f(x) = -\frac{\gamma}{2}x^2 \quad (6.8)$$

このとき、不確かさの最大値がその中心点に存在すると仮定する<sup>[8]</sup> と、 $\omega = \omega_k$  における不確かさは 0 であるため、 $\delta$  の最大値は、(6.8) の  $x$  に中心点までの距離を代入した値の絶対値となる。

その他、証明等に関しては、文献 [7] を参照されたい。

### 6.1.3 推定点間を考慮した安定制約

前節で導出した  $\delta$  を用いて推定点間を保証する制約を (5.8) 式から (6.9) 式のように変更する。

$$\begin{aligned} |(1 + \hat{T}(\mathbf{F}_{i-1}, j\omega_k))^{-1}|^{-1} &> |\hat{T}(\mathbf{F}_{i-1}, j\omega_k) - \hat{T}(\mathbf{F}_i, j\omega_k)| + \delta \\ &\text{for } k = 0, \dots, N-1 \\ |(1 + \hat{T}(\mathbf{F}_{i-1}, j\omega_k))^{-1}|^{-1} &> |\hat{T}(\mathbf{F}_{i-1}, j\omega_k) - \hat{T}(\mathbf{F}_i, j\omega_{k+1})| + \delta \\ &\text{for } k = 0, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (6.9)$$

この式の意味を図 6.3 を用いて説明する。そして、現在の更新が  $i-1$  回目まで終了しており、図のような  $T(\mathbf{F}_{i-1}, j\omega)$  が得られていると仮定する。このとき、 $\mathbf{F}_{i-1}$  を適用した閉ループシステムは安定であるとする。そして、 $i$  回目の更新を考える。第 1 式 ((6.9) 式の上の式) は、(5.8) 式と同様に、左辺は各周波数点における臨界点と  $\hat{T}(\mathbf{F}_{i-1}, j\omega_k)$  のベクトル軌跡との距離を表しており、右辺は各周波数点における  $\hat{T}(\mathbf{F}_{i-1}, j\omega_k)$  と  $\hat{T}(\mathbf{F}_i, j\omega_k)$  のベクトル軌跡の距離を表している。第 2 式 ((6.9) 式の下式) は、 $i$  回目の更新で得られる変動  $\delta$  を持つ  $\hat{T}(\mathbf{F}_i, j\omega_{k+1})$  が同様の感度関数の逆数  $|(1 + T(\mathbf{F}_{i-1}, j\omega_k))^{-1}|^{-1}$  の内部に同様に存在することを表している。これら 2 つの連続した推定点を保証することで、図 6.3 で示すように、それら 2 点の推定点から作られる不確かさ  $\delta$  を有する線形補間モデル  $T_\lambda(\mathbf{F}_i, j\omega)$  は円の内部に存在する。そのため、推定点間の保証が可能である。

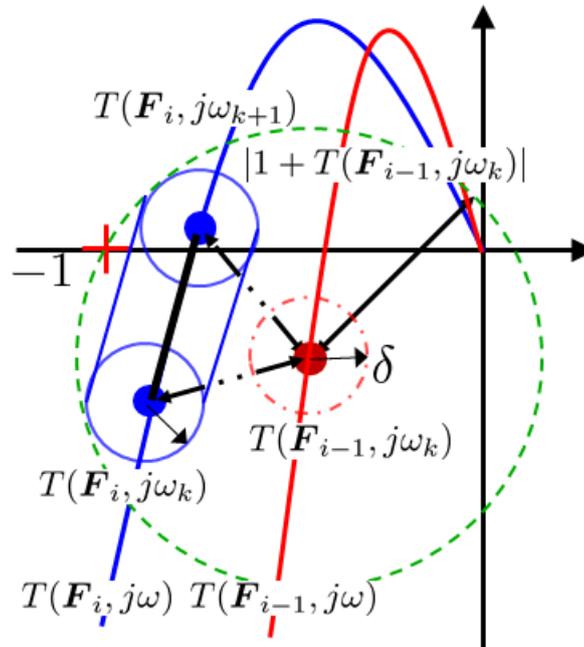


図 6.3: 推定点を考慮した制約

#### 6.1.4 不確かさの決定方法

本節では、不確かさ  $\delta$  の決定方法について述べる。まず、パラメータ  $B$  は設計者が任意に決定できるパラメータであると仮定する。そのとき、変数  $M$  は以下の設計問題を利用して決定される。

$$\text{minimize } M$$

subject to

$$|\hat{t}_I(t)| \leq MB^{-t} \tag{6.10}$$

ここで  $\hat{t}_I(t)$  は  $t_I(t)$  を相関法により推定した値である。そのとき入出力データは、(3.9) 式の入出力データを利用する。また、この決定により得られる  $MB^{-t}$  は必ず全ての時間で  $|\hat{t}_I(t)|$  の上側に存在する。

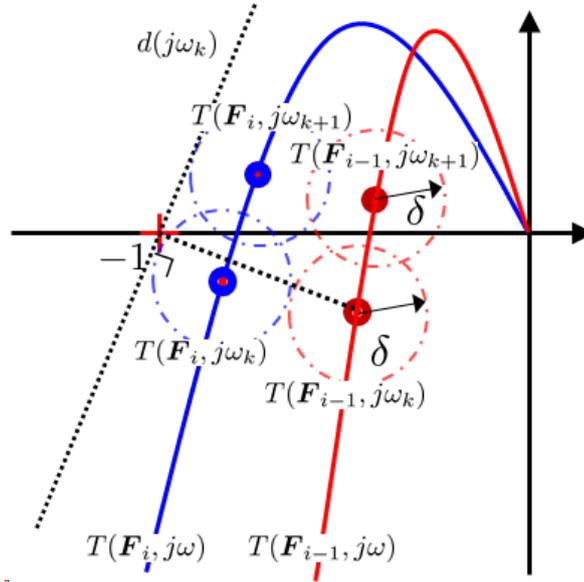


図 6.4: 従来の安定制約

### 6.1.5 従来の安定制約との違い

従来の安定制約<sup>[6]</sup>を提案手法と比較するために簡単な変換を行い、次式の安定制約として示す。

$$\begin{aligned}
 & |\delta[1 + T(\mathbf{F}_{i-1}, \omega_k)]| - \text{Re}\{[1 + T(\mathbf{F}_{i-1}, -\omega_k)][1 + T(\mathbf{F}_i, \omega_k)]\} < 0 \\
 & \text{for } k = 0, \dots, N - 1 \\
 & |\delta[1 + T(\mathbf{F}_{i-1}, \omega_k)]| - \text{Re}\{[1 + T(\mathbf{F}_{i-1}, -\omega_k)][1 + T(\mathbf{F}_i, \omega_{k+1})]\} < 0 \\
 & \text{for } k = 0, \dots, N - 1 \quad (6.11)
 \end{aligned}$$

また、(6.11) 式を図 6.4 で表現する。詳細については文献 [6] を参照されたい。図 6.4 でもわかるように、(6.11) 式の安定制約は、前回のベクトル軌跡のある推定点  $T(\mathbf{F}_{i-1}, j\omega_k)$  が直線  $d(j\omega_k)$  を見る方向と、次の更新で得られるベクトル軌跡のある推定点  $T(\mathbf{F}_i, j\omega_k)$  が直線  $d(j\omega_k)$  を見る方向が変わらないことを表している。対して、提案手法は感度関数の逆数を半径に持つ円盤の内側に不確かさを有する線形補間モデルが存在していることを表している。つまり (6.11) 式を満たすことで、提案した (6.9) 式と同様に推定点間を保証しながら、閉ループシステムの安定性を維持することができる。これら式、図を比較すると制限される距離 (円盤と直線制約) の観点から提案した (6.9) 式が保守的であるように見える。しかしながら、従来の安定制約 (6.11) 式は、制約式を導出する

ために近似を行っており、場合によっては追従性を求めるあまり不安定化する恐れもある。さらに、シミュレーション、および実機実験による結果を先に述べるが、最小化する評価関数の値を比較しても、もちろん (6.11) 式を用いたときの方が小さくできているが、大きく変わらない結果が得られている。そういった点から、従来手法は、不安定化する恐れがあるが、提案手法は確実に安定性を保証できる安定制約であると言える。

データ駆動型制御器設計法において、閉ループシステムの安定性を保証する問題は極めて重要な問題である。そのため、極めて重要な問題を解決する安定制約に近似が用いられていることは大きなディスアドバンテージとなりかねない。そういった観点からも著者が提案した (6.9) 式は、有効であると考えられる。

## 6.2 シミュレーション

制御対象は、積分器を有する倒立 2 輪ロボットとしてシミュレーションを行う。シミュレーションでは、安定制約の有効性を確かめるため、観測雑音のない理想状態を考える。(4.7) 式に安定制約無し、小ゲイン定理に基づく安定制約 (3.11)、ナイキスト軌跡に基づく安定制約 (5.8)、推定点間の振る舞いを考慮した安定制約 (6.9)、従来の安定制約 (6.11) を付加し、状態フィードバックゲインの最小化を行う。

### 6.2.1 シミュレーション条件

不確かさを有するノミナルな数式モデルを (6.12) 式で表す。(6.12) 式は倒立二輪ロボットの運動方程式を解くことにより導出した。状態量  $\boldsymbol{x} = [\dot{\theta} \ \theta \ \dot{\phi} \ \phi]^T$  とし、制御対象の真の特性を表す数式モデルを (6.13) 式に示す。サンプリングタイム 5 [ms]、入力として 15 段の M 系列信号を 2 周期印加した。また初期状態フィードバックゲインをノミナルモデルから試行錯誤的に  $\boldsymbol{F}_0 = [-13.1 \ -0.464 \ -0.319 \ -0.005448]$  と設計し、出力行列  $\boldsymbol{C} = [1 \ 0 \ 0 \ 0]$  とする。ただし、 $\theta$ 、 $\phi$  はそれぞれ本体の角度、タイヤの回転角度であり、 $\dot{\theta}$ 、 $\dot{\phi}$  はそれぞれの時間微分を表す。ナイキスト軌跡に基づく安定制約を用いたときの繰り返し終了条件を前回の評価値と現在の評価値の相対誤差が 1% 未満、かつベクトル軌跡の変化量 (距離の絶対値) が 0.01 未満となることが 3 回連続で生じたときとする。また、(6.9)、(6.11) 式を使用する場合は、matlab の計算結

果が infeasible を返したとき，前回得られた解を調整後の解とする。

$$\hat{\boldsymbol{x}}_d = \begin{bmatrix} -0.012 & 164 & 9.4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.031 & -448 & -36 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}_d + \begin{bmatrix} -31 \\ 0 \\ 117 \\ 0 \end{bmatrix} u. \quad (6.12)$$

$$\hat{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} -0.0059 & 143 & 3.8 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.013 & -306 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} -12 \\ 0 \\ 39 \\ 0 \end{bmatrix} u. \quad (6.13)$$

### 6.2.2 シミュレーション結果

表 6.1, 6.2 および図 6.5, 6.6 にシミュレーション結果を示す。ただし，表 6.1 は安定制約の種類を表している。

図 6.5 には推定した伝達関数  $\hat{T}$  が示されており，図 6.6 は図 6.5 を臨界点付近見やすくするために拡大した図である。 $\hat{T}$  はスペクトル解析法<sup>[5]</sup>を用いて推定した値である。表 6.2 には調整後の閉ループシステムが安定化したかどうか，そして調整後の評価関数の値が示されている。

まず，閉ループシステムの安定性について述べる。結果からも分かるように推定点間を考慮した (6.9)，および (6.11) 式を用いることで不安定化を回避している。また，図 6.5, 6.6 で示されているように，ベクトル軌跡が推定点間を保証するように修正されていることが確認できる。

次に評価関数の観点から優劣を考える。表 6.2 の中で (5.8) 式を用いた結果が評価関数が最も小さく良好な結果を得られているように見えるが閉ループシステムが不安定化している。それに対して，(6.9)，(6.11) 式を用いることで調整後の閉ループシステムが安定となる範囲内で評価関数を小さくできている。さらに，(6.11) 式を用いたほうが評価関数の値を小さくできているため，評価関数の観点から言えば最も優れている結果と述べられる。

(6.9)，(6.11) 式の比較を行う。従来の安定制約 (6.11) は前回のベクトル軌跡のある点が直線を見る方向と，次の更新でもある点が直線を見る方向が変わらなければ良い。対して，提案手法は円盤の内側に線形補間モデルが存在すればよい。そのため，図や数式，評価値の観点から比べると，円盤制約である提案手法のほうが保守的であることは確かである。しかし，先程述べたように従来の手法は，安定制約を導出するため

表 6.1: 調整方法

	安定制約
Case 0	
Case 1	無し
Case 2	(3.11) 式
Case 3	(5.8) 式
Case 4	(6.9) 式
Case 5	(6.11) 式

表 6.2: シミュレーション結果

	$\zeta(\mathbf{F})$	閉ループシステムの安定性	評価値の値
Case 0	0	安定	1.425
Case 1	18.9	不安定	0.302
Case 2	0.999	安定	0.500
Case 3	1.35	不安定	0.365
Case 4	1.33	安定	0.370
Case 5	1.34	安定	0.367

に近似を行っており、場合によっては不安定化する恐れもある。さらに、評価関数の値を比較しても大きく変わらない。そういった点から、従来の安定制約は、不安定化する恐れがある反面、追従性をより求めることができ、対して提案手法は確実に安定性を保証できる反面、追従性は少し保守的であると言える。

閉ループシステムの安定性を保証する問題は極めて重要な問題であると考えているため、極めて重要な問題を解決する安定制約 ((6.11) 式) に近似が用いられていることは安定な動作を実現する大きなディスアドバンテージとなりかねない。

以上より、(5.8) 式を用いることで推定点間を考慮でき、評価関数を最小化するという観点からは小ゲイン定理の保守性を低減することが可能である。さらに、安定制約に近似を用いることなく閉ループシステムの安定性を簡易に保証することが可能である。

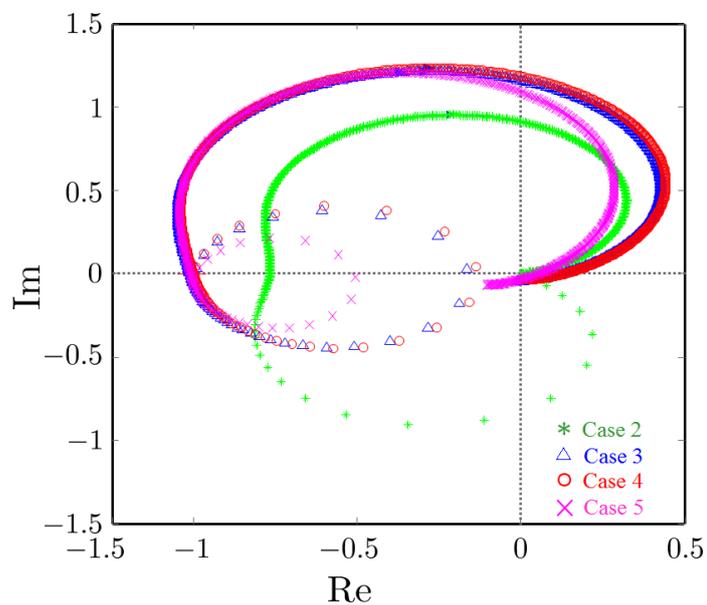


図 6.5: 一巡伝達関数  $\hat{T}(F)$  のベクトル軌跡

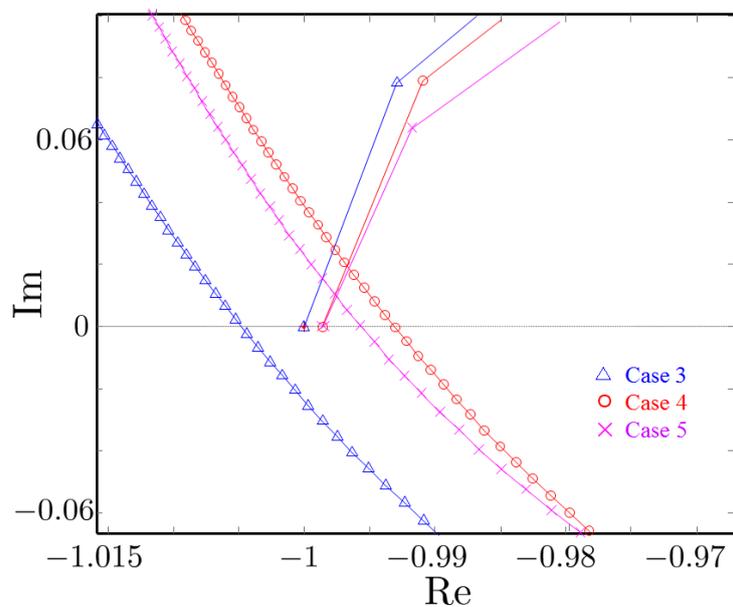


図 6.6: 図 6.5 の拡大図

## 第7章 実機実験

前章までの提案手法の有効性を二慣性共振装置を用いて示す。

### 7.1 実験

二慣性共振装置を図 7.1 に示す。今実験では、表 7.1 の条件で比較を行う。状態量  $\boldsymbol{x} = [\theta_D \ \dot{\theta}_D \ \theta_L \ \dot{\theta}_L]^T$  とし、サンプリングタイム 10 [ms]、入力として 16 段の M 系列信号 [-3,3] を 2 周期印加した。ただし、 $\theta_D$ 、 $\theta_L$  はそれぞれドライブの回転角度、ロードの回転角度を表しており、 $\dot{\theta}_D$ 、 $\dot{\theta}_L$  はそれぞれの時間微分を表す。ナイキスト軌跡に基づく安定制約を用いたときの繰り返し終了条件を前回の評価値と現在の評価値の相対誤差が 1% 未満、かつベクトル軌跡の変化量 (距離の絶対値) が 0.01 未満となることが 3 回連続で生じたときとする。また、(6.9)、(6.11) 式を使用する場合は、matlab の計算結果が infeasible を返したとき、前回得られた解を調整後の解とする。ここでは、文献 [3] を従来手法、(4.7) 式を最小化したときを提案手法と記述する。

#### 7.1.1 実験条件 1

同定実験により作製したノミナルモデルを (7.1) 式に示す。

$$\dot{\boldsymbol{x}}_d = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1418 & -19.92 & 4178 & 17.20 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 68.02 & 4.10 & -2215 & -4.70 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}_d + \begin{bmatrix} 0 \\ 58.4 \\ 0.00001 \\ 0 \end{bmatrix} u. \quad (7.1)$$

また初期状態フィードバックゲインをノミナルモデルから試行錯誤的に

$\boldsymbol{F}_0 = [-13.12 \ -0.4636 \ -0.3189 \ -0.00544]$  と設計し、出力行列  $\boldsymbol{C} = [0 \ 1 \ 0 \ 0]$  とする。

ここでは、調整後の閉ループシステムの安定性について議論する。応答特性は実験結果 2 にて議論する。

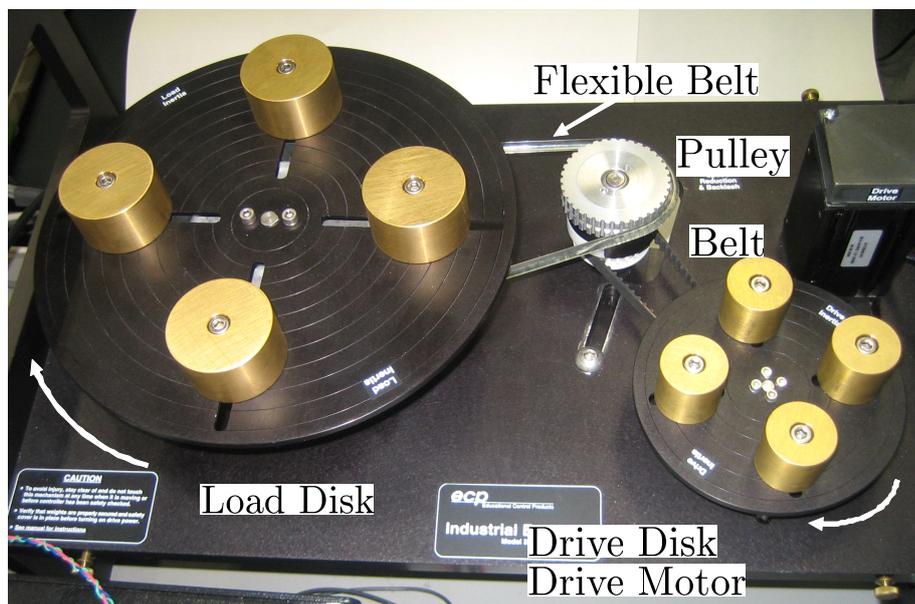


図 7.1: 二慣性共振装置

### 7.1.2 実験結果 1

調整結果を表 7.2, 図 7.2 から図 7.7 に示す。表 7.2 は, 無限大ノルムの値と調整後の状態フィードバックゲイン, 評価関数 (従来の調整法は除く) を表している。また, 図 7.2 から図 7.7 までに推定したベクトル軌跡をそれぞれ示す。ただし, 見易さのために間引いて表示している。

閉ループシステムの安定性を推定したベクトル軌跡 (図 7.2 から図 7.7) より議論する。

Case 1, および 2 は安定性を考慮していない。そのため, 図 7.2, 7.3 に示されているように一巡伝達関数のベクトル軌跡の回転数が調整前後で変化しており, 閉ループシステムが不安定化していることがわかる。このように, 評価関数の最小化のみを考慮している Case 1, および 2 は, 閉ループシステムが不安定化する恐れがある。

Case 3 では, 安定制約に (3.11) 式の小ゲイン定理に基づく安定制約が使われている。図 7.4 を見ても分かるようにベクトル軌跡が単位円内に制限されており, 閉ループシステムが安定であることがわかる。

Case 4 では, 安定制約に (5.8) 式のナイキスト軌跡に基づく安定制約が使われている。このとき, 図 7.5 に示されているように, 図 7.2, 7.3 と比較して回転数が変化していないように見える。しかし, 更新の軌跡を見ると, 更新の途中で一巡伝達関数のベクトル軌跡の回転数が変化しており, 閉ループシステムが不安定化してしまってい

表 7.1: 調整方法

	調整方法	安定制約
Case 0	無し	
Case 1	従来手法	無し
Case 2	提案手法	無し
Case 3	提案手法	(3.11) 式
Case 4	提案手法	(5.8) 式
Case 5	提案手法	(6.9) 式
Case 6	提案手法	(6.11) 式

表 7.2: 実験結果 1

	$\zeta(\mathbf{F})$	調整後の状態フィードバックゲイン	評価値
Case 0	0	-13.12, -0.4636, -0.3189, -0.00544	37126
Case 1	2.042	11.23, -2.872, -61.83, 6.816	—
Case 2	2.294	13.33, -3.054, -69.47, 7.420	15680
Case 3	0.999	0.8136, -2.089, -22.27, 4.576	22163
Case 4	1.507	8.735, -2.472, -51.26, 5.967	18094
Case 5	1.306	2.914, -2.306, -30.41, 5.293	19654
Case 6	1.414	-8.855, -2.342, 9.054, 5,664	19464

る。この原因は、(5.8) 式が保証しているのはあくまで、推定点ごとの保証であり推定点間の振る舞いを評価できないことに起因する。

それに対して、Case 4, 5 では推定点間を保証した安定制約 (6.9), (6.11) 式がそれぞれ使われている。図 7.6, 7.7 に示されているように、一巡伝達関数のベクトル軌跡の回転数が調整前後で変化することが無く、閉ループシステムの安定性は維持されていることがわかる。さらに、評価関数の値を比較すると (6.11) 式を用いたほうが評価関数の値を小さくできているため、評価関数の観点から言えば最も優れている結果と述べられる。しかし、先程述べたように従来手法は、安定制約を導出するために近似を行っており、場合によっては不安定化する恐れもある。さらに、評価関数の値を比較しても大きく変わらないことがわかる。

著者は、閉ループシステムの安定性を保証する問題は極めて重要な問題であると考えている。そのため、安定制約に近似を使わずに記述している (6.9) 式が有効的であると言える。

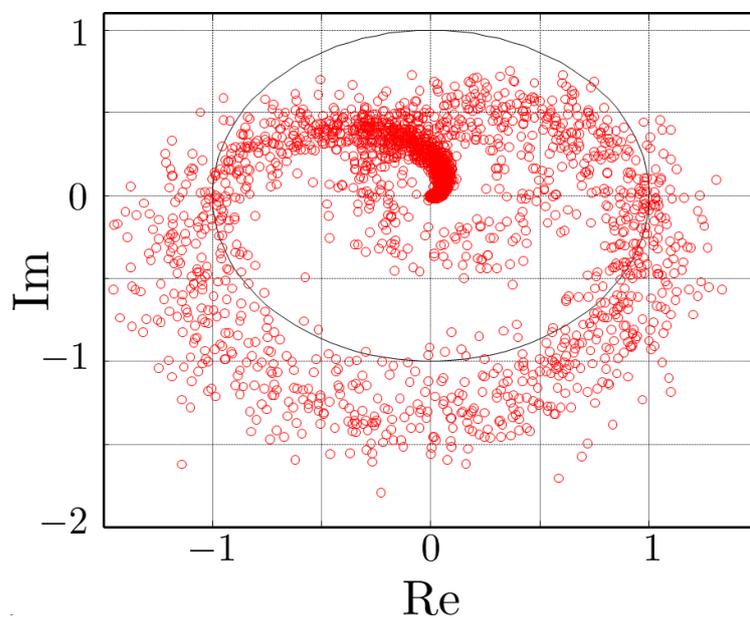


図 7.2: Case 1 の一巡伝達関数のベクトル軌跡

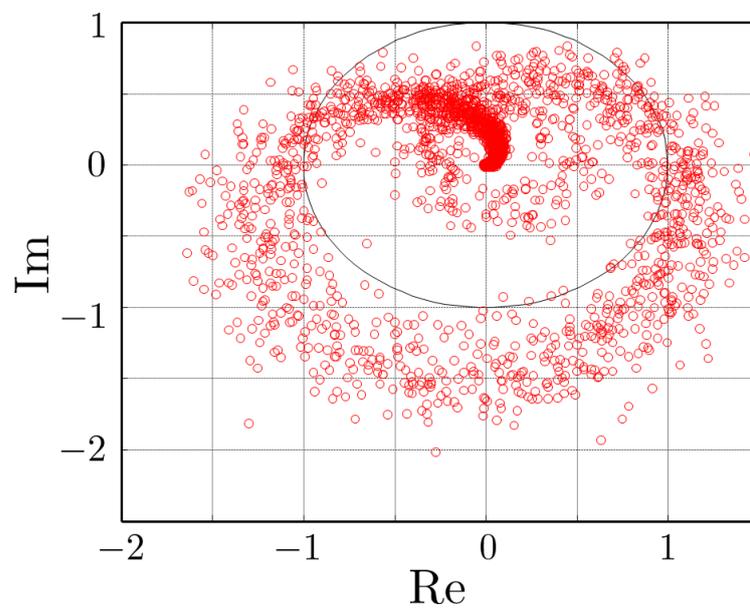


図 7.3: Case 2 の一巡伝達関数のベクトル軌跡

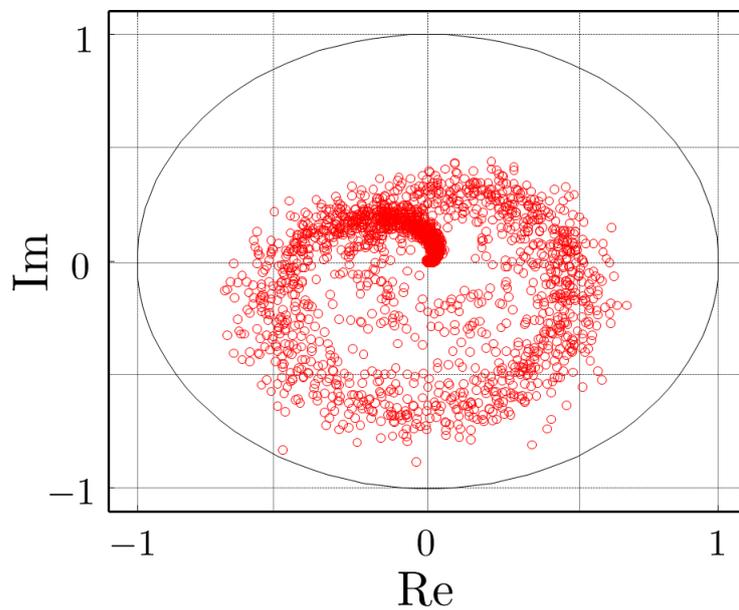


図 7.4: Case 3 の一巡伝達関数のベクトル軌跡

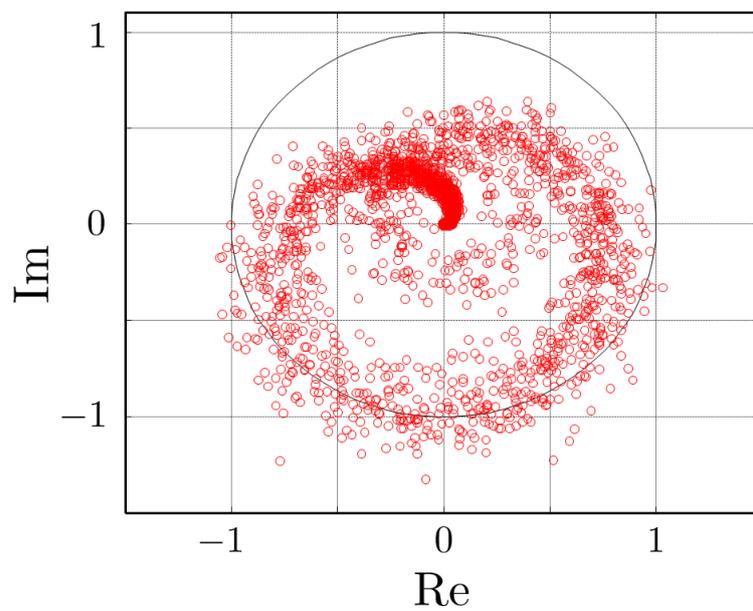


図 7.5: Case 4 の一巡伝達関数のベクトル軌跡

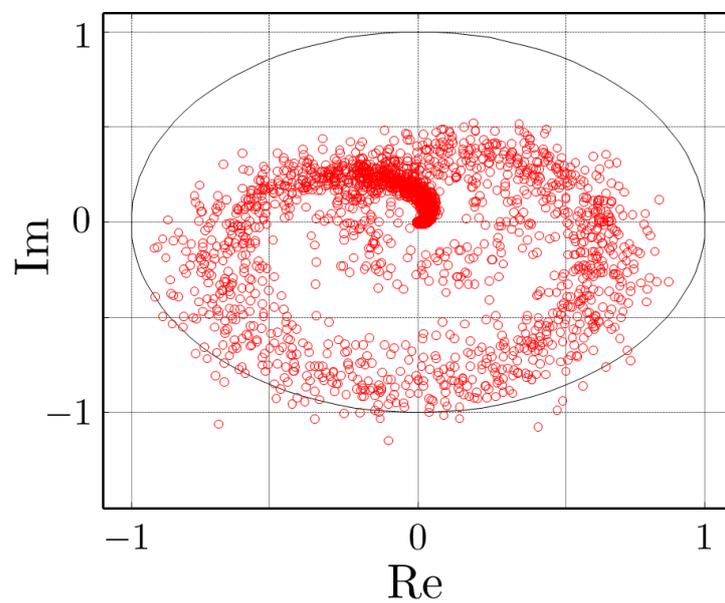


図 7.6: Case 5 の一巡伝達関数のベクトル軌跡

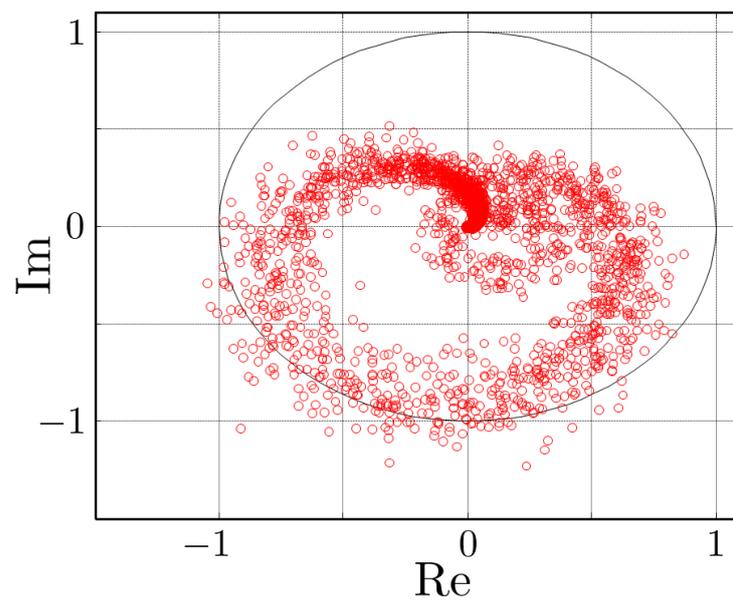


図 7.7: Case 6 の一巡伝達関数のベクトル軌跡

### 7.1.3 実験条件 2

同定実験により作製したノミナルモデルを (7.2) 式に示す。

$$\dot{\boldsymbol{x}}_d = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -109.8 & -1.557 & 438.98 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 38.99 & 0 & -155.8 & -2.47 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}_d + \begin{bmatrix} 0 \\ 2036 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u. \quad (7.2)$$

また初期状態フィードバックゲインをノミナルモデルから試行錯誤的に

$\boldsymbol{F}_0 = \begin{bmatrix} 1.939 & 0.05071 & -2.410 & 0.5972 \end{bmatrix}$  と設計し, 出力行列  $\boldsymbol{C}_1 = [0 \ 1 \ 0 \ 0]$ ,  $\boldsymbol{C}_2 = [0 \ 0 \ 1 \ 0]$  とする。

ここでは, 応答特性を中心に述べる。また, 今回, 実験結果として分かりやすくするために, Case 2,4,5,6 が同じ結果 (安定制約の必要が無い) で比較を行う。ただし, 比較に使用する信号は, 同定入力とは異なる系列の 11 段の  $M$  系列信号である。

### 7.1.4 実験結果 2

出力行列  $\boldsymbol{C}_1$  を使用して調整した結果を表 7.3, 7.4, 図 7.8 に示す。出力行列  $\boldsymbol{C}_2$  を使用して調整した結果を表 7.5, 7.6, 図 7.9 に示す。表 7.3, 7.5 は, 無限大ノルムの値, 調整後の状態フィードバックゲインを示している。表 7.4, 7.6 中の  $x_{E1}$  から  $x_{E4}$  は, 同定信号とは異なる系列の  $M$  系列信号を印加したときの所望の応答との二乗誤差を表している。 $x_{E1}$  からそれぞれ, ドライブの回転角度に対する二乗誤差, ドライブの回転角速度に対する二乗誤差, ロードの回転角度に対する二乗誤差, ロードの回転角速度に対する二乗誤差である。図 7.8, 7.9 には, Case 2 から Case 6 までの状態フィードバックゲインを用いたときの一巡伝達関数のベクトル軌跡を示す。

まず, 安定制約について簡単に述べる。図 7.8, 7.9 を見ても分かるように  $\boldsymbol{C}_1, \boldsymbol{C}_2$  どちらの出力行列を用いたとしても, 全ての Case で閉ループシステムの安定性を保証できていることがわかる。

すべての図, および表を用いて応答特性を比較する。図 7.8, 7.9 に示されているように小ゲイン定理では, 解候補が単位円内に制限されている。対して, Case 4, 5, 6 は Case 2 と同等のベクトル軌跡を得られていることがわかる。このことは, 表 7.3, 7.5 や表 7.4, 7.6 も同様に述べられ, 小ゲイン定理の保守性が顕著に表れている。また, 表 7.4 からは, 出力行列は  $\boldsymbol{C}_1$  を用いているため, Case 2,4,5,6 の  $x_{E2}$  が最も小さく調整されていることがわかる。さらに Case 3 は, Case 1 よりも応答特性が劣化している。表

7.6 から同様に出力行列は  $C_2$  を用いているため, Case 2,4,5,6 の  $x_{E3}$  が最も小さく調整されていることがわかる。また, Case 1 と Case 2,4,5,6 を比較すると, 所望の特性は Case 2,4,5,6 が優れていると言えるが, 他の状態量に関しては述べられない。これは, 全ての状態量と所望の特性との誤差を平均的に最小化する Case 1 とは異なり, それ以外ではある 1 つの状態量のみを所望の特性へと近づけていることに起因する。

表 7.3: 実験結果 2-1

	$\zeta(F)$	状態フィードバックゲイン
Case 0	0	1.939, 0.05071, -2.410, 0.5972
Case 1	17.380	-8.997, -0.3297, -18.48, -1.279
Case 2,4,5,6	19.727	-10.03, -0.3316, -21.15, -1.245
Case 3	0.999	-3.999, -0.1343, 7.319, -1,007

表 7.4: 所望の応答との二乗誤差 1

	$x_{E1}$	$x_{E2} \times 10^6$	$x_{E3}$	$x_{E4}$
Case 0	798.0	3.889	2.046	966.6
Case 1	821.0	3.774	19.75	3097
Case 2,4,5,6	805.9	3.749	20.70	3737
Case 3	781.8	3.847	7.300	1788

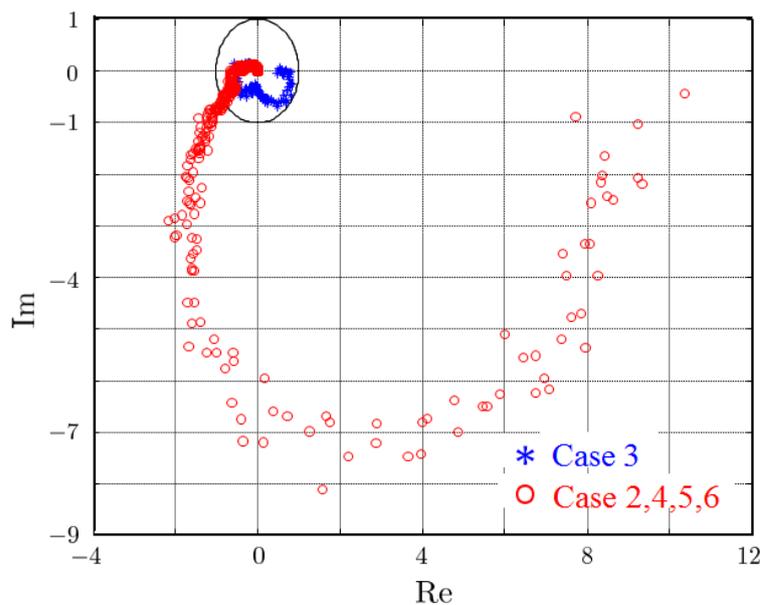


図 7.8: 一巡伝達関数のベクトル軌跡 ( $C_1$ )

表 7.5: 実験結果 2-2

	$\zeta(\mathbf{F})$	状態フィードバックゲイン
Case 0	0	1.939, 0.05071, -2.410, 0.5972
Case 1	17.380	-8.997, -0.3297, -18.48, -1.279
Case 2,4,5,6	1.210	0.2169, -0.1479, -6.2123, -0.1415
Case 3	0.999	-1.103, -0.125, -1.004, -0.2073

表 7.6: 所望の応答との二乗誤差<sup>2</sup>

	$x_{E1}$	$x_{E2} \times 10^6$	$x_{E3}$	$x_{E4}$
Case 0	798.0	3.889	2.046	966.6
Case 1	821.0	3.774	19.75	3097
Case 2,4,5,6	830.5	3.883	1.441	429.9
Case 3	823.9	3.879	1.718	506.9

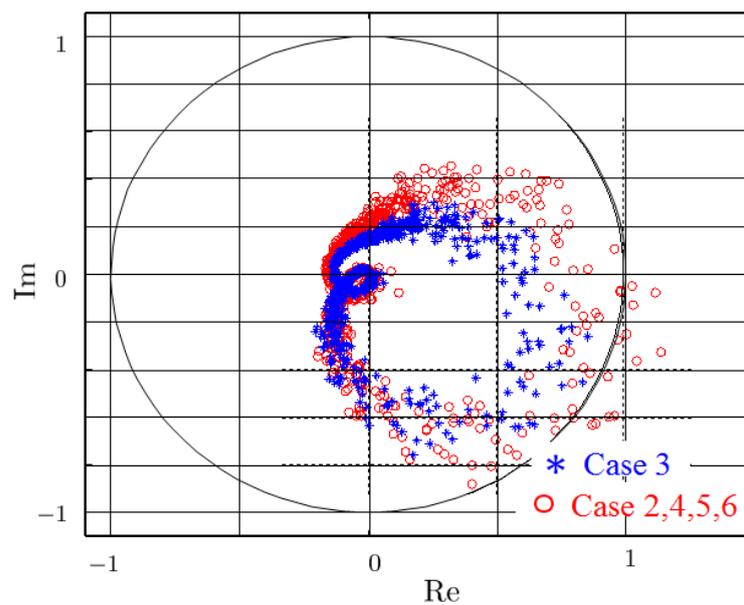


図 7.9: 一巡伝達関数のベクトル軌跡 ( $C_2$ )

## 第8章 結言

従来の状態フィードバックゲイン調整法<sup>[3]</sup>は、各状態量と安定な伝達関数との差を平均的に最小化する状態フィードバックゲインを求めることで平均的な特性を実現し、かつ閉ループシステムが不安定化することを間接的に回避していた。そのため、調整方法が各状態量と安定な伝達関数平均的な最小化に限定されてしまっていた。それに対して、提案手法は閉ループシステムの安定性を小ゲイン定理に基づく安定制約、ナイキスト軌跡に基づく安定制約を満たすように状態フィードバックゲインを調整することで閉ループシステムの安定性を必ず保証できる。それゆえ、従来の平均的な最小化に囚われず、ある1つの状態量のみを考慮したとしても、閉ループシステムの安定性は保証される。さらに提案した安定制約は、制約式を記述するために再度実験を必要とせず、線形で記述することができるために最小二乗法という簡易な計算により状態フィードバックゲインを再調整できる。そのことから、従来手法の時間、計算コストの削減という主題を生かしたまま拡張できていると述べられる。

また、従来の推定点を考慮した安定制約<sup>[6]</sup>は、制約式を導出するために近似を行っており、場合によっては追従性を求めるあまり不安定化する恐れもある。それに対して、提案したナイキスト軌跡に基づく安定制約は、近似を用いずに、図的解釈も容易という利点がある。さらに、シミュレーション、および実機実験の結果を比較しても、最小化する評価関数の値は大きく変わらない結果が得られている。そういった点から、従来の手法は、不安定化する恐れがある反面、追従性をより求めており、対して提案手法は確実に安定性を保証できる反面、追従性は少し保守的であると言える。

再度主張するが、著者は、閉ループシステムの安定性を保証する問題は極めて重要な問題であると考えている。そのため、極めて重要な問題を解決する安定制約に近似が用いられていることは安定な動作を実現する大きなディスアドバンテージとなりかねない。このような考えから、提案手法は、近似を利用していないため、閉ループシステムの安定性を保証するという観点からは優れた手法と述べられる。

以上提案してきた手法は、シミュレーションによる数値解析、および二慣性共振装置を用いて実機実験を行い、有効性を示してきた。

今後は、調整手法、安定制約共に取り扱う制御対象を SISO システムのみに限定

しているため、状態量を利用する利点が半減してしまっている。そのため、本手法を MIMO システムへと拡張することが課題として挙げられる。さらに、今回の手法は、状態量が全て計測可能、計算可能であるという条件の下行われていた。しかし、コスト削減が要求される制御対象やセンサの取り付けが不可能である制御対象を考えると現実的ではない。そのため、オブザーバを用いた出力フィードバックに適用することにより、さらに実用的な状態フィードバック制御が可能となると考えている。

## 参考文献

- [1] 相場 将太郎, 金子 修, 藤井 隆雄, 「一回の実験データに基づく制御器パラメータチューニングの新しいアプローチ-Fictitious Reference Iterative Tuning の提案」, システム制御情報学会論文誌, Vol. 17, No. 12, pp. 528–536, 2004
- [2] 松井 義弘, 赤松 駿一, 木村 知彦, 中野 和司, 桜間 一徳, 「FRIT 法の状態フィードバックゲイン調整への応用」, 電気学会論文誌 C, Vol. 132, No. 6, pp. 851–859, 2011
- [3] 金子 修, 澤川 史明, 山本 茂, 「状態フィードバックゲインのデータ駆動型更新」, 計測自動制御学会学論文集, Vol. 49, No. 6, pp. 632–638, 2013
- [4] A. Karimi, K. van Heusden and D. Bonvin, Noniterative, “Data-driven Controller Tuning Using the Correlation Approach”, *Proc. of the 47th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 2612–2617 2008–12
- [5] 足立修一, MATLAB による制御のためのシステム同定, pp. 77–82, 東京電機大学出版局, 1996
- [6] G. Galdos, A. Karimi and R. Longchamp, “Robust Controller Design by Convex Optimization based on Finite Frequency Samples of Spectral Models”, *Proc. of the 49th IEEE Conference on Decision and Control*, 2011
- [7] D. de Vries, Identification of Model Uncertainty for Control Design, *PhD thesis, Delft University of Technology*, 1994
- [8] A.J. den Hamer, S. Weiland and M. Steinbuch, “Worst-case inter frequency grid behavior of transfer functions identified via finite frequency response dat”, In *European. Control Conference*, pp. 466–471 2010
- [9] 藤森篤, ロバスト制御, コロナ社, pp. 23–26, 2001

# 謝辞

本研究の遂行ならびに修士論文作成にあたり，ご指導・ご鞭撻を賜りました三重大学工学部教授博士（工学）平井 淳之 先生に深く感謝致します。また，先生には研究室生活の各場面で技術者および社会人の先輩として大変貴重な意見を頂きました。この場を借りて深く感謝致します。

本研究の遂行ならびに修士論文作成にあたり，検討会や各場面において終始適切な助言を賜り，常に丁寧に指導して下さった同大学准教授博士（工学）弓場井 一裕 先生に深く感謝致します。

本研究の遂行にあたり，日々の全体検討会や授業等，各場面で貴重なご意見を頂きました同大学教授博士（工学）石田 宗秋先生，同大学教授博士（工学）駒田 諭 先生，同大学准教授博士（工学）山村 直紀 先生，同大学助教博士（工学）矢代 大祐 先生に心から感謝致します。また，日頃から公私ともにお世話になった技術職員 中村 勝 氏に心から感謝致します。

研究室の同期として日々の生活を共にしてきた岩本 直也君，竹若 恵太 君，中村 和樹 君，ならびに電機システム研究室の皆様には，非常に充実した研究生活を送れたことに心から感謝致します。

## 論文目録

- (1) 青木翔吾, 弓場井一裕, 矢代大祐, 平井淳之, 「安定性を考慮した状態フィードバックゲインの直接調整法」, 電気・電子・情報関係学会東海支部連合大会講演論文集, O1-4, 2015
- (2) 青木翔吾, 弓場井一裕, 矢代大祐, 平井淳之, 「安定性を考慮した入出力データを用いた状態フィードバックゲインの再調整」, 第58回自動制御連合講演会講演論文集, 112-6, 2015
- (3) Shogo Aoki, Kazuhiro Yubai, Daisuke Yashiro, Junji Hirai, “Direct Tuning of State Feedback Gains with Nyquist-Criterion Based Stability Constraint”, *Proc. of International Symposium for Sustainability by Engineering at MIU*, EP-13, 2015
- (4) Shogo Aoki, Kazuhiro Yubai, Daisuke Yashiro, Junji Hirai, “Direct Tuning of State Feedback Gains with Stability Constraint Based on Nyquist Criterion Using Experimental Data”, *Proc. of the 2nd IEEEJ International Workshop on Sensing, Actuation, Motion Control and Optimization*, V-5, 2016
- (5) 青木翔吾, 弓場井一裕, 矢代大祐, 平井淳之, 「安定性を考慮した状態フィードバックゲインのデータ駆動型調整」, システム制御情報学会研究発表講演会資料, 345-3, 2016
- (6) Shogo Aoki, Kazuhiro Yubai, Daisuke Yashiro, Satoshi Komada, “Data-Driven Tuning of State Feedback Gains with Stability Constraint Using Experimental Data”, *Proc. of 2016 CACS International Automatic Control Conference (CACS2016)*, 109-114, 2016 (Best Student Paper Award 受賞)
- (7) Shogo Aoki, Kazuhiro Yubai, Daisuke Yashiro, Satoshi Komada, “Direct Tuning of State Feedback Gains with Stability Constraint Considering Inter-grid Behavior”,

*Proc of International Symposium for Sustainability by Engineering at MIU, EO-2, 2016*

- (8) Shogo Aoki, Kazuhiro Yubai, Daisuke Yashiro, Satoshi Komada, “Direct Tuning of State Feedback Gains with Stability Constraint Based on Nyquist Criterion Considering Inter-Grid Behavior”, *Proc. of The 2nd IEEJ International Workshop on Sensing, Actuation, Motion Control and Optimization*, TT1-3, (2017. 3月発表予定)