

博士学位論文

Grover アルゴリズムの類推モデルを用いて設計
された多自由度振動系に現れるエネルギー移動

三重大学大学院工学研究科

材料科学専攻

高田宗一郎

2017年9月

目次

第1章 緒言

1・1 研究の背景.....	p.2
1・2 本研究の目的.....	p.6
1・3 本研究の構成.....	p.7

第2章 基礎事項

2・1 振動エネルギーの移動現象に関する基礎事項.....	p.9
2・2 Grover アルゴリズムに関する基礎事項.....	p.19
2・3 Grover アルゴリズムの古典的類推問題に関する基礎事項.....	p.23
2・4 本研究で用いる主な記号・単位.....	p.25

第3章 三自由度内部共振衝突振動系における概周期振動と振動エネルギー移動

3・1 緒言.....	p.28
3・2 解析モデル.....	p.29
3・2・1 三自由度衝突振動系.....	p.29
3・2・2 運動方程式.....	p.29
3・3 複素状態遷移行列の定式化.....	p.30
3・3・1 固有モード空間への変換行列.....	p.30
3・3・2 複素状態ベクトル.....	p.30
3・3・3 時間発展演算子.....	p.31
3・3・4 衝突演算子.....	p.31
3・3・5 複素状態遷移行列による系の状態の記述.....	p.32
3・4 小振動子間の相互作用.....	p.32
3・4・1 衝突振動演算子に内在する二体間相互作用.....	p.32
3・4・2 衝突振動演算子の成分とその意味.....	p.32
3・4・3 小振動子間の相互作用に着目した内部共振条件の導出.....	p.33
3・5 衝突振動系に現れる小振動子間の概周期振動.....	p.35
3・5・1 二つの回転演算子と Bloch 球.....	p.35
3・5・2 小振動子間の完全概周期振動が発生する条件.....	p.36
3・6 数値計算.....	p.38
3・6・1 自由振動応答.....	p.38
3・6・2 Bloch 球表示.....	p.39
3・6・3 完全概周期振動の周期.....	p.39
3・6・4 分数調波共振.....	p.40
3・7 結言.....	p.41

第4章 三自由度内部共振衝突振動系における振動エネルギー移動に伴う Graze 現象

4・1 緒言.....	p.43
4・2 解析モデル.....	p.43

4・3	状態遷移行列と波動アルゴリズム	p.44
4・4	Impact map の定義	p.46
4・5	数値計算	p.46
4・5・1	衝突位置が平衡位置である場合	p.46
4・5・2	衝突位置が平衡位置からずれた場合	p.47
4・6	2つのタイプの概周期振動に現れる衝突モードの特徴	p.49
4・6・1	数値計算による特徴抽出	p.49
4・6・2	Graze 衝突前後の衝突モードの変化	p.50
4・7	周期的な完全 Graze 衝突の発生条件	p.51
4・7・1	完全な Graze 衝突が発生する条件	p.51
4・7・2	周期的な完全 Graze 衝突の発生条件の導出	p.52
4・8	衝突モードの制御による振動エネルギー移動を伴うがた振動	p.53
4・9	結言	p.55

第5章 比例粘性減衰を有する三自由度衝突振動系における一方向振動エネルギー移動

5・1	緒言	p.57
5・2	解析モデル	p.57
5・2・1	比例粘性減衰を有する三自由度衝突振動モデル	p.57
5・2・2	運動方程式	p.58
5・3	状態遷移行列と波動アルゴリズム	p.59
5・3・1	系の時間発展を表す状態遷移行列	p.59
5・3・2	衝突演算子	p.60
5・3・3	衝突振動演算子	p.60
5・3・4	比例粘性減衰により摂動を受けた Grover アルゴリズム	p.61
5・3・4・1	量子検索アルゴリズムとしての Grover アルゴリズム	p.61
5・3・4・2	古典的な波動現象における Grover アルゴリズム	p.61
5・4	数値計算	p.62
5・4・1	自由振動応答(各モードの減衰率が一定である場合)	p.62
5・4・2	減衰完全概周期振動の周期と分数調波共振	p.64
5・4・3	自由振動応答(衝突小振動子のモード減衰率のみ変化させた場合)	p.64
5・4・4	質量比とモード減衰率の関係	p.66
5・5	概周期振動の周期変調現象に関する考察	p.66
5・5・1	数値計算による特徴抽出	p.66
5・5・2	概周期振動の周期変調メカニズム	p.68
5・5・3	概周期振動の停止条件と一方向振動エネルギー移動	p.70
5・6	結言	p.71

第6章 内部系モード間の振動エネルギー移動を用いた等質量二自由度系の同相-逆相状態間遷移

6・1	緒言	p.77
6・2	解析モデル	p.77

6・2・1	端部可動振動子を有する等質量二自由度系.....	p.77
6・2・2	運動方程式.....	p.78
6・3	擬基準座標変換による擬モーダルモデルの導出.....	p.78
6・4	擬モーダルモデルにおける共鳴構造設計法.....	p.79
6・4・1	部分空間共鳴構造設計.....	p.80
6・4・2	モード解析を用いた設計法の解釈.....	p.80
6・4・3	解の存在範囲.....	p.82
6・4・4	設計フローチャート.....	p.83
6・5	数値計算.....	p.83
6・5・1	自由振動応答.....	p.83
6・5・2	擬モーダルモデルによる考察.....	p.84
6・5・3	同相一逆相状態間エネルギー移動の周期の導出.....	p.85
6・5・4	初期条件に関する条件.....	p.86
6・6	比例粘性減衰の導入による同相一逆相状態間の一方向遷移.....	p.87
6・6・1	自由振動応答.....	p.87
6・6・2	擬モーダルモデルによる考察.....	p.88
6・7	結言.....	p.88

第7章 内部系モード間の振動エネルギー移動を実現する部分空間共鳴構造設計法

7・1	緒言.....	p.91
7・2	解析モデル.....	p.91
7・2・1	端部可動振動子とモード制御振動子を有する等質量 N 自由度系.....	p.91
7・2・2	運動方程式.....	p.92
7・3	内部系モード間エネルギー移動を実現する部分空間共鳴構造設計法.....	p.93
7・3・1	モード制御振動子の設計.....	p.93
7・3・2	端部可動振動子の設計.....	p.94
7・3・3	設計フローチャート.....	p.95
7・4	設計例.....	p.96
7・4・1	端部可動振動子とモード制御振動子を有する等質量三自由度系.....	p.96
7・4・2	固有角振動数.....	p.97
7・4・2・1	主系, 内部系, 全系における固有角振動数の比較.....	p.97
7・4・2・2	根軌跡.....	p.99
7・4・2・3	モード形状.....	p.100
7・5	数値計算.....	p.101
7・5・1	主系1次モードを対象($s=1$)とした場合.....	p.101
7・5・2	主系2次モードを対象($s=2$)とした場合.....	p.102
7・5・3	主系3次モードを対象($s=3$)とした場合.....	p.103
7・6	比例粘性減衰の導入による一方向内部系モード間エネルギー移動に関する基礎検討	p.104
7・7	結言.....	p.105

第8章 結論

謝辞.....	p.110
関連論文.....	p.111
文献.....	p.112
付録.....	p.115

第 1 章 序 論

1・1 研究の背景

自動車、船舶、航空機に代表される輸送機械や、水道や化学プラントなどの構造部材では長期間にわたる安定な稼働が求められる。このため、機械・構造物においては稼働時における振動挙動を事前に予測し、振動に起因する疲労破壊や、初通過破壊を抑制する対策が講じられている。他方、高度経済成長期に大量に建設した構造物が耐用年数を迎え、老朽化に伴う経済損失が社会問題となりつつある。全ての構造物を取り壊し、新設することが困難であるため、今後は既設構造物に適切な保全を施し、長期運用していくことが予想される。保全においては、既設構造物の現状の特性を適切に定量化するセンシング技術とこれに基づいた性能改善方法が求められる。

既設構造物の現状の特性を定量化するセンシング技術として、これまでに多数の技術が開発されている。配管検査を代表例として、従来のセンシング技術を検査距離と使用周波数帯域の観点で分類し、図 1.1 に示す。例えば、交流インピーダンス法(尾崎, 宇野原, 1985)は主として、腐食抵抗を測定し、腐食速度を推定する方法であり、使用周波数帯域は直流に近い 1Hz 以下を用いるか、数 kHz から数 10kHz を用いるのが一般的である。また現場での簡便な検査方法として打音検査(Razi and Taheri, 2014)が用いられている。この周波数帯域は 1~数 kHz であり、人手による聴感検査が用いられている。これらの検査範囲はおおよそ数 10cm から 1m 以下の範囲となる。一方、より精密な検査として、渦電流探傷法(JIS G 0583, 2012)がある。これは金属表面の傷を渦電流による磁束密度変化を検出するもので、数 kHz から数 100kHz の周波数帯域を用いる。また超音波厚さ計測も広く実用され、数 MHz から数 10MHz などの帯域が用いられている。これらの検査方法では検査範囲は数 10mm 程度であり、詳細検査に向いている。近年、より広範囲な検査方法として着目されている技術にガイド波法(卵西, 2002)がある。これは数 kHz から数 MHz の比較的低周波な超音波を用いる方法で、低周波超音波の低減衰性を利用して診断するものである。これは詳細検査を実行する前段階でのスクリーニング検査に向いている。

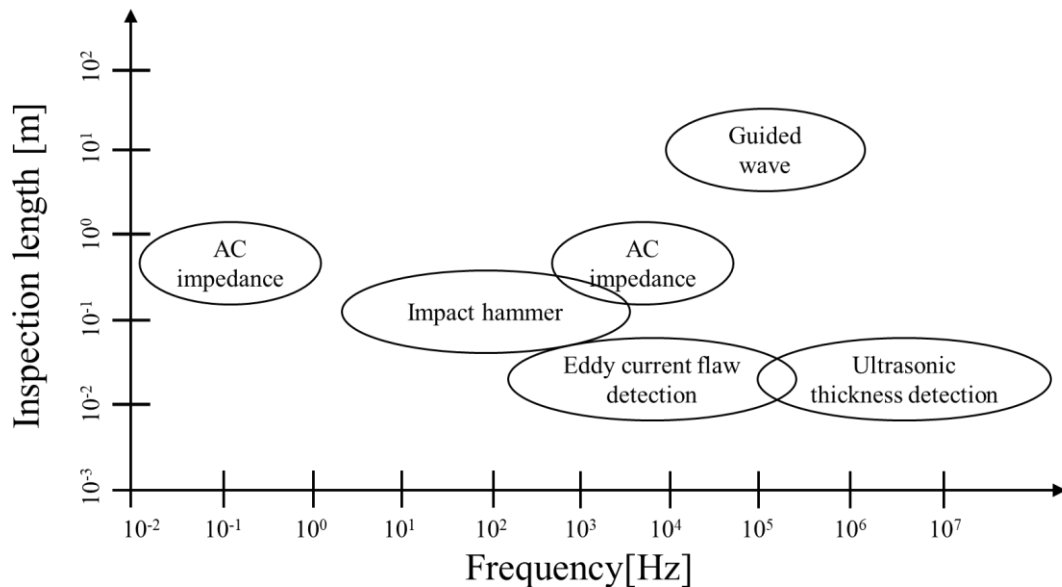


Fig.1.1 Classification map of sensing technologies in terms of physical characteristics for pipe inspection.

図 1.1 より、数 Hz から数 1kHz の周波数帯域で検査範囲が数 m 以上の検査技術が存在していないことがわかる。この周波数帯は汎用計測器や汎用マイコンで十分に計測が可能な帯域であ

り、低コストを求められるスクリーニング検査において、重要な帯域であると考えられる。一方、検査距離の延長は作業効率を高めるうえで重要であり、数 m 以上の検査距離が実現できることが望ましい。上述の配管検査の例のように、低周波数帯域の有効利用と検査距離の長延長化は、既設構造物の効率的な維持管理を実現する上で共通的な技術課題であると考えられる。

そこで、本研究では、様々な検査技術に応用可能な振動のエネルギー移動を用いた検査方法を開発することを目的として、多自由度振動系内部のエネルギー移動を自由に行うことができる系の設計方法を新たに提案する。概念図を図 1.2 の左に示す。対象とする主構造物に対して、新たに二つの副構造物を設置する。計測では、主構造物ではなく、副構造物の振動変位を計測する。主構造物を介して、二つの副構造物間で振動エネルギーの移動を生じさせる。主構造物が設計値と同様、適切な固有振動数を持つ場合には、副構造物間でエネルギー移動が周期的に繰り返されるが、腐食や塑性損傷などの変状により、主構造物の固有振動数が変化した場合には、副構造物でエネルギー移動の周期やエネルギー移動の量が変化する。これらの計測信号を検出することにより、主構造物の変状を検出する。副構造物間で振動エネルギーの移動が生じた場合、その応答には、うなりのような振幅変調を伴った波形が現れる。これにより、主構造物の変状からの計測信号を増幅し、微小な変化を検出することが可能になると考えられる。また、うなり波形は緩やかな振幅の変調を伴うことから、計測周波数帯域を下げることで期待される。

一方、副構造物を適切に設計し、主構造物の対象モードを選定することにより、検査距離の延伸が期待される。例えば、橋梁やパイプラインなどでは両端梁の曲げ振動に着目すれば、支間距離を一つの検査距離と考えることができ、その距離は数 m 以上になると考えられる。対象とする固有振動数近傍で成り立つモード振動子モデルを考えれば、図 1.2 の右に示すエッセンシャルモデルを導くことができる。本モデルは、主構造物の対象モードを代表する大振動子に対し、並列に二つの副構造物である小振動子が設置された連成振動系である。同様のモデルが Patel(Patel, 2006)によって提案されており、片方の小振動子に周期的な衝突を与えることにより、小振動子間で振動のエネルギー移動が生じることが報告されている。この現象と量子情報理論における Grover のアルゴリズム(上坂, 2000)と対応することが指摘されていることから、本研究では、目的の一つ目として、Patel の指摘する振動のエネルギー移動を利用したセンシング法設計に向けた基礎研究として、図 1.2 の右に示すエッセンシャルモデルに対する理論的検討をおこなう。特にこのエッセンシャルモデルの理解には、系の状態遷移を演算子の掛け合わせで表現し、その掛け合わせの規則性を議論する波動アルゴリズムの考え方が重要となる。本研究では、特に、波動アルゴリズムを用いた振動エネルギーの移動現象の解析方法について検討をおこなう。

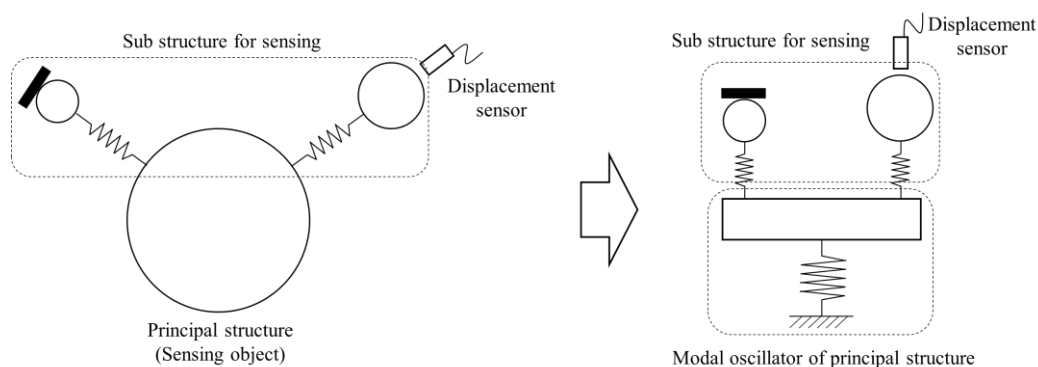


Fig.1.2 Concept of the propose sensing method. Left figure shows the schematic model, and right figure shows the essential oscillator model.

他方、性能改善にあたっては、構造物の制振性能について考慮する必要がある。構造物の制振は非常に古くから研究されている。Hartog(Hartog, 1956)はパッシブ型動吸振器を始め、電線のギャロピングや蒸気機関調速機のハンティングなど自励系に対する制振を含めて、パッシブ制振の基本的な考え方についてまとめている。その後、1980年代になると DSP (Digital Signal Processor) の普及と汎用的な FFT アナライザの登場により、アクティブ型の制振器が実用された。代表的なものに、外乱と逆位相の波を発生させて外乱を打ち消すアクティブノイズコントロール(西村, 伊勢, 2006), アクティブマスダンパ(背戸, 2006)があり、これらがアクティブ動吸振器として実用された。アクティブ型の制振では、センサとアクチュエータを搭載し、時々刻々の系の状態をセンサで計測しながらアクチュエータの制御量を定める必要がある。制御量の決定には、適応フィルタに代表される LMS アルゴリズム(Widrow and Sterns, 1985)や最適レギュレータ理論(土谷, 江上, 1991) (LQ(Linear Quadratic)理論)などが用いられている。しかしながら、アクティブ制振では、制振性能は非常に高いものの、センサとアクチュエータの駆動に膨大なエネルギーが必要であること、コストが高価になるなどの課題があった。以上の背景から、1990 年頃から両者の間をとったセミアクティブ制振(森下, 1998)が注目され始めている。自動車や鉄道の分野では、セミアクティブサスペンション(横山他, 2001)の実用化、建築の分野ではセミアクティブ制御による免震構造(伊藤他, 2011)などが実用されている。セミアクティブ制振は、基本的にはパッシブ制振に分類されるが、受動要素であるばね定数や減衰係数などの物性値を外部から変えるものである。受動要素の制御量を定める制御則が必要となるが、 H^∞ 制御理論(美多, 1994)やスライディングモード制御(野波, 田宏, 1994)が良く用いられている。セミアクティブ制振は、受動要素の開発を含め、現在も精力的に研究開発が進められている。

そこで本研究では、目的の二つ目として、セミアクティブ制振の思想である、簡素・高信頼な方法の探索という観点から、新たに内部系モードのエネルギー移動を積極的に利用する方法を提案する。内部系モードとは、部分構造合成法(長松, 大熊, 1991)で用いられる仮想のモードを指す。その概念図を図 1.3 に示す。例として、三自由度系の自由振動を考えた場合、モード解析の理論により、直交するモードベクトルの重ね合わせによって自由振動解を得る。他方、内部系モードを用いる場合には、系内の任意の質量位置に仮想の拘束点を設け、仮想拘束された低次元の系に対する固有モード(内部系モード)と、仮想の拘束点に単位変形を与えた場合に生じる静的変形モードの重ね合わせによって、自由振動解を表す。

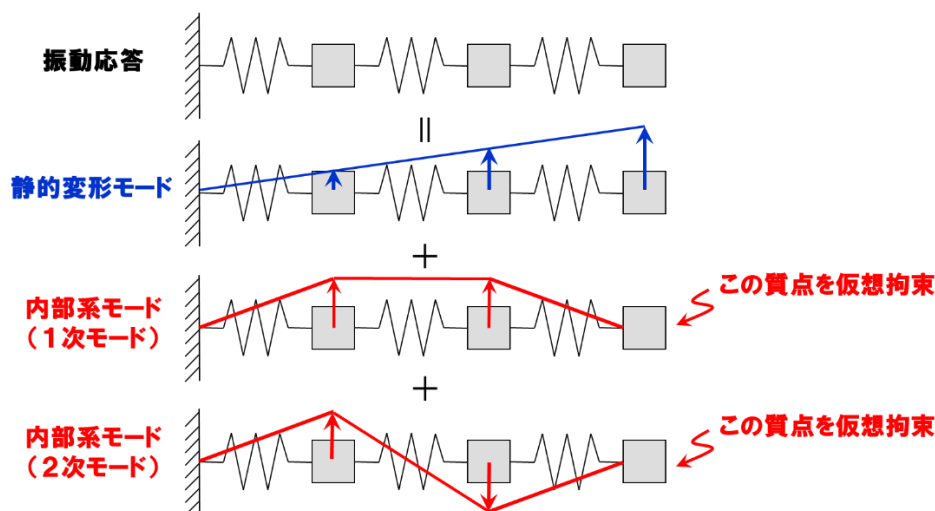


Fig.1.3 Example of expansion using the static deflection mode and the internal modes.

松下らによって、部分構造合成法で用いられるモード合成法モデルを拡張した擬基準座標モデルが提案されている(井上, 松下, 2002). 物理座標モデル, モード合成法モデル, 擬基準座標モデル間の関係を図 1.4 に示す. 前述の内部系モードを用いることで, 物理座標モデルからモード合成法モデルに変換される. モード合成法モデルは質量連成を有する表現となっており, 対応する振動モデルを作成することができない. 一方, 松下らが拡張した擬基準座標変換法は, モード合成法モデルの質量連成項を消去する事により, 振動モデルを得られるようにした変換手法である. 得られた振動モデルは, 境界座標の運動を代表する振動子に対し, モード次数毎の内部系モード振動子が並列に連成する. 通常, 線形振動系では, 固有モードは直交しており, 振動エネルギーの授受をおこなうことはできない. しかし, 線形系であっても内部系モードであれば, 振動エネルギー授受をおこなうことができる. 境界座標に関連する端部振動子や内部系モードの振動子に設計パラメータを介在させることで, 内部系モード間の振動エネルギー移動を有効に制御することが期待される.

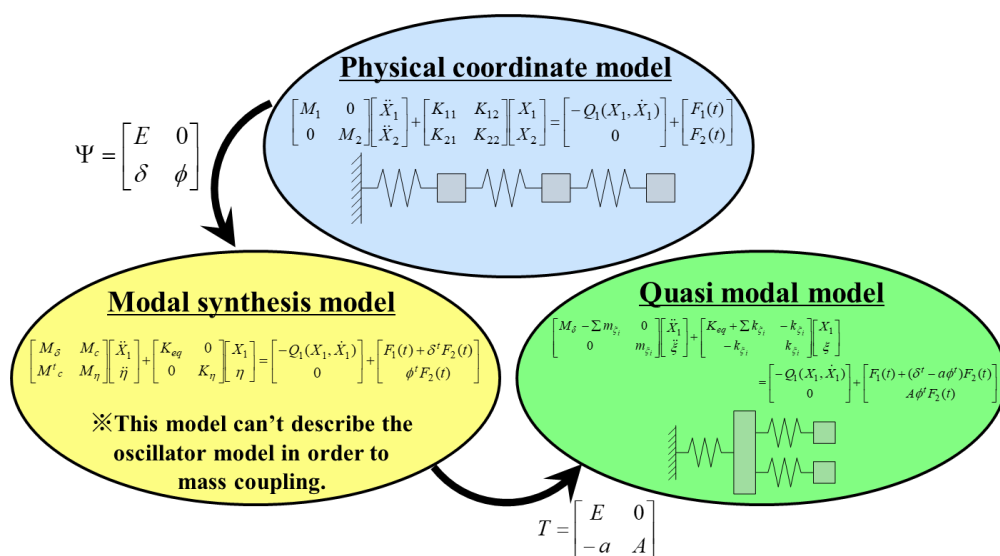


Fig.1.4 Relationship between the physical coordinate model, the modal synthesis model and the quasi modal model.

本研究で提案する制振法概念図を図 1.5 に示す. 主系構造物に対し, 二つの副構造物として端部可動振動子とモード制御振動子を備える. 端部可動振動子の質量を境界座標におくと, 主系構造物とモード制御振動子からなる内部系モードが生じる. モード制御振動子を適切に設計することにより, 内部系モード間にうなりの条件を与えることができる. 擬モードモデルのように大振動子に対して並列に小振動子が結合した連成振動系においては, Grover が小振動子間でエネルギー移動が生じることを報告している(Grover and Sengupta, 2002). 本研究では Grover によるモード間の振動エネルギー移動の設計方法を拡張し, 端部可動振動子の設計に用いることにより, 内部系モード間のエネルギー移動を実現する. 内部系モードに取り込まれた主系構造物のモードの振動エネルギーは, 内部系モード間のエネルギー移動を介して, モード制御振動子に移動する. モード制御振動子に振動エネルギーが集まったタイミングで可変減衰器を作動させ, 系の制振を実現する. 本手法においては, 端部可動振動子とモード制御振動子の設置が必要ではあるが, モード制御振動子のみを観測対象とすれば良く, 可変減衰器の設置を主系構造物におく

必要がないため、設置が容易で簡素なシステムを構成することができる。また、可変減衰器を作動させる制御則も非常にシンプルであり、高価な DSP を用いず構成することができ、低コスト化にも貢献できるものと考えられる。

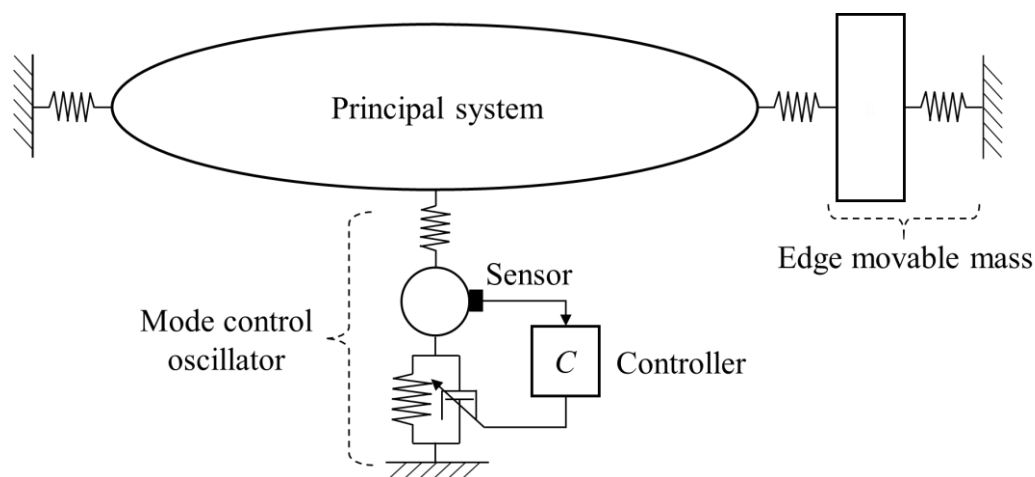


Fig.1.5 Concept of propose semi-active absorber. Mode control oscillator has the displacement sensor and the active damper.

1・2 本研究の目的

上記で提案した新しいセンシング方法と制振方法の実現に向けた基礎検討として、本研究では、二つの多自由度連成振動系における振動エネルギーの移動現象について議論する。その一つは、前述の Patel の類推モデルにおける三自由度衝突系を対象に、波動アルゴリズムの観点からエネルギー移動の発生条件を明らかにする。特に系の質量やばね定数に関する設計条件、および衝突周期などの衝突条件について明らかにする。これにより、将来のセンシング法設計に向けた解析的基礎資料を得ることを目的とする。

もう一つは、Grover のモデルを利用した多自由度連成振動系であり、内部系モード間のエネルギー移動を実現するばね定数や質量の設計条件について明らかにする。これにより、将来の内部系モードを用いた制振法の設計に向けた解析的基礎資料を得ることを目的とする。

1・3 本研究の構成

研究の目的を述べた本章に続く第 2 章では、振動エネルギーの移動現象に関する基礎事項、Grover アルゴリズムに関する基礎事項、Grover アルゴリズムの古典的類推問題に関する基礎事項について整理する。

第 3 章では、多自由度衝突振動系である Patel の類推モデルについて、波動アルゴリズムの定式化をおこない、波動アルゴリズムにおける遷移行列から、内部共振条件の導出と衝突周期に関する条件を求めた。これにより、Patel の指摘する内部共振条件より広い範囲の内部共振条件が存在することを明らかにした。さらに、衝突振動に内在する概周期振動や分数調波振動の存在について、Bloch 球表示を導入し議論し、Bloch 球の幾何学的考察より、概周期振動の周期の導出をおこなった。

第4章では、前述の多自由度衝突振動系について、状態遷移行列を援用し、系の離散的状態ベクトルの漸化式表示を導出し、衝突速度が0付近になるGraze衝突について解析をおこなった。その結果、振動のエネルギー移動に伴って、Graze衝突が発生することや、その発生周期を明らかとした。また、一定衝突位置の発生条件や、振動のエネルギー移動の事例を数値計算により示した。

第5章では、前述の多自由度衝突振動系に比例粘性減衰を導入し、減衰が振動のエネルギー移動に与える影響を明らかにした。比例粘性減衰が質量剛性のみ比例する場合と質量行列と剛性行列の和に比例する場合の双方について検討し、剛性行列を含めた場合に、振動エネルギーの移動周期が変調されること、またその極限として周期的なエネルギー移動が生じない、一方向の振動エネルギーの移動が発生することを明らかにした。

第6章では、多自由度振動系であるGroverの類推モデルを用いた、内部系モード間の振動エネルギー移動現象について検討した。本章では端部可動振動子を有する等質量二自由度系を対象に、擬基準座標変換法を適用し、擬モーダルモデルを求めた。この擬モーダルモデルは、元の等質量二自由度系の振動モードを表す内部系モードの振動子が並列に端部可動振動に接続する形式となる。本研究ではこのモデルがGroverの類推モデルと等しくなることを指摘し、内部系モードに対する新たな境界座標を設定することにより、Groverの類推モデルと等価な設計が可能であることを示した。また数値計算により上述の設計法による系において、等質量二自由度振動系の内部系モード間で振動エネルギーの移動現象が発生することを明らかにし、等質量二自由度系が同相状態と逆相状態を繰り返す状態間遷移を発現することを示した。また比例粘性減衰に影響についても検討し、第4章と同様、振動エネルギーの移動方向が一方向となることを数値計算によって示した。

第7章では、第6章で得た多自由度振動系であるGroverの類推モデルを用いた内部系モード間の振動エネルギーの移動を実現する設計方法を、より一般の多自由度系に適用すべく設計法の拡張をおこなった。設計問題を具体化するために、主系のモード振動子と連成させるモード制御振動子を新たに導入し、端部可動振動子の設計問題と合わせて、部分空間共鳴構造設計法を明確化した。設計事例として、等質量三自由度系を主系とした場合について検討した。数値計算により、内部系モード間の振動エネルギーの移動の発生を確認するとともに、主系モードの振動エネルギーがモード制御振動子に移動することを確認した。

第 2 章 基礎事項

2・1 振動エネルギーの移動現象に関する基礎事項

多自由度連成振動系における振動エネルギーの移動現象に関する研究の歴史は古く、初期の研究は Hartog(Hartog, 1956)によりまとめられている。Hartog の著書では線形系の自由振動における固有振動数の重複であるうなりによるエネルギーのわたり歩きに関する記述がある。Hartog は連成ばねを有する連成振子、並進運動と傾き振動が連成する車体系、並進運動とねじり振動が連成する Wilberforce のばね等を例示している。以下では、各事例を具体的に紹介する。連成ばねを有する連成振子のモデルを図 2.1、並進運動と傾き振動が連成する車体系のモデルを図 2.2、並進運動とねじり振動が連成する Wilber-force のばねのモデルを図 2.3 にそれぞれ示す。

連成ばねを有する連成振子は、長さ l の剛体棒、先端集中質量 m で構成された二つの振子がばね定数 k の連成ばねによって結合された系である。図中、二つの振子の回転支点周りの鉛直方向からの回転角をそれぞれ θ_1 、 θ_2 とおくと、回転運動に関する運動方程式は式(2.1)と表される。

$$\begin{cases} ml^2\ddot{\theta}_1 + (mgl + ka^2)\theta_1 - ka^2\theta_2 = 0 \\ ml^2\ddot{\theta}_2 - ka^2\theta_1 + (mgl + ka^2)\theta_2 = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

式(2.1)における二つの振子の回転角は、連成ばね k を介して連成している。このような系は静連成と呼ばれている(田島, 1970)。

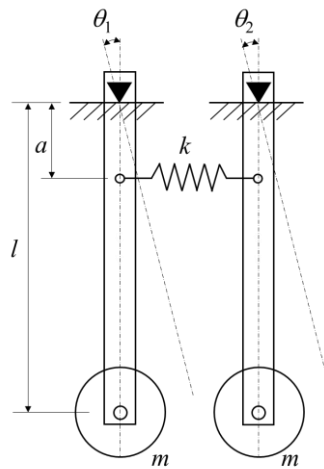


Fig.2.1 Schematic figure of coupled pendulum. The pendulums swing either with each other or against each other.

次に、重心 G の鉛直並進振動と重心周りの傾き回転振動が連成している車体系は、間隔 $2l$ 、ばね定数 k の二つのばねで質量 m の車体が支持された系である。鉛直並進振動における重心の鉛直方向の座標を x 、車体の重心周りの回転角を φ 、車体の慣性モーメントを I とすると、鉛直並進振動及び回転振動に関する運動方程式は式(2.2)となる。

$$\begin{cases} m\ddot{x} + k(x + l\varphi) + k(x - l\varphi) = 0 \\ I\ddot{\varphi} + kl(x + l\varphi) - kl(x - l\varphi) = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

式(2.2)は、鉛直並進振動の座標と重心周りの回転振動の回転角が、支持ばね定数 k を介して連成している系である。こちらも先と同様、静連成の系であるが、先の(2.1)では連成している座標系が共に回転角であったのに対し、本系は並進振動と回転振動との連成であり、一見異なる座標間で連成している点に注意が必要である。

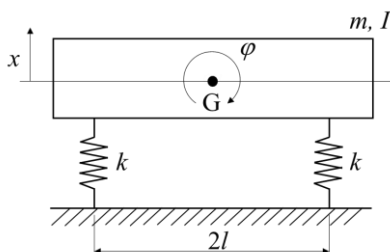


Fig.2.2 Schematic figure of an automobile chassis on the springs. Two natural motions of the mass are possible. (1) a bobbling up and down parallel and (2) a rocking about the center of gravity G.

次に、Wilberforce のばねについて考える。Wilberforce のばねは、運動の面白さから玩具や教育教材として、今日でも広く扱われている。Berg(Berg and Marshall, 1991)が固有振動数とモード形状に関する考察をおこなっているので、これを元に紹介する。Wilberforce のばねは、質量 m 、ばね定数 k のばねからなる鉛直並進振動体とねじり変形剛性 δ のねじりばね、慣性モーメント I の集中質量からなる回転振動体から構成される。この系のラグランジアンは式(2.3)となる。

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} I \dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2} k x^2 - \frac{1}{2} \delta \varphi^2 - \frac{1}{2} \varepsilon x \varphi \quad (2.3)$$

ここで ε は連成の結合定数である。これより、ラグランジュ運動方程式を求めると、式(2.4)となる。

$$\begin{cases} m \ddot{x} + kx + \frac{1}{2} \varepsilon \varphi = 0 \\ I \ddot{\varphi} + \delta \varphi + \frac{1}{2} \varepsilon x = 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

こちらも先の式(2.2)と同様、鉛直並進振動体の並進座標と回転振動体の回転座標が結合定数 ε の項を介して連成している。Wilberforce のばねでは、連成項が各自由度の絶対座標に比例し、相対座標に比例していない点異なる。

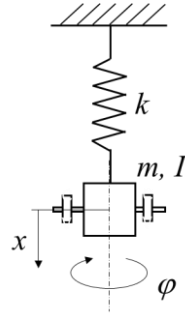


Fig.2.3 Schematic figure of Wilberforce pendulum. The coupled mode between longitudinal mode and rotational mode are excited.

Hartog はこれらの系を例示し、エネルギーの渡り歩きを固有角振動数の重複とモードの重ね合わせの観点から説明している。ここでは簡単のため、図 2.1 の連成振子の系について考察し、各々の振子の長さや質量は同一の場合を想定する。初期条件を $\theta_1 = 1$, $\theta_2 = 0$, $d\theta_1/dt = 0$, $d\theta_2/dt = 0$ とした場合の式(2.1)の自由振動解は式(2.5)となる。

$$\begin{aligned}\theta_1 &= \frac{1}{2} \cos \omega_1 t + \frac{1}{2} \cos \omega_2 t \\ \theta_2 &= \frac{1}{2} \cos \omega_1 t - \frac{1}{2} \cos \omega_2 t\end{aligned}\tag{2.5}$$

ここで ω_1 , ω_2 はそれぞれ連成振子の 1 次と 2 次の固有角振動数であり $\omega_1 < \omega_2$ である。自由振動解はそれぞれの固有角振動数成分の重ね合わせとなっている。連成ばね定数 k が小さく、1 次と 2 次の固有角振動数が近接していれば、式(2.5)はうなりの条件を満たす。式(2.5)に三角関数の和の公式を適用し整理すると、式(2.6)となる。

$$\begin{aligned}\theta_1 &= \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t\right) \\ \theta_2 &= -\sin\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t\right)\end{aligned}\tag{2.6}$$

式(2.6)は二つの三角関数の成分より構成されている。第一項は固有角振動数の差の成分、第二項は固有角振動数の和の成分である。うなりの条件を満たす場合、固有角振動数の差の項と和の項の運動が分離され、波形は緩やかな振幅の変調を伴った形状となる。差の項は緩やかな振幅の変化を代表する包絡線を表し、和の項は包絡線内の速い振動数成分を表す。運動の時間変化を考えると、時刻 $t = 0$ の場合 $\theta_1 = 1$, $\theta_2 = 0$ であり、初期条件を満たす。時刻 $t = 2n\pi / (\omega_2 - \omega_1)$, (n は正整数)の時刻では $\theta_1 = \pm 1$, $\theta_2 = 0$ であり図 2.1 の左側の振子のみが揺れている状態を表す。他方、時刻 $t = m\pi / (\omega_2 - \omega_1)$, (m は正整数)の時刻では $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \pm 1$ であり図 2.1 の右側の振子のみが揺れている状態を表す。両者は交互に生じ、二つの振子の間で緩やかな振幅の増減が交互に発生する。

この状態をモードの重ね合わせの観点から概説する。Hartog によるエネルギーの渡り歩きの概念図を図 2.4 に示す。図 2.4 では図 2.1 の連成振子を示している。図中(a)は左側の振子のみ振動する状態、(b)は右側の振子のみ振動する状態をそれぞれ表す。連成振子の固有モードは、連成振子の各固有角振動数に対応して二つある。低次の固有角振動数 ω_1 に対応するモードは二つの

振子が同じ方向に変位する同相モード、高次の固有角振動数 ω_2 に対応するモードは二つの振子が逆方向に変位する逆相モードである。

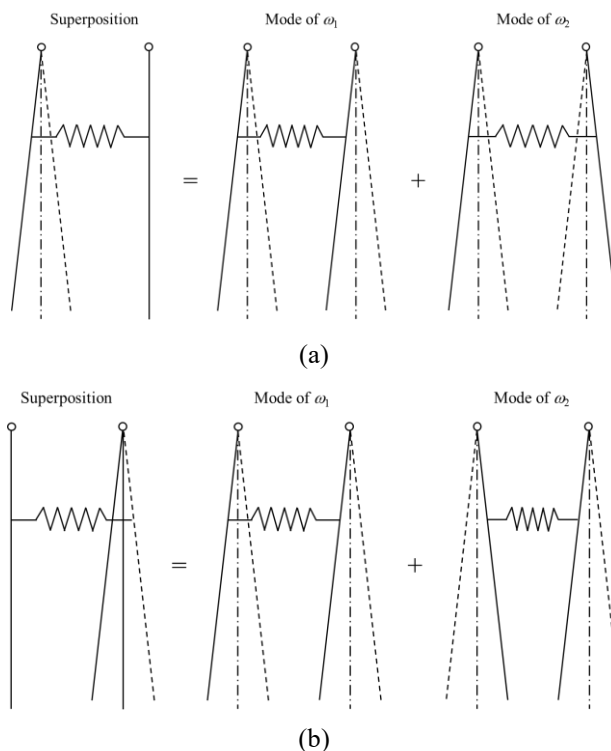


Fig.2.4 Any motion can be broken up into the sum of two natural motions having the two different natural frequencies ω_1 and ω_2 .

最初に初期条件($\theta_1 = 1, \theta_2 = 0, d\theta_1/dt = 0, d\theta_2/dt = 0$)に相当する図中(a)の状態を考える。初期条件下では、左側の振子のみ変位を持つ。これを空間的な変位分布であるモードと対応させると、同相モードおよび逆相モードの左側の振子が同方向に変位する状態に対応する。左側の振子は同相モードと逆相モードの双方の振幅が足し合わされる。他方、右側の振子は同相モードと逆相モードとで振幅が減じられる。この結果、左側の振子のみ変位を持つ振動状態となる。他方、時間が経過すると、同相モードと逆相モード間の固有角振動数差に呼応した位相ずれが生じる。結果、同相モードと逆相モードの位相差が π となる時刻が現れる。これが、図中(b)の状態である。逆相モードの位相が反転したため、同相モードおよび逆相モードの左側の振子が逆方向に変位している。左側の振子は同相モードと逆相モードの双方の振幅が減じられ、他方、右側の振子は同相モードと逆相モードとで振幅が足し合わされる。この結果、右側の振子のみ変位を持つ振動状態となる。これが交互に発生して、振動が空間上を渡り歩くよう観察される。

田島(田島, 1970)はエネルギーの立場から解析的な検討を示している。田島が概説に用いた二自由度振動モデルを図 2.5 に示す。なお、この系の運動方程式の解は式(2.5)と同様である。

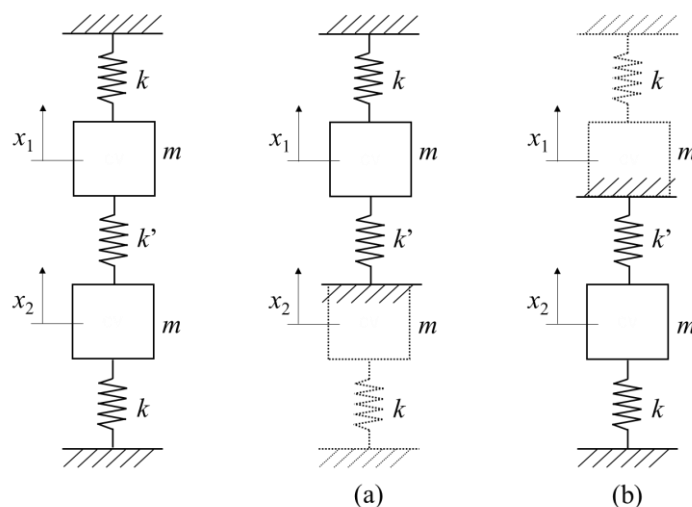


Fig.2.5 Schematic figure of two degree-of-freedom system. (a) shows the subsystem with x_2 clamped, (b) shows the subsystem with x_1 clamped.

系全体のエネルギーを E とすれば、式(2.7)となる。

$$E = \frac{m}{2}(\dot{x}_1)^2 + \frac{m}{2}(\dot{x}_2)^2 + \frac{k}{2}(x_1)^2 + \frac{k}{2}(x_2)^2 + \frac{k'}{2}(x_1 - x_2)^2 = E_0 = const \quad (2.7)$$

ここで図 2.5 の二自由度系のうち、各々の質量に固定壁を考えた分系を仮想する。座標 x_2 をとる質量を固定壁とした場合の分系を図 2.5(a)、座標 x_1 をとる質量を固定壁とした場合の分系を図 2.5(b)にそれぞれ示す。これらの分系は一自由度系であるため、それぞれエネルギーを求めると式(2.8)となる。

$$E_1 = \frac{m}{2}(\dot{x}_1)^2 + \frac{1}{2}(k+k')(x_1)^2 \quad (2.8)$$

$$E_2 = \frac{m}{2}(\dot{x}_2)^2 + \frac{1}{2}(k+k')(x_2)^2$$

ここで E_1 は分系(a)のエネルギー、 E_2 は分系(b)のエネルギーを表す。 E_1 、 E_2 はそれぞれ変位 x_1 、 x_2 を与えるエネルギーを考える目安となる。ここで、式(2.8)に式(2.5)を代入して整理すると、式(2.9)となる。なお、本系の固有角振動数はそれぞれ $\omega_1^2 = k/m$ 、 $\omega_2^2 = (k+2k')/m$ とした。

$$E_1 = \frac{1}{16} \left[\begin{aligned} &4(k+k') + 2\left\{(k+k') + \sqrt{k(k+2k')}\right\} \cos\{(\omega_2 - \omega_1)t\} \\ &+ 2\left\{(k+k') - \sqrt{k(k+2k')}\right\} \cos\{(\omega_2 + \omega_1)t\} + k' \cos(2\omega_1 t) - k' \cos(2\omega_2 t) \end{aligned} \right] \quad (2.9)$$

$$E_2 = \frac{1}{16} \left[\begin{aligned} &4(k+k') - 2\left\{(k+k') + \sqrt{k(k+2k')}\right\} \cos\{(\omega_2 - \omega_1)t\} \\ &- 2\left\{(k+k') - \sqrt{k(k+2k')}\right\} \cos\{(\omega_2 + \omega_1)t\} + k' \cos(2\omega_1 t) - k' \cos(2\omega_2 t) \end{aligned} \right]$$

ここで $k'/k \ll 1$ として、 k'/k を含む項をランダウの記号 $O(k'/k)$ で整理すると式(2.9)は式(2.10)となる。ここで、式(2.9)の根号の項は 1 次の Taylor 展開で展開した後に $O(k'/k)$ で整理した。

$$\begin{aligned}
E_1 &= \frac{k}{4} [1 + \cos\{(\omega_2 - \omega_1)t\} + O(k'/k)] \\
E_2 &= \frac{k}{4} [1 - \cos\{(\omega_2 - \omega_1)t\} + O(k'/k)]
\end{aligned} \tag{2.10}$$

これより，式(2.11)を得る．

$$E_1 + E_2 = \frac{k}{2} [1 + O(k'/k)] \tag{2.11}$$

式(2.11)より， $O(k'/k)$ の誤差の範囲内で E_1 と E_2 の和は一定であり，その各々の全エネルギー量が周期 $2\pi/(\omega_2 - \omega_1)$ で互いに入れ替わっている．したがって，本現象がエネルギーの渡り歩きであることが解析的にも示された．田島は上記の説明とともに，連成系の事例を拡充して表にまとめている．加えて現象の初期条件に関して，現象の観察できる場合とできない場合について示している．この後，中井(中井，北野，1984)がはつ弦の自由振動を対象に，はりと弦の連成系について実験と理論解析おこない，連続体におけるエネルギーのわたり歩きについて詳細に報告している．

上述の研究により，線形系の自由振動については，エネルギーのわたり歩きの基本的な発生メカニズムの解明を終えているが，これらは現象の説明に留まり，本現象を利用した設計手法や振動利用方法に関する研究は未だに十分に行われていない．

次に，非線形系に関する研究として，内部共振系を扱った研究がある．内部共振系とは，多自由度の振動系において，対応する固有振動数の間に整数比の関係をもつ系である．変位，速度，加速度と復元力の間に非線形関係を有する弱非線形系においても内部共振の研究は古く，Nayfeh(Nayfer, 2000)によって体系的にまとめられている．ここでは，Nayfeh の著書を参考に，非線形内部共振系のエネルギー移動に関する基礎事項について概説する．ここでは，一般の二自由度系について考え，一般的な二自由度系の支配方程式を導く．座標 u_1 ， u_2 は各々の静的平衡点から測った一般座標とし，系の運動エネルギーとポテンシャルエネルギーを 3 次の多項式形式で表現すると，式(2.12)，式(2.13)となる．

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2} M_1 (1 + m_1 u_1 + m_2 u_2) \dot{u}_1^2 + \frac{1}{2} M_1 (1 + m_3 u_1 + m_4 u_2) \dot{u}_2^2 \\
&+ M_3 (1 + m_5 u_1 + m_6 u_2) \dot{u}_1 \dot{u}_2 + \frac{1}{2} M_4 \dot{x}^2
\end{aligned} \tag{2.12}$$

$$\begin{aligned}
&+ (G_1 \dot{u}_1 + G_2 \dot{u}_2 + G_3 u_1 \dot{u}_1 + G_4 u_1 \dot{u}_2 + G_5 \dot{u}_1 u_2 + G_6 u_2 \dot{u}_2) \dot{x} + (G_7 \dot{u}_1^2 + G_8 \dot{u}_2^2) x \\
V &= \frac{1}{2} K_1 u_1^2 + \frac{1}{2} K_2 u_2^2 + K_3 u_1 u_2 + K_4 u_1^3 + K_5 u_1^2 u_2 + K_6 u_1 u_2^2 \\
&+ K_7 u_2^3 + (k_1 u_1^2 + k_2 u_2^2) x
\end{aligned} \tag{2.13}$$

ここで， M_j ， m_j ， k_i ， K_j ， G_j は系の質量やばね定数を表す実定数である．変数 x は強制変位を表す．ジャイロ系を含むため，運動エネルギーに $u_i \dot{u}_j$ の項を含む．運動エネルギー T ，ポテンシャルエネルギー V における 2 次，3 次の項は，運動方程式における線形項，2 次非線形項をそれぞれ表す．エネルギーに 4 次の項を含む場合，運動方程式における 3 次非線形項が現れる．ポテ

ンシャルエネルギー V を用いて、静的平衡点を求めることができる。静的平衡点では力が釣り合っており、一般座標 u_1, u_2 は 0 であるから、以下の式(2.14)が成り立つ。

$$\left. \frac{\partial V}{\partial u_j} \right|_{u_1=u_2=0} = 0 \quad \text{for } j=1,2 \quad (2.14)$$

ここで、無減衰系ならば拡張ハミルトン原理(extended Hamiltonian principle)(Meirovitch, 1970)を用いて運動方程式を導くことができる。拡張ハミルトン原理は式(2.15)で表現される。

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta L + \delta W_{nc}) dt = 0 \quad (2.15)$$

ここで t_1 と t_2 は区分時間の境界値を定める任意の時刻を表し、 $L = T - V$ は系のラグランジアンを示し、 W_{nc} は非保存力による仮想仕事を表す。ここで、 $W_{nc} = 0$ の非保存力が作用しない系を考えると、ハミルトン原理より、運動方程式は式(2.16)となる。

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{u}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial u_j} + \frac{\partial V}{\partial u_j} = 0 \quad \text{for } j=1,2 \quad (2.16)$$

上式に運動エネルギー T とポテンシャルエネルギー V を代入し、整理すると運動方程式として、式(2.17)、式(2.18)を得る。

$$\begin{aligned} & M_1 \ddot{u}_1 + M_3 \ddot{u}_2 + K_1 u_1 + K_3 u_2 + 3K_4 u_1^2 + 2K_5 u_1 u_2 + K_6 u_2^2 + \frac{1}{2} M_1 m_1 \dot{u}_1^2 + M_1 m_2 \dot{u}_1 \dot{u}_2 \\ & + \left(M_3 m_6 - \frac{1}{2} M_2 m_3 \right) \dot{u}_2^2 + M_1 m_1 u_1 \ddot{u}_1 + M_1 m_2 u_2 \ddot{u}_1 + M_3 m_5 u_1 \ddot{u}_2 + M_3 m_6 u_2 \ddot{u}_2 \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} & + [2G_7 \ddot{u}_1 + 2k_1 u_1] \dot{x} + [(G_5 - G_4) \dot{u}_2 + 2G_7 \dot{u}_1] \dot{x} + [G_3 u_1 + G_5 u_2] \ddot{x} = -G_1 \ddot{x} \\ & M_2 \ddot{u}_2 + M_3 \ddot{u}_1 + K_2 u_2 + K_3 u_1 + K_5 u_1^2 + 2K_6 u_1 u_2 + 3K_7 u_2^2 + \left(M_3 m_5 - \frac{1}{2} M_1 m_2 \right) \dot{u}_1^2 \\ & + M_2 m_3 \dot{u}_1 \dot{u}_2 + \frac{1}{2} M_2 m_4 \dot{u}_2^2 + M_2 m_3 u_1 \ddot{u}_2 + M_2 m_4 u_2 \ddot{u}_2 + M_3 m_5 u_1 \ddot{u}_1 + M_3 m_6 u_2 \ddot{u}_1 \\ & + [2G_8 \ddot{u}_2 + 2k_2 u_2] \dot{x} + [(G_4 - G_5) \dot{u}_1 + 2G_8 \dot{u}_2] \dot{x} + [G_4 u_1 + G_6 u_2] \ddot{x} = -G_2 \ddot{x} \end{aligned} \quad (2.18)$$

ここで、式(2.17)および式(2.18)の左辺の調和励振を表す三項はパラメトリック励振項であり、右辺の調和励振を表す項は強制外力項である。ここで、線形モードベクトルを用いたモード座標形への変換をおこなう。この変換により、非線形内部共振系の特徴であるモード間エネルギー移動を具体的に記述することが可能になる。式(2.17)、式(2.18)の非線形項、調和励振項を除くと、線形系の同次運動方程式(2.19)を得る。

$$\begin{bmatrix} M_1 & M_3 \\ M_3 & M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 & K_3 \\ K_3 & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

ここで、質量行列の非対角成分がある場合を慣性連成(inertial coupling), または動連成という。一方、剛性行列に非対角成分がある場合を弾性連成(elastic coupling), または静連成という。もし剛性行列が非対称である場合には、循環力または従動力の作用する系となり、運動方程式は非自己随伴微分方程式の問題となる(Bolotin, 1963),(Bolotin, 1964)。式(2.19)の固有値問題を解き、固有ベクトルを並べた変換 P を考え、式(2.20)の主軸変換を定義する。

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

ここで、固有ベクトル行列の各列の成分は $\mathbf{p}_1 = \{p_{11}, p_{12}\}^T$, $\mathbf{p}_2 = \{p_{21}, p_{22}\}^T$ であり、それぞれ、固有角振動数 ω_1^2 , ω_2^2 に対応する。これを式で表すと、式(2.21)となる。

$$M\mathbf{p} = \omega^2 M\mathbf{p} \quad (2.21)$$

また固有ベクトルは質量行列に関し、式(2.22)のように規格化される。

$$P^T M P = I \quad (2.22)$$

これら変換を運動エネルギー T の式(2.12), ポテンシャルエネルギー V の式(2.13)に代入して整理すると、式(2.23), 式(2.24)となる。

$$\begin{aligned} T = & \frac{1}{2}(1 + \tilde{m}_1 v_1 + \tilde{m}_2 v_2) \dot{v}_1^2 + \frac{1}{2}(1 + \tilde{m}_3 v_1 + \tilde{m}_4 v_2) \dot{v}_2^2 + (\tilde{m}_5 v_1 + \tilde{m}_6 v_2) \dot{v}_1 \dot{v}_2 \\ & + (g_1 \dot{v}_1 + g_2 \dot{v}_2 + g_3 v_1 \dot{v}_1 + g_4 v_1 \dot{v}_2 + g_5 v_2 \dot{v}_1 + g_6 v_2 \dot{v}_2) \dot{x} \\ & + (g_7 \dot{v}_1^2 + g_8 \dot{v}_1 \dot{v}_2 + g_9 \dot{v}_2^2) x + \frac{1}{2} M_4 \dot{x}^2 \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} V = & \frac{1}{2} \omega_1^2 v_1^2 + \frac{1}{2} \omega_2^2 v_2^2 + \delta_1 v_1^3 + \delta_2 v_1^2 v_2 + \delta_3 v_1 v_2^2 + \delta_4 v_2^3 \\ & + (\tilde{k}_1 v_1^2 + \tilde{k}_2 v_1 v_2 + \tilde{k}_3 v_2^2) x \end{aligned} \quad (2.24)$$

ここで、各変数は

$$\begin{aligned} \tilde{m}_2 = & m_1 M_1 p_{11}^2 p_{21} + 2m_5 M_3 p_{11} p_{12} p_{21} + m_3 M_2 p_{12}^2 p_{21} \\ & + m_2 M_1 p_{11}^2 p_{22} + 2m_6 M_3 p_{11} p_{12} p_{22} + m_4 M_2 p_{12}^2 p_{22} \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} \tilde{m}_5 = & m_1 M_1 p_{11}^2 p_{21} + m_2 M_1 p_{11} p_{12} p_{21} + m_5 M_3 p_{11} p_{12} p_{21} \\ & + m_6 M_3 p_{12}^2 p_{21} + m_5 M_3 p_{11}^2 p_{22} + m_3 M_2 p_{11} p_{12} p_{22} \\ & + m_6 M_3 p_{11} p_{12} p_{22} + m_4 M_2 p_{12}^2 p_{22} \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$\begin{aligned} \delta_2 = & 3K_4 p_{11}^2 p_{21} + 2K_5 p_{11} p_{12} p_{21} + K_6 p_{12}^2 p_{21} + K_5 p_{11}^2 p_{22} \\ & + 2K_6 p_{11} p_{12} p_{22} + 3K_7 p_{12}^2 p_{22} \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$g_1 = G_1 p_{11} + G_2 p_{12}, \quad g_2 = G_1 p_{21} + G_2 p_{22} \quad (2.28)$$

となる．上述の運動エネルギーとポテンシャルエネルギーを用い，モード減衰率を加えた運動方程式は式(2.29)，式(2.30)となる．

$$\begin{aligned} & \ddot{v}_1 + \omega_1^2 v_1 + 2\mu_1 \dot{v}_1 + 3\delta_1 v_1^2 + 2\delta_2 v_1 v_2 + \delta_3 v_2^2 + \tilde{m}_1 v_1 \ddot{v}_1 + \tilde{m}_2 v_2 \ddot{v}_1 \\ & + \frac{1}{2} \tilde{m}_1 \dot{v}_1^2 + \tilde{m}_2 \dot{v}_1 \dot{v}_2 + \left(\tilde{m}_6 - \frac{1}{2} \tilde{m}_3 \right) \dot{v}_2^2 + \tilde{m}_5 v_1 \dot{v}_2^2 + \tilde{m}_6 v_2 \dot{v}_2^2 \end{aligned} \quad (2.29)$$

$$\begin{aligned} & + \left(2\tilde{k}_1 v_1 + \tilde{k}_2 v_2 + 2g_7 \ddot{v}_1 + g_8 \ddot{v}_2 \right) \dot{x} + \left[2g_7 \dot{v}_1 + (g_5 + g_8 - g_4) \dot{v}_2 \right] \dot{x} + (g_3 v_1 + g_5 v_2) \ddot{x} = -g_1 \ddot{x} \\ & \ddot{v}_2 + \omega_2^2 v_2 + 2\mu_2 \dot{v}_2 + \delta_2 v_1^2 + 2\delta_3 v_1 v_2 + 3\delta_4 v_2^2 + \tilde{m}_3 v_1 \ddot{v}_2 + \tilde{m}_4 v_2 \ddot{v}_2 \\ & + \left(\tilde{m}_5 - \frac{1}{2} \tilde{m}_2 \right) \dot{v}_1^2 + \tilde{m}_3 \dot{v}_1 \dot{v}_2 + \frac{1}{2} \tilde{m}_4 \dot{v}_2^2 + \tilde{m}_5 v_1 \dot{v}_1 + \tilde{m}_6 v_2 \dot{v}_1 \end{aligned} \quad (2.30)$$

$$\begin{aligned} & + \left(\tilde{k}_2 v_1 + 2\tilde{k}_3 v_2 + g_8 \ddot{v}_1 + 2g_9 \ddot{v}_2 \right) \dot{x} + \left[(g_4 - g_5 + g_8) \dot{v}_1 + 2g_9 \dot{v}_2 \right] \dot{x} + (g_4 v_1 + g_6 v_2) \ddot{x} = -g_2 \ddot{x} \end{aligned}$$

式(2.29)と式(2.30)を摂動法によって解析する．摂動法とは運動方程式の解を，微小量 ε のべき乗の関数によって表現する方法である．運動方程式の解を式(2.31)の形に仮定する．

$$v_j(t; \varepsilon) = \sum_{i=0}^N \varepsilon^i v_{ji}(t) + O(\varepsilon^{N+1}) \quad \text{for } j=1,2 \quad (2.31)$$

例えば，1 次の微小量を考えた場合には，式(2.31)は式(2.32)の形の解を仮定することになる．

$$v_j(t; \varepsilon) = v_{j0}(t) + \varepsilon v_{j1}(t) + O(\varepsilon^2) \quad \text{for } j=1,2 \quad (2.32)$$

式(2.32)を運動方程式に代入して，微小量の次数のべきでまとめると，各微小量の次数に応じた運動方程式系を得ることができる．各次数の運動方程式を解くことにより，次数毎の解 v_{ji} が得られ，これを式(2.32)に代入し重ね合わせることにより，元の運動方程式の近似解を得ることができる．

ここでは問題を簡略化するため，無減衰であり，慣性連成項，パラメトリック励振項，強制励振項がなく，非線形連成項のみがある場合を考える．この時，運動方程式(2.29)，式(2.30)は以下の式(2.33)，式(2.34)に書き改められる．

$$\ddot{v}_1 + \omega_1^2 v_1 + \varepsilon \left[3\hat{\delta}_1 v_1^2 + 2\hat{\delta}_2 v_1 v_2 + \hat{\delta}_3 v_2^2 \right] = 0 \quad (2.33)$$

$$\ddot{v}_2 + \omega_2^2 v_2 + \varepsilon \left[\hat{\delta}_2 v_1^2 + 2\hat{\delta}_3 v_1 v_2 + 3\hat{\delta}_4 v_2^2 \right] = 0 \quad (2.34)$$

式(2.33)および式(2.34)に式(2.32)を代入し，各次数での運動方程式系を示す． ε^0 次の運動方程式系は式(2.35)，式(2.36)となる．

$$\ddot{v}_{10} + \omega_1^2 v_{10} = 0 \quad (2.35)$$

$$\ddot{v}_{20} + \omega_2^2 v_{20} = 0 \quad (2.36)$$

ε^l 次の運動方程式系は式(2.37), 式(2.38)となる.

$$\ddot{v}_{11} + \omega_1^2 v_{11} = -3\hat{\delta}_1 v_{10}^2 - 2\hat{\delta}_2 v_{10} v_{20} \quad (2.37)$$

$$\ddot{v}_{21} + \omega_2^2 v_{21} = -\hat{\delta}_2 v_{10}^2 - 2\hat{\delta}_3 v_{10} v_{20} - 3\hat{\delta}_4 v_{20}^2 \quad (2.38)$$

以上の運動方程式系を低次の方程式より順に解く. ε^0 次の運動方程式は無減衰系の運動方程式であるので, 式(2.39), 式(2.40)が解となる.

$$v_{10} = a_{10} \cos[\omega_1 t + \beta_{10}] \quad (2.39)$$

$$v_{20} = a_{20} \cos[\omega_2 t + \beta_{20}] \quad (2.40)$$

以上の解を式(2.37), 式(2.38)の右辺に代入し, 無減衰系の強制振動の運動方程式として解けば, 式(2.41), 式(2.42)が得られる.

$$\begin{aligned} v_{11} = & a_{11} \cos[\omega_1 t + \beta_{11}] - \frac{3\hat{\delta}_1}{2\omega_1^2} a_{10}^2 - \frac{\hat{\delta}_3}{2\omega_1^2} a_{20}^2 + \frac{\hat{\delta}_1}{2\omega_1^2} a_{10}^2 \cos[2\omega_1 t + 2\beta_{10}] \\ & + \frac{\hat{\delta}_3}{2(4\omega_2^2 - \omega_1^2)} a_{20}^2 \cos[2\omega_2 t + 2\beta_{20}] + \frac{\hat{\delta}_2}{(\omega_2 - \omega_1)^2 - \omega_1^2} a_{10} a_{20} \cos[(\omega_2 - \omega_1)t + \beta_{20} - \beta_{10}] \\ & + \frac{\hat{\delta}_2}{(\omega_2 + \omega_1)^2 - \omega_1^2} a_{10} a_{20} \cos[(\omega_2 + \omega_1)t + \beta_{20} + \beta_{10}] \end{aligned} \quad (2.41)$$

$$\begin{aligned} v_{21} = & a_{21} \cos[\omega_2 t + \beta_{21}] - \frac{\hat{\delta}_2}{2\omega_2^2} a_{10}^2 - \frac{3\hat{\delta}_4}{2\omega_2^2} a_{20}^2 + \frac{\hat{\delta}_4}{2\omega_2^2} a_{10}^2 \cos[2\omega_2 t + 2\beta_{20}] \\ & + \frac{\hat{\delta}_2}{2(4\omega_2^2 - \omega_1^2)} a_{10}^2 \cos[2\omega_1 t + 2\beta_{10}] + \frac{\hat{\delta}_3}{(\omega_2 - \omega_1)^2 - \omega_2^2} a_{10} a_{20} \cos[(\omega_2 - \omega_1)t + \beta_{20} - \beta_{10}] \\ & + \frac{\hat{\delta}_3}{(\omega_2 + \omega_1)^2 - \omega_1^2} a_{10} a_{20} \cos[(\omega_2 + \omega_1)t + \beta_{20} + \beta_{10}] \end{aligned} \quad (2.42)$$

以上の摂動法により, 運動方程式の近似解を得ることができる. v_{11} は $\omega_1, 2\omega_1, 2\omega_2, \omega_2 - \omega_1, \omega_2 + \omega_1$ の角振動数を含み, v_{21} は $\omega_2, 2\omega_2, 2\omega_1, \omega_2 - \omega_1, \omega_2 + \omega_1$ の角振動数を含んでいる. 元の線形系の固有角振動数比 $\omega_1 : \omega_2$ に有理数倍の関係がある内部共振条件が成り立つ場合, ここでは 1:2 の内部共振を考えると, 非線形連成によって生じた高調波や結合調波成分間でのうなりが生じ, 先の線形系と同様のメカニズムでモード間のエネルギー移動が生じる. Nayfeh の著書では $\omega_1 : \omega_2 = 2:1, 1:1, 3:1$ の内部共振系を中心に扱っている. 2:1 の内部共振系については, 例として二重振り子, ばね振り子, オートパラメトリック動吸振器, 船体のピッチ・ロール運動, アーチ, 液体容器の表面波, 円筒シェルなどの系がまとめられている. 2:1 の内部共振系では自由振動および強制振動の双方において, 振動のエネルギー移動が認められている. 1:1 の内部共振系では, 例として球面振り子, 紐, 梁, 矩形板, 円筒シェル, ローターディスク, 動吸振器などの系がまとめられている. 3:1 の内部共振系では, 例として移動支持の二重振り子, 軸方向荷重を有するはりの曲げ振動, 梁の縦振動, 固定境界の座屈梁などの系がまとめられている. 上述のように, 内

部共振系では、非線形連成項を介したうなりが生じ、多数の系で振動のエネルギー移動が確認されている。

他方、衝突やがたなど、変位と復元力の中に強い非線形関係を有する強非線形系における内部共振の研究は、近年 Vakakis(Vakakis, 2009)らにより、Vibro-Impact Nonlinear Energy Sink (VI-NES) による制振を目指して盛んに研究されている。通常、Nonlinear Energy Sink (NES)では線形モードに非線形項を介した共鳴を発生させて、振動のエネルギー移動を積極的に誘起する。この際、非線形要素は3次非線形ばねが用いられることが多い。しかしながら、過渡振動や自由振動への適用では、より早い振動減衰が要求されることから、従来と異なる別のメカニズムが求められており、VI-NES への期待が高まっている。しかしながら、多自由度衝突振動系を前提とする VI-NES の研究では、対象となる系が非常に複雑であり、数値計算と実験による研究が主流である。これは多自由度衝突振動における解析研究自体が未だ十分でないという背景があり、現在も精力的に研究が行われている(相原他, 2009), (相原, 熊野, 2011), (相原, 熊野, 2016), (原田他, 2010), (原田, 吉武, 2013)。

2・2 Grover アルゴリズムに関する基礎事項

近年、量子コンピュータで実行される量子アルゴリズムに関する研究が行われている。その一つに、ランダムファイル検索問題に対する Grover アルゴリズムがある(上坂, 2000)。Grover アルゴリズムはランダムファイル検索問題を高速に解く手法として研究されている。

古典的なランダムファイル検索問題を例に、最も一般的な線形探索のアルゴリズムの概念図を図 1.6 に示す。

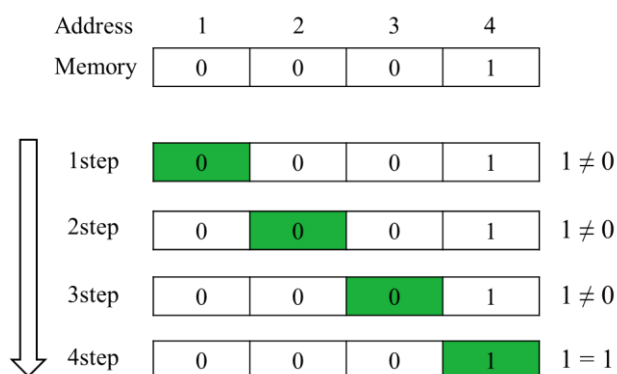


Fig.2.6 Schematic figure of linear search algorithm. The system has the four memories, contains numerical values, 0 or 1. The algorithm gives the address of memory that contains 1.

ここでは4つのメモリを考え、各々のメモリには'0'または'1'の数値が格納されているとする。この場合、探索問題は、'1'の数値が格納されたメモリのアドレス(番地)を求める問題となる。線形探索では、各々のメモリの数値を読み出し、数値と目標となる数値'1'との差を比較する。そして、差が0となった番地を出力する。上記手順の Matlab による実装例を図 1.7 に示す。

Algorithm 1 Linear search algorithm

```

MEMORY = [0; 0; 0; 1]
[n,m] = size(MEMORY)
Obj = 1
for i = 1 : n
    J = Obj - MEMORY (i)
    if J == 0
        i
    end
end
end

```

Fig.2.7 Example of implementation of linear search algorithm using Matlab. The algorithm requires the $O(N)$ step calculation.

線形探索では、メモリサイズ数 N と同じ回数の繰り返し演算を含むため、探索を終えるまでに $O(N)$ 回オーダーの計算を必要とする。

次に、Grover アルゴリズムによる探索問題を考える。Grover アルゴリズムによる探索問題の概念図を図 2.8 に示す。

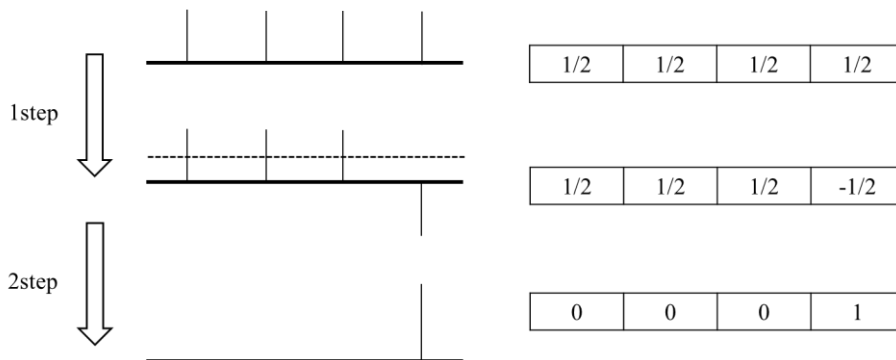


Fig.2.8 Schematic figure of Grover search algorithm. The algorithm contains the two processes, target inversion and average inversion.

Grover アルゴリズムでは、最初に任意の始状態を設定する。多くの場合、各メモリに対して、等振幅 $1/N^{0.5}$ を与える。この始状態のベクトルを書くと、式(2.43)となる。

$$|s\rangle = [1/\sqrt{4} \quad 1/\sqrt{4} \quad 1/\sqrt{4} \quad 1/\sqrt{4}]^T \quad (2.43)$$

次に、未探索のメモリからなるベクトルを、ターゲットベクトルとして定義する。Grover アルゴリズムでは、このターゲットベクトルを未開封のまま演算し、given の変数として扱う。ここでは先のメモリの例と対応させ、式(2.44)と定義する。

$$|\tau\rangle = [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T \quad (2.44)$$

式(2.43)および式(2.44)より, Grover アルゴリズムを構成する 2 ステップの演算子を次の式(2.45)および式(2.46)のように定義する.

$$U_t = I - 2|\tau\rangle\langle\tau| = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

$$U_s = 2|s\rangle\langle s| - I = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & -0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & -0.5 \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

式(2.45)はターゲットベクトルに対する反転演算を表し, 式(2.46)は始状態ベクトルの平均に対する反転演算を表す. 上述の各演算を順に始状態ベクトルに作用させる. 最初のステップではターゲットベクトルに対する反転演算をおこなう. 式(2.45)を式(2.43)に作用させると, 図 2.8 の 1 ステップ目に対応する状態ベクトルの変化が生じる. この演算は, 等振幅の状態ベクトルのうち, '1'のデータが格納されているメモリの位相が反転させられる効果を有する.

本アルゴリズムは量子コンピュータでの実行を前提とする. 量子力学的現象では, 観測する際の物理的過程において, 確率振幅しか観測することができない. したがって, 状態ベクトルの要素が二乗され, 位相の反転は区別することができない. よって, 位相が反転したメモリの振幅とそれ以外のメモリの振幅を分配により変化させることで, 両者を区別できるようにする必要がある.

そこで, 次のステップでは平均に対する反転演算をおこなう. 式(2.46)を先の状態ベクトルに作用させると, 図 2.8 の 2 ステップ目に対応する状態ベクトルの変化が生じる. この演算は, 図 2.8 の中段図に示す点線に対して折り返す反転に相当し, 状態ベクトルの振幅を分配する効果を有する.

以上の操作により, 状態ベクトルがターゲットベクトルと同値となり, 探索が終了する. 実際の量子計算ではこの段階で観測が必要となるが, 本研究では観測の問題については取り扱わない. Grover の探索アルゴリズムでは, 探索を終えるまでに $O(\sqrt{N})$ 回オーダーの計算を必要とする. 図 2.8 の例では, ターゲットベクトルの反転演算 1 回と平均に対する反転演算 1 回の計 2 回の計算で探索が完了する. よって $O(\sqrt{4}) = O(2)$ 回の計算量となる. 他方, Grover アルゴリズムの特徴として, 状態ベクトルに対する振幅増幅機構が挙げられる. 状態ベクトルの振幅に着目すると, 始状態において等しくある振幅が, 反転演算を受けたアドレスに集まり, 増幅する性質があることがわかる. 後述するが, この性質は振幅増幅機構として幾何学的に詳細に研究されている.

上記手順の Matlab による実装例を図 2.9 に示す.

Algorithm 2 Grover search algorithm

```
MEMORY = [0; 0; 0; 1]
[n,m] = size(MEMORY)
S = ones(n,1) / sqrt(n)
Ut = eye(n) - 2*MEMORY*MEMORY'
Us = 2*S*S' - eye(n)
for i = 1 : around(sqrt(n))
    S = Us*Ut*S
end
```

Fig.2.9 Example of implementation of Grover search algorithm using Matlab. The algorithm requires the $O(\sqrt{N})$ step calculation.

これまでに Grover アルゴリズムの状態遷移を幾何学的に解析した研究がおこなわれている (Long, 2001), (Imre and Brazis, 2004). 本節では, Long により提案された一般化 Grover アルゴリズムについて概説する. 量子力学に従う状態ベクトルは, 各要素に振幅と位相をもつ複素数で定義され, 各要素の二乗は確率振幅を表している. ターゲットに振幅が集中している状態と集中していない状態の二状態を考えることで, この重ね合わせによって, 任意の状態を記述する. これはターゲットのメモリと非ターゲットのメモリからなる直交状態を考えることに対応する. 以上の条件を用いて, 任意の状態は式(2.47)で表される.

$$|\psi\rangle = \sin\beta|\tau\rangle + e^{j\delta_0} \cos\beta|\hat{\tau}\rangle \quad (2.47)$$

ここで, 正規直交基底は式(2.48)となる.

$$|\tau\rangle = [1 \ 0]^T, |\hat{\tau}\rangle = [0 \ 1]^T \quad (2.48)$$

式(2.48)の第一式はターゲットに振幅が集中している状態を表す基底ベクトル, 第二式は集中していない状態を表す基底ベクトルをそれぞれ表している. 式(2.47)のベクトルの複素数要素の振幅比と位相差を用いてリーマン球面を定義し, 図 2.10 の Bloch 球を定義する. 球面の北極点はターゲットに振幅が集中している状態 $|\tau\rangle$ を表し, 南極点は集中していない状態 $|\hat{\tau}\rangle$ を表す. 式(2.47)のベクトルの要素の振幅比は球面の北極点からの緯度を表し, 位相差は経度をそれぞれ表す. 以上の定義により, 任意の状態は, 球面上の点によって表される.

Long は Bloch 球面上での状態遷移の観点から, Grover アルゴリズムを二つの回転行列の形で拡張をおこなっている. 先の Grover アルゴリズムと対比させるため, 初期位相差を表す $\delta_0 = 0$ とし, 正規性を満たすよう振幅比を式(2.49)と定義する.

$$\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{N}}, \quad \cos\beta = \sqrt{\frac{N-1}{N}}, \quad \sin^2\beta + \cos^2\beta = 1 \quad (2.49)$$

以上を用いると、始状態ベクトルは式(2.50)となる。

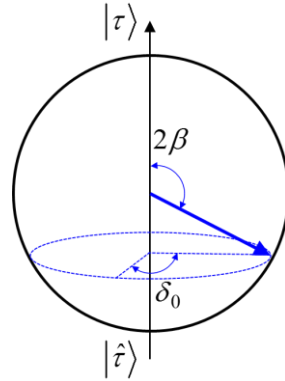


Fig.2.10 Bloch sphere mapping of state transition between targeted state and non-targeted state. Spherical location is designated as the ratio of complex amplitude and the phase difference.

$$|s\rangle = \sin \beta |\tau\rangle + \cos \beta |\hat{\tau}\rangle \quad (2.50)$$

Bloch 球面上での回転行列を式(2.51)で定義する。

$$U_t = I - (1 - e^{j\phi}) |\tau\rangle\langle\tau|, \quad U_s = (1 - e^{j\theta}) |s\rangle\langle s| - I \quad (2.51)$$

式(2.51)の第一式は、ターゲットベクトルに対する回転角 ϕ の回転演算 U_t であり、北極と南極を結んだ線を軸とする回転を表す。第二式は始状態ベクトルの平均に対する回転角 θ の回転演算 U_s であり、始状態ベクトルを軸とする回転を表す。

2・3 Grover アルゴリズムの古典的類推問題に関する基礎事項

これまでに Grover アルゴリズムを内在する力学系との古典的類推問題を扱う研究が多数おこなわれている (Patel, 2006), (Grover, 1997), (Grover and Sengupta, 2002). 多自由度連成振動系を扱った研究として, Grover, Patel が提案した代表的な二つのモデルがある。Grover は多自由度振動系を対象とし, うなり現象との対応から古典的類推問題を論じている (Grover and Sengupta, 2002). この系における Grover の振動モデルを図 2.11 に示す。Grover のモデルは, 例えば長さ L , 質量 M の大振子に対し, 長さ l , 質量 m/N の $N-1$ 個の小振子, 長さ l_1 , 質量 m_1/N の特殊小振子が並列に取り付けられた連成振子である。

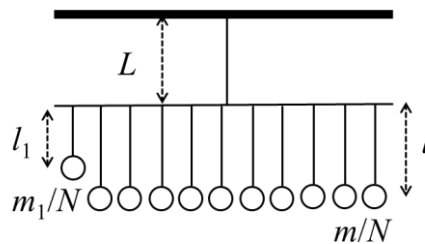


Fig.2.11 Schematic figure of multiple pendulum system. The system has a large pendulum, the $N-1$'s small pendulums and a short small pendulum.

図 2.11 の系におけるラグランジアンは式(2.52)となる.

$$L = \frac{1}{2} \left\{ M\dot{X}^2 - KX^2 + \frac{1}{N} [m_1 \dot{x}_1^2 - k_1 (x_1 - X)^2] + \frac{1}{N} \sum_{j=2}^N [m \dot{x}_j^2 - k (x_j - X)^2] \right\} \quad (2.52)$$

ここで、各振子のばね定数は式(2.53)で表される.

$$K = \left(M + \frac{m}{N} \right) \frac{g}{L}, \quad k = \frac{g}{l} m, \quad k_1 = \frac{g}{l_1} m_1 \quad (2.53)$$

ここで、小振子の平均位置、特殊小振動子への座標変換として式(2.54)を定義する.

$$\bar{x} = \frac{1}{N-1} \sum_{j=2}^N x_j, \quad \xi = \frac{1}{\sqrt{N}} x_1 \quad (2.54)$$

式(2.54)を式(2.52)のラグランジアンに代入し、 $O(1/N)$ オーダーの項を無視して整理すると、簡略化したラグランジアンは式(2.55)となる.

$$L_{red} \approx \frac{1}{2} \left\{ M\dot{X}^2 - KX^2 + m_1 \dot{\xi}^2 - k_1 \left(\xi - \frac{1}{\sqrt{N}} X \right)^2 + m \dot{\bar{x}}^2 - k (\bar{x} - X)^2 \right\} \quad (2.55)$$

式(2.55)は大振子、特殊小振子、小振子の平均位置の連成振動を表している. ここで、 N が非常に大きい極限を考えると、特殊小振子と大振子との連成が小さくなる. この時、大振子と平均小振子の連成振動の固有角振動数と特殊小振子の固有角振動数を独立に設計することができ、両者の間でうなりの条件を与えることができる. 大振子と平均小振子の部分系に対する固有角振動数を ω_+ , ω とすると、特殊小振動子の固有角振動数 ω_1 を、 ω_+ , ω のどちらか一方と等しくすることで本条件を満たすことができる. 連成振動のモードは平均小振子の運動を代表するため、うなりによって、平均小振子と特殊小振子の間で周期的な振動エネルギーの移動現象が発生する.

2・4 本論文で用いる主な記号・単位

E : 大振動子の全エネルギー [J]
 ε_1 : 衝突振動子の全エネルギー [J]
 ε_2 : 非衝突振動子の全エネルギー [J]
 K : 大振動子ばね定数 [N/m]
 k_1 : 衝突小振動子ばね定数 [N/m]
 k_2 : 非衝突小振動子ばね定数 [N/m]
 M : 大振動子の質量 [kg]
 m_1 : 衝突振動子の質量 [kg]
 m_2 : 非衝突振動子の質量 [kg]
 t : 時間 [s]
 Δt : 衝突周期 [s]
 X : 大振動子の変位 [m]
 x_1 : 衝突小振動子の変位 [m]
 x_2 : 非衝突小振動子の変位 [m]
 V : 大振動子の速度 [m/s]
 v_1 : 衝突小振動子の速度 [m/s]
 v_2 : 非衝突小振動子の速度 [m/s]
 C_e : 大振動子の外部減衰係数 [N/(m/s)]
 C_i : 大振動子の内部減衰係数 [N/(m/s)]
 c_{1e} : 衝突小振動子の外部減衰係数 [N/(m/s)]
 c_{1i} : 衝突小振動子の内部減衰係数 [N/(m/s)]
 c_{2e} : 非衝突小振動子の外部減衰係数 [N/(m/s)]
 c_{2i} : 非衝突小振動子の内部減衰係数 [N/(m/s)]

K : 端部可動振動子のばね定数 [N/m]
 k_b : 等質量二自由度振動系の弾性支持部のばね定数 [N/m]
 k_c : 等質量二自由度振動系の結合ばね定数 [N/m]
 M : 端部可動振動子の質量 [kg]
 m : 等質量二自由度振動系の第一および第二質量 [kg]
 t : 時間 [s]
 X : 端部可動振動子の変位 [m]
 x_1 : 等質量二自由度振動系の第一質量の変位 [m]
 x_2 : 等質量二自由度振動系の第二質量の変位 [m]
 V : 端部可動振動子の速度 [m/s]
 v_1 : 等質量二自由度振動系の第一質量の速度 [m/s]
 v_2 : 等質量二自由度振動系の第二質量の速度 [m/s]
 C_i : 端部可動振動子の内部減衰係数 [Ns/m]
 C_e : 端部可動振動子の外部減衰係数 [Ns/m]
 c_{bi} : 等質量二自由度振動系の弾性支持部の内部減衰係数 [Ns/m]
 c_{ci} : 等質量二自由度振動系の結合部の内部減衰係数 [Ns/m]
 c_{me} : 等質量二自由度振動系の外部減衰係数 [Ns/m]

m : 主系およびモード制御振動子の質量[kg]

k : 主系のばね定数[N/m]

k_b : モード制御振動子のばね定数[N/m]

k_c : モード制御振動子のばね定数[N/m]

$x_i (i = 1, 2, \dots, N)$: 主系の質量の変位[m]

x_c : モード制御振動子の変位[m]

t : 時間[s]

第 3 章 三自由度内部共振衝突振動系における概周期振動 と振動エネルギー移動

3・1 緒言

一つの大振動子に並列に複数の小振動子が接続された多自由度非線形振動系の定量的な理解は、インフラ設備や構造物の新しいセンシング方法の設計において重要となる。

特に振動子の固有振動数 ω_i ($i=1,2,\dots,n$: n は自由度の数) が $\sum m_i \omega_i \approx 0$ (m_i は整数であり、そのうち少なくとも二つは 0 ではない) の条件を満たす内部共振条件を有する場合、Bajaj らの解析(Bajaj and Vyas, 2006)が示すように、多体振動子間にはパラメトリック振動に特有なモード間のエネルギー移動である概周期振動や分数調波振動等の非線形系に特徴的な現象が観察されており^{(2)~(7)}、振動子間の相互作用について、より定量的な理解が望まれる。

従来、非線形多体内部共振系の解析には、平均化法や調和バランス法等の微分方程式の近似解によって、これらの系が示す概周期振動や分数調波振動現象の説明が試みられてきた(山本, 安田, 1976),(山本他, 1977),(山本他, 1979),(石田, 山本, 1986),(安田他, 1986),(葉, 安田, 1986),(今村, 2004)。しかし、一般に微分方程式の近似解は、時間発展による真の解からのかい離が避けられず、長時間にわたる振動現象の特徴を理解するには適さない場合が多い。

一方、一つの大振動子に並列に複数の小振動子が接続された多自由度非線形振動系は、被接続振動子と接続多体振動子全体の重心の二体問題が含まれるものの、本質的には三体問題であることから、一般には、解析的な理解が難しい。Bajaj らの例でも、振動子数の増加に伴い系の挙動が複雑化し、カオスが観察されることが指摘されており、初期条件の違いにより振動の振る舞いに大きな変化が現れる。

非線形振動の一種である衝突振動系は、衝突間の系の時間発展が線形であるため、区間解が解析的に導出できる。よって求解の際に近似を用いないため、長時間の時間発展に現れる系の特徴を理解するうえで効力を発揮する(今村, 2004),(前澤, 渡部, 1975)。また非線形の原因となる衝突時間を微小時間として取り扱えることから、特殊な条件下において、系に含まれる大振動子の影響を残りの並列に接続される小振動子間の相互作用から切り離すことが可能となる。これにより、例えば本章の三振動子からなる系から二小振動子間の相互作用のみを議論することが可能となる。

Patel は、一つの大振動子に並列に接続された二体衝突小振動系と量子情報におけるファイル検索アルゴリズムである Grover アルゴリズム(Grover and Sengupta, 2002)との類似性から、固有振動数の比が $p+1/2:1/2$ (p : 自然数) となる内部共振の条件下で、非衝突小振動子のエネルギーが衝突小振動子に集中する現象が存在することを指摘した(Patel, 2006)。これは特殊な非線形多体振動現象が量子アルゴリズムと同様に状態ベクトルに対する演算子の列による操作で表現されることを示唆している。このことから非線形系に特徴的な現象の多くが、演算子の並びからなるアルゴリズムの働きとして理解されることが期待される。

そこで本章では、一つの大振動子に並列に接続された二体衝突振動系の振る舞いを表現する複素状態遷移行列からなる演算子の定式化をおこない、演算子が持つ特徴から、大振動子の状態が小振動子間の相互作用に影響しない一般条件を導出する。三体振動系から抽出した二体小振動子間の相互作用を表す演算子から、相互作用を Bloch 球によって表現する。加えて、二小振動子が同位相、もしくは逆位相で振動する初期条件下において、小振動子全体のエネルギーが、周期的に一方に完全移動する現象(完全概周期振動)が起こる条件について議論をおこなう。衝突振動は一般に振動壁の位置に大きく依存する。本章では衝突周期と初期位置を固定することとし、釣合位置における衝突のみ議論する。

3・2 解析モデル

3・2・1 三自由度衝突振動モデル

図 3.1 に本論文において対象とする三自由度衝突振動モデルを示す．三自由度衝突振動モデルは質量 M ，ばね定数 K を持つ一つの大振動子に対し，質量 m_1 ，ばね定数 k_1 を持つ衝突小振動子と質量 m_2 ，ばね定数 k_2 を持つ非衝突小振動子が並列に結合したモデルである．変位は各振動子の釣合位置からとり，大振動子の変位を X ，衝突小振動子の変位を x_1 ，非衝突小振動子の変位を x_2 とする．このモデルにおいて質量 m_1 を持つ衝突小振動子に対し，ある衝突周期 Δt で外部の壁から完全弾性衝突が与えられる．壁を任意に出し入れさせることにより，衝突位置は各振動子が釣合位置に来た時に限られる．これより Δt は小振動子の周期の整数倍となる．また小振動子全体の質量中心の座標を $\bar{x} = (m_1 x_1 + m_2 x_2) / (m_1 + m_2)$ として定義する．

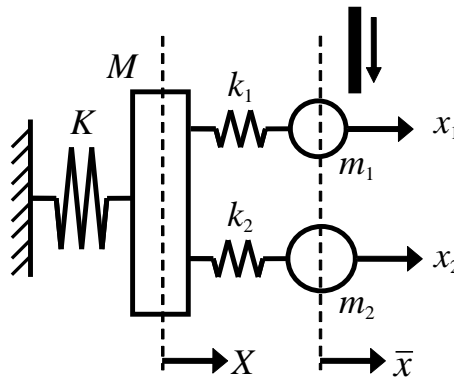


Fig. 3.1 Multi-vibro-impact system with two identical, small oscillators coupled to one large oscillator.

3・2・2 運動方程式

減衰を考慮しないエネルギー保存系における図 3.1 の三体衝突振動モデルのラグランジアンを(3.1)に示す．

$$L = \frac{1}{2} M \dot{X}^2 - \frac{1}{2} K X^2 + \sum_{i=1}^2 \left[\frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 - \frac{1}{2} k_i (x_i - X)^2 \right] \quad (3.1)$$

これより各振動子の運動方程式を求め，代表長さを X_r ，代表時間を T_r として無次元化する．無次元化した運動方程式は次式で与えられる．

$$\begin{cases} M^* \ddot{X}^* = -\{K^* + \gamma + 1\} X^* + x_1^* + \sqrt{\gamma} x_2^* \\ \ddot{x}_1^* = -x_1^* + X^* \\ \ddot{x}_2^* = -x_2^* + \sqrt{\gamma} X^* \end{cases} \quad (3.2)$$

ここで $\dot{} = d/dt^*$ は無次元化時間による微分であり，代表時間は $T_r = 1/\sqrt{k_1/m_1}$ とした．また代表長さは単位長さとし， m_1 を質量の代表とした．次に衝突振動子と非衝突振動子は同じ固有振

動数を持つとし、ばね定数比および質量比の間に $k_2 = \gamma k_1$, $m_2 = \gamma m_1$ の関係があるとした。大振動子と小振動子のばね定数比および質量比を $K^* = K/k_1$, $M^* = M/m_1$ とした。さらに座標変換 $x_1^* = x_1^*$, $x_2^* = \sqrt{\gamma} x_2^*$ をおこなった。この系の固有角振動数は

$$\begin{aligned}\omega_{\pm}^2 &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{K^* + \gamma + 1}{M^*}\right) \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left(1 + \frac{K^* + \gamma + 1}{M^*}\right)^2 - \frac{K^*}{M^*}} \\ \omega_1^2 &= 1\end{aligned}\tag{3.3}$$

となる。

3・3 複素状態遷移行列の定式化

3・3・1 固有モード空間への変換行列

本章の三体衝突振動系における運動方程式(3.2)から固有モード空間 $|e\rangle = [e_+, e_-, e_t]$ を定義する。 e_+ , e_- は大振動子と小振動子の質量中心とを二自由度連成振動系として見た場合の固有モードであり、 e_+ , e_- はそれぞれ同位相モードと逆位相モードに対応する。また e_t は小振動子の質量中心からずれた振動子に対する振動モードを与える。位置ベクトルを $|x\rangle = [X^*, x_1^*, x_2^*]$ とおくと、固有モード空間と位置ベクトルの間の写像は両者の関係 $|x\rangle = P|e\rangle$ として、 P が定義される。

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 - \omega_+^2 & 1 - \omega_-^2 \\ -\sqrt{\gamma} & 1 & 1 \\ 1 & \sqrt{\gamma} & \sqrt{\gamma} \end{bmatrix}\tag{3.4}$$

また P の逆行列は

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-\sqrt{\gamma}}{1+\gamma} & \frac{1}{1+\gamma} \\ 1 & \frac{(\omega_-^2 - 1)}{(1+\gamma)(\omega_-^2 - \omega_+^2)} & \frac{(\omega_-^2 - 1)\sqrt{\gamma}}{(1+\gamma)(\omega_-^2 - \omega_+^2)} \\ \frac{\omega_-^2 - \omega_+^2}{\omega_-^2 - \omega_+^2} & \frac{(1-\omega_+^2)}{(1+\gamma)(\omega_-^2 - \omega_+^2)} & \frac{(1-\omega_+^2)\sqrt{\gamma}}{(1+\gamma)(\omega_-^2 - \omega_+^2)} \end{bmatrix}\tag{3.5}$$

となる。

一方、速度ベクトルを $|v\rangle = [V^*, v_1^*, v_2^*]$, 速度固有モード空間を $|\dot{e}\rangle = [\dot{e}_+, \dot{e}_-, \dot{e}_t]$ とおくと両者は $|v\rangle = P|\dot{e}\rangle$ の関係がある。

3・3・2 複素状態ベクトル

式(3.2)の無次元運動方程式の解から求められる位置の複素状態ベクトル $|\psi_x\rangle$ は、位置ベクトル $|x\rangle$, 速度ベクトル $|v\rangle$ を用いて次式で与えられる。

$$|\psi_x\rangle = |x\rangle - iPQ^{-1}P^{-1}|v\rangle \quad (3.6)$$

これに対し、式(3.2)の微分方程式の解から速度の複素状態ベクトルも同様に定義でき、

$$|\psi_v\rangle = |v\rangle + iPQP^{-1}|x\rangle \quad (3.7)$$

と書ける。ここで、

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_+ & 0 \\ 0 & 0 & \omega_- \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

である。系の状態は(3.6), (3.7)で表される複素状態ベクトルによって記述される。

3・3・3 時間発展演算子

前節で導入した複素状態ベクトル $|\psi_x\rangle$ に P^{-1} を作用させると、複素固有モード空間 $|\psi_e\rangle = |e\rangle - iQ^{-1}|\dot{e}\rangle$ に写る。複素固有モード空間における微分演算子は、 iQ に等しいことから、複素固有モード空間における時間発展を表す演算子は、

$$I_s = \begin{bmatrix} e^{i\Delta t^*} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\omega_+\Delta t^*} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\omega_-\Delta t^*} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

と表される。ここで Δt^* は前の衝突から次の衝突までの時間間隔である衝突周期を意味する。

3・3・4 衝突演算子

外部の壁による完全弾性衝突は速度空間での速度の反転を意味する。ここでは衝突に要する時間が非常に小さいとすると、完全弾性衝突する直前と直後の複素速度状態ベクトルを結ぶ演算子 I_t は、この間の衝突小振動子における位相の跳びによって、

$$I_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i(\pi-2\theta_1)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

と表すことができる。ここで θ_1 は、衝突直前における速度の複素状態ベクトルの衝突小振動子成分の持つ釣合位置を基準とした位相であり、 $\exp[i(\pi-2\theta_1)]$ は完全弾性衝突による衝突小振動子の位相の跳びを意味する。またこの衝突項を他の対角項に置くことにより、他の振動子に対する衝突も表現できる。

3・3・5 複素状態遷移行列による系の状態の記述

以上に定義した演算子から成る複素状態遷移行列によって系の状態変化を記述する．複素状態ベクトルは位置の複素状態ベクトル $|\psi_x\rangle$ ，速度の複素状態ベクトル $|\psi_v\rangle$ のどちらを用いても良い．ここでは速度の複素状態ベクトルを例にとる．ある時刻の系の状態 X^* ， x_1^* ， x_2^* ， V^* ， v_1^* ， v_2^* から定められた任意の複素状態ベクトルを $|\psi_v\rangle$ とすると， Δt^* 秒後の系の状態は $|\psi'_v\rangle = P I_s P^{-1} |\psi_v\rangle$ によって表される．またさらに衝突小振動子に弾性衝突を加える場合には，衝突後の複素状態ベクトルは衝突演算子を掛けた $|\psi''_v\rangle = I_t |\psi'_v\rangle$ によって表現される．衝突を U_t ，時間発展を U_s とすれば衝突から Δt^* 秒後の状態を表す衝突振動演算子 $U = U_s U_t$ が得られる．

これより，衝突周期をパラメータとする衝突振動における複素状態ベクトルの離散的な変化を複数の演算子の掛け合わせによって表現できる．本章では演算子の並びに内在する規則性を特に“波動アルゴリズム”と呼び，本章で取り扱う三体衝突振動系に現れる現象について，以下で考察を行う．

3・4 小振動子間の相互作用

3・4・1 衝突振動演算子に内在する二体間相互作用

一般に三体間の相互作用は複雑な挙動を示し、小振動子二体間における規則的な相互作用は、カオス的な挙動に隠されてしまうことから議論することが難しい．一方，多自由度系を構成する各線形系の固有振動数が整数比となる内部共振現象においては，概周期振動や分数調波振動といった特徴のある非線形現象が観察される．このことから，内部共振条件が，振動子間の複雑な挙動を抑える働きと何らかの関係を持つことが示唆される．

そのため本章では， Δt^* 秒ごとに衝突小振動子が弾性衝突を伴う系の状態変化を衝突振動演算子 U により表現し，衝突時における離散的な系の状態において，大振動子が他の小振動子の挙動に影響を与えないで独立に振舞う内部共振条件を導出する．次にこの条件下で衝突振動演算子に内在する衝突小振動子と非衝突小振動子間の二体間相互作用に起因した完全概周期振動現象を波動アルゴリズムの立場から考察する．

3・4・2 衝突振動演算子の成分とその意味

衝突振動演算子 $U = U_s U_t$ の各成分 $[a_{i,j}]$ は

$$a_{11} = \frac{(1 - \omega_+^2)e^{i\omega_+\Delta t^*} + (\omega_-^2 - 1)e^{i\omega_-\Delta t^*}}{(\omega_-^2 - \omega_+^2)}$$

$$a_{12} = \frac{(\omega_+^2 - 1)(\omega_-^2 - 1)(e^{i\omega_-\Delta t^*} - e^{i\omega_+\Delta t^*})}{(1 + \gamma)(\omega_-^2 - \omega_+^2)} e^{i(\pi - 2\theta_1)}$$

$$a_{13} = \frac{(\omega_+^2 - 1)(\omega_-^2 - 1)(e^{i\omega_-\Delta t^*} - e^{i\omega_+\Delta t^*})\sqrt{\gamma}}{(1 + \gamma)(\omega_-^2 - \omega_+^2)}$$

$$a_{21} = \frac{e^{i\omega_+\Delta t^*} - e^{i\omega_-\Delta t^*}}{\omega_-^2 - \omega_+^2}$$

$$\begin{aligned}
a_{22} &= \frac{e^{i(\pi-2\theta_1)}}{(1+\gamma)(\omega_-^2 - \omega_+^2)} \{ (\omega_-^2 - \omega_+^2)\gamma e^{i\Delta t^*} + (\omega_-^2 - 1)e^{i\omega_+ \Delta t^*} + (1 - \omega_+^2)e^{i\omega_- \Delta t^*} \} \\
a_{23} &= \frac{\sqrt{\gamma}}{(1+\gamma)(\omega_-^2 - \omega_+^2)} \{ (\omega_+^2 - \omega_-^2)e^{i\Delta t^*} + (\omega_-^2 - 1)e^{i\omega_+ \Delta t^*} + (1 - \omega_+^2)e^{i\omega_- \Delta t^*} \} \\
a_{31} &= \frac{(e^{i\omega_+ \Delta t^*} - e^{i\omega_- \Delta t^*})\sqrt{\gamma}}{\omega_-^2 - \omega_+^2} \\
a_{32} &= \frac{\sqrt{\gamma}}{(1+\gamma)(\omega_-^2 - \omega_+^2)} e^{i(\pi-2\theta_1)} \{ (\omega_+^2 - \omega_-^2)e^{i\Delta t^*} + (\omega_-^2 - 1)e^{i\omega_+ \Delta t^*} + (1 - \omega_+^2)e^{i\omega_- \Delta t^*} \} \\
a_{33} &= \frac{1}{(1+\gamma)(\omega_-^2 - \omega_+^2)} \{ (\omega_-^2 - \omega_+^2)e^{i\Delta t^*} + \gamma(\omega_-^2 - 1)e^{i\omega_+ \Delta t^*} + \gamma(1 - \omega_+^2)e^{i\omega_- \Delta t^*} \}
\end{aligned} \tag{3.11}$$

と表される．この演算子の各要素は， Δt^* 秒ごとの衝突振動⁽¹²⁾に伴う系の状態変化における各振動子間の相互作用を表す．ある時刻の複素状態ベクトルは衝突後，任意の時間発展が施される．その際，系を離散的に捉えると， a_{12} は衝突小振動子から大振動子への相互作用を， a_{21} は大振動子から衝突小振動子との相互作用を， a_{13} は非衝突小振動子から大振動子への相互作用を， a_{31} は大振動子から非衝突小振動子への相互作用を表す． $a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{31}$ の値が大きければ任意時刻経過後の小振動子の状態は大振動子と小振動子との間の相互作用によって支配されていることを意味する．

これに対し， a_{23} ， a_{32} は衝突小振動子と非衝突小振動子の相互作用を表す．系を離散力学系として捉えた場合，この値が $a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{31}$ と比較して大きければ，衝突周期の時刻経過後に現れる小振動子の状態は，衝突小振動子と非衝突小振動子との間の相互作用が主であることを意味する．

3・4・3 小振動子間の相互作用に着目した内部共振条件の導出

振動子間の相互作用は時々刻々変化しているが，ある離散的な時間に着目することで，小振動子間で起こる振る舞いが大振動子の影響を受けない状態が現れる．そこで本節では，衝突時の離散的な複素状態ベクトルにおいて，大振動子とは独立に振舞う小振動子間の相互作用を引き起こす内部共振の発生条件を議論する．そのため，大振動子と小振動子間の相互作用である $a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{31}$ 成分が0である場合について考察をおこなう．

式(3.11)の大振動子と小振動子の相互作用を表す項 $a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{31}$ に現れる共通の項から，先の条件を満たす十分条件として次式が得られる．

$$(\omega_+ - \omega_-)\Delta t^* = 2\pi q \tag{3.12}$$

ここで q は任意の自然数である．

一方，内部共振は，多自由度非線形振動において各振動子の振動数比が整数比で表される場合に生じる非線形現象である．本章の系が内部共振系である場合， $e > f > g$ を満たす自然数において， $\omega_+ : \omega_f : \omega_- = e : f : g$ とかけ，式(3.3)の条件から，

$$\omega_+ = e/f, \omega_l = 1, \omega_- = g/f \quad (3.13)$$

となる. よって, 式(3.12)より, 以下が成り立つ.

$$(e-g)\Delta t^* = 2\pi q \quad (3.14)$$

以上の考察から, $\omega_+, \omega_-, \Delta t$ がこれらの条件を満足する場合, 大振動子の状態に依らず, 小振動子間相互作用のみに起因した内部共振現象が現れることが期待される.

式(3.13)を満たす内部共振系について, 数値計算した例を図 3.2, 3.3 に示す.

$\omega_+ = 2.5, \omega_- = 0.5, \gamma = 15$ とし, 横軸に時間, 縦軸に各行列要素を示す. 各行列要素は複素数であるので, その絶対値をとって評価をおこなう. 図 3.2 に大振動子と小振動子間の相互作用の行列要素 $a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{31}$ の時間変化を示す. 各行列要素は時間とともに周期的に変化し, 時間 π の整数倍において各行列要素が全て 0 となる. これは(3.14)の条件を満たす. よってこの系の振動の時間発展を衝突周期が π の整数倍とする離散的な写像として扱った場合, あたかも小振動子と大振動子の振る舞いを独立に議論することができ, 三体問題から小振動子間の相互作用である二体間の運動を抽出することができる.

一方, 図 3.3 は図 3.2 と同じの条件の下で計算した $a_{22}, a_{23}, a_{32}, a_{33}$ の行列要素の時間変化を示す. これらの行列要素も時間に伴い周期的な変化を示す. 特に衝突振動子と非衝突振動子間の相互作用である a_{23}, a_{32} は時刻 2π の奇数倍において極大値をとる. この時刻において大振動子と小振動子の間の相互作用行列要素が 0 であることから, 時刻 π の偶数倍の衝突周期を与える離散的な状態発展においては, 小振動子間の相互作用に起因する現象がより明確に現れることが期待される.

他方, 式(3.14)が満たされない場合, 例えば衝突周期が π の整数倍からずれた系においては, 大振動子と二小振動子間の相互作用行列要素が 0 とならず, 離散的三体問題の振動応答が顕在化する. 衝突周期を僅かにずらした場合, 離散的二体問題に摂動が加わった状態として解析することができ, 系はある摂動までロバスト性を持った準周期振動として振舞う. しかし, 衝突周期の大きなずれに対しては系にカオスの挙動が顕在化する.

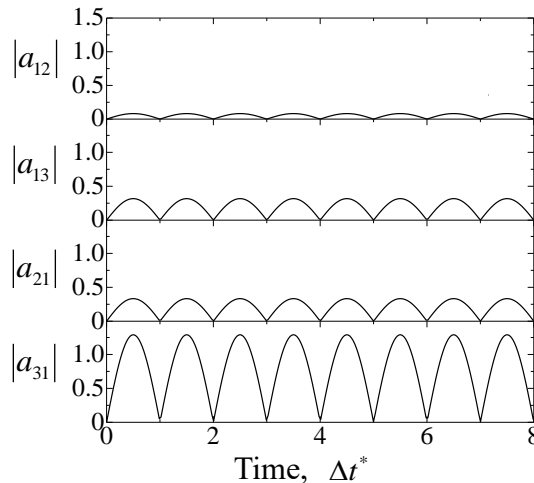


Fig. 3.2 Matrix elements of interaction between the large oscillator and the small oscillators.

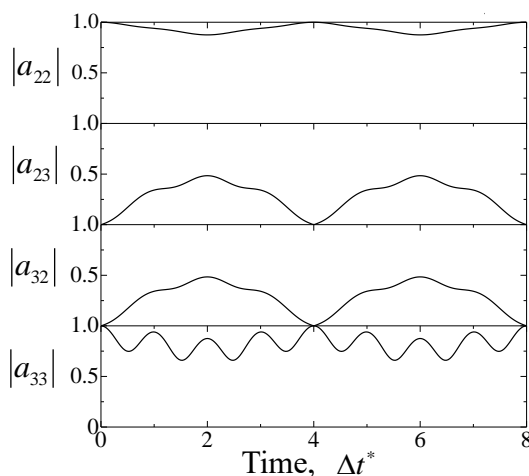


Fig. 3.3 Matrix elements of interaction between the small oscillators.

3・5 衝突振動系に現れる小振動子間の概周期振動

3・5・1 二つの回転演算子と Bloch 球

前節でも述べたように、式(3.13)を満たす内部共振系において、衝突周期が 2π の奇数倍となった場合、衝突振動演算子 $U = U_s U_t$ における大振動子と小振動子の相互作用を表す $a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{31}$ 成分が0となり、逆に小振動子間の相互作用を表す a_{23}, a_{32} 成分が極大値をとることから、 U_s と U_t から小振動子二体間の相互作用を表す 2×2 行列を独立に取り出すことができる。

いま小振動子における速度の複素状態ベクトル $|\psi_v\rangle = {}^t[\psi_{v1}, \psi_{v2}]$ において、衝突小振動子もしくは非衝突振動子のいずれかが速度を持ち、他の一方が静止する状態を $|\psi_{v1}\rangle = {}^t[\psi_{v1}, 0]$ および $|\psi_{v2}\rangle = {}^t[0, \psi_{v2}]$ と表し、基底ベクトルとする。この際、 $\phi = g\Delta t^*/f$ 、 $\sin \beta = 1/\sqrt{1+\gamma}$ とおくと、 U_s 、 U_t から取り出した小振動子の時間発展、弾性衝突を表すそれぞれの演算子は以下のように書き改められる。

$$U_s = \begin{bmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} b_{22} &= e^{i\Delta t^*} + (e^{i\phi} - e^{i\Delta t^*}) \sin^2 \beta \\ b_{23} &= b_{32} = (e^{i\phi} - e^{i\Delta t^*}) \sin \beta \cos \beta \\ b_{33} &= e^{i\phi} + (e^{i\Delta t^*} - e^{i\phi}) \sin^2 \beta \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$U_t = \begin{bmatrix} e^{i(\pi-2\theta_1)} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

これらを Pauli の回転行列(山内, 1957)によって表現すると

$$\begin{aligned}
U_s &= \left(\frac{1+e^{i\phi}}{2}\right)\sigma_0 + \frac{1-e^{i\phi}}{2}(-\sin 2\beta \cdot \sigma_1 + \cos 2\beta \cdot \sigma_3) \\
&= e^{\frac{i\phi}{2}}(\cos \beta \cdot \sigma_0 + i \sin \beta \cdot \sigma_2)(\cos \frac{\phi}{2} \cdot \sigma_0 - i \sin \frac{\phi}{2} \cdot \sigma_3) \\
&\quad (\cos \beta \cdot \sigma_0 - i \sin \beta \cdot \sigma_2)
\end{aligned} \tag{3.17}$$

$$U_t = e^{\frac{i\pi-2\theta_1}{2}} \left(\cos \frac{\pi-2\theta_1}{2} \cdot \sigma_0 + i \sin \frac{\pi-2\theta_1}{2} \cdot \sigma_3 \right) \tag{3.18}$$

となる．本章における小振動子間の状態の変化は，速度の複素状態ベクトルにおける小振動子成分である $|\psi_v\rangle = [\psi_{v1}, \psi_{v2}]$ の振幅比と位相差によって表される．いま振幅比を $|\psi_{v2}/\psi_{v1}| = \tan \varphi$ ，位相差を δ とすると，正規化された速度の複素状態ベクトルは $\hat{\psi}_v = [\psi_{v1}, \psi_{v2}] / \sqrt{\psi_{v1}^2 + \psi_{v2}^2}$ と表され， 2φ を緯度， δ を経度とする単位球である Bloch 球上に張られる．この Bloch 球の北極は衝突振動子のみが動き，非衝突振動子が止まった状態 $|\psi_{v1}\rangle$ ($v_1 \neq 0, v_2 = 0$) に対応し，南極はその逆の状態 $|\psi_{v2}\rangle$ ($v_1 = 0, v_2 \neq 0$) に対応する．このことから，極では各振動子に小振動子全体のエネルギーが集中する．図 2.4 に示すように U_t は Bloch 球の極軸周りに $\theta = \pi - 2\theta_1$ の回転を表し， U_s は南極から子午線周りに 2β 傾いた状態 $|s\rangle$ を中心とする軸 ($|s\rangle$ 軸) 周りに ϕ の回転を表す (Luo, et al, 2008)．また $|s\rangle$ は両振動子が同位相，同じ速度で振動する状態 $|s\rangle = [\sin \beta, \cos \beta]$ を表す． U_t ， U_s とともに Bloch 球上の回転を意味することから，式(3.17)と式(3.18)の合成から

$$\begin{aligned}
U &= U_s U_t = e^{i\left(\frac{\phi}{2} + \frac{\pi-2\theta_1}{2}\right)} \\
&\times \left\{ \left(\cos \frac{\phi}{2} \cos \frac{\pi-2\theta_1}{2} + \sin \frac{\phi}{2} \sin \frac{\pi-2\theta_1}{2} \cos 2\beta \right) \sigma_0 \right. \\
&\quad - i \sin \frac{\phi}{2} \cos \frac{\pi-2\theta_1}{2} \sin 2\beta \cdot \sigma_x \\
&\quad - i \sin \frac{\phi}{2} \sin \frac{\pi-2\theta_1}{2} \sin 2\beta \cdot \sigma_y \\
&\quad \left. + i \left(\cos \frac{\phi}{2} \sin \frac{\pi-2\theta_1}{2} - \sin \frac{\phi}{2} \cos \frac{\pi-2\theta_1}{2} \cos 2\beta \right) \cdot \sigma_z \right\}
\end{aligned} \tag{3.19}$$

と表される．衝突周期 Δt^* および衝突による位相の跳び θ が一定であった場合， U は固定軸を一定角度で回る回転演算子となり，小振動子間に周期的なエネルギー移動や位相の変化が生じることが示唆される．

以降では， $\omega_+ = e/f$ ， $\omega_- = g/f$ ， $\omega_i = 1$ の内部共振を満たす三体振動系において，一つの小振動子を釣合位置において完全弾性衝突させた際に，大振動子とは独立に小振動子間の相互作用が発生する場合に限って議論を行う．

3・5・2 小振動子間の完全概周期振動が発生する条件

本節では，衝突小振動子が，釣合位置で完全弾性衝突する場合において，小振動子間の全エネルギーが，衝突小振動子もしくは非衝突振動子にほぼ集中するような状態が周期的に交互に現

れる完全概周期振動が現れる条件について考察をおこなう。本章の衝突振動において、完全概周期振動が起こる場合、速度の複素状態ベクトル $|\psi_v\rangle$ は、 $|v_1\rangle$ と $|v_2\rangle$ を通る大円上を描く。Grover アルゴリズムとのアナロジーから、衝突振動演算子がこの条件を満たすのは、 $\theta = \phi$ となる場合のみである(Long, et al, 2001)。釣合位置における完全弾性衝突による位相の跳びは常に $\theta_1 = \pi$ となることから、完全概周期振動となる条件は、 ϕ が π の奇数倍となる場合に限られる。一方、釣合位置において完全弾性衝突した場合、衝突周期 Δt^* は π の整数倍となるが、奇数倍の場合は、式(3.15)より、 $U_s = -E$ (E : 単位行列)となることから、衝突における衝突振動演算子は、Bloch 球の極軸周りの $\theta = \pi$ 回転となり、衝突小振動子と非衝突小振動子は、同位相 ($\delta = 0$)、もしくは逆位相 ($\delta = \pi$) 状態を繰り返す。つまり、釣合位置において、衝突壁が常駐していた場合には、概周期振動は起こらない。よって、衝突周期 Δt^* が π の偶数倍であり、かつ $\phi = g\Delta t^* / f = 2\pi qg / (e - g)$ が π の奇数倍となる場合には、これを必要条件として小振動子間に完全概周期振動が起こる。この際 U は、図 3.4 の一点鎖線で表される y 軸周りの回転を意味する

$$U = U_s U_t = -(\cos 2\beta \cdot \sigma_0 + i \sin 2\beta \cdot \sigma_y) \quad (3.20)$$

となる。また完全概周期振動となるのは、 y 軸周りの大円となることから、衝突小振動子と非衝突小振動子は初期状態において同位相 ($\delta = 0$)、もしくは逆位相 ($\delta = \pi$) 状態に限られる。それ以外の場合においては、 y 軸周りの小円となることから、完全ではない概周期振動となる。

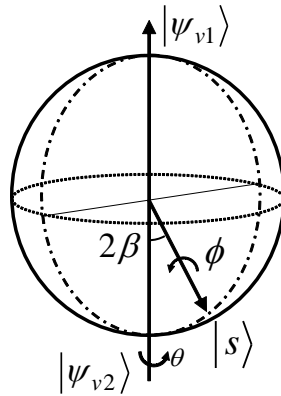


Fig. 3.4 State vectors of the periodic perfect energy transfer oscillation on the Bloch sphere.

表 3.1 に小振動子間の完全概周期振動の条件を満たす三体振動子間の角振動数比の具体的な例を挙げる。従来の内部共振系で議論される簡単な整数比とは異なり減衰を伴わない場合においては多数の複雑な整数比が存在することが分かる。本章の離散力学系においては、小振動子間の振動と大振動子間の振動は独立に振舞うため、大振動子のエネルギーは小振動子には集中しないことに注意されたい。

Table 3.1 Example of optimal ratio of angular frequency for periodic perfect energy transfer.

q	g	f	e	$\frac{2qg}{e-g}$	ω_+	ω_-	Δt	ϕ
1	1	2	3	1	1.5	0.5	2π	π
2	1	2	5	1	2.5	0.5	2π	π
2	1	4	5	3	1.25	0.25	12π	3π
3	1	2	7	1	3.5	0.5	2π	π
3	1	6	7	5	1.167	0.167	30π	5π
4	1	2	9	1	4.5	0.5	2π	π
5	1	2	11	1	5.5	0.5	2π	π
6	1	2	13	1	6.5	0.5	2π	π
6	1	4	13	3	3.25	0.25	12π	3π
8	1	4	17	3	4.25	0.25	12π	3π
8	1	8	17	7	2.125	0.125	56π	7π
5	7	10	17	7	1.7	0.7	10π	7π

3・6 数値計算

3・6・1 自由振動応答

3・5・2 節で導出した周期的な完全概周期振動の条件の下で計算した衝突振動の様子を図 3.5 に示す。図の横軸は時間 t を、縦軸は各振動子の釣合位置からの変位を表す。また図の上段は大振動子、中段は衝突振動子、下段は非衝突振動子を示す。計算に用いた初期条件は $X=0$, $x_1=0$, $x_2=0$, $V=0$, $v_1=1$, $v_2=1$ である。また質量比は $\gamma=15$, 衝突周期は $\Delta t=2\pi$, 角振動数は $\omega_+=2.5, \omega_-=0.5$ とした。

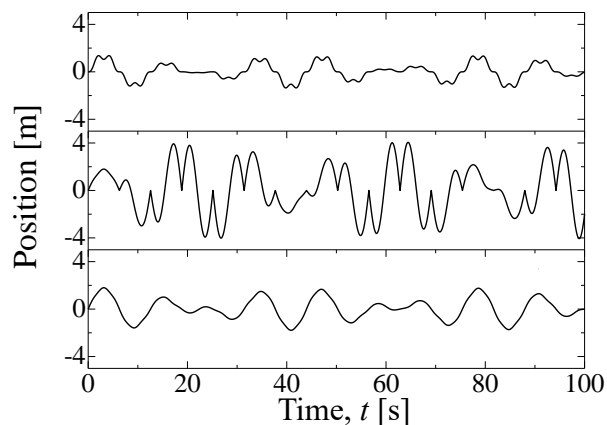


Fig. 3.5 Time evolution of each oscillator under periodic perfect energy transfer condition.

図 3.5 から衝突小振動子の振幅が大きい時点において、非衝突振動子の振幅が最小の節になっており、非衝突小振動子から衝突小振動子へのエネルギーの移動が観察される。したがって、小振動子間にゆるやかな振幅の変調を伴った周期的な完全概周期振動が確認される。この振幅変化は、衝突によって質量中心の位相からずれた小振動子に生じる ω_i のモード励振による。

図 3.6 には各小振動子の持つエネルギーの時間発展を示す。図上段は衝突小振動子、下段は非衝突小振動子に対応する。初期の変位と速度は二小振動子ともに同じであるため、質量の大きい非衝突小振動子は衝突小振動子より大きい初期エネルギーを持つ。4回の衝突を伴った振動の後に非衝突小振動子の全エネルギーは衝突小振動子に移動する。その後、集まった全エネルギーは同様の衝突操作と振動の時間発展により、非衝突振動子に集中する。これらの過程を繰り返し、衝突小振動子と非衝突小振動子の間のエネルギー移動に起因する周期 $T_a \approx 37.0[\text{s}]$ の周期的な完全概周期振動が発生する。

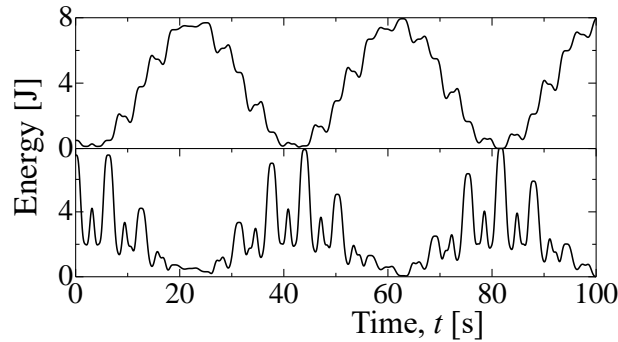


Fig. 3.6 Periodic perfect energy transfer oscillation between the two small oscillators.

3・6・2 Bloch 球表示

前節の計算結果のうち、衝突直前の小振動子の速度から取り出した複素状態ベクトルの Bloch 球表示を図 3.7 に示す。図中の A 点が初期状態であり、衝突振動演算子を一回作用すると図中 B 点に移動する。またこの演算子を繰り返し作用させると衝突小振動子にエネルギーが集中した状態である $|\psi_{v1}\rangle$ と非衝突振動子にエネルギーが集中した状態 $|\psi_{v2}\rangle$ を通る大円の軌道上を回転する。Bloch 球表示は概周期振動を視覚的に表す impact map である。

3・6・3 完全概周期振動の周期

Bloch 球表示によって得られた大円の軌道から周期的な完全概周期振動の周期を導出する。衝突振動演算子は Bloch 球上の回転演算子であり、一回の衝突当たりの回転角は $4\beta = 4\sin^{-1}\sqrt{1/1+\gamma}$ となる⁽¹⁴⁾。 4β は単位衝突時間当たりの回転角であり、完全概周期振動は両極を通る大円での 1 回転に相当することから、その周期 T_a は

$$T_a = \frac{\pi\Delta t}{2\sin^{-1}\left[\sqrt{\frac{1}{1+\gamma}}\right]} \quad (3.21)$$

と表される．ここで本章の例の衝突周期である $\Delta t = 2\pi$ について計算した周期的な完全概周期振動の周期を図 3.8 に示す．

図 3.8 から周期的な完全概周期振動の周期は系を構成する各振動子の振動数には依らず，質量比 γ に依存することが分かる．本章の計算条件である $\gamma = 15$ の場合，演算子一回の回転角は $4\beta = 1.01[\text{rad}]$ となることから， $T_a = 39.06[\text{s}]$ であり，数値計算結果は，理論と一致することが分かる．また衝突時の小振動子の状態が大円を回る離散点であることから， γ を十分に大きくした場合には，大円の軌道上の点が密に埋まり，より完全なエネルギー集中が期待される．

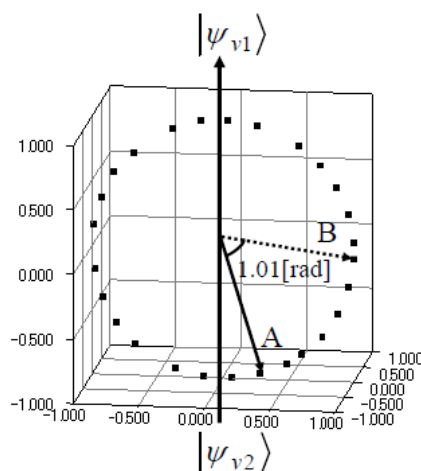


Fig. 3.7 Oscillation of periodic perfect energy transfer on the Bloch sphere.

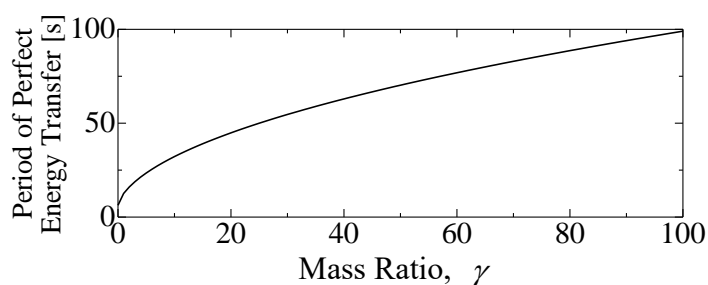


Fig. 3.8 Mass ratio dependence of periodic perfect energy transfer oscillation.

3・6・4 分数調波共振

本章の外部からの壁による周期的衝突は周期 2π 毎の衝突であり，衝突時に壁にかかる力の反力を衝突小振動子が受けた外力とみなすことにより，調和共振，分数調波共振，高調波共振の発生条件を議論することができる．衝突周期を 2π とした場合，外力の角振動数は $\omega = 1$ であることから，衝突小振動子に調和共振が現れることが分かる．一方，式(3.21)より衝突周期を 2π とした場合， $\omega' = 2 \sin^{-1}[1/\sqrt{1+\gamma}]/\pi$ の角振動数を持つ概周期振動が現れることから，質量比が $\gamma = 3$ の場合， $\omega' = 1/3$ となり，外力（壁からの反力）の角振動数に対して，1/3 次の分数調波共振が確認できる．同様に $\gamma = 1$ の場合は $\omega' = 1/2$ となり 1/2 次の分数調波共振の存在が確認できる．他方，

$\omega' \geq 1$ を満たす質量比が存在しないことから、高調波共振は存在しないと考えられる。以上から、本報告で取り扱った系においては、概周期振動に起因した質量比の関数としての分数調波振動が内在していることが分かる。

3・7 結言

本章では三体衝突振動系の解析方法として、複素状態ベクトルに基づく複素状態遷移行列の導出を試みた。複素状態ベクトルは三体振動子の変位や速度を複素数表示へ拡張することで得られる。

さらに、この複素状態ベクトルに対する離散力学的な操作として複素状態遷移行列を用いることにより、結合した大振動子に依らない衝突小振動子と非衝突小振動子間の相互作用に現れる内部共振現象の一般的な条件を導出した。

次に二小振動子間の相互作用に起因する振幅や位相の変化を視覚的に理解する作図法として Bloch 球表示を導入した。状態ベクトルが極を含む大円を通る性質から、小振動子が同じ位相、もしくは逆位相を持つ初期状態において、釣合位置で完全弾性衝突させた場合に、一方の小振動子にエネルギーが集中し、次に他方にエネルギーが集中することを繰り返す周期的な完全概周期振動が発生する内部共振系の必要条件を導出した。得られた内部共振の振動数比には従来の研究では指摘されなかった多数の複雑な振動数比が存在した。

最後に、本章の周期的な完全概周期振動が Bloch 球上の回転であることから、完全概周期振動の周期を導出した。数値計算を行った結果、導出した完全概周期振動の周期の理論と計算結果は良く一致した。導出した周期は各振動子の振動数比に依らず、小振動子間の質量比に依存した。

**第 4 章 三自由度内部共振衝突振動系における
振動エネルギー移動に伴う Graze 現象**

4・1 緒言

プレス加工機(小泉, 横山, 1983)や原子炉炉心の燃料棒群(堀内他, 1993)など実用的な機械現象に現れる衝突振動は, 強い非線形性を持ちながらも, 衝突から次の衝突までは線形な時間発展を有する区分線形システムとして取り扱われることから, 非線形システムを厳密に扱えるモデルとして研究されてきた.

一方, 速度 0 付近の衝突である Graze 衝突は Grazing 分岐と呼ばれる分岐現象が発生することが知られている(Nodmark, 1991), (Nodmark, 1992). Grazing 分岐を解析する写像としては, Nordmark が提案した Nordmark map(Nodmark, 1991), (Nodmark, 1992)が有名であり, その後 Lamba, Chin らにより精力的に研究が行われ, 周期倍分岐やカオスの存在などが明らかになっている(Lamba and Budd, 1994), (Chin, et al, 1994). 振動エネルギーの移動現象を利用した新しいインフラ設備・構造物のセンシング方法を検討する場合, Graze 衝突の発生に伴う系の振動形態の質的な変化により, 十分な振動エネルギーの移動が発現しない可能性があり, これらの現象をより定量的に理解する必要がある.

しかしこれまでの Graze 衝突に関する研究では, 一自由度強制振動系を対象にしたものが多く, 大域的に結合した多自由度系を対象にしたものが少なかった. また Graze 衝突が発生する原因や分岐の特徴を明らかにする解析的な研究はあまりされてこなかった.

著者はこれまで, 一つの大振動子に二つの小振動子が並列に結合された三自由度系における平衡位置での衝突振動問題を Grover 波動アルゴリズム(Patel, 2006), (Grover, 1997)の観点から研究をおこなってきた(高田他, 2011). それにより小振動子間に周期的な運動エネルギー移動による概周期振動が発生することを確認した. 小振動子間の周期的な運動エネルギー移動は, 一方の小振動子の運動エネルギーを 0 に近づけることから, 同じ波動アルゴリズムにより, Graze 衝突が引き起こされる可能性がある.

本章では, 三体衝突振動系のモデルを, 衝突位置を任意とする場合に拡張することにより, Graze 衝突が発生する原因について, 波動アルゴリズムの観点から解析的な議論をおこない, 衝突速度が完全に 0 となる完全 Graze 衝突が発生する条件を導出する. さらに Bloch map 上の軌道から二種類の衝突モードが存在することを示し, Graze 衝突前後で衝突モードの切替えが発生することを明らかにする. 最後に外部制御によるがた振動の制御の可能性について言及する.

4・2 解析モデル

本章における解析モデルは第 3 章に準じる. 便宜のため, 図 4.1 に系のモデルを示す.

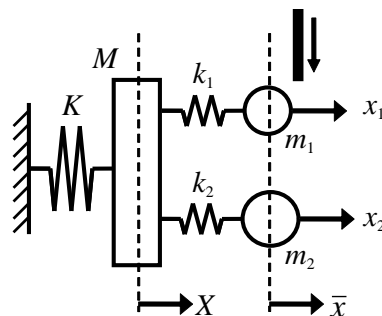


Fig. 4.1 Multi-vibro-impact system with two identical small oscillators coupled to one large oscillator.

4・3 状態遷移行列と波動アルゴリズム

著者は前章の概周期振動についての解析において、図 4.1 の衝突小振動子と非衝突小振動子間に Grover 波動アルゴリズムが成り立つ条件として、系の持つ固有振動数の比が有理数 $\omega_+ = e/f$, $\omega_- = g/f$ によって表される内部共振を有すること、無次元衝突周期 Δt^* との間に $(e-g)\Delta t^* = 2\pi fq$ (q は任意の自然数) の関係が成り立つ必要があることを示した。その際、衝突および時間発展演算子を複素状態遷移行列によって表し、Grover アルゴリズムの形式と一致するように各行列要素の条件を定めた。また $\Delta t^* = 2\pi$ の離散力学系においては、行列要素が実数となることが分かった⁹⁾。本論文では、解析を $\Delta t^* = 2\pi$ の離散力学系に限定することにより、衝突および時間発展演算子を実状態遷移行列とし、速度および位置を実状態ベクトルとすることにより、より実際の物理量に近い形で Graze 衝突現象の解析を試みる。

位置状態ベクトル $[X^*, x_1^*, x_2^*]$ もしくは速度状態ベクトル $[V^*, v_1^*, v_2^*]$ に作用する時間発展による状態遷移行列 (時間発展演算子) は以下に示す実数行列となる (Long, 2001)。

$$U_s = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\gamma-1}{\gamma+1} & -\frac{2\sqrt{\gamma}}{\gamma+1} \\ 0 & -\frac{2\sqrt{\gamma}}{\gamma+1} & \frac{1-\gamma}{\gamma+1} \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

この条件下では、離散時間において、二小振動子系間の相互作用が大振動子の状態から切り離され、振動が単純化される。

また衝突による状態遷移行列 (衝突演算子) は速度状態ベクトルのみに作用する演算子として次式のように表される。

$$U_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

以上の演算子によって、状態ベクトル $[X^*, x_1^*, x_2^*, V^*, v_1^*, v_2^*]$ に作用する衝突振動演算子が得られる。

$$U = \begin{bmatrix} U_s & 0 \\ 0 & U_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & U_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_s & 0 \\ 0 & U_s U_t \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

ここで E は単位行列である。衝突振動演算子は本章のモデルにおける毎衝突時の離散力学系を記述する状態遷移行列であり、演算子の並びには位置に関する規則性と、速度に関する規則性が内在している。速度状態ベクトルに対して作用する $U_s U_t$ は、反転操作 U_t と平均に対する反転

操作 U_s によって構成されることから、これらの操作は Patel(Patel, 2006)が示すように Grover アルゴリズムを実現し、小振動子全体の運動エネルギーを特定の小振動子に集めることができる。

式(4.3)のサブシステムから、 n 回目の衝突時の速度を与える漸化式は以下のように導かれる。

$$V^*[n] = (-1)^n V^*[0] \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} v_1^*[n] &= (-1)^n \cdot \cos[n \cdot \tan^{-1}[2\sqrt{\gamma}/\gamma - 1]]v_1^*[0] \\ &\quad + (-1)^n \cdot \sin[n \cdot \tan^{-1}[2\sqrt{\gamma}/\gamma - 1]]v_2^*[0] \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} v_2^*[n] &= -(-1)^n \cdot \sin[n \cdot \tan^{-1}[2\sqrt{\gamma}/\gamma - 1]]v_1^*[0] \\ &\quad + (-1)^n \cdot \cos[n \cdot \tan^{-1}[2\sqrt{\gamma}/\gamma - 1]]v_2^*[0] \end{aligned} \quad (4.6)$$

Grover アルゴリズムによる小振動子間の運動エネルギー移動を確認するため、初期条件 $v_1^*[0]=1$, $v_2^*[0]=1/\sqrt{\gamma}$ の条件下における各小振動子の衝突時の速度の時間変化を図 4.2 に示す。図中●は衝突小振動子の速度 v_1^* , □は非衝突小振動子の速度 v_2^* である。図 4.2 より衝突時の衝突小振動子と非衝突小振動子の速度は、同振動数で位相が π ずれた周期的な変化を示すことがわかる。また式(4.4)～(4.6)より、これらの速度は、衝突位置に依存しない。衝突小振動子の速度が最大となる時点において、非衝突小振動子の速度は最小になり、その逆も成り立つ。これらの特徴的な現象は、前章において議論をおこなった概周期振動であり、二小振動子間で運動エネルギーが周期的に交換される。

一方、位置状態ベクトルは時間発展演算子 U_s のみに支配されることから、各小振動子の衝突位置は時間発展によって小振動子間の重心位置に対して対称な点を行き来する。式(4.3)のサブシステムから n 回目の衝突時の位置を与える漸化式は以下のように表される。

$$X^*[n] = (-1)^n X^*[0] \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} x_1^*[n] &= \{((-1)^n + \gamma)/(1 + \gamma)\} \cdot x_1^*[0] \\ &\quad + \{((-1)^n - 1)\sqrt{\gamma}/(1 + \gamma)\} \cdot x_2^*[0] \\ &= x_1^*[0] + \{(-1)^n - 1\} \cdot \bar{x}^*[0] \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} x_2^*[n] &= \{\sqrt{\gamma} \cdot (-1 + (-1)^n)/(1 + \gamma)\} \cdot x_1^*[0] \\ &\quad + \{(1 + \gamma \cdot (-1)^n)/(1 + \gamma)\} \cdot x_2^*[0] \\ &= x_2^*[0] + \{(-1)^n - 1\}\sqrt{\gamma} \cdot \bar{x}^*[0] \end{aligned} \quad (4.9)$$

ここで、無次元化された小振動子間の重心位置は $\bar{x}^* = (x_1^* + \sqrt{\gamma}x_2^*)/(\gamma + 1)$ と表される。式(4.8), (4.9)より各小振動子の衝突時の位置は一点、または二点に限られることがわかる。なお、前述した各固有振動数の比が内部共振条件を有すること、ならびに $(e - g)\Delta t^* = 2\pi fq$ の条件が成り立つ場合において、 $\Delta t^* = 2\pi$ の離散時間における二小振動子間の相互作用は大振動子と切り離された二体問題となることにより、二小振動子の初期位置が衝突位置と等しくなる。

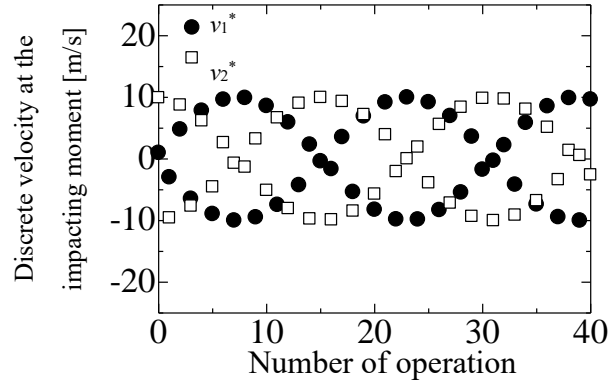


Fig.4.2 Dependence of discrete velocity at the impact moment to the number of operation.

4・4 Impact map の定義

二小振動子の離散力学系における相互関係を視覚的に表すツールとして、Impact Map である Bloch 球表示 (Bloch Map : BM) を導入する. Bloch 球の北極は衝突小振動子に運動エネルギーが集中した状態 $|\tau\rangle$ を意味し, 南極は非衝突小振動子に運動エネルギーが集中した状態 $|\hat{\tau}\rangle$ を意味する. また各小振動子が質量に比例した運動エネルギーを持つ状態を $|s\rangle$ とする. 式(4.10)~(4.14) に示す各小振動子の位相平面の位相 ϕ_i の差を経度 ϕ , 各位相平面の振幅 R_i の比から北極よりとった緯度 2θ から, Bloch 球表示を定義することにより, 各時刻での二小振動子からなる状態ベクトルを点 (x, y, z) により表現する.

$$\phi_i = \tan^{-1}[v_i^* / x_i^*] \quad (4.10)$$

$$R_i = \sqrt{x_i^{*2} + v_i^{*2}} \quad (4.11)$$

$$\phi = \phi_2 - \phi_1 \quad (4.12)$$

$$\theta = \tan^{-1}[R_2 / R_1] \quad (4.13)$$

$$x = \cos(\phi) \sin(2\theta) \quad (4.14)$$

$$y = \sin(\phi) \sin(2\theta) \quad (4.14)$$

$$z = \cos(2\theta)$$

4・5 数値計算

4・5・1 衝突位置が平衡位置である場合

固有角振動数 $\omega_+ = 2.5$, $\omega_- = 0.5$, 質量比 $\gamma = 99$, 衝突周期 $\Delta t = 2\pi$, 初期条件 $X(0) = 0$, $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 0$, $V(0) = 1$, $v_1(0) = 1$, $v_2(0) = 1$ の下で計算した各振動子の位置の時間変化を図 4.3 に示す. 図中の上段に大振動子の位置 X , 中段に衝突小振動子の位置 x_1 , 下段に非衝突小振動子の位置 x_2 を示す. 図 4.3 より, 衝突小振動子の位置に緩やかな振幅の変調が観察される.

小振動子の衝突瞬間における離散的な状態ベクトルを抽出した Impact Map を図 4.4 の BM に示す. 衝突瞬間の各状態は, $|\tau\rangle$ と $|\hat{\tau}\rangle$ を結ぶ大円を一定角度で回転することから, 衝突小振動子と非衝突小振動子間に運動エネルギーが移動する周期的な概周期振動⁹⁾であることがわかる. こ

ここで運動エネルギーが完全に移動するためには、質量比 γ は正の実数で $\gamma \geq 4$ または $0 \leq \gamma \leq 0.25$ であれば任意に選ぶことができる(Long, 2001).

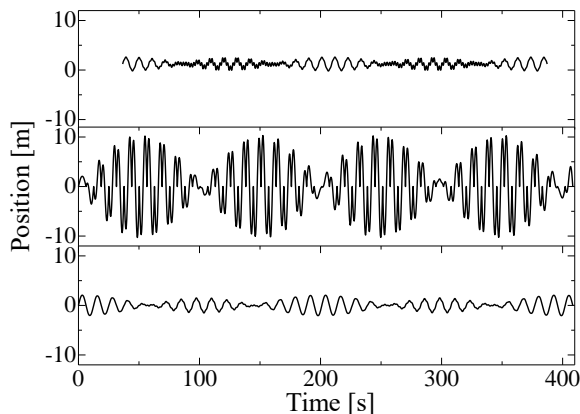


Fig.4.3 Energy transfer between small oscillators impacting at balanced position.

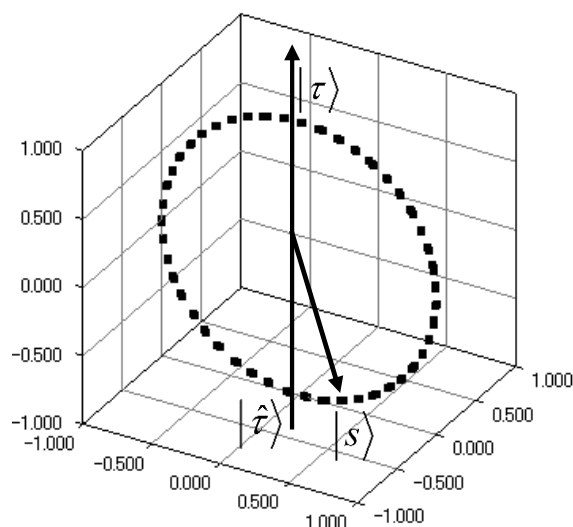


Fig.4.4 Bloch Map notation of the system with impacting at balanced position.

4・5・2 衝突位置が平衡位置からずれた場合

二小振動子の衝突位置を平衡位置から同じだけずらした場合 ($x_1(0) = x_2(0) \neq 0$) について考える。代表例として、角振動数 $\omega_+ = 2.5, \omega_- = 0.5$ ，質量比 $\gamma = 99$ ，衝突周期 $\Delta t = 2\pi$ ，初期条件が $X(0) = 1, x_1(0) = 5, x_2(0) = 5, V(0) = 1, v_1(0) = 1, v_2(0) = 1$ の下で計算した各振動子の位置の時間変化を図 4.5 に示す。図中の上段に大振動子の位置 X ，中段に衝突小振動子の位置 x_1 ，下段に非衝突小振動子の位置 x_2 を示す。

図 4.5 の衝突小振動子の位置 x_1 の波形において時刻 t が 0s から 100s の間では小さい概周期振動の波形が、また 100s から 200s の間では大きな概周期振動の波形が観察され、それ以降は両者が繰り返し交互に発生した。この時、非衝突小振動子の位置 x_2 は概周期振動によって緩やか

な振幅の変調を伴うが、概周期波形の振幅の大小は見られなかった。以後、衝突小振動子の位置の振幅が小さい概周期振動波形をタイプ I，大きい概周期振動波形をタイプ II として区別する。図 4.6 に角振動数 $\omega_+ = 2.5, \omega_- = 0.5$ ，質量比 $\gamma = 99$ ，衝突周期 $\Delta t = 2\pi$ ，初期条件が $X(0) = 1, x_1(0) = 0.8, x_2(0) = 0.8, V(0) = 1, v_1(0) = 1, v_2(0) = 1$ の下で計算した衝突瞬間の各小振動子の状態ベクトルを BM 上に示す。その結果，BM における状態ベクトルの軌跡は八の字型の軌道を示した。図 4.6 の各点を追って解析したところ，概周期振動波形タイプ I の概周期振動は図中 A で示す軌道に対応し，この振動の間，二小振動子間の位相差は $-\pi$ から 0 の間で推移した。衝突小振動子の運動エネルギーが最大となる状態は A 軌道の頂点に対応し，その後，状態ベクトルは八の字軌道の交点に向かった。

軌道の交点付近に戻った状態ベクトルは，その後，図中 B で示す軌道に移動した。B 軌道は振幅がより大きなタイプ II の概周期振動に対応する。この領域では二小振動子間の位相差は 0 から π の間で推移した。軌道 B を通った後に，状態ベクトルは八の字軌道の交点付近に戻り，再び軌道 A に戻った。Bloch 球の定義より軌道 A と軌道 B の交点付近の状態ベクトルにおいては，衝突小振動子の速度が 0 に近づく Graze 衝突が発生していることがわかる。

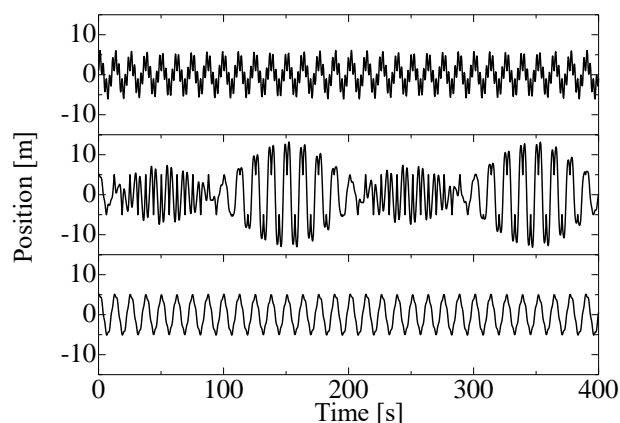


Fig.4.5 Positional change of the system with arbitrary impacting position.

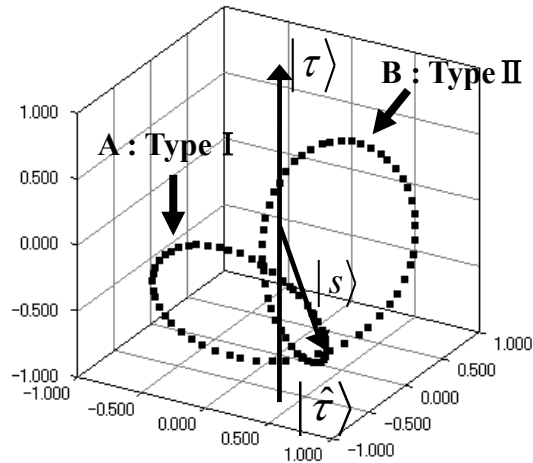


Fig.4.6 Figure of eight orbit at the Bloch Map of the system with arbitrary impacting position.

4・6 2つのタイプの概周期振動に現れる衝突モードの特徴

4・6・1 数値計算による特徴抽出

タイプ I とタイプ II の概周期振動における衝突モードの特徴を理解するために、二小振動子の初期状態の運動エネルギーが位置エネルギーに比べて十分に小さい場合について計算を行う。この場合、概周期振動による運動エネルギーの移動が振動全体に与える影響を小さくでき、波形から衝突時の特徴を明らかにすることができる。例として、角振動数 $\omega_+ = 2.5$ ， $\omega_- = 0.5$ ，質量比 $\gamma = 99$ ，衝突周期 $\Delta t = 2\pi$ ，初期条件 $X(0) = 1$ ， $x_1(0) = 1$ ， $x_2(0) = 1$ ， $V(0) = 1$ ， $v_1(0) = 0.1$ ， $v_2(0) = 0.1$ の条件の下における各振動子の位置の時間変化を図 4.7 に示す。図中、上段に大振動子の位置 X ，中段に衝突小振動子の位置 x_1 ，下段に非衝突小振動子の位置 x_2 を示す。

図 4.7 よりタイプ I の領域では衝突小振動子が両衝突位置の内部で衝突を繰り返すがた振動が観察された。一方、タイプ II では、衝突小振動子が両側の衝突位置を一旦通り過ぎて、外側から衝突する特異な振動形態を示した。タイプ I とタイプ II の衝突の様子を位相平面上により表現した (図 4.8)。時間発展により状態ベクトルは時計周りに回転することを考慮すると、タイプ I では常に位相が進む衝突が現れ、タイプ II では位相が遅れる衝突が現れることが予想される。

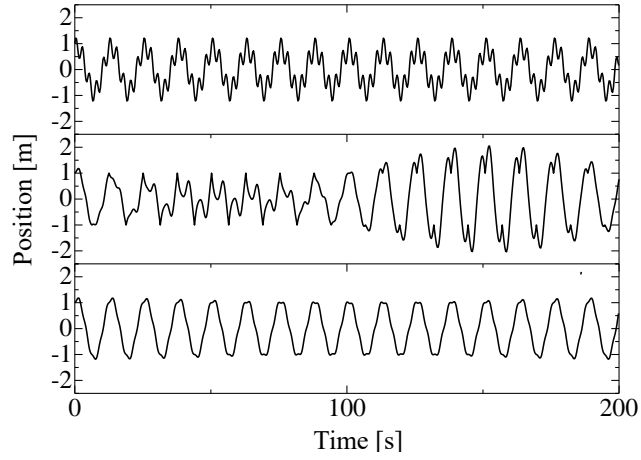


Fig.4.7 Positional change of the system with arbitrary impacting position; in case of low velocity.

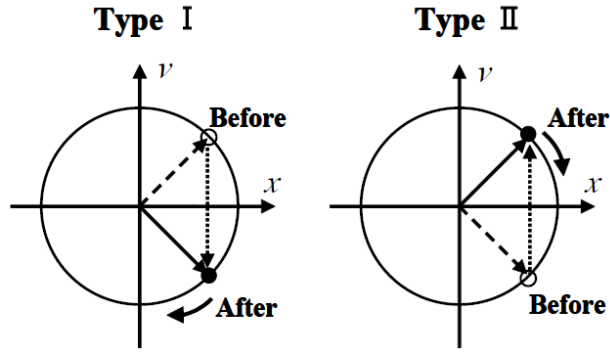


Fig.4.8 Phase map of two type impact mode.

4・6・2 Graze 衝突前後の衝突モードの変化

以下では、Graze 衝突前後の衝突モードについて、解析的な考察をおこなう。衝突位置が平衡位置からずれた場合、2つの衝突位置とその中間位置 $x_{ic} = x_1^*[0] - \bar{x}^*$ との間の変位は、式(4.8)より、以下のように表わされる。

$$x_1^*[n] - x_{ic} = x_1^*[n] - (x_1^*[0] - \bar{x}^*) = (-1)^n \cdot \bar{x} \quad (4.15)$$

一方、衝突小振動子の速度は、式(4.5)より、以下のように表わされる。

$$v_1^*[n] = (-1)^n \cdot (\cos[n \cdot X] v_1^*[0] + \sin[n \cdot X] v_2^*[0]) \quad (4.16)$$

ここで、 $X = \tan^{-1}[2\sqrt{\gamma}/\gamma - 1]$ である。いまこれらの積により、以下の関数 $\eta[n]$ を定義する。

$$\eta[n] = \bar{x} \cdot (\cos[n \cdot X] v_1^*[0] + \sin[n \cdot X] v_2^*[0]) \quad (4.17)$$

タイプ I とタイプ II の振動モードの違いは衝突時の位相変化の違いであることから、タイプ I においては $\eta[n]$ が正、タイプ II においては $\eta[n]$ が負となる。よって、Graze 衝突前後の衝突モードの変化については、 $\eta[n]$ の符号の変化を調べればよい。

いま Graze 衝突を $n=0$ における起点とすると、 $v_1^*[0] \approx 0$ となることから、以下のように近似される。

$$\eta[n] \approx \bar{x} \cdot v_2^*[0] \cdot \sin[n \cdot X] \quad (4.18)$$

$2m\pi < nX < (2m+1)\pi$ においては (m は整数)、 $\sin[n \cdot X] > 0$ となることから、 $\eta[n]$ の符号は $\bar{x} \cdot v_2^*[0]$ の符号に等しくなる。他方、 $(2m-1)\pi < nX < 2m\pi$ においては、 $\sin[n \cdot X] < 0$ となることから、 $\eta[n]$ の符号は $\bar{x} \cdot v_2^*[0]$ の符号と反対になる。 nX が π の整数倍になる付近では、Graze 衝突が発生することから、Graze 衝突を基準として衝突モードが変化し、各 Graze 衝突間では衝突モードが保たれることがわかる。各タイプの衝突状態の模式図を図 4.1 と対応させて図 4.9 に示す。

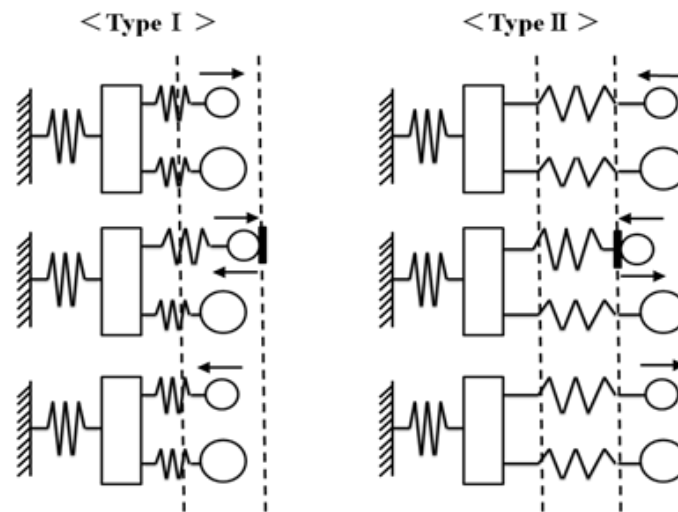


Fig.4.9 Two type impact mode of the multi-vibro-impact system.

4・7 周期的な完全 Graze 衝突の発生条件

4・7・1 完全な Graze 衝突が発生する条件

本章の系においては、衝突小振動子と非衝突小振動子の間に周期的な運動エネルギーの交換が発生する。小振動子全体の運動エネルギーの大部分が非衝突小振動子に集中している状態においては衝突小振動子の速度が 0 付近となるため Graze 衝突が発生する。しかし、一般には衝突時の速度は小さくなるものの完全に 0 となるわけではない。そこで、この節では衝突小振動子の衝突における速度が厳密に 0 となる完全な Graze 衝突が発生する条件を導出する。

式(4.5), (4.6)の漸化式から, 演算子を j 回 (j は整数) 作用させた際に衝突小振動子の速度が 0 となる場合において, 衝突小振動子と非衝突小振動子の初期速度の間に次の関係が成り立つ.

$$v_1^*(0) = -v_2^*(0) \cdot \tan\left[j \cdot \tan^{-1}\left[\frac{2\sqrt{\gamma}}{\gamma-1}\right]\right] \quad (4.19)$$

次に, 初期条件が式(4.19)を満たす場合において, 完全 Graze 衝突が発生するかについて, 数値計算により確認をおこなう. 計算条件は角振動数 $\omega_+ = 2.5, \omega_- = 0.5$, 質量比 $\gamma = 15$, 衝突周期 $\Delta t = 2\pi$, 初期条件 $X(0) = 1, x_1(0) = 1, x_2(0) = 1, V(0) = 1, v_1(0) = -16.46, v_2(0) = 2.06, j = 3$ である. 衝突小振動子の Graze 衝突付近での時間変化 (0s~50s) を図 4.10 に示す. この図から, 25.1s において速度が 0 の完全な Graze 衝突が発生していることが確認できる. 完全な Graze 衝突前後の区間解の波形が示す特徴として, 変曲点型の波形を有することが挙げられる. この変曲点型の波形は 4・6 でも示した通り, Graze 衝突による衝突のモードの切り替えを表すものと考えられる.

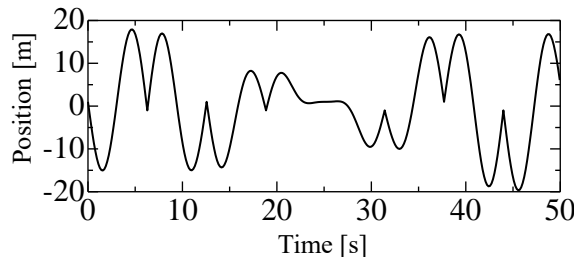


Fig.4.10 Positional change of the system with arbitrary impacting position; in case of perfect graze impact.

4・7・2 周期的な完全 Graze 衝突の発生条件

前節で求めた式(4.19)の条件に加え, 系の振動が再帰性を持つ条件を付与することにより, 完全 Graze 衝突が周期的に発生する条件を求めることができる. 式(4.5), (4.6)よりで表されるように速度状態ベクトルに掛る衝突振動演算子 $U_i U_s$ の小振動子間のサブシステムである状態遷移行列要素は回転行列として働く. 式(4.5), (4.6)より演算子が一回作用したときの回転角は $\tan^{-1}[2\sqrt{\gamma}/\gamma-1]$ であることから, N_1 回作用した時にちょうど Bloch 球を N_2 回転する条件として (N_1, N_2 は正整数), 以下の関係式が成り立つ.

$$\tan\left[\frac{\pi N_2}{N_1}\right] = \frac{2\sqrt{\gamma}}{\gamma-1} \quad (4.20)$$

式(4.20)より, 系の振動が再帰性を持つための質量比の持つ条件は式(4.21)によって表される. ここで符号が正の場合は $\gamma > 1$ に, 負の場合は $0 < \gamma < 1$ に対応する.

$$\gamma = \frac{(1 \pm \cos[\frac{\pi N_2}{N_1}])^2}{\sin^2[\frac{\pi N_2}{N_1}]} \quad (4.21)$$

式(4.20)と式(4.21)の条件より，完全 Graze 衝突が周期的に発生する条件は式(4.22)を満たす整数 N_1 , N_2 , j が存在する場合に限られる．

$$v_1^*(0) = -v_2^*(0) \cdot \tan[\frac{\pi N_2 j}{N_1}] \quad (4.22)$$

4・8 衝突モードの制御による振動エネルギー移動を伴うがた振動

一般に，がた振動に代表される固定された壁に対する衝突振動においては，衝突によって跳ぶ位相が正である場合に限られ，位相が遅れる衝突であるタイプ II 型衝突は発生しない．そこで，タイプ I 型の衝突振動が続く条件を導出することで，がた振動を波動アルゴリズムにより理解できる可能性がある．近年注目されている NES (Nonlinear Energy Sink) (Vakakis, et al, 2008), (Nucera, et al, 2007)においても，がた振動を含む区分線形要素が用いられていることから，がた振動における運動エネルギー伝達機構の解明も期待される．以下では，衝突を制御することにより，タイプ I 型の衝突のみを発生させるアルゴリズムを導出する．

前述したように，図 4.4 の Bloch 球に現れる二つの擬小円からなる八の字軌道は，各擬小円軌道がそれぞれの衝突モードを表し，その交点は速度 0 である Graze 衝突点を表す．そのため，タイプ I 型のみ衝突を実現するには，状態ベクトルは一つの擬小円上にのみ軌道を描けば良いことになる．そこで，タイプ I 型の軌道からタイプ II 型の軌道に遷移する点 (Graze 衝突点) において，二小振動子間の位相差を変調させる操作を加えることでタイプ I 型の軌道のみ保持できると考えられることから，Graze 衝突の瞬間において非衝突小振動子に完全弾性衝突を加えてみる．一方の衝突小振動子の衝突瞬間に他方の小振動子に衝突を加えることは，一般には実現が困難な操作と考えられるが，本章の系においては，完全 Graze 衝突が $2\pi N_1$ ごとに発生することが知られており，またその際の各小振動子の位置も式(4.8), (4.9)によって定まるため，これを実現する制御を実現する可能性は大きいと考えられる．

ここで衝突小振動子に衝突させる演算子を U_{i1} ，非衝突小振動子に衝突させる演算子を U_{i2} とすると各状態遷移行列は次式で表される．

$$U_{i1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

$$U_{i2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

以上の演算子を用いると，衝突小振動子に加えて，Graze 衝突の瞬間においてのみ非衝突小振動子にも完全弾性衝突を与える波動アルゴリズムは次のように表される．ここで j は Graze 衝突に達するまでに要する衝突振動演算子の作用回数である．

$$\vec{v}' = \cdots (U_s U_{i1}) (U_s U_{i2}) (U_s U_{i1})^j \vec{v}[0] \quad (4.25)$$

式(4.25)を満たす場合において数値計算をおこない各振動子の挙動を確認する．角振動数 $\omega_+ = 2.5, \omega_- = 0.5$ ，質量比 $\gamma = 99$ ，衝突周期 $\Delta t = 2\pi$ ，初期条件 $X(0) = 1, x_1(0) = 10, x_2(0) = 10, V(0) = 1, v_1(0) = 1, v_2(0) = 1$ の条件における各振動子の位置の時間変化を図 4.11 に示す．図中，上段に大振動子の位置 X ，中段に衝突小振動子の位置 x_1 ，下段に非衝突小振動子の位置 x_2 を示す．さらに衝突小振動子の位置と速度の時間変化を位相平面に示す (図 4.12)．

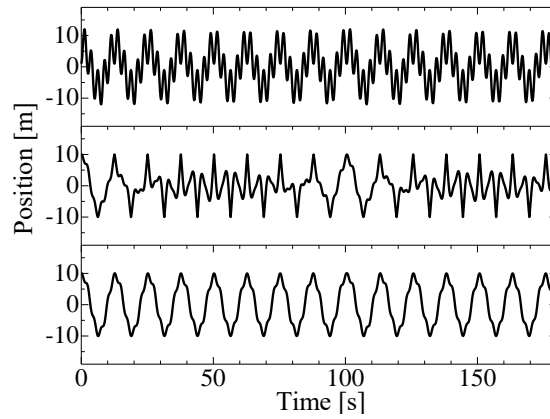


Fig.4.11 Positional change of the system with arbitrary impacting position in controlling to keep Type I impact.

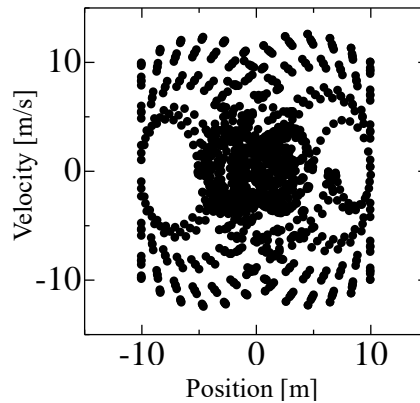


Fig.4.12 Phase diagram of impact small oscillation controlling to keep Type I impact.

図 4.11, 4.12 から衝突小振動子は位置 x_1 が -10 から 10 の領域で繰り返し常に位相が進む衝突であるタイプ I 衝突が発生していることがわかる．また衝突小振動子の運動の軌跡が， -10 と 10 の衝突位置を越えていないことから，これは一般的な固定壁に見られるがた振動に等しいと考えられる．しかしながら，本論文ではタイプ I 型の衝突が発生する条件を導出したのみであり，運動の軌跡が固定壁の位置を超えない厳密ながた振動の発生条件を導出するには至っていない．

次に衝突瞬間の小振動子の状態ベクトルの軌跡を図 4.13 の BM に示す。図 4.12 は図 4.6 の二つの擬小円からなる八の字軌道とは異なり、一つの擬小円軌道からなる状態に帰着している様子がわかる。また、BM 上の z 成分が周期的に変化していることから、タイプ I 型のみ軌道においても小振動子間の運動エネルギーの移動現象である概周期振動が発生していることがわかる。

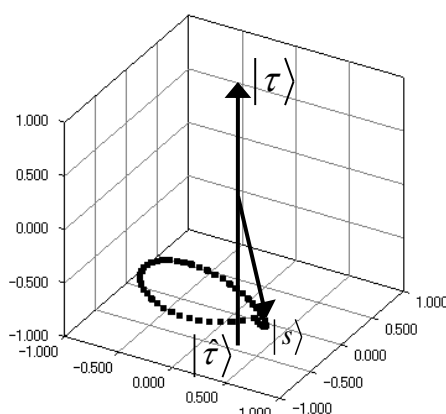


Fig.4.13 Quasi small circle orbit in Bloch map only with Type I impact mode.

4・9 結言

本研究では内部共振を有する一大振動子に結合された衝突小振動子と非衝突小振動子からなる系における Graze 衝突現象を Grover 波動アルゴリズムの観点から解析した。その結果、以下の結論を得た。

- (1) 本章考察した衝突振動系において、小振動子間の相互作用が大振動子から切り離される場合、衝突位置に依らず、小振動子間に周期的な運動エネルギーの移動が発生する。
- (2) 衝突モードには、衝突によって位相が進むタイプ I 型衝突と位相が遅れるタイプ II 型衝突が存在することが示唆された。
- (3) 衝突瞬間の小振動子の状態ベクトルを抽出し Bloch map 上に描いたところ、平衡位置以外で衝突する場合においては、軌道は二つの擬小円からなる八の字軌道を描き、各擬小円はタイプ I 型衝突とタイプ II 型衝突に対応した。
- (4) Graze 衝突の前後でタイプ I 型衝突とタイプ II 型衝突のモードの切り替えが発生した。
- (5) Graze 衝突は、小振動子間の運動エネルギーの移動により、衝突小振動子の運動エネルギーが 0 に近づく際に発生する。
- (6) 離散速度の漸化式から、完全に速度が 0 となる衝突である完全 Graze 衝突の発生条件を導出し、さらにこれが周期的に現れる条件を導出した。
- (7) Graze 衝突の瞬間において非衝突小振動子に衝突を加えることにより、タイプ I 型衝突のみの衝突を発生させるように系を制御できる可能性が示唆された。

**第 5 章 比例粘性減衰を有する三自由度衝突振動系
における一方向振動エネルギー移動**

5・1 緒言

多数の振動子が並列に一振動子に結合された多自由度非線形振動系では、振動子間の相互作用に伴うエネルギー移動に起因して同期現象(長嶺他, 2008)やモードの局在化の発生(Vakakis, et al, 1996), カオスの発生など多様な現象が現れる. 特に振動子の固有振動数 ω_i ($i=1,2,\dots,n$: n は自由度の数) が $\sum m_i \omega_i \approx 0$ (m_i は整数であり, うち少なくとも二つは 0 ではない) の条件を満たす内部共振条件を有する場合, Bajaj らの解析(Bajaj and Vyas, 2006)が示すように, 多体振動子間にはパラメトリック振動に特有なモード間のエネルギー移動である概周期振動や分数調波振動等の非線形系に特徴的な現象が観察されている(山本, 安田, 1976), (山本他, 1977), (山本他, 1979). これら振動子間の相互作用についての定量的な理解は, インフラ設備・構造物における振動エネルギーの移動を用いた新しいセンシング方法の検討において重要となる.

著者はこれまで一つの大振動子に二つの小振動子が並列に結合された三自由度系における釣合位置及び非釣合位置での衝突振動問題を Grover による波動アルゴリズム(高田他, 2011), (小竹他, 2011)の観点から研究をおこなってきた. それにより小振動子間に周期的な運動エネルギーの移動による概周期振動が発生することを確認した. また小振動子間の周期的な運動エネルギーの移動は, 一方の小振動子の運動エネルギーを 0 に近づけることから, 同じ波動アルゴリズムにより Graze 衝突が引き起こされることを解析的に明らかにした.

しかしながら本章までにおける解析では無減衰系のモデルのみに留まっており, 減衰が作用した場合における概周期振動の発生やその条件式の定式化には至っていなかった. 減衰を有する多体振動系においては, 一般に古典的ノーマルモードを解析的に求められないため, 振動を厳密に扱うことは困難である(長松, 1993). Caughey は比例粘性減衰(Caughey, 1960)を導入することにより, 減衰を有する多体振動系においても古典的ノーマルモードが存在する(Caughey, 1965)ことを明らかにした. この比例粘性減衰を用いることにより, 解析的に状態遷移行列を求めることができ, 減衰が振動子間の相互作用に与える影響を, 不減衰系に対する摂動として定量的に評価できることが期待される. しかしながら従来の研究には, 減衰を有する多体衝突振動系に現れる概周期振動に対する摂動効果を比例粘性減衰の観点から解析した報告はない.

そこで本研究では, 比例粘性減衰を有する内部共振三体衝突振動系を対象に, 状態遷移行列を導出することにより, 振動子の質量間相互作用を遷移行列の並びである波動アルゴリズムとして理解することを試みる. その際, 系を衝突時間間隔で区分線形的に取り扱うことにより, 三体振動系から二体振動系を抽出する内部共振条件を導出する. これにより二体小振動子間に現れる減衰完全概周期振動の発生条件や概周期振動周期の変調現象について議論をおこなう. なお衝突振動は一般に衝突位置に大きく依存するが, 議論が複雑となるため本章は衝突位置を釣合位置に固定することとし, 釣合位置を初期位置とする場合に現れる波動アルゴリズムについてのみ議論をおこなう.

5・2 解析モデル

5・2・1 比例粘性減衰を有する三自由度衝突振動モデル

図 5.1 に本論文において対象とする三体衝突振動モデルを示す. 三体衝突振動モデルは質量 M , ばね定数 K 及び外部減衰係数 C_e , 内部減衰係数 C_i を持つ一つの大振動子に対し, 質量 m_1 , ばね定数 k_1 及び外部減衰係数 c_{1e} , 内部減衰係数 c_{1i} を持つ衝突小振動子と質量 m_2 , ばね定数 k_2 及び外部減衰係数 c_{2e} , 内部減衰係数 c_{2i} を持つ非衝突小振動子が並列に結合したモデルである. 変位は各振動子の釣合位置からとり, 大振動子の変位を X , 衝突小振動子の変位を x_1 , 非衝突小振動

子の変位を x_2 とする．本章では，ある一定周期 Δt で，釣合位置において外部の壁を任意に出し入れすることにより，質量 m_1 を持つ衝突小振動子に対し完全弾性衝突を与える．これより Δt は小振動子の周期の整数倍となる．またこれ以降，小振動子全体の質量中心の座標を $\bar{x} = (m_1 x_1 + m_2 x_2) / (m_1 + m_2)$ として表現する．

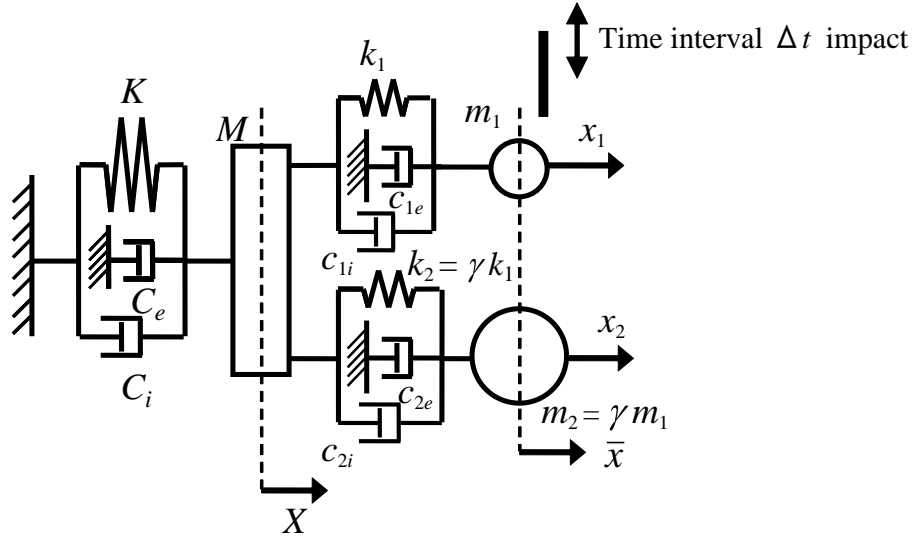


Fig. 5.1 Multi-vibro-impact system with two identical, small oscillators coupled to one large oscillator with proportional viscous damping.

5・2・2 運動方程式

散逸系である図 5.1 の三体衝突振動モデルのラグランジアンを式(5.1)に示す．

$$L = \frac{1}{2} M \dot{X}^2 - \frac{1}{2} K X^2 + \sum_{i=1}^2 \left[\frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 - \frac{1}{2} k_i (x_i - X)^2 \right] \quad (5.1)$$

また，この系の散逸関数 D は式(5.2)となる．

$$D = \frac{1}{2} C_i \dot{X}^2 + \frac{1}{2} c_{1i} (\dot{x}_1 - \dot{X})^2 + \frac{1}{2} c_{2i} (\dot{x}_2 - \dot{X})^2 + \frac{1}{2} C_e \dot{X}^2 + \frac{1}{2} c_{1e} \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} c_{2e} \dot{x}_2^2 \quad (5.2)$$

式(5.2)の右辺第一項から第三項が内部減衰を表し，第四項から第六項が外部減衰を表している．これより各振動子の運動方程式を求め，以下で示す単位系で無次元化すると，無次元化した運動方程式は次式で表される．

$$\begin{bmatrix} M^* & 0 & 0 \\ 0 & m_1^* & 0 \\ 0 & 0 & m_1^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{X}^* \\ \ddot{x}_1^* \\ \ddot{x}_2^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_i^* + C_e^* + (1 + \gamma)c_{1i}^* & -c_{1i}^* & -\sqrt{\gamma}c_{1i}^* \\ -c_{1i}^* & c_{1e}^* + c_{1i}^* & 0 \\ -\sqrt{\gamma}c_{1i}^* & 0 & c_{1e}^* + c_{1i}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{X}^* \\ \dot{x}_1^* \\ \dot{x}_2^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K^* + (\gamma + 1)k_1^* & -k_1^* & -\sqrt{\gamma}k_1^* \\ -k_1^* & k_1^* & 0 \\ -\sqrt{\gamma}k_1^* & 0 & k_1^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X^* \\ x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix} = 0 \quad (5.3)$$

ここで" \cdot "= d/dt^* は無次元化時間による微分であり, 後述の減衰固有角振動数 ω_{dt} を用い代表時間を $T_r=1/\omega_{dt}$ とした. また代表長さは単位長さ, 代表質量は単位質量とした. ここで衝突振動子と非衝突振動子は同じ固有角振動数を持つものとし, ばね定数比及び質量比の間に $k_2=\gamma k_1$, $m_2=\gamma m_1$, 減衰係数の間には $c_{2i}=\gamma c_{1i}$, $c_{2e}=\gamma c_{1e}$ の関係があるとした. さらに無次元化による各振動子の質量及びばね定数を $M^*=M/\omega_{dt}$, $m_1^*=m_1/\omega_{dt}$, $K^*=\omega_{dt}\cdot K$, $k_1^*=\omega_{dt}\cdot k_1$ とした. また後で示すように状態ベクトルを正規化する目的で座標変換 $x_1^*=x_1$, $x_2^*=\sqrt{\gamma}x_2$ をおこなった.

本章のモデルでは, 減衰として比例粘性減衰⁽¹⁾を仮定する. これは系の個々の自由度の絶対速度に比例する減衰と系の自由度間の相対速度に比例する減衰を考慮することに対応する. ここでは α_c, β_c をそれぞれの減衰に対応する比例定数とし, 質量行列 $[M]$ と剛性行列 $[K]$ の線形結合により粘性行列 $[C]$ を式(5.4)で仮定する.

$$[C]=\alpha_c[M]+\beta_c[K] \quad (5.4)$$

比例粘性減衰を仮定した場合, 運動方程式が対角化される基準座標が存在(ゴールドスタイン, 1983)するため, 固有方程式の解は次式で表される.

$$\begin{aligned} \lambda_i &= -\zeta_i \cdot \omega_i + i \cdot \omega_i \sqrt{1-\zeta_i^2} = -\sigma_i + i \cdot \omega_{di} \\ \lambda_+ &= -\zeta_+ \cdot \omega_+ + i \cdot \omega_+ \sqrt{1-\zeta_+^2} = -\sigma_+ + i \cdot \omega_{d+} \\ \lambda_- &= -\zeta_- \cdot \omega_- + i \cdot \omega_- \sqrt{1-\zeta_-^2} = -\sigma_- + i \cdot \omega_{d-} \end{aligned} \quad (5.5)$$

ここで減衰固有角振動数は $\omega_{di}=\omega_i\sqrt{1-\zeta_i^2}$, $\omega_{d+}=\omega_+\sqrt{1-\zeta_+^2}$, $\omega_{d-}=\omega_-\sqrt{1-\zeta_-^2}$ で定義される. また, $\zeta_i, \zeta_+, \zeta_-$ はモード減衰比, $\sigma_i, \sigma_+, \sigma_-$ はモード減衰率を表す. この系の不減衰固有角振動数は

$$\begin{aligned} \omega_{\pm}^2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{k_1^*}{m_1^*} + \frac{K^* + (\gamma+1)k_1^*}{M^*} \right) \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{k_1^*}{m_1^*} + \frac{K^* + (\gamma+1)k_1^*}{M^*} \right)^2 - \frac{k_1^* K^*}{m_1^* M^*}} \\ \omega_i^2 &= \frac{k_1^*}{m_1^*} \end{aligned} \quad (5.6)$$

と表される. 本章の無次元化により, 減衰固有角振動数, 不減衰固有角振動数, モード減衰比, モード減衰率も無次元化される. これにより $\omega_{di}=1$ が常に成り立つ.

5・3 状態遷移行列と波動アルゴリズム

本報では状態遷移行列によって系の状態変化を記述し, 振動子の質量間の相互作用を定量的な演算子として取り扱う. なお以下では, 各振動子の質量間の相互作用を振動子間の相互作用と略して説明する.

5・3・1 系の時間発展を表す状態遷移行列

位置状態ベクトルを $|x\rangle = [X^*, x_1^*, x_2^*]$, 速度状態ベクトルを $|v\rangle = [V^*, v_1^*, v_2^*]$ とおき, 両者より状態ベクトル $|\phi\rangle = [|x\rangle, |v\rangle]$ を定義する. 運動方程式(5.3)より状態遷移行列 U_s を求めると付録式(A)となる. 付録式(A)の各行列要素に着目し, 時間 Δt 秒毎の離散力学系において大振動子から両小振動子の運動に影響を与えない, つまり大振動子から衝突小振動子及び非衝突小振動子を切り離す内部共振条件を導出する. ここで付録式(A)の状態遷移行列を4つの 3×3 ブロック行列に分ける. 要素 $a_{11} \sim a_{13}, a_{21} \sim a_{23}, a_{31} \sim a_{33}$ を $U_{s_{x-x}}$, 要素 $a_{14} \sim a_{16}, a_{24} \sim a_{26}, a_{34} \sim a_{36}$ を $U_{s_{x-v}}$, 要素 $a_{41} \sim a_{43}, a_{51} \sim a_{53}, a_{61} \sim a_{63}$ を $U_{s_{v-x}}$, 要素 $a_{44} \sim a_{46}, a_{54} \sim a_{56}, a_{64} \sim a_{66}$ を $U_{s_{v-v}}$ とおく. これを行列で表現すると式(4.7)となる.

$$U_s = \begin{bmatrix} U_{s_{x-x}} & U_{s_{x-v}} \\ U_{s_{v-x}} & U_{s_{v-v}} \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

内部共振とは, 多体振動系において各振動子の振動数比が整数比で表される場合に生じる内部振動子間の共振現象であることから, 本章の系を内部共振系とする場合, $e > f > g$ を満たす自然数において, $\omega_{d+} : \omega_{dt} : \omega_{d-} = e : f : g$ とおくと, 無次元化により,

$$\omega_{d+} = e/f, \omega_{dt} = 1, \omega_{d-} = g/f \quad (5.8)$$

が成り立つ. これらの条件下で, 位置と速度が連成しないようにブロック行列 $U_{s_{x-v}}, U_{s_{v-x}}$ を零行列 O とするためには, $\sin \omega_{dt} t^* = 0$, $\sin \omega_{d+} t^* = 0$, $\sin \omega_{d-} t^* = 0$ を同時に満たす必要がある.

次にブロック行列 $U_{s_{x-x}}, U_{s_{v-v}}$ に着目する. 離散力学系において大振動子が衝突小振動子及び非衝突小振動子間の相互作用から切り離されるためには, 非対角行列要素 $a_{12}, a_{21}, a_{13}, a_{31}, a_{45}, a_{54}, a_{46}, a_{64}$ が全て0とならなければならない. これを満たす条件として, モード減衰率 $\sigma_+ = \sigma_-$, 衝突周期 $\Delta t^* = 2\pi f q / (e - g)$ が得られる. 以上の考察から, 衝突周期 Δt^* が 2π の整数倍であり, e, f, g が本章(7)で示した特別な組み合わせを満足する場合, 離散力学系において位置-速度連成がない小振動子間相互作用のみに起因した内部共振現象が現れる.

5・3・2 衝突演算子

外部壁による完全弾性衝突を仮定すると, 状態ベクトル $|\phi\rangle = [|x\rangle, |v\rangle]$ に対し衝突を表す演算子は式(5.9)で表される.

$$U_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & O \\ O & U'_t \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

5・3・3 衝突振動演算子

前節で導出した時間発展演算子と衝突演算子を用いて、衝突周期を Δt^* とした場合の衝突振動を記述すると、衝突振動演算子 U は $U = U_s U_t$ となる。時刻 t^* における状態ベクトルを $|\phi(t^*)\rangle$ とすると、本章の衝突振動における n 回衝突後の状態ベクトルは衝突振動演算子 U を用いて式(5.10)で表される。

$$|\phi(t^* + n \cdot \Delta t^*)\rangle = U^n |\phi(t^*)\rangle \quad (5.10)$$

5・3・4 比例粘性減衰により摂動を受けた Grover アルゴリズム

5・3・4・1 量子検索アルゴリズムとしての Grover アルゴリズム

Grover アルゴリズムとは、複数のファイルの中から任意のファイルを選び出す検索アルゴリズムである。 N 個のファイルを波動関数の状態 $|i\rangle, (i=1 \sim N)$ によって対応させ、初期値の状態 $|s\rangle$ を N によって規格化された以下の重ね合わせによって表現する。

$$|s\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N |i\rangle \quad (5.11)$$

いま検索対象のファイルの波動関数を $|\tau\rangle = [1 \ 0]$ 、それ以外のファイルの波動関数を $|\hat{\tau}\rangle = [0 \ 1]$ とすると、初期状態は

$$|s\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} |\tau\rangle + \sqrt{\frac{N-1}{N}} |\hat{\tau}\rangle \quad (5.12)$$

となる。次に $|\tau\rangle$ の状態のみ位相を π ずらす演算子 U_t と、 $|s\rangle$ の状態のみ位相を π ずらす変換を任意の直交変換 P とその逆変換 P^{-1} で挟んだ演算子 U_s を定義する。

$$U_t = I - (1 - e^{j\pi}) |\tau\rangle\langle\tau| = I - 2|\tau\rangle\langle\tau| \quad (5.13)$$

$$U_s = P^{-1} \{I - (1 - e^{j\pi}) |s\rangle\langle s|\} P = P^{-1} \{I - 2|s\rangle\langle s|\} P \quad (5.14)$$

ここで記号 $\langle \bullet |$ は $|\bullet\rangle$ の複素共役転置である。Grover 量子アルゴリズムは、式(5.12)で表される $|\tau\rangle$ と $|\hat{\tau}\rangle$ の重ね合わせ状態に演算子 U_t と U_s を交互に掛け合わせるにより表現される。

5・3・4・2 古典的な波動現象における Grover アルゴリズム

一方、Grover アルゴリズムは、古典的な波動現象であっても同様に成り立つ。本章における三体振動系に現れる Grover アルゴリズムは Patel(Patel, 2006)によって報告された。大振動子に対して並列に取り付けられた小振動子の重心位置の速度は、衝突小振動子と非衝突小振動子の重ね合わせとして表される。

$$\bar{v} \approx \frac{1}{\sqrt{1+\gamma}} v_1^* + \sqrt{\frac{\gamma}{1+\gamma}} v_2^* \quad (5.15)$$

完全弾性衝突は式(5.9)と対応し衝突小振動子のみ位相を π ずらす衝突演算子 (U_i) として働く。一方、衝突から次の衝突までの系の時間発展は $R=1$ の場合、式(5.7)と対応し、全小振動子の速度平均に対する π 反転である時間発展演算子 (U_s) として働く。これより Grover アルゴリズムによって衝突小振動子と非衝突小振動子の間で交互に運動エネルギーの移動現象が生じる。一方 $R \neq 1$ の場合、時間発展演算子は式(5.7)とは完全に対応せず、式(5.15)で表されるように摂動を受けたアルゴリズムとなる。

$$U_s = P^{-1} \{1 - (R+1)|s\rangle\langle s|\} P \quad (5.16)$$

本章では比例粘性減衰を考慮することにより得られた摂動 Grover アルゴリズムである式(5.13), (5.16)を用い、概周期振動の周期変調現象について議論する。

5・4 数値計算

5・4・1 自由振動応答（各モードの減衰率が一定である場合）

図 5.2 に減衰完全概周期振動の時間波形を示す。横軸に時間、縦軸に各振動子の平衡位置からの変位を示す。図中上段が大振動子、中段が衝突小振動子、下段が非衝突小振動子を示す。質量比 $\gamma=95$ 、減衰固有角振動数 $\omega_{d+}=1.5$ 、 $\omega_{d-}=0.5$ 、 $\omega_d=1$ 、衝突周期 $\Delta t^* = 2\pi$ 、モード減衰率 $\sigma=0.005$ 、初期条件 $X(0)=0$ 、 $x_1(0)=0$ 、 $x_2(0)=0$ 、 $V(0)=1$ 、 $v_1(0)=1$ 、 $v_2(0)=1$ の下で数値計算をおこなった。この系のモデルの値は $m_1=0.1\text{kg}$ 、 $k_1=0.1\text{N/m}$ とすると、 $m_2=9.5\text{kg}$ 、 $k_2=9.5\text{N/m}$ 、 $M=10.2403\text{kg}$ 、 $K=5.7606\text{N/m}$ となる。さらに図 5.3 に各小振動子の運動エネルギーの時間発展を示す。横軸は時間、縦軸は運動エネルギーを表し、図上段は衝突小振動子、図下段は非衝突小振動子を示す。図 5.2 より、衝突小振動子の振幅が大きい時刻において、非衝突小振動子の振幅が最小の節になっており、またその逆も観察される。また衝突小振動子と非衝突小振動子の波形においては緩やかな振幅の変調を伴った概周期振動波形が観察される。これは衝突によって特殊振動子のモードである ω_i が励振され、その他のモードとの間でエネルギーの享受をおこなっていることに由来する。図 5.3 より、非衝突小振動子から衝突小振動子へのエネルギー移動が観察される。またこの逆も存在することから、シミュレーションにおいても小振動子間に周期的な振幅の変調と連続的な振幅の減衰を伴った減衰完全概周期振動が確認される。

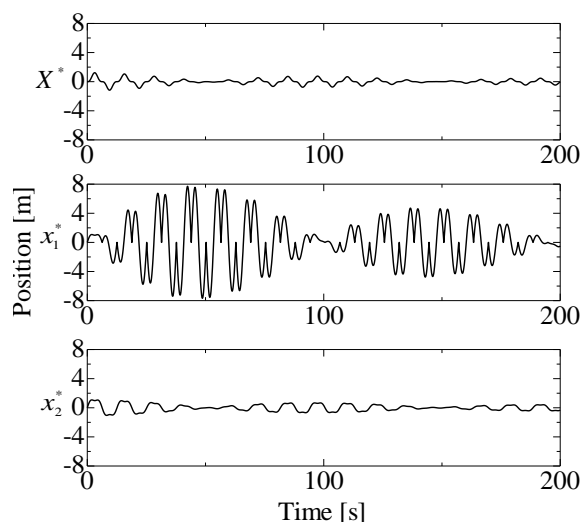


Fig.5.2 Positional change of the large oscillator (upper), the small impact oscillator (middle) and the small non-impact oscillator (lower) with equivalent damping rate.

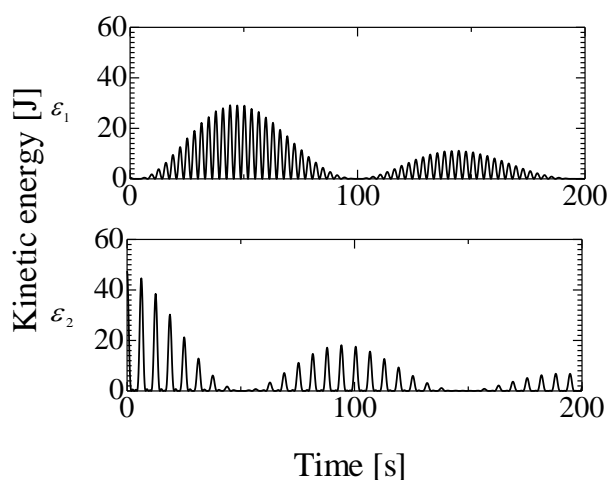


Fig.5.3 Periodic perfect kinetic energy transfer between the two small oscillators with equivalent damping rate.

以下では、離散力学系における両小振動子の状態が大振動子の状態によらないことから、以下では各衝突瞬間における小振動子の位置状態ベクトル $|x\rangle = [x_1^*, x_2^*]$ と速度状態ベクトル $|v\rangle = [v_1^*, v_2^*]$ を抽出し、図 5.4 に速度状態ベクトルを Bloch 球表示する。Bloch 球の北極は衝突小振動子に運動エネルギーが集中した状態 $|\tau\rangle$ を表し、南極は非衝突小振動子に運動エネルギーが集中した状態 $|\hat{\tau}\rangle$ を意味する。各小振動子の位相平面の位相差を経度、各位相平面の振幅の比の逆正接から求めた偏角を北極よりとった緯度と定義する。また各小振動子が質量に比例した運動エネルギーを持つ状態を $|s\rangle$ と定義する。北極点 $|\tau\rangle$ からの緯度が 0 の場合、衝突小振動子に運動エネルギーが集中する状態を表し、 π の場合、非衝突小振動子に運動エネルギーが集中する状態 $|\hat{\tau}\rangle$ を表す。軌道は、両者を交互に繰り返すため、二小振動子間での周期的な運動エネルギーの完全移動である完全概周期振動を確認できる。また状態ベクトルの大きさが、時間経過とともに小さくなることから、全エネルギーの減衰も確認できる。

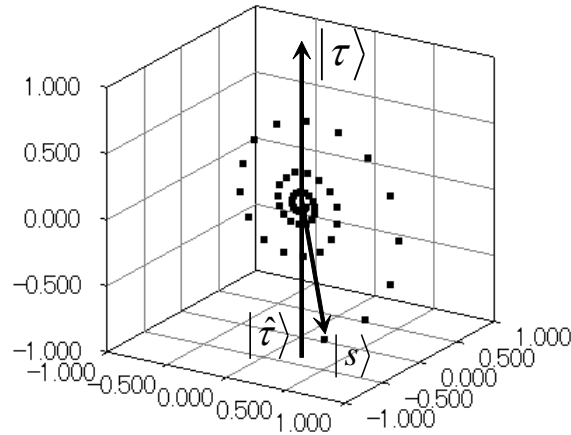


Fig.5.4 Bloch map notation of the two small oscillators in damped multi-vibro-impact system.

5・4・2 減衰完全概周期振動周期と分数調波共振

本節では完全概周期振動の周期 T_a を算出する。 $v_1^* - v_2^*$ 平面における $U_i^* U_i$ が回転行列となることから、Bloch 球を一周する完全概周期振動の無次元周期は $T_a = \pi \Delta t^* / 2 \sin^{-1}[\sqrt{1/(1+\gamma)}]$ となり、無次元衝突周期 Δt^* と質量比 γ の関数であることが分かる。また本章では、外部の壁による周期的衝突は無次元周期 2π 毎の衝突であり、釣合位置での完全弾性衝突を想定している。衝突時に壁から衝突小振動子に受けた力を外力とみなすと、外力の無次元衝突周期が 2π となり、角振動数にすると $\omega = 1$ となる。一方、概周期振動の無次元周期は、無次元角振動数に直すと $\omega' = 2 \sin^{-1}[1/\sqrt{1+\gamma}]/\pi$ となる。 $\sin^2[\pi q/p] = 1/\gamma + 1$ とおくと、 $\sin^2[\pi q/p]$ が有理数となる自然数 (p, q) の組み合わせを求めるディオファントス問題は M. Newman により証明されており (Newman, 1969), $(p, q) = (2, 1), (3, 1), (4, 1), (6, 1)$ の組み合わせしか存在しない。これより質量比 $\gamma = 3$ の場合、概周期振動は $1/3$ 次分数調波共振、質量比 $\gamma = 1$ の場合、概周期振動は $1/2$ 次分数調波共振、質量比 $\gamma = 1/3$ の場合、 $2/3$ 次分数調波共振となって現れる。またそれ以外の場合は、非再帰的な振動となる。これより特定の質量比 γ において分数調波振動が現れることが分かる。

5・4・3 自由振動応答（衝突小振動子のモード減衰率のみ変化させた場合）

図 5.5 に衝突小振動子のモード減衰率のみを変化させた場合の減衰概周期振動の時間波形を示す。横軸に時間、縦軸に各振動子の平衡位置からの変位を示す。図中上段が大振動子、中段が衝突小振動子、下段が非衝突小振動子を示す。質量比 $\gamma = 95$ 、減衰固有角振動数 $\omega_{d+} = 1.5$ 、 $\omega_{d-} = 0.5$ 、 $\omega_{dt} = 1$ 、衝突周期 $\Delta t^* = 2\pi$ 、モード減衰率 $\sigma = 0.005$ 及び $\sigma' = 0.03$ 、初期条件 $X(0) = 0$ 、 $x_1(0) = 0$ 、 $x_2(0) = 0$ 、 $V(0) = 1$ 、 $v_1(0) = 1$ 、 $v_2(0) = 1$ の下で数値計算をおこなった。図 5.5 より衝突小振動子の振幅が腹となる時刻において非衝突振動子の節が現れ、またその逆も存在することから、前節と同様に二小振動子間に緩やかな振幅の変調を伴った概周期振動の発生が確認できる。これは先ほどと同様に衝突によって特殊振動子のモードである ω_i が励振され、その他のモードとの間でエネルギーの享受をおこなっていることに由来する。

図 5.6 に先の条件における各小振動子の運動エネルギーの時間発展を示す。縦軸に運動エネルギー、横軸に時間を示し、図上段に衝突小振動子、図下段に非衝突小振動子を示す。図中 $\sigma' = 0.03$ の場合を実線で、 $\sigma' = 0.005$ の場合を破線で表す。図中破線の $\sigma' = 0.005$ の場合は、 $\sigma_i = \sigma_+ = \sigma_-$ となることから、衝突小振動子と非衝突小振動子間で運動エネルギーが完全に移動する。これは

前節において議論した完全概周期振動に対応する。本章の条件においては、減衰完全概周期振動の周期は約 100s であった。

次に図中実線 $\sigma' = 0.03$ の場合は、 $\sigma_+ \neq \sigma_- = \sigma_-$ に対応し、 $\sigma' = 0.005$ の場合と同様に小振動子間のエネルギー移動は認められるものの、衝突小振動子の運動エネルギーが最大となる時刻において非衝突小振動子の運動エネルギーは最小とはならないことが分かる。またこの例における減衰概周期振動の周期は先の完全概周期振動の周期とは異なり 110s であった。以上の結果から、衝突小振動子のモード減衰率のみをずらした場合は、モード減衰率のずれに依存して二小振動子間のエネルギー移動に不完全さが生じ、かつ概周期振動の周期に変調が加えられることが分かる。このような周期の変調現象は 3 章に報告した無減衰系での解析(高田他, 2011)では観察されていない。

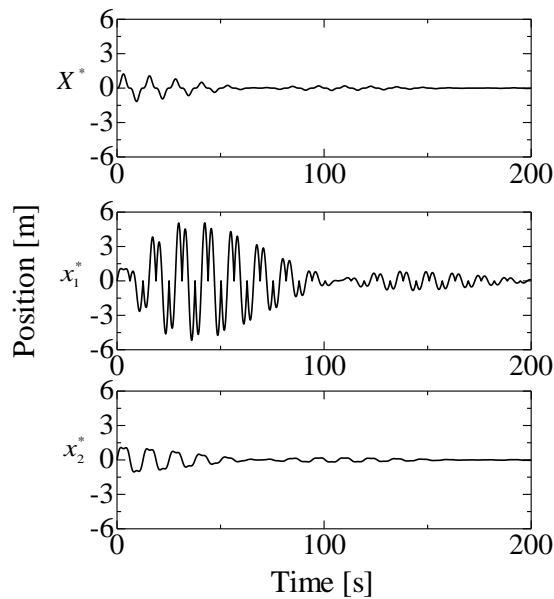


Fig.5.5 Positional change of the large oscillator (upper), the small impact oscillator (middle) and the small non-impact oscillator (lower) with non-equivalent modal damping rate.

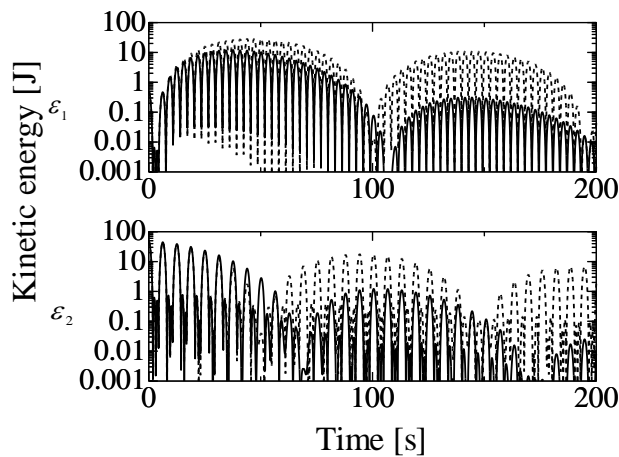


Fig.5.6 Periodic perfect kinetic energy transfer between the two small oscillators with non-equivalent damping rate.

5・4・4 質量比とモード減衰率の関係

各質量比において衝突小振動子のモード減衰率を変化させた場合の減衰概周期振動の周波数を図 5.7 に示す。縦軸に減衰概周期振動の無次元周波数 f_a (概周期振動の無次元周期 T_a の逆数)、横軸にモード減衰率 σ' を示す。大振動子と二小振動子の質量中心からなる二自由度系とした場合のモード減衰率を $\sigma_+ = \sigma_- = 0.005$ と一定とし、モード減衰率 σ' を $0 \sim 0.10$ 、質量比 γ を $15 \sim 95$ と変化させた。図中●は $\gamma = 15$ 、△は $\gamma = 23$ 、■は $\gamma = 47$ 、▽は $\gamma = 95$ の場合を示す。モード減衰率 σ' の増加に伴って概周期振動の無次元周波数が減少することが分かる。また質量比 $\gamma = 47$ の場合、モード減衰率 $\sigma' > 0.08$ の領域において、運動エネルギーの周期的な交換が起らず、衝突小振動子だけにエネルギーが集中し続ける現象が発生した。この場合、衝突小振動子だけに運動エネルギーが流入するため概周期振動は停止した。この状態は後述の概周期振動の無次元周波数が 0 に漸近する現象として理解できる。また質量比 $\gamma = 95$ の場合では、モード減衰率 $\sigma' > 0.06$ の領域においても同様の現象が発生した。

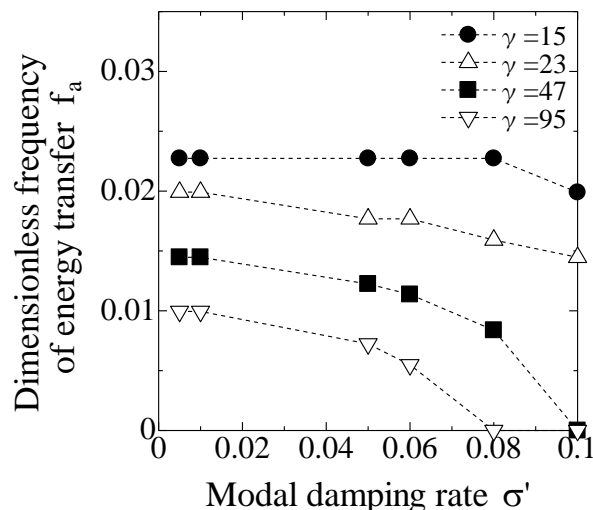


Fig.5.7 Effect of non-equivalent modal damping rate to the dimensionless energy transfer frequency with various mass ratio.

5・5 概周期振動の周期変調現象に関する考察

5・5・1 数値計算による特徴抽出

図 5.8 に減衰完全概周期振動の時間変化を示す。横軸に時間、縦軸に各振動子の平衡位置からの変位を示す。なお現象を把握しやすくする目的で、小振動子の縦軸は座標変換 $x_1^* = x_1$ 、 $x_2^* = \sqrt{\gamma} x_2$ を施している。図中上段が大振動子、中段が衝突小振動子、下段が非衝突小振動子を示す。質量比 $\gamma = 95$ 、減衰固有角振動数 $\omega_{a+} = 1.5$ 、 $\omega_{a-} = 0.5$ 、 $\omega_{at} = 1$ 、衝突周期 $\Delta t^* = 2\pi$ 、初期条件 $X(0) = 0$ 、 $x_1(0) = 0$ 、 $x_2(0) = 0$ 、 $V(0) = 1$ 、 $v_1(0) = 1$ 、 $v_2(0) = 1$ の下で数値計算をおこなった。なお図中(a)はモード減衰率 $\sigma = 0.005$ 、 $\sigma' = 0.005$ ($R = 1$) の場合、図中(b)はモード減衰率 $\sigma = 0.005$ 、 $\sigma' = 0.05$ ($R = 1.367$) の場合、図中(c)はモード減衰率 $\sigma = 0.005$ 、 $\sigma' = 0.1$ ($R = 1.816$) の場合を表している。図 5.9 に各衝突直前の二小振動子の運動エネルギー比を示す。ここでは減衰項の寄与を無視するために毎回の二小振動子の運動エネルギーの総和により規格化した。縦軸に運動

エネルギー比，横軸に演算子の作用回数を示し，図中上段は衝突小振動子，下段は非衝突小振動子を示している．図 5.8(a)より，衝突小振動子の振幅が大きい時刻において，非衝突小振動子の振幅が最小の節になっており，またその逆も観察される．また衝突小振動子と非衝突小振動子の波形において緩やかな振幅の変調を伴った概周期振動波形が観察される．図 5.9(a)に着目すると，運動エネルギー比の最大と最小が交互に繰り返され，衝突小振動子と非衝突小振動子の間で正弦的な運動エネルギーの授受をおこなっていることがわかる．これは特殊振動子のモードである ω_1 が励振され，その他のモードとの間でエネルギーの授受がおこなわれていることに由来する⁷⁾．

図 5.8(b)に着目すると図 5.8(a)の場合と同様に，衝突小振動子及び非衝突小振動子に緩やかな振幅変調を伴った概周期振動波形が観察される．しかしながら概周期振動波形の周期は 125.6s であり，先の(a)の場合の 100.5s と比較して長くなっている．図 5.9(b)の運動エネルギー比に着目すると先の(a)の場合と異なり，正弦的な運動エネルギーの移動ではなく，波形歪みを伴った運動エネルギーの移動が発生している．この歪み波形的な運動エネルギーの移動は大別して以下に示す二つの領域に分けられる．ここで 0~100.5s に代表される遅い運動エネルギー移動を Mode1, 100.5s~138.2s に代表される速い運動エネルギー移動を Mode2 とし区別する． $v_1^* - v_2^*$ 平面での速度状態ベクトルの位置関係に着目すると，Mode1 の領域は，第 1 象限，第 3 象限に対応し，Mode2 の領域は第 2 象限，第 4 象限に対応した．図 5.9(b)の場合，Mode1 と Mode2 の領域は交互に現れ，周期的に運動エネルギーの交換をおこなった．Mode1 の領域は衝突振動演算子が一回作用する際の運動エネルギーの移動が小さい領域であり，概周期振動の周期を長くする．一方，Mode2 の領域は演算子が一回作用する際の運動エネルギーの移動が大きい領域であり，概周期振動の周期を短くする．以上より $R \neq 1$ の場合，運動エネルギー移動の速度変化に起因した概周期振動の周期変調現象が発生することが分かる．

次に図 5.8(c)に着目する．図 5.8(a)や(b)の場合と同様に，衝突小振動子及び非衝突小振動子に緩やかな振幅変調を伴った振動波形が観察される．しかしながら，先の(a)，(b)とは異なり周期的な振幅変調波形とはならない．衝突小振動子の時間波形に着目すると一度振幅が緩やかに増加した後，単調な振幅減少を示しており，周期的な運動エネルギー移動が観察されていない．また図 5.9(c)に着目すると Mode1 の遅い運動エネルギー移動を示した後，衝突小振動子の運動エネルギー比が 0.14 で一定値をとる．これは先の(a)，(b)とは異なり，運動エネルギーが衝突小振動子のみに流入し続けるため，運動エネルギー移動の周期性が失われることを示唆している．これは特殊振動子のモードである ω_1 にエネルギーが局在化することを意味している．

以上の運動エネルギー移動の特徴を $v_1^* - v_2^*$ 平面での回転角の観点から解析を試みる．図 5.10 に演算子一回当たりの $v_1^* - v_2^*$ 平面での回転角を示す．横軸に演算子の作用回数を示し，縦軸にその回転角を示す．図 5.10(a)の場合 ($R = 1$)，演算子作用一回当たりの回転角は一定値-0.204[rad]を示し， $v_1^* - v_2^*$ 平面にて時計周りに定回転する．これに伴い運動エネルギーは正弦的となり，図 5.9(a)で示した変化と一致する．図 5.10(b)の場合 ($R = 1.367$)，演算子の作用回数に依存して回転角は-0.341~-0.063[rad]に変化する．Mode1 の領域では回転角が小さく，Mode2 の領域では回転角が大きくなる傾向にある．これは先の運動エネルギー比の移動の傾向と一致する．図 5.10(a)で示される $R=1$ の場合，Grover アルゴリズムの演算子には摂動が作用しないが， $R=1.367$ の場合には摂動が作用する．摂動が作用しない場合，衝突振動演算子は一定回転角の回転行列として作用するが，摂動が作用する場合，演算子の回転角が時々刻々変化することが示唆される．回転角が-0.204[rad]より小さい場合には摂動による反時計周りの逆回転成分の発生，大きい場合には時計周りの正回転成分の発生を示唆している．さらに図 5.10(c)の場合 ($R = 1.816$)，回転角は一定値 0 に収束した．これは運動エネルギー移動の停止を示しており，先の考察と一致する．以上のよ

うに運動エネルギーの移動を $v_1^* - v_2^*$ 平面上での回転角と対比することにより, 本研究で扱う概周期振動の周期変調現象を定量的に理解できることが示唆される.

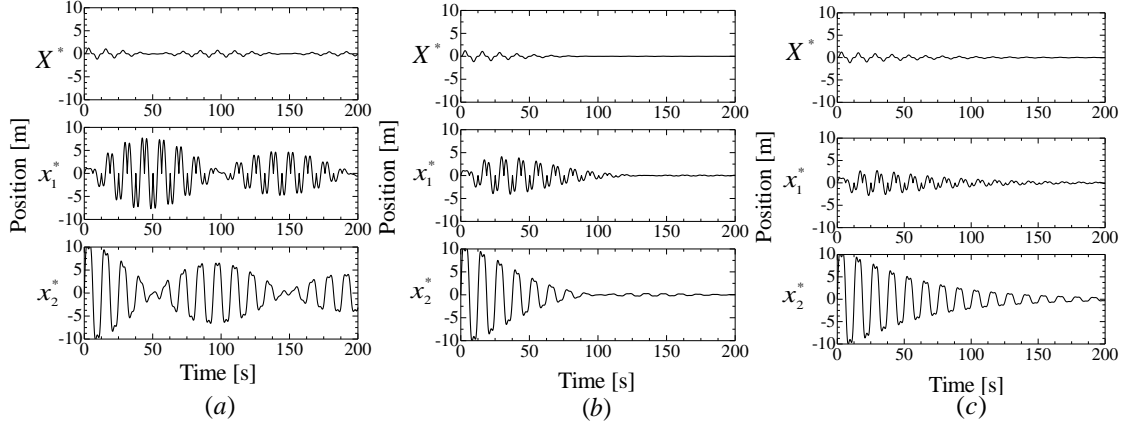


Fig.5.8 Positional change of the large oscillator (upper), the small impact oscillator (middle) and the small non-impact oscillator (lower).

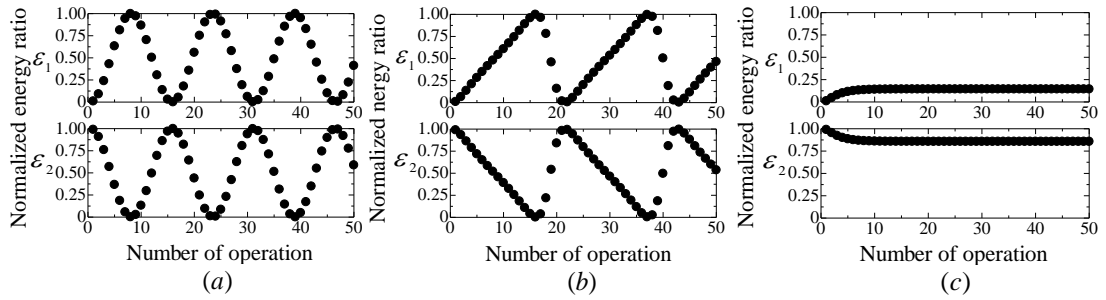


Fig.5.9 Normalized energy ratio change of the small impact oscillator (upper) and the small non-impact oscillator (lower).

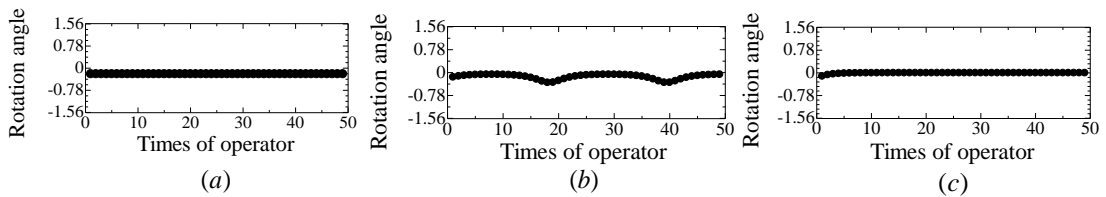


Fig.5.10 Change of the rotation angle in the $v_1^* - v_2^*$ plane

5・5・2 概周期振動の周期変調メカニズム

本節では前節で示した概周期振動の周期変調のメカニズムを議論するため, $v_1^* - v_2^*$ 平面での回転と Grover アルゴリズムの摂動という観点から解析をおこなう. $v_1^* - v_2^*$ 平面において二小振動子間の系の運動を記述する 2×2 のサブシステムに書き換えると次式となる.

$$U = (-1) \cdot \exp[-2\pi\sigma'] \cdot \sqrt{R} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\gamma - R}{\sqrt{R(\gamma + 1)}} & \frac{\sqrt{\gamma(R + 1)}}{\sqrt{R(\gamma + 1)}} \\ \frac{\sqrt{\gamma(R + 1)}}{\sqrt{R(\gamma + 1)}} & \frac{\gamma \cdot R - 1}{\sqrt{R(\gamma + 1)}} \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

ここで $\cos \theta = \sqrt{(\gamma - R)(\gamma \cdot R - 1)} / \sqrt{R(\gamma + 1)}$, $\sin \theta = \sqrt{\gamma(R + 1)} / \sqrt{R(\gamma + 1)}$, $X = \sqrt{(\gamma - R) / (\gamma \cdot R - 1)}$ とおくと, 式(5.17)の行列部は次式となる.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{\gamma - R}{\sqrt{R(\gamma + 1)}} & \frac{\sqrt{\gamma(R + 1)}}{\sqrt{R(\gamma + 1)}} \\ \frac{\sqrt{\gamma(R + 1)}}{\sqrt{R(\gamma + 1)}} & \frac{\gamma \cdot R - 1}{\sqrt{R(\gamma + 1)}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{X} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{X} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(-\theta) & \sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{X} \cdot T U T \end{aligned} \quad (5.18)$$

式(5.18)より 2×2 のサブシステムは行列の積に分解され, 回転角 $-\theta$ の回転行列 U' と $v_1^* - v_2^*$ 平面の振幅比を変化させる行列 T を持つことが分かる. ここで $v_1^* - v_2^*$ 平面の振幅比を変化させる行列 T について考える. 演算子作用前の衝突小振動子及び非衝突小振動子の速度をそれぞれ v_1^*, v_2^* とすると, 演算子 T による回転角は式(5.18)により与えられる.

$$\Delta \theta = \tan^{-1} \left(\frac{v_2^*}{X v_1^*} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{v_2^*}{v_1^*} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{(v_2^* / v_1^*)(1 - X)}{X + (v_2^* / v_1^*)^2} \right) \quad (5.18)$$

式(5.18)より演算子 T による回転角 $\Delta \theta$ の回転方向は, 演算子作用前の $v_1^* - v_2^*$ 平面の象限と X の値に依存して変化することがわかる. ここで質量比は必ず $\gamma > 0$ であるため, $R > 1$ の時 $X < 1$, $R < 1$ の時 $X > 1$, $R = 1$ の時は $X = 1$ となる. 演算子作用前の $v_1^* - v_2^*$ ベクトルとの位置関係をまとめ, 表 5.1 に示す. $R > 1$ の場合, $v_1^* - v_2^*$ ベクトルが第 1 象限, 第 3 象限に位置する時, 演算子 T は反時計周りに $\Delta \theta$ 回転する演算子として働き, $v_1^* - v_2^*$ ベクトルが第 2 象限, 第 4 象限に位置する時, 演算子 T は時計周りに $\Delta \theta$ 回転する演算子として働く. 一方, 回転行列 U' は時計周りに一定角 θ 回転する演算子として働く. これにより $R > 1$ の場合, $v_1^* - v_2^*$ ベクトルが第 1 象限, 第 3 象限に位置する時には衝突振動演算子は概周期振動の周期が長くなるように働き, 第 1 象限, 第 3 象限に位置する時には概周期振動の周期が短くなるように働くことが示される. 以上で示したように, 各象限において振動演算子の作用が異なり, 概周期振動の周期が変調される. これが概周期振動の周期変調現象のメカニズムである.

Table.5.1 Relationship between quadrant and sign of difference in rotation angle.

quadrant	sign of $\Delta \theta$	
	$R > 1 (X < 1)$	$R < 1 (X > 1)$
I	+	-
II	-	+
III	+	-
IV	-	+

5・5・3 概周期振動の停止条件と一方向振動エネルギー移動

本節では、前節で議論した小振動子間の概周期振動が停止し、二小振動子の運動エネルギーの比が固定される条件を導出する。概周期振動が停止する場合において、初期状態から演算子を最初から 50 回まで作用させた場合の衝突・非衝突小振動子の衝突時の速度の状態点 (●) の変化をプロットし、図 5.11 に示す。横軸は衝突小振動子の衝突直前の速度 v_1^* 、縦軸は同じ時刻における非衝突小振動子の速度 v_2^* を示す。質量比 $\gamma = 95$ 、減衰固有角振動数 $\omega_{d+} = 1.5$ 、 $\omega_{d-} = 0.5$ 、 $\omega_{d0} = 1$ 、衝突周期 $\Delta t^* = 2\pi$ 、モード減衰率 $\sigma = 0.005$ 及び $\sigma' = 0.1$ 、初期条件 $X(0) = 0$ 、 $x_1(0) = 0$ 、 $x_2(0) = 0$ 、 $V(0) = 1$ 、 $v_1(0) = 1$ 、 $v_2(0) = 1$ の下で数値計算をおこなった。演算子の作用回数の増加に伴い、衝突時の速度の比 v_2^*/v_1^* が一定値となり、状態点は直線軌道に収束した。概周期振動の停止に伴い、小振動子間のエネルギー移動が小さくなることから、演算子一回当りの回転角は緩やかに減少し、衝突時の速度の状態点は直線に収束する。無減衰系において、 $v_1^* - v_2^*$ 平面の回転は単純な回転行列で表されるが、減衰の寄与により逆回転成分が発生し、演算子一回当りの回転角と逆回転角が釣り合った時に直線軌道が現れる。概周期振動が停止する条件においては、衝突時の速度の状態点は直線軌道に漸近し、衝突振動演算子の作用前後で、衝突時の速度の比 v_2^*/v_1^* が一定となることから、 $v_2^*(n+1)/v_1^*(n+1) = v_2^*(n)/v_1^*(n)$ の関係を満たすように R 、 γ の条件を定めることにより、次式が得られる。

$$\frac{v_2^*}{v_1^*} = \frac{1}{2} \frac{(R-1)(\gamma+1)}{\sqrt{\gamma}(R+1)} \pm \sqrt{4 \left(\frac{(1-R)(\gamma+1)}{\sqrt{\gamma}(R+1)} \right)^2 - 1} \quad (5.19)$$

衝突時の速度の比が R 、 γ より定められる式(5.19)と一致した時に概周期振動は停止する。式(5.19)より求めた漸近線を図 5.11 に実線で示す。衝突時の速度の状態点が収束した後の漸近線と良く一致することが分かる。上記の概周期振動停止条件下における時間波形を図 5.12 に示す。衝突小振動子はモード間エネルギー移動に起因する緩やかな振幅増加を示した後、単調な振幅減少を示した。前節までの周期的な振幅変調現象とは異なり、過渡的な振動応答を示すことが分かる。先の演算子一回当りの回転角が逆回転成分より大きい領域では、衝突小振動子は緩やかに振幅増加を示すが、式(5.19)を満たす場合は正回転角が逆回転角と一致し、運動エネルギーの移動が停止する。この場合、系には減衰成分である $\exp[-2\pi\sigma']$ が一様に作用するため、単調な減衰波形が現れ、過渡的な振動応答が顕在化する。

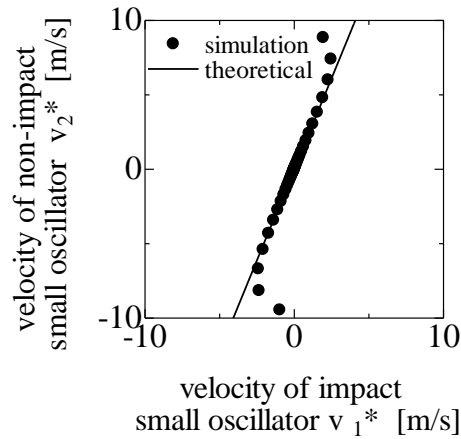


Fig.5.11 State of impact velocities of the small oscillators in case of energy transfer dissipation.

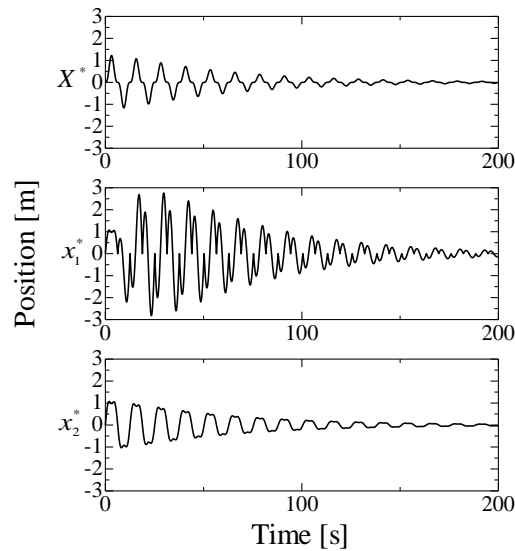


Fig.5.12 Positional change of the large oscillator (upper), the small impact oscillator (middle) and the small non-impact oscillator (lower) in case of energy transfer dissipation.

5・6 結 言

本章では比例粘性減衰を有する内部共振多体衝突振動系における概周期振動の周期変調現象を波動アルゴリズムの観点から解析した。その結果、以下の結論を得た。

- (1) 図 5.1 に示す比例粘性減衰を有する三自由度衝突振動系において、離散力学的に三体振動系から大振動子を切り離すことにより、衝突小振動子と非衝突小振動子間のみ相互作用が生じる内部共振条件を導出した。
- (2) 本内部共振多体衝突振動系におけるモード減衰率が等しい場合、無減衰系の場合と同様に、衝突小振動子と非衝突小振動子間に完全概周期振動が発生することを解析的に示した。
- (3) 完全概周期振動の無次元周期を解析的に導出し、これが無次元衝突周期と二小振動子間の質量比の関数であることを示した。

- (4) 本内部共振多体衝突振動系においては，特別な質量比において小振動子間のエネルギー移動である概周期振動に起因した分数調波共振が発生することを示した．
- (5) 衝突小振動子のモード減衰率のみを他のモード減衰率からずらした場合，無減衰系での衝突振動演算子に摂動を加えた形の衝突振動演算子が得られる．
- (6) 比例粘性減衰による衝突振動演算子への摂動により，運動エネルギー移動の速度が変調を受けることを解析的に示した．また運動エネルギー移動の速度には二つのモードがあることを示した．
- (7) 摂動演算子による回転角は，作用直前の速度状態ベクトルの位置に依存して変化することを示した．また速度状態ベクトルの位置と回転方向について整理した．
- (8) (5)の場合，小振動子間のエネルギー移動が不完全となり，概周期振動周期に変調が加わることを明らかにした．また周期的な概周期振動が停止し，二小振動子の速度比が一定となる条件を解析的に導出した．

付 録

状態遷移行列の各成分

運動方程式より求めた状態遷移行列の各成分は式(A)となる.

$$U_s = [a_{i,j}] \quad (i, j = 1 \sim 6) \quad (\text{A})$$

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= e^{-\sigma_+ t^*} \left(\frac{\omega_+^2 - \omega_-^2}{(\omega_-^2 - \omega_+^2)\omega_{d_+}} \right) \cdot (\omega_{d_+} \cos \omega_{d_+} t^* + \sigma_+ \sin \omega_{d_+} t^*) + e^{-\sigma_- t^*} \left(\frac{\omega_-^2 - \omega_+^2}{(\omega_-^2 - \omega_+^2)\omega_{d_-}} \right) \cdot (\omega_{d_-} \cos \omega_{d_-} t^* + \sigma_- \sin \omega_{d_-} t^*) \\
 a_{12} &= \frac{(\omega_+^2 - \omega_-^2)(\omega_-^2 - \omega_+^2)}{\omega_+^2(\omega_-^2 - \omega_+^2)(\gamma + 1)\omega_{d_+}\omega_{d_-}} \left\{ \sigma_- \omega_{d_+} e^{-\sigma_- t^*} \sin \omega_{d_-} t^* + \sigma_+ \omega_{d_-} e^{-\sigma_+ t^*} \sin \omega_{d_+} t^* + \omega_{d_+}\omega_{d_-} (e^{-\sigma_- t^*} \cos \omega_{d_-} t^* - e^{-\sigma_+ t^*} \cos \omega_{d_+} t^*) \right\} \\
 a_{13} &= \frac{(\omega_+^2 - \omega_-^2)(\omega_-^2 - \omega_+^2)\sqrt{\gamma}}{\omega_+^2(\omega_-^2 - \omega_+^2)(\gamma + 1)\omega_{d_+}\omega_{d_-}} \left\{ \sigma_- \omega_{d_+} e^{-\sigma_- t^*} \sin \omega_{d_-} t^* + \sigma_+ \omega_{d_-} e^{-\sigma_+ t^*} \sin \omega_{d_+} t^* + \omega_{d_+}\omega_{d_-} (e^{-\sigma_- t^*} \cos \omega_{d_-} t^* - e^{-\sigma_+ t^*} \cos \omega_{d_+} t^*) \right\} \\
 a_{14} &= \frac{(\omega_+^2 - \omega_-^2)}{(\omega_-^2 - \omega_+^2)\omega_{d_+}} e^{-\sigma_+ t^*} \sin \omega_{d_+} t^* + \frac{(\omega_-^2 - \omega_+^2)}{(\omega_-^2 - \omega_+^2)\omega_{d_-}} e^{-\sigma_- t^*} \sin \omega_{d_-} t^* \\
 a_{15} &= \frac{(\omega_+^2 - \omega_-^2)(\omega_-^2 - \omega_+^2)}{\omega_+^2(\omega_-^2 - \omega_+^2)(\gamma + 1)\omega_{d_+}\omega_{d_-}} \left\{ \omega_{d_+} e^{-\sigma_- t^*} \sin \omega_{d_+} t^* - \omega_{d_-} e^{-\sigma_+ t^*} \sin \omega_{d_-} t^* \right\} \\
 a_{16} &= \frac{(\omega_+^2 - \omega_-^2)(\omega_-^2 - \omega_+^2)\sqrt{\gamma}}{\omega_+^2(\omega_-^2 - \omega_+^2)(\gamma + 1)\omega_{d_+}\omega_{d_-}} \left\{ \omega_{d_+} e^{-\sigma_- t^*} \sin \omega_{d_+} t^* - \omega_{d_-} e^{-\sigma_+ t^*} \sin \omega_{d_-} t^* \right\} \\
 a_{21} &= \frac{\omega_+^2 e^{-\sigma_+ t^*}}{(\omega_-^2 - \omega_+^2)\omega_{d_+}} \{ \sigma_+ \sin \omega_{d_+} t^* + \omega_{d_+} \cos \omega_{d_+} t^* \} + \frac{\omega_-^2 e^{-\sigma_- t^*}}{(\omega_-^2 - \omega_+^2)\omega_{d_-}} \{ -\sigma_- \sin \omega_{d_-} t^* - \omega_{d_-} \cos \omega_{d_-} t^* \} \\
 a_{22} &= \frac{(\omega_-^2 - \omega_+^2) e^{-\sigma_+ t^*}}{(\omega_-^2 - \omega_+^2)(\gamma + 1)\omega_{d_+}} \{ \sigma_+ \sin \omega_{d_+} t^* + \omega_{d_+} \cos \omega_{d_+} t^* \} + \frac{(\omega_+^2 - \omega_-^2) e^{-\sigma_- t^*}}{(\omega_-^2 - \omega_+^2)(\gamma + 1)\omega_{d_-}} \{ \sigma_- \sin \omega_{d_-} t^* + \omega_{d_-} \cos \omega_{d_-} t^* \} \\
 &\quad + \frac{\gamma e^{-\sigma_+ t^*}}{(\gamma + 1)\omega_{d_+}} \{ \sigma_+ \sin \omega_{d_+} t^* + \omega_{d_+} \cos \omega_{d_+} t^* \} \\
 a_{23} &= \frac{(\omega_-^2 - \omega_+^2)\sqrt{\gamma} e^{-\sigma_+ t^*}}{(\omega_-^2 - \omega_+^2)(\gamma + 1)\omega_{d_+}} \{ \sigma_+ \sin \omega_{d_+} t^* + \omega_{d_+} \cos \omega_{d_+} t^* \} + \frac{(\omega_+^2 - \omega_-^2)\sqrt{\gamma} e^{-\sigma_- t^*}}{(\omega_-^2 - \omega_+^2)(\gamma + 1)\omega_{d_-}} \{ \sigma_- \sin \omega_{d_-} t^* + \omega_{d_-} \cos \omega_{d_-} t^* \} \\
 &\quad - \frac{\sqrt{\gamma} e^{-\sigma_+ t^*}}{(\gamma + 1)\omega_{d_+}} \{ \sigma_+ \sin \omega_{d_+} t^* + \omega_{d_+} \cos \omega_{d_+} t^* \} \\
 a_{24} &= \frac{\omega_+^2}{(\omega_-^2 - \omega_+^2)\omega_{d_+}\omega_{d_-}} \{ -\omega_{d_+} e^{-\sigma_- t^*} \sin \omega_{d_-} t^* + \omega_{d_-} e^{-\sigma_+ t^*} \sin \omega_{d_+} t^* \} \\
 a_{25} &= \frac{(\omega_+^2 - \omega_-^2) e^{-\sigma_+ t^*}}{(\omega_-^2 - \omega_+^2)(\gamma + 1)\omega_{d_+}} (-\sin \omega_{d_+} t^*) + \frac{(\omega_+^2 - \omega_-^2) e^{-\sigma_- t^*}}{(\omega_-^2 - \omega_+^2)(\gamma + 1)\omega_{d_-}} (\sin \omega_{d_-} t^*) + \frac{\gamma e^{-\sigma_+ t^*}}{(\gamma + 1)\omega_{d_+}} \sin \omega_{d_+} t^* \\
 a_{26} &= \frac{(\omega_+^2 - \omega_-^2)\sqrt{\gamma} e^{-\sigma_+ t^*}}{(\omega_-^2 - \omega_+^2)(\gamma + 1)\omega_{d_+}} (-\sin \omega_{d_+} t^*) + \frac{(\omega_+^2 - \omega_-^2)\sqrt{\gamma} e^{-\sigma_- t^*}}{(\omega_-^2 - \omega_+^2)(\gamma + 1)\omega_{d_-}} (\sin \omega_{d_-} t^*) + \frac{\sqrt{\gamma} e^{-\sigma_+ t^*}}{(\gamma + 1)\omega_{d_+}} (-\sin \omega_{d_+} t^*) \\
 a_{31} &= \frac{\omega_+^2 \sqrt{\gamma} e^{-\sigma_+ t^*}}{(\omega_-^2 - \omega_+^2)\omega_{d_+}} \{ \sigma_+ \sin \omega_{d_+} t^* + \omega_{d_+} \cos \omega_{d_+} t^* \} + \frac{\omega_-^2 \sqrt{\gamma} e^{-\sigma_- t^*}}{(\omega_-^2 - \omega_+^2)\omega_{d_-}} \{ -\sigma_- \sin \omega_{d_-} t^* - \omega_{d_-} \cos \omega_{d_-} t^* \}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{32} &= \frac{(\omega_-^2 - \omega_+^2)\sqrt{\gamma}e^{-\sigma_+ t^*}}{(\omega_-^2 - \omega_+^2)(\gamma+1)\omega_{d_+}} \{\sigma_+ \sin \omega_{d_+} t^* + \omega_{d_+} \cos \omega_{d_+} t^*\} + \frac{(\omega_+^2 - \omega_-^2)\sqrt{\gamma}e^{-\sigma_- t^*}}{(\omega_-^2 - \omega_+^2)(\gamma+1)\omega_{d_-}} \{\sigma_- \sin \omega_{d_-} t^* + \omega_{d_-} \cos \omega_{d_-} t^*\} \\
&\quad - \frac{\sqrt{\gamma}e^{-\sigma_i t^*}}{(\gamma+1)\omega_{d_i}} \{\sigma_i \sin \omega_{d_i} t^* + \omega_{d_i} \cos \omega_{d_i} t^*\} \\
a_{33} &= \frac{(\omega_-^2 - \omega_+^2)\gamma e^{-\sigma_+ t^*}}{(\omega_-^2 - \omega_+^2)(\gamma+1)\omega_{d_+}} \{\sigma_+ \sin \omega_{d_+} t^* + \omega_{d_+} \cos \omega_{d_+} t^*\} + \frac{(\omega_+^2 - \omega_-^2)\gamma e^{-\sigma_- t^*}}{(\omega_-^2 - \omega_+^2)(\gamma+1)\omega_{d_-}} \{\sigma_- \sin \omega_{d_-} t^* + \omega_{d_-} \cos \omega_{d_-} t^*\} \\
&\quad + \frac{e^{-\sigma_i t^*}}{(\gamma+1)\omega_{d_i}} \{\sigma_i \sin \omega_{d_i} t^* + \omega_{d_i} \cos \omega_{d_i} t^*\} \\
a_{34} &= \frac{\omega_i^2 \sqrt{\gamma}}{(\omega_-^2 - \omega_+^2)\omega_{d_+} \omega_{d_-}} \{-\omega_{d_+} e^{-\sigma_- t^*} \sin \omega_{d_+} t^* + \omega_{d_-} e^{-\sigma_+ t^*} \sin \omega_{d_+} t^*\} \\
a_{35} &= \frac{(\omega_+^2 - \omega_-^2)\sqrt{\gamma}e^{-\sigma_+ t^*}}{(\omega_-^2 - \omega_+^2)(\gamma+1)\omega_{d_+}} (-\sin \omega_{d_+} t^*) + \frac{(\omega_+^2 - \omega_-^2)\sqrt{\gamma}e^{-\sigma_- t^*}}{(\omega_-^2 - \omega_+^2)(\gamma+1)\omega_{d_-}} (\sin \omega_{d_-} t^*) + \frac{\sqrt{\gamma}e^{-\sigma_i t^*}}{(\gamma+1)\omega_{d_i}} (-\sin \omega_{d_i} t^*) \\
a_{36} &= \frac{(\omega_+^2 - \omega_-^2)\gamma e^{-\sigma_+ t^*}}{(\omega_-^2 - \omega_+^2)(\gamma+1)\omega_{d_+}} (-\sin \omega_{d_+} t^*) + \frac{(\omega_+^2 - \omega_-^2)\gamma e^{-\sigma_- t^*}}{(\omega_-^2 - \omega_+^2)(\gamma+1)\omega_{d_-}} (\sin \omega_{d_-} t^*) + \frac{e^{-\sigma_i t^*}}{(\gamma+1)\omega_{d_i}} \sin \omega_{d_i} t^* \\
a_{41} &= \frac{(\omega_+^2 - \omega_-^2)e^{-\sigma_+ t^*}}{(\omega_-^2 - \omega_+^2)\omega_{d_+}} (\sigma_+^2 + \omega_{d_+}^2)(-\sin \omega_{d_+} t^*) + \frac{(\omega_-^2 - \omega_+^2)e^{-\sigma_- t^*}}{(\omega_-^2 - \omega_+^2)\omega_{d_-}} (\sigma_-^2 + \omega_{d_-}^2) \sin \omega_{d_-} t^* \\
a_{42} &= \frac{(\omega_+^2 - \omega_-^2)(\omega_-^2 - \omega_+^2)}{\omega_+^2(\omega_-^2 - \omega_+^2)(\gamma+1)\omega_{d_+} \omega_{d_-}} \{-\sigma_-^2 \omega_{d_+} e^{-\sigma_- t^*} \sin \omega_{d_-} t^* + \sigma_+^2 \omega_{d_-} e^{-\sigma_+ t^*} \sin \omega_{d_+} t^* \\
&\quad + \omega_{d_+} \omega_{d_-} (-\omega_{d_+} e^{-\sigma_- t^*} \sin \omega_{d_+} t^* + \omega_{d_-} e^{-\sigma_+ t^*} \sin \omega_{d_+} t^*)\} \\
a_{43} &= \frac{(\omega_+^2 - \omega_-^2)(\omega_-^2 - \omega_+^2)\sqrt{\gamma}}{\omega_+^2(\omega_-^2 - \omega_+^2)(\gamma+1)\omega_{d_+} \omega_{d_-}} \{-\sigma_-^2 \omega_{d_+} e^{-\sigma_- t^*} \sin \omega_{d_-} t^* + \sigma_+^2 \omega_{d_-} e^{-\sigma_+ t^*} \sin \omega_{d_+} t^* \\
&\quad + \omega_{d_+} \omega_{d_-} (-\omega_{d_+} e^{-\sigma_- t^*} \sin \omega_{d_-} t^* + \omega_{d_-} e^{-\sigma_+ t^*} \sin \omega_{d_+} t^*)\} \\
a_{44} &= \frac{(\omega_+^2 - \omega_-^2)e^{-\sigma_+ t^*}}{(\omega_-^2 - \omega_+^2)\omega_{d_+}} \{-\sigma_+ \sin \omega_{d_+} t^* + \omega_{d_+} \cos \omega_{d_+} t^*\} + \frac{(\omega_-^2 - \omega_+^2)e^{-\sigma_- t^*}}{(\omega_-^2 - \omega_+^2)\omega_{d_-}} \{-\sigma_- \sin \omega_{d_-} t^* + \omega_{d_-} \cos \omega_{d_-} t^*\} \\
a_{45} &= \frac{(\omega_+^2 - \omega_-^2)(\omega_-^2 - \omega_+^2)}{\omega_+^2(\omega_-^2 - \omega_+^2)(\gamma+1)\omega_{d_+} \omega_{d_-}} \{-\sigma_- \omega_{d_+} e^{-\sigma_- t^*} \sin \omega_{d_-} t^* + \sigma_+ \omega_{d_-} e^{-\sigma_+ t^*} \sin \omega_{d_+} t^* + \omega_{d_+} \omega_{d_-} (e^{-\sigma_- t^*} \cos \omega_{d_-} t^* - e^{-\sigma_+ t^*} \cos \omega_{d_+} t^*)\} \\
a_{46} &= \frac{(\omega_+^2 - \omega_-^2)(\omega_-^2 - \omega_+^2)\sqrt{\gamma}}{\omega_+^2(\omega_-^2 - \omega_+^2)(\gamma+1)\omega_{d_+} \omega_{d_-}} \{-\sigma_- \omega_{d_+} e^{-\sigma_- t^*} \sin \omega_{d_-} t^* + \sigma_+ \omega_{d_-} e^{-\sigma_+ t^*} \sin \omega_{d_+} t^* + \omega_{d_+} \omega_{d_-} (e^{-\sigma_- t^*} \cos \omega_{d_-} t^* - e^{-\sigma_+ t^*} \cos \omega_{d_+} t^*)\} \\
a_{51} &= \frac{\omega_i^2}{(\omega_-^2 - \omega_+^2)\omega_{d_+} \omega_{d_-}} \{\sigma_-^2 \omega_{d_+} e^{-\sigma_- t^*} \sin \omega_{d_-} t^* - \sigma_+^2 \omega_{d_-} e^{-\sigma_+ t^*} \sin \omega_{d_+} t^* + \omega_{d_+} \omega_{d_-} (\omega_{d_-} e^{-\sigma_- t^*} \sin \omega_{d_-} t^* - \omega_{d_+} e^{-\sigma_+ t^*} \sin \omega_{d_+} t^*)\} \\
a_{52} &= \frac{(\omega_+^2 - \omega_-^2)e^{-\sigma_+ t^*}}{(\omega_-^2 - \omega_+^2)(\gamma+1)\omega_{d_+}} \{\sigma_+^2 + \omega_{d_+}^2\} \sin \omega_{d_+} t^* - \frac{(\omega_+^2 - \omega_-^2)e^{-\sigma_- t^*}}{(\omega_-^2 - \omega_+^2)(\gamma+1)\omega_{d_-}} \{\sigma_-^2 + \omega_{d_-}^2\} \sin \omega_{d_-} t^* - \frac{\gamma e^{-\sigma_i t^*}}{(\gamma+1)\omega_{d_i}} \{\sigma_i^2 + \omega_{d_i}^2\} \sin \omega_{d_i} t^* \\
a_{53} &= \frac{(\omega_+^2 - \omega_-^2)e^{-\sigma_+ t^*} \sqrt{\gamma}}{(\omega_-^2 - \omega_+^2)(\gamma+1)\omega_{d_+}} \{\sigma_+^2 + \omega_{d_+}^2\} \sin \omega_{d_+} t^* - \frac{(\omega_+^2 - \omega_-^2)e^{-\sigma_- t^*} \sqrt{\gamma}}{(\omega_-^2 - \omega_+^2)(\gamma+1)\omega_{d_-}} \{\sigma_-^2 + \omega_{d_-}^2\} \sin \omega_{d_-} t^* + \frac{\sqrt{\gamma}e^{-\sigma_i t^*}}{(\gamma+1)\omega_{d_i}} \{\sigma_i^2 + \omega_{d_i}^2\} \sin \omega_{d_i} t^* \\
a_{54} &= \frac{\omega_i^2 e^{-\sigma_+ t^*}}{(\omega_-^2 - \omega_+^2)\omega_{d_+}} \{-\sigma_+ \sin \omega_{d_+} t^* + \omega_{d_+} \cos \omega_{d_+} t^*\} + \frac{\omega_i^2 e^{-\sigma_- t^*}}{(\omega_-^2 - \omega_+^2)\omega_{d_-}} \{-\sigma_- \sin \omega_{d_-} t^* + \omega_{d_-} \cos \omega_{d_-} t^*\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{55} &= \frac{(\omega_-^2 - \omega_+^2)e^{-\sigma_+ t^*}}{(\omega_-^2 - \omega_+^2)(\gamma + 1)\omega_{d_+}} \{-\sigma_+ \sin \omega_{d_+} t^* + \omega_{d_+} \cos \omega_{d_+} t^*\} + \frac{(\omega_+^2 - \omega_-^2)e^{-\sigma_- t^*}}{(\omega_-^2 - \omega_+^2)(\gamma + 1)\omega_{d_-}} \{-\sigma_- \sin \omega_{d_-} t^* + \omega_{d_-} \cos \omega_{d_-} t^*\} \\
&\quad + \frac{\gamma e^{-\sigma_i t^*}}{(\gamma + 1)\omega_{d_i}} \{-\sigma_i \sin \omega_{d_i} t^* + \omega_{d_i} \cos \omega_{d_i} t^*\} \\
a_{56} &= \frac{(\omega_-^2 - \omega_+^2)\sqrt{\gamma}e^{-\sigma_+ t^*}}{(\omega_-^2 - \omega_+^2)(\gamma + 1)\omega_{d_+}} \{-\sigma_+ \sin \omega_{d_+} t^* + \omega_{d_+} \cos \omega_{d_+} t^*\} + \frac{(\omega_+^2 - \omega_-^2)\sqrt{\gamma}e^{-\sigma_- t^*}}{(\omega_-^2 - \omega_+^2)(\gamma + 1)\omega_{d_-}} \{-\sigma_- \sin \omega_{d_-} t^* + \omega_{d_-} \cos \omega_{d_-} t^*\} \\
&\quad + \frac{\sqrt{\gamma}e^{-\sigma_i t^*}}{(\gamma + 1)\omega_{d_i}} \{\sigma_i \sin \omega_{d_i} t^* - \omega_{d_i} \cos \omega_{d_i} t^*\} \\
a_{61} &= \frac{\omega_i^2 \sqrt{\gamma}}{(\omega_-^2 - \omega_+^2)\omega_{d_+}\omega_{d_-}} \{\sigma_-^2 \omega_{d_+} e^{-\sigma_- t^*} \sin \omega_{d_-} t^* - \sigma_+^2 \omega_{d_-} e^{-\sigma_+ t^*} \sin \omega_{d_+} t^* + \omega_{d_+} \omega_{d_-} (\omega_{d_-} e^{-\sigma_- t^*} \sin \omega_{d_-} t^* - \omega_{d_+} e^{-\sigma_+ t^*} \sin \omega_{d_+} t^*)\} \\
a_{62} &= \frac{(\omega_+^2 - \omega_-^2)\sqrt{\gamma}e^{-\sigma_+ t^*}}{(\omega_-^2 - \omega_+^2)(\gamma + 1)\omega_{d_+}} \{\sigma_+^2 + \omega_{d_+}^2\} \sin \omega_{d_+} t^* - \frac{(\omega_+^2 - \omega_-^2)\sqrt{\gamma}e^{-\sigma_- t^*}}{(\omega_-^2 - \omega_+^2)(\gamma + 1)\omega_{d_-}} \{\sigma_-^2 + \omega_{d_-}^2\} \sin \omega_{d_-} t^* + \frac{\sqrt{\gamma}e^{-\sigma_i t^*}}{(\gamma + 1)\omega_{d_i}} \{\sigma_i^2 + \omega_{d_i}^2\} \sin \omega_{d_i} t^* \\
a_{63} &= \frac{(\omega_+^2 - \omega_-^2)\gamma e^{-\sigma_+ t^*}}{(\omega_-^2 - \omega_+^2)(\gamma + 1)\omega_{d_+}} \{\sigma_+^2 + \omega_{d_+}^2\} \sin \omega_{d_+} t^* - \frac{(\omega_+^2 - \omega_-^2)e^{-\sigma_- t^*}}{(\omega_-^2 - \omega_+^2)(\gamma + 1)\omega_{d_-}} \{\sigma_-^2 + \omega_{d_-}^2\} \sin \omega_{d_-} t^* - \frac{e^{-\sigma_i t^*}}{(\gamma + 1)\omega_{d_i}} \{\sigma_i^2 + \omega_{d_i}^2\} \sin \omega_{d_i} t^* \\
a_{64} &= \frac{\omega_i^2 \sqrt{\gamma}e^{-\sigma_+ t^*}}{(\omega_-^2 - \omega_+^2)\omega_{d_+}} \{-\sigma_+ \sin \omega_{d_+} t^* + \omega_{d_+} \cos \omega_{d_+} t^*\} + \frac{\omega_i^2 \sqrt{\gamma}e^{-\sigma_- t^*}}{(\omega_+^2 - \omega_-^2)\omega_{d_-}} \{-\sigma_- \sin \omega_{d_-} t^* + \omega_{d_-} \cos \omega_{d_-} t^*\} \\
a_{65} &= \frac{(\omega_-^2 - \omega_+^2)\sqrt{\gamma}e^{-\sigma_+ t^*}}{(\omega_-^2 - \omega_+^2)(\gamma + 1)\omega_{d_+}} \{-\sigma_+ \sin \omega_{d_+} t^* + \omega_{d_+} \cos \omega_{d_+} t^*\} + \frac{(\omega_+^2 - \omega_-^2)\sqrt{\gamma}e^{-\sigma_- t^*}}{(\omega_-^2 - \omega_+^2)(\gamma + 1)\omega_{d_-}} \{-\sigma_- \sin \omega_{d_-} t^* + \omega_{d_-} \cos \omega_{d_-} t^*\} \\
&\quad - \frac{\sqrt{\gamma}e^{-\sigma_i t^*}}{(\gamma + 1)\omega_{d_i}} \{-\sigma_i \sin \omega_{d_i} t^* + \omega_{d_i} \cos \omega_{d_i} t^*\} \\
a_{66} &= \frac{(\omega_-^2 - \omega_+^2)\gamma e^{-\sigma_+ t^*}}{(\omega_-^2 - \omega_+^2)(\gamma + 1)\omega_{d_+}} \{-\sigma_+ \sin \omega_{d_+} t^* + \omega_{d_+} \cos \omega_{d_+} t^*\} + \frac{(\omega_+^2 - \omega_-^2)\gamma e^{-\sigma_- t^*}}{(\omega_-^2 - \omega_+^2)(\gamma + 1)\omega_{d_-}} \{-\sigma_- \sin \omega_{d_-} t^* + \omega_{d_-} \cos \omega_{d_-} t^*\} \\
&\quad + \frac{e^{-\sigma_i t^*}}{(\gamma + 1)\omega_{d_i}} \{-\sigma_i \sin \omega_{d_i} t^* + \omega_{d_i} \cos \omega_{d_i} t^*\}
\end{aligned}$$

**第 6 章 内部系モード間の振動エネルギー移動を用いた
等質量二自由度系の同相－逆相状態間遷移**

6・1 緒言

構造物の振動制御は、静粛性や静音性、高速化の観点から重要な課題の一つである。近年のモード解析技術の発展(長松, 1993)と相まって、振動の節を用いた構造的フィルタ(背戸, 1989)の概念が提案され、設計論の確立とともに、ビル構造物(松本他, 1998)、橋梁(大島他, 1998)といった各種の応用において実用的な成果が得られている。

近年、社会インフラ構造物の老朽化が問題となり、これらの長寿命運用への期待が高まっている。腹や節の存在する振動モードの発生は、構造物の部材に局所的な応力を発生させ、疲労破壊の観点からその制御が望まれる。このため、特定の制御可能な振動モードにエネルギーを集め、可変減衰器を用いて振動減衰させるセミアクティブ制振の技術が重要になると考えられる。

松下らにより提案された擬基準座標変換法(井上, 松下, 1991)によれば、元の座標系の部分系の振動モードを縮約したことで得られる内部系モード(長松, 大熊, 1991)を、擬モーダルモデルと呼ばれる振動モデルに変換できることが知られている。擬モーダルモデルにおける内部系モード間のエネルギー移動を制御することによって、非線形要素を用いることなく、自由度の追加という形で内部系モードの振動制御が実現できると考えられる。しかしながら既往研究において、擬モーダルモデルにおけるエネルギー移動を積極的に利用した振動設計法は見当たらない。

そこで本章では擬モーダルモデルにおける共鳴構造設計法を提案する。これは擬モーダルモデル内に新たな境界座標を設定することにより、新たな疑似的モードを作成し、この固有角振動数と内部系モードの固有角振動数を一致させる設計法である。本章では端部可動振動子を有する等質量二自由度振動系からなる物理座標モデルにおいて、等質量二自由度振動系の同相-逆相状態間遷移を実現する構造設計が可能であることを示す。次に同相-逆相状態間遷移が擬モーダルモデルにおける内部系モード間のエネルギー移動に由来することを示す。さらに無減衰擬モーダルモデルの内部系モード間のエネルギー移動を考察することで、物理座標系を対象に、等質量二自由度振動系の同相-逆相状態のエネルギー移動の周期を導出する。最後に比例粘性減衰を導入し、同相-逆相状態間のエネルギー移動の一方向遷移について検討をおこなう。

6・2 解析モデル

6・2・1 端部可動振動子を有する等質量二自由度系

図 6.1 に本章で対象とする端部可動振動子を有する第一および第二と名付けられた二つの等しい質量をばねで直列に接続した等質量二自由度振動系からなる物理座標モデルを示す。二つの等質量 m をばね定数 k_c および内部減衰 c_{ci} で結合した等質量二自由度振動系は、その両端をばね定数 k_b および内部減衰 c_{bi} で弾性支持し、その一端を壁に結合し、そのもう一端を質量 M 、ばね定数 K および C_i を有する可動振動子を介して壁に結合する。また可動振動子の質量には外部減衰係数 C_e が、二自由度振動系の各質量には c_{me} が作用するものとする。変位は各振動子のつりあい位置からとり、二自由度振動系の第一および第二質量の変位を各々 x_1, x_2 とし端部可動振動子の質量の変位を X とする。端部可動振動子は変位 X を生じることにより、等質量二自由度振動系自体の固有モードである同相-逆相状態を結合させる働きを担う。

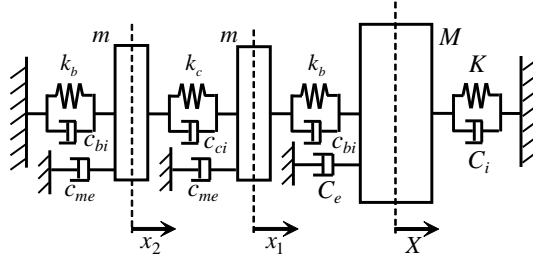


Fig.6.1 Schematic figure of a physical coordinate model of 2-equivalent-mass oscillators with an edge moving mass and dampers.

6・2・2 運動方程式

図 6.1 の無減衰系を考えた場合のラグランジアンを式(6.1)に示す.

$$L = \frac{1}{2}MV^2 - \frac{1}{2}KX^2 + \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}k_b(x_1 - X)^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}k_c(x_2 - x_1)^2 - \frac{1}{2}k_b x_2^2 \quad (6.1)$$

式(6.1)より無減衰系の運動方程式を求め、比例粘性減衰を導入すると散逸系における運動方程式は式(6.2)となる.

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} M^* & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{X}^* \\ \ddot{x}_1^* \\ \ddot{x}_2^* \end{bmatrix} + \left(\alpha \begin{bmatrix} M^* & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} K^* + k_b^* & -k_b^* & 0 \\ -k_b^* & k_b^* + k_c^* & -k_c^* \\ 0 & -k_c^* & k_b^* + k_c^* \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \dot{X}^* \\ \dot{x}_1^* \\ \dot{x}_2^* \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} K^* + k_b^* & -k_b^* & 0 \\ -k_b^* & k_b^* + k_c^* & -k_c^* \\ 0 & -k_c^* & k_b^* + k_c^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X^* \\ x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.2)$$

以降、以下に示す無次元化をおこなう. ここで代表角振動数 $\omega = \sqrt{k/m}$ から、代表時間を $T_r = 1/\omega$ とした. $' = d/dt^*$ は無次元化時間による微分である. また代表長さは単位長さ、代表剛性は単位ばね定数 k 、代表質量を m とおいた. 以上の関係を運動方程式に代入し、無次元化による各質量およびばね定数を $M^* = M/m$ 、 $K^* = K/k$ 、 $k_c^* = k_c/k$ 、 $k_b^* = k_b/k$ として整理した. また α は風や外環境に起因する外部減衰の比例定数、 β は材料減衰や構造減衰などに起因する内部減衰の比例定数を表す.

6・3 擬基準座標変換による擬モーダルモデルの導出

本節では松下らの手法(井上, 松下, 2002)に基づき擬モーダルモデルを導出する. 可動端振動子の質量の変位を境界座標とした擬モーダルモデルの大振動子の変位を X^* 、内部系モードの第一小振動子の変位を ξ_1^* 、第二小振動子の変位を ξ_2^* とし、以後、 i 次内部系小振動子 ($i = 1, 2, \dots$) と呼び区別する. 端部可動振動子の座標を境界座標と設定し、擬モーダルモデルを求めると式(6.2)は式(6.3)となる.

$$[\mathbf{M}_\xi] \cdot \begin{bmatrix} \ddot{X}^* \\ \ddot{\xi}_1^* \\ \ddot{\xi}_2^* \end{bmatrix} + (\alpha \cdot [\mathbf{M}_\xi] + \beta \cdot [\mathbf{K}_\xi]) \cdot \begin{bmatrix} \dot{X}^* \\ \dot{\xi}_1^* \\ \dot{\xi}_2^* \end{bmatrix} + [\mathbf{K}_\xi] \cdot \begin{bmatrix} X^* \\ \xi_1^* \\ \xi_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

$$[\mathbf{M}_\xi] = \begin{bmatrix} M^* & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & k_b^{*2} / 2(k_b^* + 2k_c^*)^2 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{K}_\xi] = \begin{bmatrix} K^* + K_{eq} + k_b^*/2 + k_b^{*2} / 2(k_b^* + 2k_c^*) & -k_b^*/2 & -k_b^{*2} / 2(k_b^* + 2k_c^*) \\ -k_b^*/2 & k_b^*/2 & 0 \\ -k_b^{*2} / 2(k_b^* + 2k_c^*) & 0 & k_b^{*2} / 2(k_b^* + 2k_c^*) \end{bmatrix}$$

式(6.3)に表現した擬モーダルモデルの振動モデルを図 6.2 に示す。質量 $M_\xi^* = M^*$ ，ばね定数 $K_\xi^* = K^* + K_{eq}$ を持つ大振動子に対し，質量 $m_{\xi_1} = 1/2$ ，ばね定数 $k_{\xi_1} = k_b^*/2$ を持つ 1 次内部系小振動子と質量 $m_{\xi_2} = k_b^{*2} / 2(k_b^* + 2k_c^*)^2$ ，ばね定数 $k_{\xi_2} = k_b^*/2(k_b^* + 2k_c^*)$ を持つ 2 次内部系小振動子が並列に結合している。ここで K_{eq} は境界座標を単位の力を作用したときに感じる等価ばね定数であり， $K_{eq} = k_b^* k_c^* / (k_b^* + 2k_c^*)$ である。図 6.2 のインセットに，物理座標モデルの内部系モードの形状を示す。なお，内部系モードの固有振動数 ω_{ξ_i} ($i = 1, 2$) および固有モード ϕ_i は式(6.4)となる。

$$\omega_{\xi_1} = \sqrt{k_b^*} \rightarrow \phi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \omega_{\xi_2} = \sqrt{k_b^* + 2k_c^*} \rightarrow \phi_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (6.4)$$

物理座標モデルにおける内部系 1 次モードは等質量二自由度振動系の同相状態，2 次モードは逆相状態を意味する。擬モーダルモデルにおける 1 次，2 次の内部系小振動子間のエネルギー移動は，物理座標モデルの同相－逆相状態間の遷移に対応する。

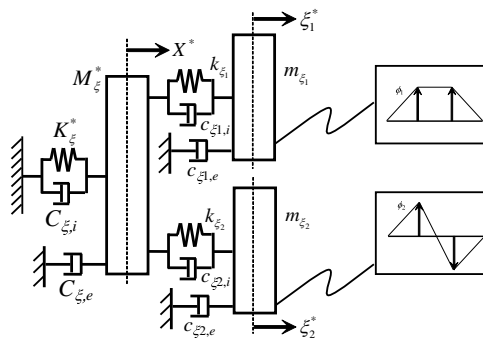


Fig.6.2 Schematic figure of a quasi-modal model of a 3-degree of freedom oscillators system with proportional viscous damping. The system has one large oscillator hanged at the wall and two small oscillators hanged to the large one.

6・4 同相 - 逆相状態間の遷移を実現する擬モーダルモデルにおける共鳴構造設計法

6・4・1 部分空間共鳴構造設計

本節では本章で用いる擬モーダルモデルにおける共鳴構造設計法を提案する．この共鳴構造を設計することにより，物理座標モデルの端部可動質量 M^* ，ばね定数 K^* ，等質量二自由度系のばね定数 k_b^* ， k_c^* の関係式を導出する．なお説明の簡略化のため，比例粘性減衰項を省略して議論をおこなう．2次内部系小振動子を新たな境界座標と定義し，拘束端を仮想する．この振動モデルを図 6.3 に示す．1次内部系小振動子と大振動子を二自由度振動系とみなし，式(6.3)の部分空間としての運動方程式を導くと式(6.5)となる．

$$\begin{bmatrix} M^* & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{X}^* \\ \ddot{\xi}_1^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K^* + K_{eq} + k_b^*/2 + k_b^{*2}/2(k_b^* + 2k_c^*) & -k_b^*/2 \\ -k_b^*/2 & k_b^*/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X^* \\ \xi_1^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

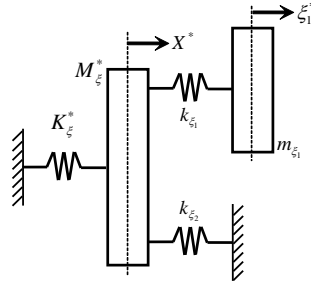


Fig.6.3 A subspace model with a fixed boundary in the quasi-modal model. The subspace model indicates a coupling between the edge movable oscillator and the synchronized mode in the 2-equivalent-mass oscillators.

図 6.3 の二自由度系は，物理座標モデルにおける等質量二自由度振動系の同相状態と端部可動振動子の連成を表す擬似的モードモデルである．擬モーダルモデルにおける境界座標の導入により，このモデルの二自由度系に対する新たな擬似的モードの固有角振動数が生成される．式(6.5)の固有値問題を解くことにより，この固有角振動数は式(6.6)となる．

$$\omega_{\pm}^2 = \frac{1}{2} \left(k_b^* + \frac{K^* + k_b^*}{M^*} \right) \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left(k_b^* + \frac{K^* + k_b^*}{M^*} \right)^2 - \left(\frac{K^* \cdot k_b^*}{M^*} + \frac{k_b^{*2}}{2M^*} \right)} \quad (6.6)$$

さらにこれらの固有振動数から，大振動子の質量 M^* とばね定数 K^* の関係式が得られる．解と係数の関係より， M^* と K^* は，式(6.7)となる．

$$M^* = \frac{\omega_{z1}^4}{2(\omega_+^2 - \omega_{z1}^2)(\omega_{z1}^2 - \omega_-^2)}, \quad K^* = \frac{\omega_{z1}^4(\omega_+^2 + \omega_-^2 - \omega_{z1}^2)}{2(\omega_+^2 - \omega_{z1}^2)(\omega_{z1}^2 - \omega_-^2)} - \omega_{z1}^2 \quad (6.7)$$

一方，2次内部系の固有角振動数 ω_{z2} は式(6.7)とは独立しており任意に設計できる．そこで，2次内部系小振動子の固有角振動数 ω_{z2} と部分空間モード ω_c を等置する $\omega_{z2} = \omega_c$ の関係を持たせる．さらに ω_{z1} ， ω_{z2} の固有角振動数を漸近させ，うなりを生じさせることで明瞭な同相一逆相状態間遷移を起こすことができる．

6・4・2 モード解析を用いた設計法の解釈

本節では、前節で提案した擬モーダルモデルにおける部分空間を用いた共鳴構造設計法について、モード解析を用いた解釈を試みる。ここで差分変数 Δ を導入し、 $\omega_2 = \omega_+ + \Delta$ の関係を与えた時の無減衰系の根軌跡を求める。数値計算結果を図 6.4 に示す。横軸は差分変数 Δ 、縦軸は固有角振動数を表す。計算条件は $\omega_{21} = 1$ 、 $\omega_+ = 0.5$ とし、共鳴条件に近づける条件として (a) $\omega_+ = 1.5$ 、(b) $\omega_+ = 1.1$ 、(c) $\omega_+ = 1.01$ とする。差分変数 Δ は $0 < \Delta < 1$ の範囲で変化させた。図中 3 本の実線は、角振動数の小さい順より 1 次、2 次、3 次モードの固有角振動数の根軌跡を描いている。全ての条件において、差分変数 Δ が 0 に近づくほど 2 次と 3 次の固有角振動数が近接する様子が確認できる。(a)、(b)、(c) を比較すると、 ω_2 と ω_1 を近づけるほど 2 次と 3 次の固有角振動数がさらに近接することがわかる。以上より提案手法は、2 次と 3 次のモード間の共鳴を誘起する設計法であると理解できる。

次に、擬モーダルモデルにおけるモード振幅を求め、図 6.5 に示す。計算条件は $\omega_{21} = 1$ 、 $\omega_+ = 0.5$ を固定した上で、(a) $\omega_+ = 1.5$ 、 $\Delta = 0$ 、(b) $\omega_+ = 1.5$ 、 $\Delta = 1$ 、(c) $\omega_+ = 1.01$ 、 $\Delta = 0$ 、(d) $\omega_+ = 1.01$ 、 $\Delta = 1$ とした。提案手法の設計条件である (a)、(c) の場合に注目する。2 次モードと 3 次モードにおける ξ_1^* と ξ_2^* の位相関係に着目すると同相と逆相のモードとなっていることがわかる。特に ω_{21} 、 ω_2 の固有角振動数を漸近させた場合である (c) では、大振動子のモード振幅が小さくなった。したがって ξ_1^* と ξ_2^* の同相モードと逆相モードの振幅が近くなり、 ξ_1^* と ξ_2^* の振幅が交互に増減するうなりが発生し、同相-逆相状態間遷移が発生するものと考えられる。以上より部分空間における共鳴構造を用いた提案手法は、内部系振動子のモードの同相-逆相関係を制御した設計手法であることがわかる。他方、(b)、(d) では、3 次モードが ξ_2^* のみ振幅を有する局在モードとなっており、また固有角振動数が他のモードの固有角振動数と近接していないため、同相-逆相状態間遷移は発生しない。なお、うなりによるエネルギー移動の観察にはこれらの条件に加えて初期条件が関係するが、この点については後述にて言及する。

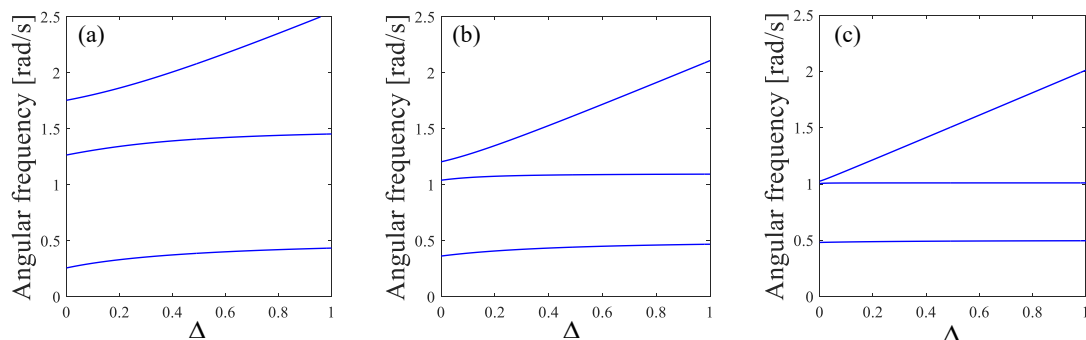
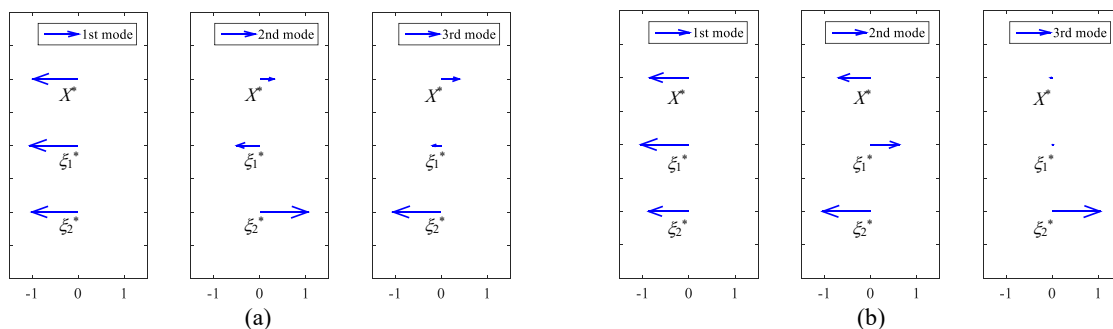


Fig.6.4 Relation between 1st, 2nd and 3rd modes of eigen angular frequencies and difference parameter of Δ with $\omega_{21} = 1$, $\omega_+ = 0.5$ and (a) $\omega_+ = 1.5$, or (b) $\omega_+ = 1.1$, or (c) $\omega_+ = 1.01$. Resonance occurs between the second and third modes in case of $\Delta = 0$.



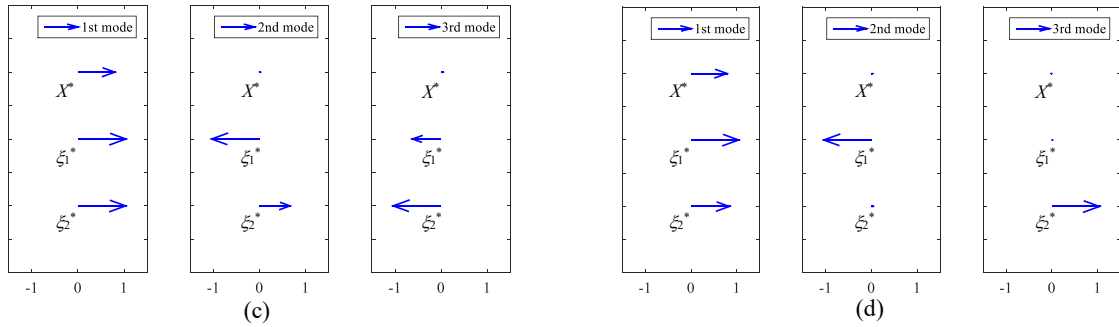


Fig.6.5 Mode shape of each eigen angular frequency in Quasi-modal model with $\omega_{21} = 1$, $\omega_- = 0.5$ and (a) $\omega_+ = 1.5$, $\Delta = 0$, or (b) $\omega_+ = 1.5$, $\Delta = 1$, or (c) $\omega_+ = 1.01$, $\Delta = 0$, or (d) $\omega_+ = 1.01$, $\Delta = 1$. (a) and (c) show the case of the proposed method. In particular, (c) shows the case of the localized modal amplitude of internal small oscillators. In addition, the localized modes have the synchronized shape and the anti-synchronize shape.

6・4・3 解の存在範囲

物理座標モデル，擬モーダルモデルの双方で全てのパラメータが正定値とならなければならない．そこで本節では解の存在範囲を定める．式(6.7)の M^* に着目する． $\omega_2 = \omega_+$ の関係から $M^* > 0$ であるためには分母が正であれば良い．この大小関係より各角振動数の間に $0 < \omega < \omega_{21} < \omega_+$ の関係が得られる．次に式(6.7)の K^* に着目する．具体例として $\omega_{21} = 1$ とした場合の K^* を求め， $K^* > 0$ となる範囲に点をプロットし，図 6.6 に示す．図中横軸は角振動数 ω ，縦軸は角振動数 ω_+ である．図より $\omega_+ > 1$ 範囲でのみ $K^* > 0$ であることがわかる． $\omega_+ = 1$ 近傍では $0 < \omega < 1$ の全て範囲で K^* が解を持ち，また $0.4 < \omega$ の領域で ω_+ 方向に解を持つ範囲が次第に拡大することが分かる．

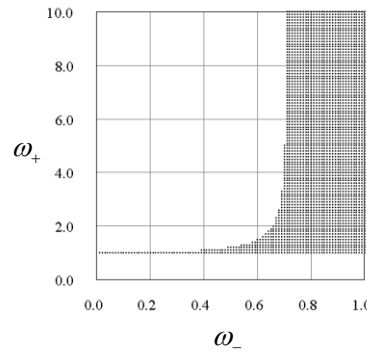


Fig.6.6 Conditions between two coupled natural frequencies, ω_+ and ω , in the physical-coordinate model. Dotted points indicate the area where both frequencies, become positive values to satisfy the practical physical realization.

この境界を解析的に求めるため，式(6.7)に $K^* \geq 0$ の条件を与え， ω_+ と ω の曲線を求めると式(6.8)となる．

$$\omega_+ = \sqrt{\frac{\omega_{21}^2(\omega_{21}^2 - \omega_-^2)}{\omega_{21}^2 - 2 \cdot \omega_-^2}} \quad (6.8)$$

したがって、解の存在範囲は $\omega_+ < \sqrt{\omega_{c1}^2(\omega_{c1}^2 - \omega_-^2)/(\omega_{c1}^2 - 2 \cdot \omega_-^2)}, 0 < \omega_- < \omega_{c1} < \omega_+$ となる。また $\omega_+ = \omega_{c1}$ 近傍では M^*, K^* 共に値が大きくなり、小振動子間の角振動数 ω_{c1}, ω_{c2} が漸近する。これより、うなりに近い条件とは等質量二自由度系に対し、端部可動質量が僅かに変位する可動端に相当することが分かる。

6・4・4 設計フローチャート

共鳴構造設計法のフローチャートを図 6.7 に示す。前節のパラメータの正定値条件を満たすように ω_{c1} と ω_{c2} を定め、式(6.4)を用いて等質量二自由度系のばね定数 k_b^*, k_c^* を決定する。そして ω を与え、端部可動振動子の質量 M^* とばね定数 K^* を決定する。

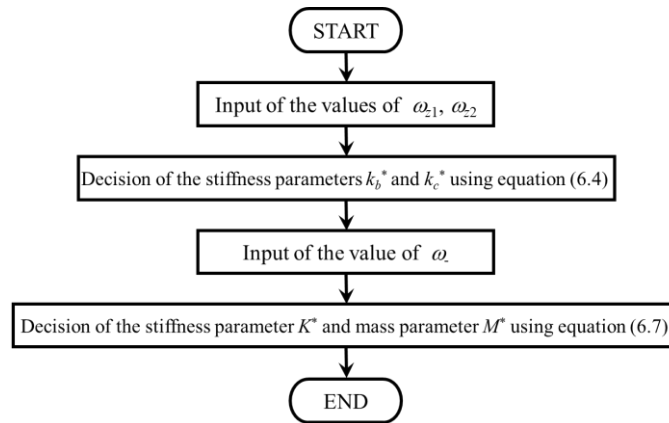


Fig.6.7 Flowchart to design resonance structure in the quasi-modal model. Stiffness parameters K^*, k_b^*, k_c^* and mass parameter M^* are designed from equation (6.4) and (6.7).

6・5 数値計算

6・5・1 自由振動応答

本節では無減衰系を対象とし、擬モーダルモデルにおいて共鳴構造設計した物理座標モデルの自由振動特性を解析し、同相-逆相状態間の遷移現象の有無について考察する。物理座標モデルの自由振動の時刻歴を状態遷移行列によって求め、図 6.8 に示す。

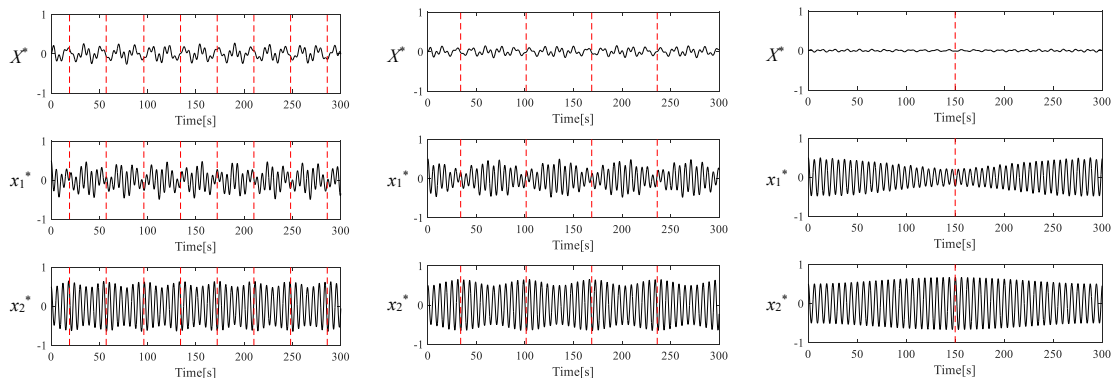


Fig.6.8 Positional change of the two equivalent masses and the edge moving mass in the physical-coordinate model in case of synchronized mode as an initial state. Left column shows the case of $\omega_+ = 1.1$, center

column shows the case of $\omega_+ = 1.05$, and right column shows the case of $\omega_+ = 1.01$. Red dotted lines indicate the instants of anti-synchronized state. In resonance case (i.e. $\omega_+ = 1.01$), there exists a clear state transition between synchronized and anti-synchronized states. In addition, displacement of the edge moving mass became small in the resonance case.

時間刻み $dt = 0.05$ とし, $\omega_{e1} = 1$, $\omega = 0.5$ とし, 共鳴条件に近づける条件として $\omega_+ = 1.1$, $\omega_+ = 1.05$, $\omega_+ = 1.01$ について計算した. 物理座標モデルの初期条件は, これを構成する等質量二自由度振動系が同位相状態であった場合とし, $X^*(0) = 0$, $x_1^*(0) = 0.5$, $x_2^*(0) = 0.5$, $V^*(0) = 0$, $v_1^*(0) = 0$, $v_2^*(0) = 0$, $X^*(0) = 0$, $\xi_1^*(0) = 1.0$, $\xi_2^*(0) = 0$, $V^*(0) = 0$, $\dot{\xi}_1^*(0) = 0$, $\dot{\xi}_2^*(0) = 0$ とした. 図 6.8 の各図には横軸に時間, 縦軸に各振動子の変位を示す. 上段に可動端振動子の変位, 中段および下段は等質量二自由度振動系の第一質量および第二質量の変位を表す. また図左列は $\omega_+ = 1.1$, 中央列は $\omega_+ = 1.05$, 右列は $\omega_+ = 1.01$ を表す. 図 6.8 中赤点線で示した時刻において, 同相状態から逆相状態への遷移が観察された. ω_{e1} と ω_{e2} を漸近した共鳴条件では同相-逆相状態間遷移が明瞭となった. 一方, 端部可動質量の変位は共鳴条件に近づくにつれ小さくなった. 共鳴条件下では可動端振動子が僅かに変位を許す剛体壁に近くなることを表している. 本設計で得られた質量, ばね定数をまとめ, 表 6.1 に示す.

Table 6.1 Designed values of the mass and stiffness parameters by using the proposed method, in case of resonance with huge edge movable mass.

ω_+	k_b^*	k_c^*	M^*	K^*
1.1	1	0.11	3.17	0.46
1.05	1	0.05	6.50	1.29
1.01	1.01	0.01	33.17	7.96

6・5・2 擬モーダルモデルにおける考察

次に 6・5・1 節の物理座標系の時刻歴を擬モーダルモデルの座標に移し, ヒルベルト変換を用いて振幅の時刻歴に変換し, 内部系モード間のエネルギー授受の様子を可視化して図 6.9 に示す. 横軸に時間, 縦軸に各振動子の振幅を示す. ここでヒルベルト変換を用いた振幅は記号 $|Z_j|$, ($j = X^*, \xi_1^*, \xi_2^*$) で表すものとする. 上段に大振動子, 中段に 1 次内部系小振動子, 下段に 2 次内部系小振動子をそれぞれ表す. 図 6.9 中赤点線で示した時刻は, 物理座標モデルにおいて同相状態から逆相状態への遷移が観察された時刻である. 赤点線で示した時刻と 2 次内部系小振動子の振幅が大きくなる時刻と対応することから, 物理座標モデルにおける同相-逆相状態間の遷移現象は擬モーダルモデルにおける内部系小振動子間のエネルギー移動に由来することが分かる.

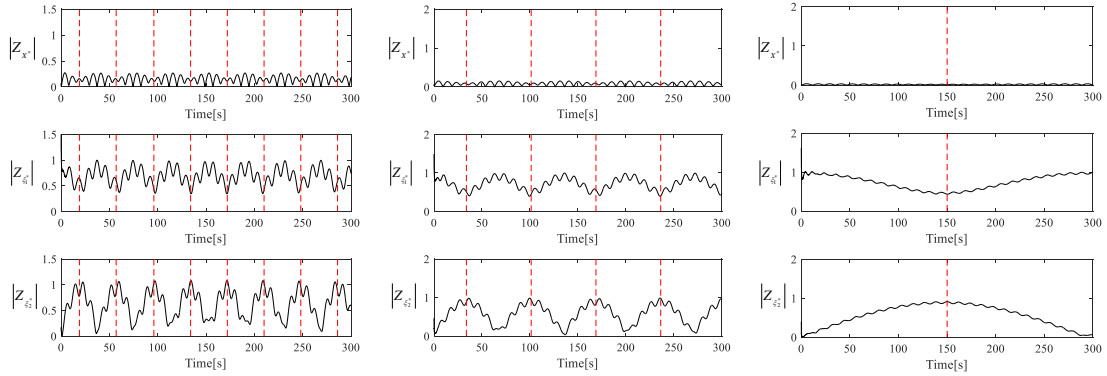


Fig.6.9 Temporal changes of the amplitude of the quasi-modal model. Left column shows the case of $\omega_+ = 1.1$, center column shows the case of $\omega_+ = 1.05$, and right column shows the case of $\omega_+ = 1.01$. Red dotted lines indicates there instants of anti-synchronized state. Anti-synchronized states correspond with the energy concentration to the one small oscillator in the quasi-modal model.

6・5・3 同相－逆相状態間エネルギー移動の周期の導出

本節では無減衰擬モーダルモデルの内部系モード間のエネルギー移動を考察することで、物理座標系における等質量二自由度系の同相－逆相状態間のエネルギー移動の周期の表式を導出し考察をおこなう．式(6.5)の部分空間運動方程式を用いた部分空間対角化行列 P は式(6.9)で表される．

$$P = \begin{bmatrix} 1 - \omega_-^2 / \omega_{z1}^2 & 1 - \omega_+^2 / \omega_{z1}^2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

比例粘性減衰項を無視した式(6.3)の運動方程式を，対角化行列 P により部分空間対角化を施し，非対角項に対する対称化変換を施すと式(6.10)が得られる．ここで e_- , e_+ は擬モーダルモデルにおける 1 次内部系小振動子と端部可動振動子からなる連成振動系の同相状態と逆相状態に対応し，提案法による新たな疑似的モードを表す．

$$\begin{bmatrix} \ddot{e}_- \\ \ddot{e}_+ \\ \ddot{\xi}_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega_-^2 & 0 & \lambda_- \\ 0 & -\omega_+^2 & \lambda_+ \\ \lambda_- & \lambda_+ & -\omega_{z2}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_- \\ e_+ \\ \xi_2^* \end{bmatrix} \quad (6.10)$$

ここで $\lambda_+ = \sqrt{\omega_{z1}^4 (\omega_+^2 - \omega_{z1}^2) / 2M^* (\omega_+^2 - \omega_-^2)}$ ， $\lambda_- = \sqrt{\omega_{z1}^4 (\omega_{z1}^2 - \omega_-^2) / 2M^* (\omega_+^2 - \omega_-^2)}$ とした． λ_+ , λ_- は設計パラメータである ω_+ , ω_{z1} , ω_- のみで決まる点に注意する．式(5.10)は擬モーダルモデルの内部系モードと提案法による疑似的モードのモード連成方程式となる． $\omega_{z2} = \omega_+$ の関係より e_+ と ξ_2^* の方程式が主な連成となるため， 2×2 共鳴構造サブシステムを抽出し，複素状態遷移行列 U (高田他, 2011), (Briggs and Einfeld, 2012) を求めると式(6.11)となる．

$$U(\Delta t^*) = e^{i\left(\frac{A+B}{2}\right)\Delta t^*} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos[(A-B)\Delta t^*/2] & -\sin[(A-B)\Delta t^*/2] \\ \sin[(A-B)\Delta t^*/2] & \cos[(A-B)\Delta t^*/2] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

ここで $A = \sqrt{\omega_+^2 + \lambda_+}$, $B = \sqrt{\omega_+^2 - \lambda_+}$ である. 式(6.11)は速い振動成分 $(A+B)/2$ と緩やかな振動成分 $(A-B)/2$ に分解され, 緩やかな振動成分は e_+ と ξ_2^* の間のエネルギー授受を表している. これより e_+ を介した同相-逆相状態間エネルギー移動の存在を確認できる. 緩やかな振動成分は回転群の積に分解でき, 量子情報理論における Grover アルゴリズム (Grover and Sengupta, 2002) と一致する. 式(6.11)の速い振動数成分の周期毎に離散化し, 緩やかな振動成分を抽出するため $\Delta t^* = 4\pi/(A+B)$ を代入する. これにより緩やかな振動成分の回転行列の周期が内部系モード間エネルギー移動の周期となる. この周期 T_a を求めると式(6.12)となる.

$$T_a = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_+^2 + \lambda_+} - \sqrt{\omega_+^2 - \lambda_+}} \approx \frac{2\pi\omega_+}{\lambda_+} \quad (6.12)$$

式(6.12)の理論値と先の数値計算値を比較し, 図 6.10 に示す. 縦軸は内部系モード間エネルギー移動の周期, 横軸は固有角振動数 ω_+ を表す. 図中○は先の数値計算値, 赤実線は式(6.12)の理論値を表す. 両者は良く一致することが分かる. これまでのアナロジーから, この周期は, 物理座標モデルにおける等質量二自由度系の同相-逆相状態間のエネルギー移動の周期と等価である.

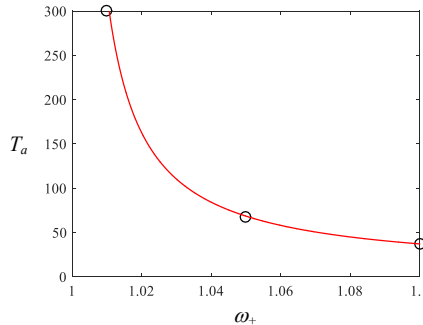


Fig.6.10 Dependence of the natural transfer period between the synchronized and anti-synchronized states to the larger coupled angular frequency of ω_+ . The theoretical line (equation (6.12)) shows good agreement with the open circles obtained from simulations. The period of energy transfer was decreased by increasing the angular frequency of ω_+ .

6・5・4 初期条件に関する条件

同相-逆相状態間遷移はうなりを起源とするため初期条件に依存する. 擬モーダルモデルのモード振幅を擬モーダルモデルの初期条件と設定すると, 対応する固有振動のみが励振され, うなりによるエネルギー移動は観察できない. 本節ではこれを数値計算によって確認する. 計算例を図 6.11 に示す. 時間刻み $dt = 0.05$, $\omega_{z1} = 1$, $\omega = 0.5$, $\omega_+ = 1.01$ について計算した. 初期条件は 2 次固有モードと一致させた場合を想定し, $X^*(0) = 0.0065$, $x_1^*(0) = -0.1593$, $x_2^*(0) = -0.6848$, $V^*(0) = 0$, $v_1^*(0) = 0$, $v_2^*(0) = 0$, $X^*(0) = 0.0065$, $\xi_1^*(0) = -0.8441$, $\xi_2^*(0) = 0.5361$, $V^*(0) = 0$, $\dot{\xi}_1(0) = 0$, $\dot{\xi}_2(0) = 0$ とした. 図 6.11 の各図には横軸に時間, 縦軸に各振動子の変位を示す. 左列に

は物理座標系の各振動子の変位，右列には擬モーダルモデルの時刻歴にヒルベルト変換を用いて振幅の時刻歴に変換して示す．左列上段に可動端振動子の変位，中段および下段は等質量二自由度振動系の第一質量および第二質量の変位を表す．右列上段に大振動子，中段に1次内部系小振動子，下段に2次内部系小振動子をそれぞれ表す．

物理座標系の変位に着目すると，同相－逆相状態間遷移が発生していない様子が観察される．また擬モーダルモデルの振幅に着目すると，内部系小振動子間のエネルギー授受が生じていない様子が確認できる．以上より，提案手法による同相－逆相状態間遷移は初期条件に依存する現象であることが確認できる．

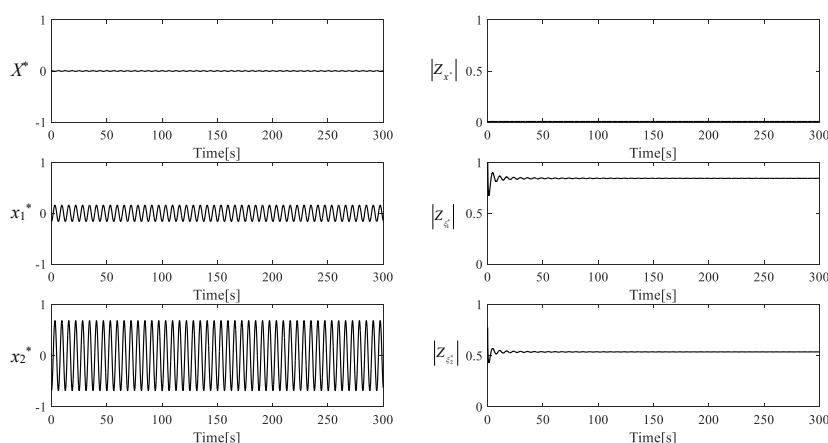


Fig.6.11 Temporal changes of the physical-coordinate model and the quasi-modal model. Initial conditions correspond with eigen mode vectors. In this case, transition between synchronization and anti-synchronization can't be observed.

6・6 比例粘性減衰の導入による同相 - 逆相状態間の一方向遷移

6・6・1 自由振動応答

本節では物理座標モデルに比例粘性減衰系を導入し，このモデルにおける等質量二自由度振動系の同相－逆相状態間の一方向遷移の可能性について検討する．物理座標モデルの自由振動応答を状態遷移行列によって求め，図 6.12 に示す．先の数値計算と同様，時間刻み $dt = 0.05$ ， $\omega_1 = 1$ ， $\omega = 0.5$ とし，共鳴条件に近づける条件として $\omega_+ = 1.1$ ， $\omega_+ = 1.05$ ， $\omega_+ = 1.01$ について計算した．物理座標モデルにおける初期条件は，これを構成する等質量二自由度振動系が同位相状態であった場合とし， $X^*(0) = 0$ ， $x_1^*(0) = 0.5$ ， $x_2^*(0) = 0.5$ ， $V^*(0) = 0$ ， $v_1^*(0) = 0$ ， $v_2^*(0) = 0$ ， $X^*(0) = 0$ ， $\xi_1^*(0) = 1.0$ ， $\xi_2^*(0) = 0$ ， $V^*(0) = 0$ ， $\dot{\xi}_1^*(0) = 0$ ， $\dot{\xi}_2^*(0) = 0$ とした．モード減衰率については，1次モードおよび2次モードの減衰率を 0.05，3次モードの減衰率を 0.01 と設定した．固有値の数値計算より1次モードが ω ，2次モードが ω_1 ，3次モードが ω_2 に近接したため， ω_2 のエネルギーを顕在化させるため3次モードの減衰率を低く設定した．図 6.12 の各図には横軸に時間，縦軸に各振動子の変位を示す．上段に可動端振動子の変位，中段および下段は等質量二自由度振動系の第一質量および第二質量の変位を表す．また図左列は $\omega_+ = 1.1$ ，中央列は $\omega_+ = 1.05$ ，右列は $\omega_+ = 1.01$ における結果を表す．全ての図において同相状態から逆相状態への一方向遷移が観察された．

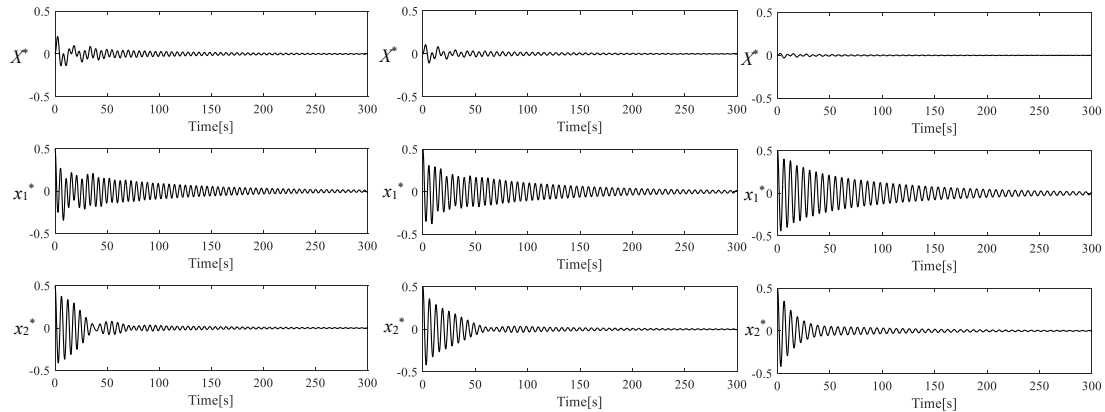


Fig.6.12 Damped free oscillation of the two equivalent masses and edge moving mass in the physical-coordinate model in case of synchronized mode an initial state. Left column shows the case of $\omega_+ = 1.1$, center column shows the case of $\omega_+ = 1.05$, and right column shows the case of $\omega_+ = 1.01$. Damped free oscillation shows the uni-direction transition from synchronization to anti-synchronization state.

6・6・2 擬モーダルモデルにおける考察

6・6・1節の物理座標モデルの時刻歴を擬モーダルモデルに移し、ヒルベルト変換を用いて振幅の時刻歴に変換し、内部系モード間のエネルギー授受の様子を可視化して図 6.13 に示す。横軸に時間、縦軸に各振動子の振幅を示す。図中黒実線は 1 次内部系小振動子、青実線は 2 次内部系小振動子を表し、図左列は $\omega_+ = 1.1$ 、中央列は $\omega_+ = 1.05$ 、右列は $\omega_+ = 1.01$ における結果を表す。いずれの場合にも 2 次内部系小振動子への一方向エネルギー移動が確認できる。 $\omega_+ = 1.1$ 、 $\omega_+ = 1.05$ の場合、減衰の時定数と比較して内部系モード間のエネルギー移動の周期が短いため、減衰しながら周期的なエネルギー授受を伴う様子が観察できる。一方、 $\omega_+ = 1.01$ の場合、減衰の時定数よりも内部系モード間のエネルギー移動の周期が長いため、周期的なエネルギー授受を生じていない。これより提案法によって同相状態から逆相状態への一方向遷移を実現するためには減衰器の適切な設計をおこなう必要があることが分かる。

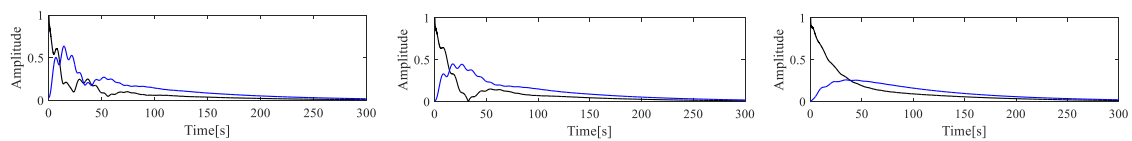


Fig.6.13 Temporal amplitude changes of the quasi-modal model. Left column shows the case of $\omega_+ = 1.1$, center column shows the case of $\omega_+ = 1.05$, and right column shows the case of $\omega_+ = 1.01$. Black solid lines show those of synchronized mode of the small oscillator in the quasi-modal mode and blue solid lines show the anti-synchronized mode. These amplitude change indicates target energy transfer from synchronized to anti-synchronized mode of the small oscillators.

6・7 結言

本章では端部に可動質量を有する等質量二自由度系からなる物理座標モデルを対象に、比例粘性減衰を有する場合と有しない場合について、擬モーダルモデルにおける共鳴構造設計法の提案と物理座標モデルにおける等質量二自由度系の同相－逆相状態間遷移現象の検討と解析をおこなった。その結果、以下の結論を得た。

- (1) 擬モーダルモデル内に境界座標を設定し，擬モーダルモデル内に新たな疑似的モードを作成し，疑似的モードの固有角振動数と内部系モードの固有角振動数を一致させる，擬モーダルモデルにおける共鳴構造設計法を提案した．
- (2) 擬モーダルモデルにおける共鳴構造設計法を用いることで，物理座標モデルにおける等質量二自由度系の同相－逆相状態間遷移を実現する物理座標モデルのばね定数と質量の設計式を導出した．
- (3) 物理座標モデルにおける等質量二自由度系の同相－逆相状態間遷移は，擬モーダルモデルの内部系モード間のエネルギー移動に由来する．
- (4) 複素状態遷移行列を用い，無減衰擬モーダルモデルの内部系モード間のエネルギー移動を考察することで，物理座標モデルにおける等質量二自由度系の同相－逆相状態間のエネルギー移動の周期を導出した．
- (5) 物理座標モデルに比例粘性減衰を導入し，この系のモード減衰率を適切に設計することにより，等質量二自由度系の同相－逆相状態間のエネルギー移動の一方向遷移を実現できる可能性を示唆した．

第7章 内部系モード間エネルギー移動を実現する 部分空間共鳴構造設計法

7・1 緒言

多自由度連成振動系における振動エネルギー移動現象に関する研究の歴史は古く、初期の研究は Hartog(Hartog, 1956)によりまとめられている。Hartog の著書では線形系の自由振動における固有振動数の重複であるうなりによるエネルギーの渡り歩きに関する記述がある。Hartog は連成ばねを有する連成振子、並進運動と傾き振動が連成する車体系、並進運動とねじり振動が連成する Wilber-force のばねを例示している。Hrotog はこれらの系を比較することにより、振動エネルギーの渡り歩きを実現するために、固有振動数の重複と各自由度間の連成が必要であることを、モードの重ね合わせの観点から説明している。後に田島(田島, 1970)がエネルギーの立場から解析的な検討を示すとともに、連成系の事例を拡充して表にまとめている。加えて彼は、現象の初期条件に関して、現象の観察できる場合とできない場合についてまとめている。この後も中井と北野(中井, 北野, 1984)がはつ弦の自由振動を対象に、はりと弦の連成系について実験と理論解析をおこない、連続体の連成系における振動エネルギーの渡り歩きが生じることを確認している。以上の研究より、線形系の自由振動については基本的な発生メカニズムの解明を終えているが、これらは現象の説明に留まり、本現象を利用した設計手法や振動利用方法に関する応用研究が未だ十分に行われてはいない。

一方、線形系では通常、モードの直交性からモード間にエネルギー移動が生じることはない。他方、部分構造合成法などで用いられる内部系モード(長松, 大熊, 1991)に関しては、線形系においても、擬モーダルモデルに代表されるように、内部系モード間の連成振動系を得ることができる(井上, 松下, 2002)。対象とする系の主な振動モードを内部系モードに対応させることで、内部系モード間のエネルギー移動を制御することができれば、線形系の範囲で、振動モードをより積極的に制御することが可能になると考えられる。

6章において著者は、端部可動振動子を有する等質量二自由度系を対象として擬モーダルモデルにおいて仮想の拘束端を導入した部分空間共鳴構造設計をおこなうことで、等質量二自由度系の内部系モード間に振動エネルギーの移動が行われることを明らかにし、その設計指針をまとめた(高田他, 2016)。しかしながら、6章では対象とする主系が等質量二自由度系に限られており、より現実的な系への適用が困難であった。

そこで本章では、対象とする系の適用範囲を拡大する目的で、等質量直列 N 自由度系を主系とした多自由度振動系について、任意の内部系モードの振動エネルギーを特定の振動子に移動させるための系の設計法について議論を行い、制振に応用する方法について検討する。部分空間共鳴構造設計法では内部系と端部可動振動子の二つの設計が必要であることから、実際の応用を考えた場合、主系が既設でコントロールできない場合が多い。そこで本章では、内部系を設計する因子として新たにモード制御振動子を導入し、モード制御振動子と主系の対象モードの固有振動数近傍で成り立つ近似モデルを用いることで、6章の内部系の設計法を拡張する。次に、一般的な自由度の擬モーダルモデルに対して仮想の拘束端を導入することにより、部分空間共鳴構造設計を拡張する。設計例として、主系を等質量直列三自由度系とした場合について具体的な設計をおこない、根軌跡とモード形状による設計結果を吟味し、自由応答解析による内部系モード間の振動エネルギー移動の発生状況について考察をおこなう。最後に、比例粘性減衰を用いたモード制御振動子における一方向エネルギー移動の可能性について議論する。

7・2 解析モデル

7・2・1 端部可動振動子とモード制御振動子を有する等質量直列 N 自由度系

図 7.1 に本章で対象とする端部可動振動子とモード制御振動子を有する等質量直列 N 自由度系を示す. 等質量直列 N 自由度系からなる主系に対し, 主系のモードと内部系において共鳴を起こす目的のモード制御振動子, 主系とモード制御振動子を含む内部系のモード間エネルギー移動を制御する端部可動振動子を有する振動系である. 主系は質量 m , ばね定数 k で構成される N 自由度系であり, モード制御振動子は質量 m , ばね定数 k_b および k_c で構成される 1 自由度系, 端部可動振動子は質量 M , ばね定数 K で構成される 1 自由度系である. 主系の各振動子の変位を x_i ($i = 1, 2, \dots, N$), 端部可動振動子の変位を X , モード制御振動子の変位を x_c とする. ここで, モード制御振動子は主系における j 番目の位置の質量に取り付けられるものとする.

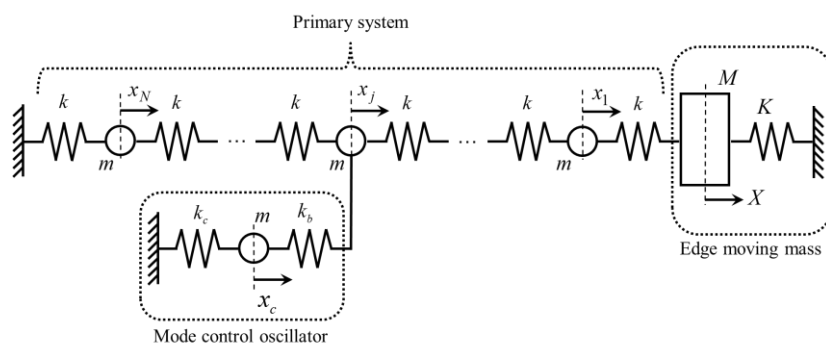


Fig.7.1 Schematic figure of a physical coordinate model of N -equivalent-mass oscillators with an edge moving mass and a mode control oscillator.

7・2・2 運動方程式

図 7.1 の系の運動エネルギーを式(7.1)に示す.

$$T = \frac{1}{2} M \dot{X}^2 + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m \dot{x}_i^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_c^2 \quad (7.1)$$

またポテンシャルエネルギーを式(7.2)に示す.

$$V = \frac{1}{2} K X^2 + \frac{1}{2} k (x_1 - X)^2 + \sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{2} k (x_{i+1} - x_i)^2 + \frac{1}{2} k x_N^2 + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} k_b \delta_{ij} (x_c - x_i)^2 + \frac{1}{2} k_c x_c^2 \quad (7.2)$$

ここで δ_{ij} は Kronecker のデルタ記号である. 式(7.1)と式(7.2)より, ラグランジュの運動方程式を求めると式(7.3)となる.

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{x}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{x}\} = \{\mathbf{0}\}$$

$$[\mathbf{M}] = \begin{bmatrix} M^* & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & 0 \\ & & & & & & 0 & 1 \end{bmatrix}, [\mathbf{K}] = \begin{bmatrix} K^* + 1 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 + k_b^* \delta_{1j} & \ddots & \ddots & & \vdots & -k_b^* \delta_{1j} \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 + k_b^* \delta_{ij} & \ddots & 0 & -k_b^* \delta_{ij} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & -1 & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 2 + k_b^* \delta_{Nj} & -k_b^* \delta_{Nj} \\ 0 & -k_b^* \delta_{1j} & \cdots & -k_b^* \delta_{ij} & \cdots & -k_b^* \delta_{Nj} & k_c^* + \sum_{i=1}^N k_b^* \delta_{ij} \end{bmatrix}$$

$$\{\mathbf{x}\} = [X^* \quad x_1^* \quad \cdots \quad x_i^* \quad \cdots \quad x_N^* \quad x_c^*]^T, \{\mathbf{0}\} = [0 \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad 0]^T$$

(7.3)

式(7.3)を導くにあたり，以下に示す無次元化をおこなった．代表角振動数 $\omega = \sqrt{k/m}$ から，代表時間を $T_r = 1/\omega$ とした． $' = d/dt^*$ は無次元化時間による微分である．また代表長さは単位長さ，代表剛性はばね定数 k ，代表質量を m とおいた．以上の関係を運動方程式に代入し，無次元化による各質量およびばね定数を $M^* = M/m$ ， $K^* = K/k$ ， $k_c^* = k_c/k$ ， $k_b^* = k_b/k$ として整理した．

7.3 内部系モード間エネルギー移動を実現する部分空間共鳴構造設計法

7.3.1 モード制御振動子の設計

本節ではモード制御振動子のばね定数 k_b^* と k_c^* の設計式を求める．図 7.1 の全系より，端部可動振動子の質量の座標を境界座標とし，主系とモード制御振動子からなる内部系を考え，図 7.2(a) に示す．主系のモード特性が既知である前提の下，主系のモード座標を $\boldsymbol{\eta} = [\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_N]^T$ と表し，主系 s 次の固有振動数近傍で成り立つ図 7.2(b) の近似モデルを考える．ここで η_s は主系の固有モードのうち，モード制御振動子と連成させる s 次の対象モードを表す．

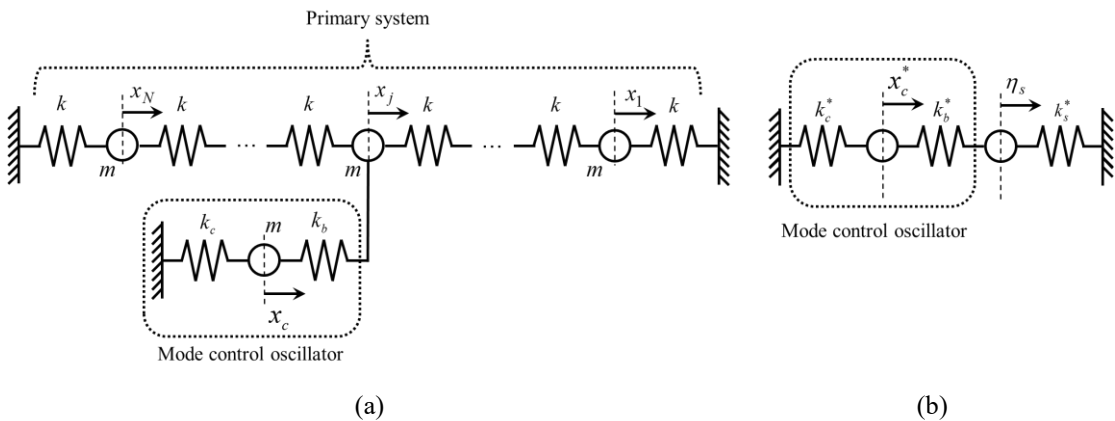


Fig.7.2 (a) shows the schematic figure of internal modal model. Internal modal model has the primary system and mode control oscillator. (b) shows the coupled model around a resonance frequency of primary system.

主系 s 次モードの固有角振動数近傍で成り立つ簡易 2 自由度系の運動方程式を求めると、式(7.4)となる。ここで主系の s 次モードの運動方程式は単位質量モードによって記述した。

$$\begin{bmatrix} \ddot{\eta}_s^* \\ \ddot{x}_c^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(k_s^* + k_b^*) & k_b^* \\ k_b^* & -(k_c^* + k_b^*) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_s^* \\ x_c^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(k_s^* + k_b^*) & k_b^* \\ k_b^* & -(k_s^* + k_b^*) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_s^* \\ x_c^* \end{bmatrix} \quad (7.4)$$

ここで、 $k_c^* = k_s^*$ とした。式(7.4)より固有角振動数を求めると式(7.5)となる。

$$\omega_{z_{s,s+1}}^2 = \begin{cases} k_s^* \\ k_s^* + 2 \cdot k_b^* \end{cases} \quad (7.5)$$

式(7.5)を用い、モード制御振動子のばね定数を求めると式(7.6)となる。

$$k_c^* = k_s^*, \quad k_b^* = \frac{\omega_{z_{s+1}}^2 - \omega_{z_s}^2}{2} \quad (7.6)$$

7・3・2 端部可動振動子の設計

本節では端部可動振動子の質量 M^* およびばね定数 K^* の設計式を導出する。図 7.3 に擬モーダルモデルの振動モデルを示す。図中(a)は前節で導入した内部系を有する場合の擬モーダルモデル、図中(b)に後述の仮想の拘束端を導入した部分空間モデルを示す。内部系モードの振動子を表す並列小振動子の座標を ξ_p 、質量を m_{ξ_p} 、ばね定数を k_{ξ_p} と表す。これらの各定数の導出方法は井上、松下の著書(井上, 松下, 2002)を参照されたい。ここで、添字 p は内部系モードの次数を表し、 $p = 1, \dots, s, \dots, N+1$ をとる。そして、並列振動子と接続する大振動子の座標を X 、質量を M_Q 、ばね定数を K_Q とした。

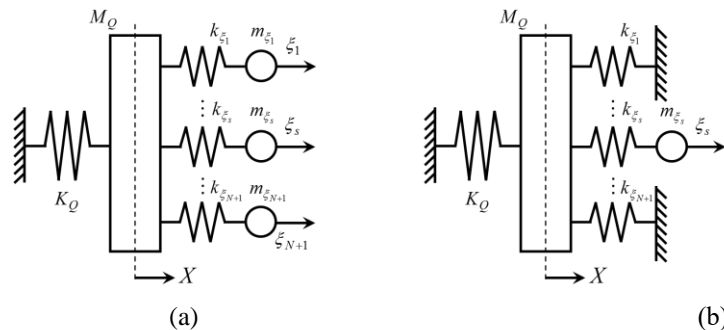


Fig.7.3 Schematic figure of quasi-modal model. (a) shows the quasi-modal model, (b) shows the subspace quasi-modal model with virtual fixed boundaries.

図 7.3(a)のモデルより、擬モーダルモデルの運動方程式を求めると式(7.7)となる。

$$\begin{bmatrix} \ddot{X}^* \\ \ddot{\xi}_1 \\ \vdots \\ \ddot{\xi}_{N+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(K_Q^* + k_{\xi_1} + \dots + k_{\xi_N})/M_Q^* & k_{\xi_1}/M_Q^* & \dots & k_{\xi_N}/M_Q^* \\ k_{\xi_1}/m_{\xi_1} & -k_{\xi_1}/m_{\xi_1} & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ k_{\xi_{N+1}}/m_{\xi_{N+1}} & 0 & 0 & -k_{\xi_{N+1}}/m_{\xi_{N+1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X^* \\ \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_{N+1} \end{bmatrix} \quad (7.7)$$

ここで、主系の s 次モードを対象に、 s 番目以外の全ての内部系モードの質量を仮想の境界座標⁽⁶⁾とみなした拘束端とし、低次元化する。得られた部分空間運動方程式は式(7.8)となる。

$$\begin{bmatrix} \ddot{X}^* \\ \ddot{\xi}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(K_Q^* + k_{\xi_1} + \dots + k_{\xi_{N+1}})/M_Q^* & k_{\xi_s}/M_Q^* \\ k_{\xi_s}/m_{\xi_s} & -k_{\xi_s}/m_{\xi_s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X^* \\ \xi_s \end{bmatrix} \quad (7.8)$$

式(7.8)の固有値を求め、解と係数の関係を整理すると、式(7.9)、式(7.10)となる。

$$\omega_+^2 + \omega_-^2 = \frac{k_{\xi_i}}{m_{\xi_i}} + \frac{K_Q^* + k_{\xi_1} + \dots + k_{\xi_{N+1}}}{M_Q^*} = \omega_{zi}^2 + \frac{K_Q^* + k_{\xi_1} + \dots + k_{\xi_{N+1}}}{M_Q^*} \quad (7.9)$$

$$\omega_+^2 \omega_-^2 = \left(\frac{k_{\xi_i}}{m_{\xi_i}} \right) \left(\frac{K_Q^* + \sum_{q=1}^{N+1} k_{\xi_q} - k_{\xi_i}}{M_Q^*} \right) \quad (7.10)$$

以上を用いて、端部可動振動子の質量 M^* 、ばね定数 K^* について解けば、式(7.11)、式(7.12)となる。

$$M^* = \frac{m_{\xi_s} \omega_{zs}^4}{(\omega_{zs+1}^2 - \omega_{zs}^2)(\omega_{zs}^2 - \omega_-^2)} \quad (7.11)$$

$$K^* = \frac{k_{\xi_s} \omega_{zs+1}^2 \omega_-^2}{(\omega_{zs+1}^2 - \omega_{zs}^2)(\omega_{zs}^2 - \omega_-^2)} + k_{\xi_s} - \sum_{q=1}^{N+1} k_{\xi_q} - K_{eq} \quad (7.12)$$

7・3・3 設計フローチャート

以上の設計式を用いた設計フローチャートを図 7.4 に示す。最初に主系におけるモード制御振動子の設置位置を添字 j によって指定する。次に主系の固有モードのうち、エネルギー移動を誘起する対象 s 次モードを指定する。次に主系の運動方程式に対しモード解析をおこない、モード剛性 k_s^* を決定する。次にモード制御振動子を設計するため、対象 s 次モードと共鳴させる $s+1$ 次モードとの固有角振動数の二乗の差に関する設計条件 $\Delta\omega^2 = \omega_{s+1}^2 - \omega_s^2$ を与える。以上を用い、

式(7.6)によって、モード制御振動子のばね定数 k_b^* と k_c^* を決定する。次に端部可動振動子の設計に移る。以上により、主系とモード制御振動子からなる内部系が決定されるため、境界座標を除く擬モーダルモデルにおける内部系パラメータ m_{ξ}^* , k_{ξ}^* が求められる。最後に得られた擬モーダルモデルの内部パラメータを用い、式(7.11), (7.12)によって端部可動振動子の質量 M^* とばね定数 K^* を決定する。

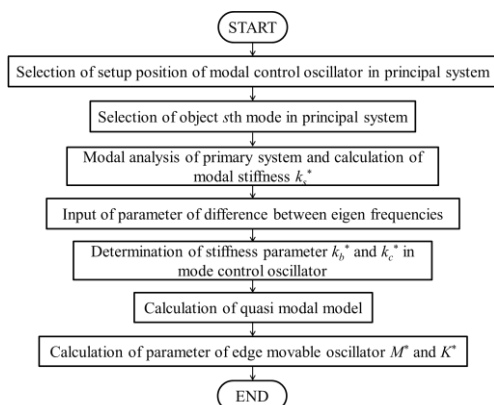


Fig.4 Flowchart to design subspace resonance structure in the quasi-modal model. Stiffness parameter K^* , k_b^* , k_c^* and mass parameter M^* are designed from equation (6.6), (6.11) and (6.12).

7・4 設計例

7・4・1 端部可動振動子とモード制御振動子を有する等質量3自由度系

本節では、前節で提案した部分空間共鳴設計法について、具体的な設計例を示す。本節では図7.5の端部可動振動子とモード制御振動子を有する等質量3自由度系を対象とした。等質量3自由度系は、端部可動振動子に結合した第一質量、第二質量、第三質量から構成され、モード制御振動子は主系中央の第二質量に設置 ($j=2$)され、主系の対象モード s を変化させて検討をおこなう。ここで、主系の第一質量の変位を x_1 , 第二質量の変位 x_2 , 第三質量の変位を x_3 , 端部可動質量の変位を X , モード制御振動子の変位を x_c とした。

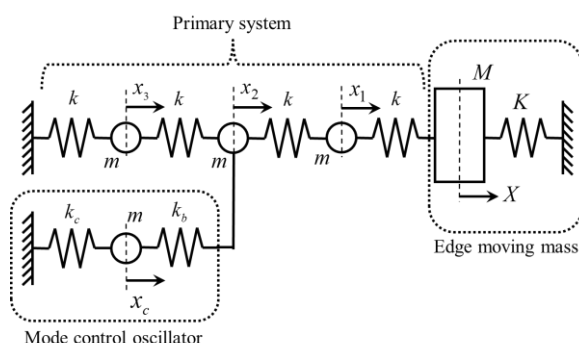


Fig.7.5 Schematic figure of a physical coordinate model of 3-equivalent-mass oscillators with an edge moving mass and a mode control oscillator. Mode control oscillator is attached directly to mass of center position in primary system.

7・4・2 固有角振動数

7・4・2・1 主系，内部系，全系における固有角振動数の比較

本節で用いた設計条件および得られた設計値を以下の表 7.1 に示す．対象 s 次モードと $s + 1$ 次モードの固有角振動数の二乗の差 $\Delta\omega^2$ の設計条件を $\Delta\omega^2 = 0.001$ ，擬モーダルモデルの部分空間モデルの固有角振動数 ω の設計条件を $\omega = 0.5$ とした．

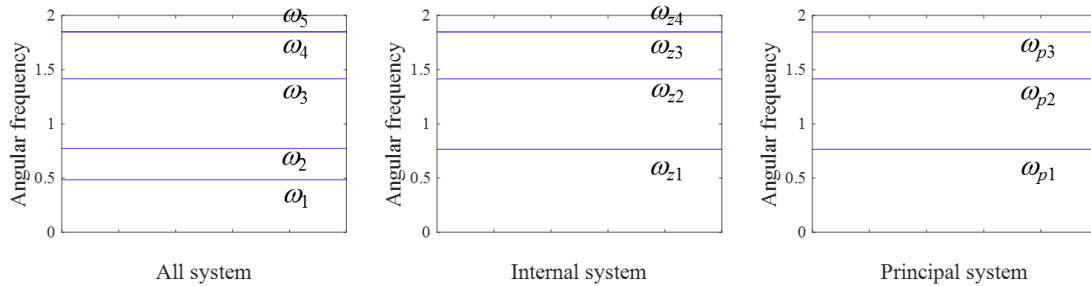
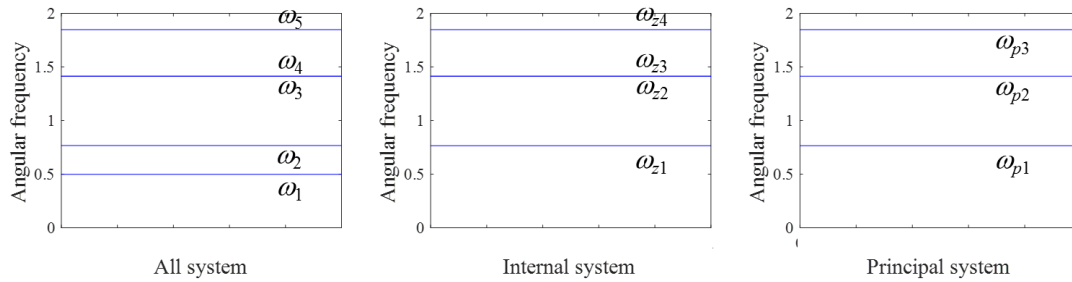
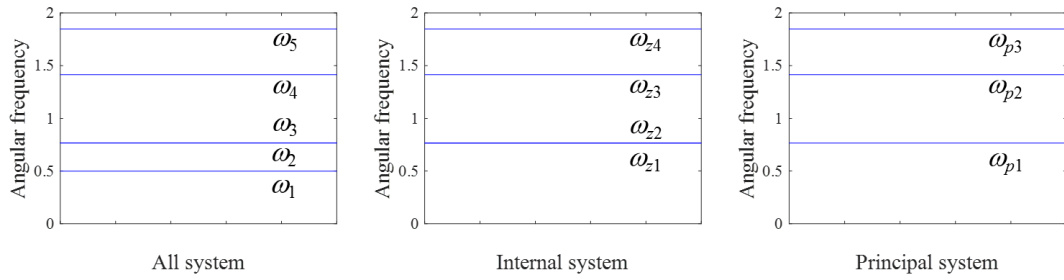
Table.7.1 Design condition and designed parameter.

Parameter	$s = 1$	$s = 2$	$s = 3$
$\Delta\omega^2$	0.001	0.001	0.001
ω	0.5	0.5	0.5
M^*	661.85	571.43	70.224
K^*	164.96	142.14	16.609
k_b^*	5×10^{-4}	5×10^{-4}	5×10^{-4}
k_c^*	0.5858	2	3.4142

表 7.2 に提案法によるモード制御振動子，端部可動振動子を用いた内部系，全系，主系の固有角振動数の計算値，図 7.6 に固有角振動数の相対比較を図示して示す．図中，左は全系の固有角振動数，中央は内部系の固有角振動数，右は主系の固有角振動数を表し，上段(a)は $s = 1$ 次とした場合，中段(b)は $s = 2$ 次とした場合，下段(c)は $s = 3$ 次とした場合をそれぞれ表す．最初にモード制御振動子の設計結果について考察する．(a)の場合，主系の固有角振動数は低次より 0.7654, 1.4142, 1.8478 であり，固有角振動数 0.7654 の $s = 1$ 次モードを対象とする．一方，内部系の固有角振動数は低次より 0.7654, 0.7659, 1.4142, 1.8478 となった．モード制御振動子を追加した内部系では，主系 1 次モード近傍で固有角振動数が重複する，共鳴条件となる固有角振動数が生じた．主系 2 次モード，3 次モードの固有角振動数に着目すると，内部系の 3 次モードと 4 次モードの固有角振動数がそれぞれ一致した．(b)の場合，主系の固有角振動数 1.4142 の $s = 2$ 次モードを対象とする．内部系の固有角振動数は低次より 0.7655, 1.4142, 1.4144, 1.8478 となった．(a)と同様，主系 2 次モード近傍で固有角振動数が重複する，共鳴条件となる固有角振動数が生じた．主系 1 次モード，3 次モードの固有角振動数に着目すると，内部系の 1 次モードと 4 次モードの固有角振動数がそれぞれ一致した．

Table.7.2 Eigen angular frequencies of each system using subspace resonance structure method.

s	All system	Internal system	Primary system
1	0.4991	0.7654	0.7654
	0.7656	0.7659	1.4142
	0.7663	1.4142	1.8478
	1.4144	1.8478	-
	1.8479	-	-
2	0.4986	0.7655	0.7654
	0.7664	1.4142	1.4142
	1.4143(9027)	1.4144	1.8478
	1.4143(9039)	1.8478	-
	1.8479	-	-
3	0.4852	0.7655	0.7654
	0.7721	1.4142	1.4142
	1.4156	1.8478	1.8478
	1.8482	1.8480	-
	1.8479	-	-



(c)

Fig.7.6 Comparison of eigen angular frequencies of each system. Left figure shows the all system, middle figure shows the internal system, right figure shows the principal system. In addition, (a) shows the objective mode is $s = 1$, (b) shows the objective mode is $s = 2$, (c) shows the objective mode is $s = 3$, respectively.

(c)の場合、主系の固有角振動数 1.8478 の $s = 3$ 次モードを対象とする。得られた内部系の固有角振動数は低次より 0.7655, 1.4142, 1.8478, 1.8480 となった。先の(a), (b)と同様、主系 3 次モード近傍で固有角振動数が重複する、共鳴条件となる固有角振動数が得られた。主系 1 次モードと 2 次モードの固有角振動数に着目すると、内部系の 1 次モードと 2 次モードがそれぞれ一致した。以上により、モード制御振動子は、主系の対象 s 次モードを連成の対象とする設計となっていることがわかる。

次に端部可動振動子の設計結果について考察する。(a)の場合、全系の固有角振動数は低次より 0.4991, 0.7656, 0.7663, 1.4144, 1.8479, (b)の場合、固有角振動数は低次より 0.4986, 0.7664, 1.4143(9027), 1.4143(9039), 1.8479, (c)の場合、固有角振動数は低次より 0.4852, 0.7721, 1.4156, 1.8482, 1.8479 となった。全系 1 次モードの固有角振動数は、(a)の場合 0.4991, (b)の場合 0.4986, (c)の場合 0.4852 であり、いずれも擬モーダルモデルの部分空間モデルの固有角振動数 $\omega = 0.5$ と近い値をとった。また、先の内部系の固有角振動数と対比すると、全系 2 次モード, 3 次モード, 4 次モード, 5 次モードが内部系 1 次モード, 2 次モード, 3 次モード, 4 次モードにそれぞれ対応した。したがって、端部可動振動子の設置により、全系は、部分空間モデルの固有角振動数 ω に対応する 1 次固有角振動数が、内部系に追加されたと構造となっていると考えられる。

7・4・2・2 根軌跡

提案法が成り立つ範囲を議論するため、対象 s 次モードと $s+1$ 次モードの固有角振動数の二乗の差 $\Delta\omega^2$ を変化させた場合の根軌跡を求め、図 7.7 に示す。図中縦軸は固有角振動数、横軸は固有角振動数の二乗の差を表す。図中左は $s = 1$ の場合、中央は $s = 2$ の場合、右は $s = 3$ の場合をそれぞれ示す。また図中の破線は部分空間モデルの固有角振動数 ω および主系の固有角振動数をプロットした。いずれの場合も $\Delta\omega^2$ が 0 付近の場合に重根を持ち、 $\Delta\omega^2$ が大きくなるにつれて、対象 s 次モードと $s+1$ 次モードの固有角振動数の差が大きくなる傾向が得られた。また、 $\Delta\omega^2$ が 0 付近の場合に、全系の固有角振動数が破線と一致することから、全系の固有角振動数が部分空間モデルの固有角振動数 ω および主系の固有角振動数に対応することがわかる。全系の 1 次モードの固有角振動数に着目すると、 $\Delta\omega^2$ が大きい場合に固有角振動数が 0 以下となり、系が不安定化する領域が得られた。これは式(7.12)で設計される、端部可動振動子のばね定数が負となるためである。これは本設計法において、正定値を得るためには、 $\Delta\omega^2$ が 0 付近の共鳴条件を満たす必要があることを示している。

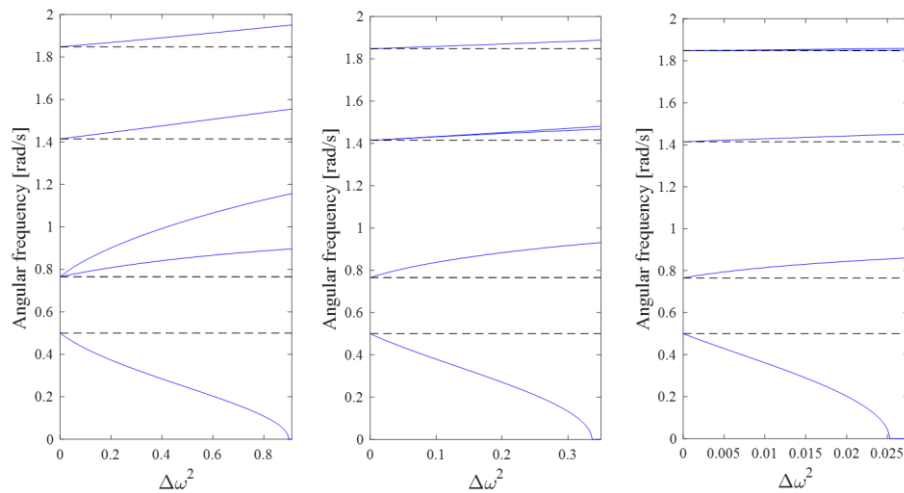


Fig.7.7 Relation between eigen angular frequencies and difference parameter of $\Delta\omega^2$. Left figure shows the objective mode $s = 1$, middle figure shows the $s = 2$, right figure shows the $s = 3$, respectively.

7・4・2・3 モード形状

表 7.1 に示す計算条件の下で, 各固有角振動数におけるモードベクトルを求めて図 7.8 に示す. 図中第 1 列(a)は $s = 1$ の場合, 第 2 列(b)は $s = 2$ の場合, 第 3 列(c)は $s = 3$ の場合をそれぞれ表す. 図中 1 行目は全系 5 次モード, 2 行目は 4 次モード, 3 行目は 3 次モード, 4 行目は 2 次モード, 5 行目は 1 次モードを表す. 全ての場合において, 1 次モードは端部可動振動子と主系が同相で動き, モード制御振動子の振幅が小さいモード形状となった. また, 端部可動振動子はこのモードのみ大きい振幅をとった. モード制御振動子は主系の対象 s 次モードと $s+1$ 次モードの場合のみ振幅が大きいモードとなった. 主系とモード制御振動子の位相関係に着目すると, s 次モードでは主系モードとモード制御振動子は同相, $s+1$ 次は逆相の関係となった. 対象 s 次モード, $s+1$ 次, 1 次モード以外のモードは, モード制御振動子, 端部可動振動子共にモード制御振動子が小さく, 主系の振幅が卓越する傾向であった. 当該モードではモード制御振動子, 端部可動振動子の影響が小さい事を意味している. 前節の根軌跡による固有角振動数の評価においても, $\Delta\omega^2$ が 0 付近の共鳴条件では, 1 次の固有角振動数が部分空間モデルの固有角振動数 ω に対応し, それ以外が主系の固有角振動数と対応する傾向を示したことから, 本モード形状の対応は妥当なものであると考えられる.

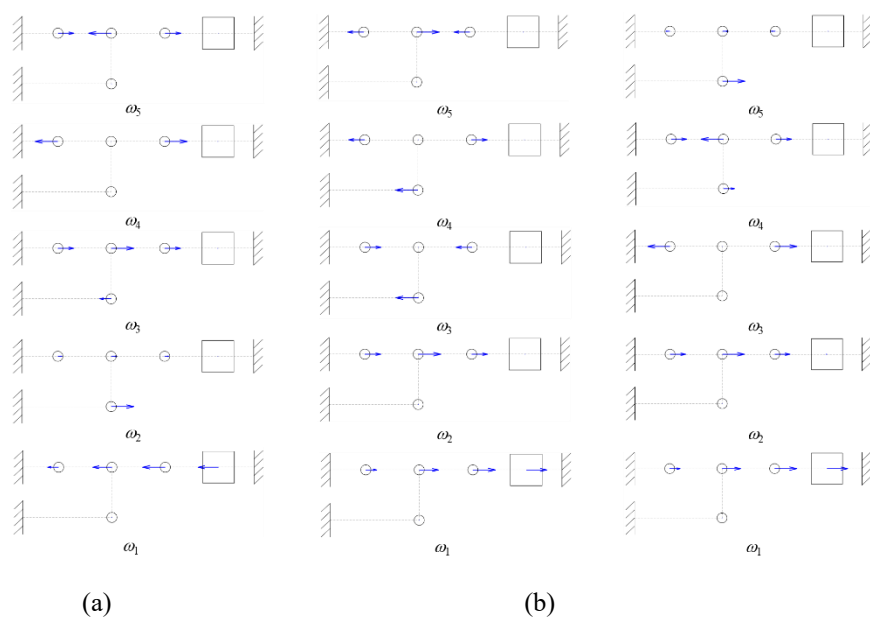


Fig.6.8 Mode shape of all system. (a) shows the case of $s = 1$, (b) shows the case of $s = 2$, (c) shows the case of $s = 3$, respectively.

7・5 数値計算

本章では、前節で設計例とした端部可動振動子とモード制御振動子を有する等質量 3 自由度系を対象に、内部系モード間エネルギー移動現象の発生有無について、自由応答解析を用いて検討をおこなう。

7・5・1 主系 1 次モードを対象($s = 1$)とした場合

物理座標モデルおよび擬モーダルモデルの自由振動応答の時刻歴を状態遷移行列によって求め、図 7.9 に示す。図 9(左)に物理座標系の自由振動、(右)に擬モーダルモデルの自由振動をそれぞれ示す。図 7.9(左)の上段から、端部可動振動子の変位、等質量直列三自由度系の第一質量の変位、第二質量の変位、第三質量の変位、モード制御振動子の変位を表す。また図 7.9(右)の上段から、端部可動振動子の振幅、内部系 1 次モード振動子の振幅、内部系 2 次モード振動子の振幅、内部系 3 次モード振動子の振幅、内部系 4 次モード振動子の振幅を表す。ここで、擬モーダルモデルの自由応答については、内部系モード間のエネルギー授受の様子を可視化するため、時系列にヒルベルト変換を施し、複素信号の絶対値を求めて振幅とした。時間刻み $dt = 1s$ 、対象 1 次モードと 2 次モードの固有角振動数の二乗の差 $\Delta\omega^2$ の設計条件を $\Delta\omega^2 = 0.05$ 、擬モーダルモデルの部分空間モデルの固有角振動数 ω の設計条件を $\omega = 0.5$ の条件で計算をおこなった。物理座標系の初期条件は $X^*(0) = 0$, $x_1^*(0) = 0.2845$, $x_2^*(0) = 0.4024$, $x_3^*(0) = 0.2845$, $x_c^*(0) = 0.4024$, $V^*(0) = 0$, $v_1^*(0) = 0$, $v_2^*(0) = 0$, $v_3^*(0) = 0$, $v_c^*(0) = 0$ とし、擬基準座標系の初期条件は $X^*(0) = 0$, $\xi_1^*(0) = 1$, $\xi_2^*(0) = 0$, $\xi_3^*(0) = 0$, $\xi_4^*(0) = 0$, $V^*(0) = 0$, $\xi_1^*(0) = 0$, $\xi_2^*(0) = 0$, $\xi_3^*(0) = 0$, $\xi_4^*(0) = 0$ とした。物理座標の応答に着目すると、等質量直列三自由度系とモード制御振動子の間に緩やかな振幅の変調を伴ったうなり波形が確認できる。等質量直列三自由度系は同相状態で推移し、モード制御振動子の腹となる時刻 100s, 300s 付近において節となった。また、端部可動振動子の変位も確認されるが、等質量直列三自由度系の変位と比較して小さかった。擬基準座標の応答に着

目すると、内部系 1 次モードの振幅が極大の腹の時刻において、2 次モードの振幅が極小の節に対応し、またその逆も認められることから、内部系モード間の周期的なエネルギー移動が確認できる。他方、端部可動振動子および内部系 3 次モード、4 次モードとの間のエネルギー移動は観察されなかった。

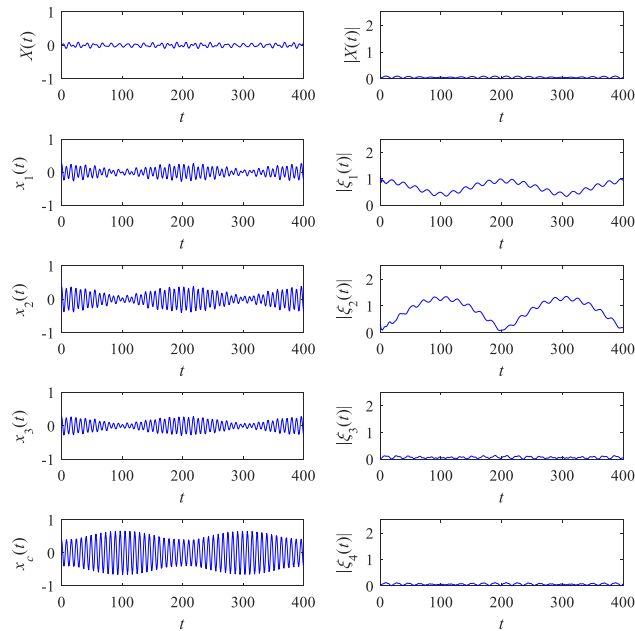


Fig.7.9 Positional change of the 3 degree-of-freedom system, the mode control oscillator and the edge moving mass in the physical-coordinate model (in the left column shows). Temporal changes of the amplitude of the quasi-modal model (in the right column shows). In this case, objective mode in primary system is $s = 1$. Energy transfer exists between 1st mode and 2nd mode in internal system. Energy concentration state of 2nd mode in internal system is corresponded with energy concentration state of modal control oscillator in physical-coordinate system.

7・5・2 主系 2 次モードを対象($s = 2$)とした場合

物理座標モデルおよび擬モーダルモデルの自由振動応答の時刻歴を状態遷移行列によって求め、図 7.10 に示す。図 7.10(左)に物理座標系の自由振動、(右)に擬モーダルモデルの自由振動をそれぞれ示す。図の配置は先の図 7.9 と同様とした。時間刻み $dt = 1s$ 、対象 2 次モードと 3 次モードの固有角振動数の二乗の差 $\Delta\omega^2$ の設計条件を $\Delta\omega^2 = 0.3$ 、擬モーダルモデルの部分空間モデルの固有角振動数 ω の設計条件を $\omega = 0.5$ の条件で計算をおこなった。物理座標系の初期条件は $X^*(0) = 0$ 、 $x_1^*(0) = 0.25$ 、 $x_2^*(0) = 0$ 、 $x_3^*(0) = -0.25$ 、 $x_c^*(0) = 0$ 、 $V^*(0) = 0$ 、 $v_1^*(0) = 0$ 、 $v_2^*(0) = 0$ 、 $v_3^*(0) = 0$ 、 $v_c^*(0) = 0$ とし、擬基準座標系の初期条件は $X^*(0) = 0$ 、 $\xi_1^*(0) = 0$ 、 $\xi_2^*(0) = 1$ 、 $\xi_3^*(0) = 0$ 、 $\xi_4^*(0) = 0$ 、 $V^*(0) = 0$ 、 $\xi_1^*(0) = 0$ 、 $\xi_2^*(0) = 0$ 、 $\xi_3^*(0) = 0$ 、 $\xi_4^*(0) = 0$ とした。

物理座標の応答に着目すると、先と同様、等質量直列三自由度系とモード制御振動子の間に緩やかな振幅の変調を伴ったうなり波形が確認できる。等質量直列三自由度系は第一質量と第三質量が逆相状態で推移し、モード制御振動子の腹となる時刻 305s、915s 付近において節となった。端部可動振動子および等質量直列三自由度系の第二質量は僅かに変位を示すが、第一質量および第三質量と比較して小さかった。擬基準座標の応答に着目すると、内部系 2 次モードの振幅

が極大の腹の時刻において、3次モードの振幅が極小の節に対応し、またその逆も認められることから、内部系モード間の周期的なエネルギー移動が確認できる。他方、端部可動振動子および内部系1次モード、4次モードとの間のエネルギー移動は観察されなかった。

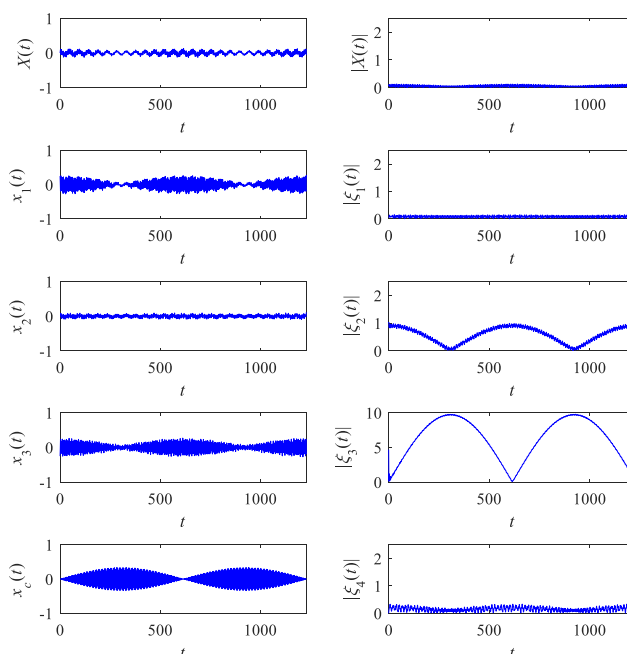


Fig.7.10 Positional change of the 3 degree-of-freedom system, the mode control oscillator and the edge moving mass in the physical-coordinate model (in the left column shows). Temporal changes of the amplitude of the quasi-modal model (in the right column shows). In this case, objective mode in primary system is $s=2$. Energy transfer exists between 2nd mode and 2rd mode in internal system. Energy concentration state of 3rd mode in internal system is corresponded with energy concentration state of modal control oscillator in physical-coordinate system.

7・5・3 主系3次モードを対象($s=3$)とした場合

物理座標モデルおよび擬モーダルモデルの自由振動応答の時刻歴を状態遷移行列によって求め、図 7.11 に示す。図 11(左)に物理座標系の自由振動、(右)に擬モーダルモデルの自由振動をそれぞれ示す。図の配置は先の図 7.9 と同様とした。時間刻み $dt=1s$ 、対象3次モードと4次モードの固有角振動数の二乗の差 $\Delta\omega^2$ の設計条件を $\Delta\omega^2=0.025$ 、擬モーダルモデルの部分空間モデルの固有角振動数 ω の設計条件を $\omega=0.5$ の条件で計算をおこなった。物理座標系の初期条件は $X^*(0)=0$ 、 $x_1^*(0)=0.0488$ 、 $x_2^*(0)=-0.0690$ 、 $x_3^*(0)=0.0488$ 、 $x_c^*(0)=-0.0690$ 、 $V^*(0)=0$ 、 $v_1^*(0)=0$ 、 $v_2^*(0)=0$ 、 $v_3^*(0)=0$ 、 $v_c^*(0)=0$ とし、擬基準座標系の初期条件は $X^*(0)=0$ 、 $\xi_1^*(0)=0$ 、 $\xi_2^*(0)=0$ 、 $\xi_3^*(0)=1$ 、 $\xi_4^*(0)=0$ 、 $V^*(0)=0$ 、 $\xi_1^*(0)=0$ 、 $\xi_2^*(0)=0$ 、 $\xi_3^*(0)=0$ 、 $\xi_4^*(0)=0$ とした。

物理座標の応答に着目すると、先と同様、等質量直列三自由度系とモード制御振動子の間に緩やかな振幅の変調を伴ったうなり波形が確認できる。等質量直列三自由度系は第一質量と第三質量が同相状態、第二質量がその逆相状態で推移し、モード制御振動子の腹となる時刻 400s、1200s 付近において節となった。先と同様、端部可動振動子は僅かに変位を示すが、等質量直列三自由度系と比較して小さかった。擬基準座標の応答に着目すると、内部系3次モードの振幅が極大の腹の時刻において、4次モードの振幅が極小の節に対応し、またその逆も認められるこ

とから、内部系モード間の周期的なエネルギー移動が確認できる。他方、端部可動振動子および内部系1次モード、2次モードとの間のエネルギー移動は観察されなかった。

主系を等質量直列三自由度系とした場合、提案設計法によって内部系モード間のエネルギー移動が生じ、主系対象モードとモード制御振動子の中で振動エネルギーの渡り歩きが生じることが分かった。これを用い、主系対象モードの振動エネルギーをモード制御振動子に移動させて吸振する方法、または、モード制御振動子のエネルギーを主系対象モードに移動させることにより、主系対象モードにエネルギーを与える方法などを考えることができる。

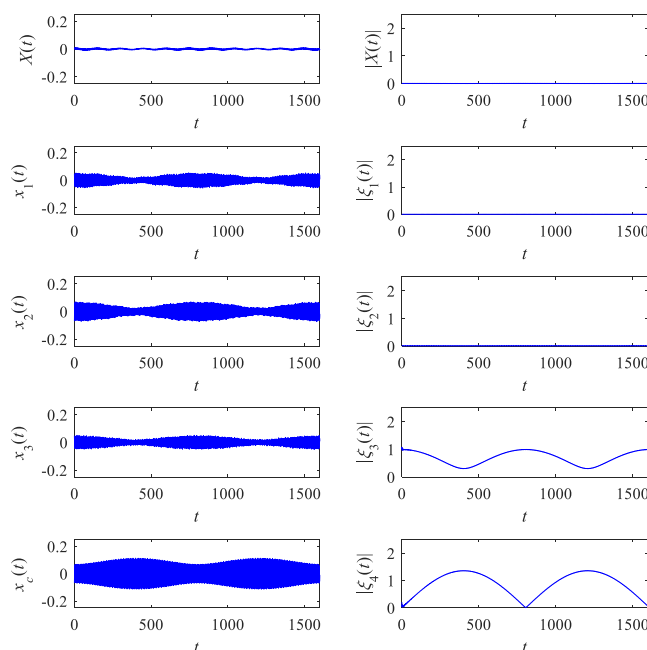


Fig.7.11 Positional change of the 3 degree-of-freedom system, the mode control oscillator and the edge moving mass in the physical-coordinate model (in the left column shows). Temporal changes of the amplitude of the quasi-modal model (in the right column shows). In this case, objective mode in primary system is $s = 3$. Energy transfer exists between 3rd mode and 4th mode in internal system. Energy concentration state of 3rd mode in internal system is corresponded with energy concentration state of modal control oscillator in physical-coordinate system.

7・7 比例粘性減衰の導入による一方向内部系モード間エネルギー移動に関する基礎検討

本節では、主系対象モードの振動エネルギーをモード制御振動子に移動させて吸振する方法に対する基礎検討として、比例粘性減衰の導入による一方向内部系モード間エネルギー移動に関する数値計算をおこなう。

時間刻み $dt = 0.01s$, 対象1次モードと2次モードの固有角振動数の二乗の差 $\Delta\omega^2$ の設計条件を $\Delta\omega^2 = 0.01$, 擬モーダルモデルの部分空間モデルの固有角振動数 ω の設計条件を $\omega = 0.5$ の条件で計算をおこなった。物理座標系の初期条件は $X^*(0) = 0$, $x_1^*(0) = 0.2845$, $x_2^*(0) = 0.4024$, $x_3^*(0) = 0.2845$, $x_c^*(0) = 0.4024$, $V^*(0) = 0$, $v_1^*(0) = 0$, $v_2^*(0) = 0$, $v_3^*(0) = 0$, $v_c^*(0) = 0$ とし、擬基準座標系の初期条件は $X^*(0) = 0$, $\xi_1^*(0) = 1$, $\xi_2^*(0) = 0$, $\xi_3^*(0) = 0$, $\xi_4^*(0) = 0$, $V^*(0) = 0$, $\xi_1^{*\prime}(0) = 0$, $\xi_2^{*\prime}(0) = 0$, $\xi_3^{*\prime}(0) = 0$, $\xi_4^{*\prime}(0) = 0$ とした。モード減衰率については、表 7.2 および図 7.6 の主系、内部系、全系の固有角振動数の対応の観点から、1次モードの減衰率を 0.05, 2次モードの減衰率を

0.05, 3次モードの減衰率を0.005, 4次モードの減衰率を0.05, 5次モードの減衰率を0.05とした。

物理座標モデルおよび擬モーダルモデルの自由振動応答の時刻歴を状態遷移行列によって求め、図7.12に示す。図7.12(左)に物理座標系の自由振動、(右)に擬モーダルモデルの自由振動をそれぞれ示す。図の配置は先の図7.9と同様とした。ここで、擬モーダルモデルの自由応答については、内部系モード間のエネルギー授受の様子を可視化するため、時系列にヒルベルト変換を施し、複素信号の絶対値を求めて振幅とした。

物理座標の応答に着目すると、等質量直列三自由度系の各質量は同相状態で減衰し、モード制御振動子はうなりの波形を伴い減衰した。等質量直列三自由度系の各質量とモード制御振動子との位相関係に着目すると、初期状態では等質量直列三自由度系とモード制御振動子は同相状態であるが、時刻30sでモード制御振動子のうなりの節が現れた後は、等質量直列三自由度系とモード制御振動子の位相は逆相状態となった。擬基準座標の応答に着目すると、内部系1次モードと内部系2次モードの間でエネルギー移動を伴いながら減衰する様子を確認できる。時刻0~30sにおいて、内部系2次モードのエネルギーが増大し、内部系1次モードのエネルギーが急激に減少した。時刻30s以降では内部系1次モード、2次モード共にエネルギーが減少し、これ以降の周期的なエネルギーの渡り歩きは認められなかった。これより、内部系1次モードから内部系2次モードの一方方向エネルギー移動の発生が確認できる。

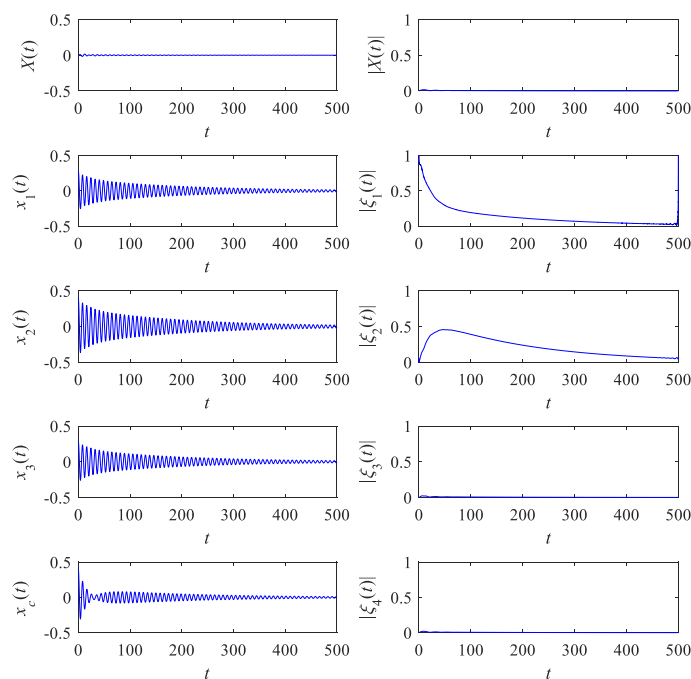


Fig.7.12 Positional change of the 3 degree-of-freedom system, the mode control oscillator and the edge moving mass in the physical-coordinate model (in the left column shows). Temporal changes of the amplitude of the quasi-modal model (in the right column shows). In this case, objective mode in primary system is $s = 1$. Target energy transfer exists between 1st mode and 2nd mode in internal system.

7・7 結言

本章では端部可動振動子とモード制御振動子を有する等質量直列 N 自由度系を対象に，内部系モード間の振動エネルギー移動を実現する部分空間共鳴構造設計法を提案し，等質量直列三自由度系を例に内部系モード間エネルギー移動に関する検討と解析をおこなった．その結果，以下の結論を得た．

- (1) 端部可動振動子とモード制御振動子を設計する部分空間共鳴構造設計法を提案した．モード制御振動子は，主系とモード制御振動子からなる内部系のモードモデルの共鳴条件より設計する．端部可動振動子は，擬モーダルモデル内に境界座標を設定し，新たな擬似的モードを作成し，擬似的モードの固有角振動数と内部系モードの固有角振動数を一致させることで得られる．
- (2) 提案法による設計事例として，主系を等質量直列三自由度系とした場合について検討をおこなった．全系と内部系のモード解析の結果，内部系と全系の固有角振動数が一致すること，モード形状が略一致することが分かった．
- (3) 共鳴条件である重根となる固有角振動数の二乗差をパラメータとした根軌跡を求めた．その結果，共鳴条件から外れた場合に，端部可動振動子のばね定数が負となり，系は不安定化した．
- (4) 内部系モード間の振動エネルギー移動に関する自由振動応答解析をおこない，エネルギー移動の発生の有無について考察をおこなった．内部系モード間の振動エネルギー移動の発生に伴い，物理座標において等質量直列三自由度系とモード制御振動子の間でエネルギー移動が観察された．
- (5) 系に比例粘性減衰を導入し，一方向内部系モード間の振動エネルギー移動に関する検討をおこなった．モード減衰率を調整することにより，内部系モード間に一方向振動エネルギー移動が生じる可能性を示した．

第 8 章 結 論

第1章で示した目的にしたがい、新しいセンシング法の基礎資料として、多自由度衝突振動系での振動エネルギーの移動に関する特性、新しいセミアクティブ制振の基礎資料として、多自由度系での内部系モード間の振動エネルギーの移動に関する特性を明らかにした。

まず、三自由度衝突振動系について、振動エネルギー移動の発生に関する諸条件について扱った。次いで、振動のエネルギー移動に起因する特徴的な **Graze** 衝突現象について、詳細な検討をおこなった。そして比例粘性減衰を与えた場合の効果について検討した。

次に、多自由度線形振動系の内部系モード間の振動エネルギー移動について、端部可動振動子を有する等質量二自由度系を対象とした、発生条件の検討をおこなった。次いで、対象とする主系を一般の多自由度系に拡張した検討をおこなった。各章に示した結言を要約すると次のようになる。

(1)三自由度衝突振動系では、大振動子に依存しない衝突小振動子と非衝突小振動子間の相互作用に起因する内部共振条件と衝突周期を得た。小振動子が同位相、もしくは逆位相を持つ初期状態において、釣合位置で完全弾性衝突させた場合に、一方の小振動子に振動エネルギーが集中し、次に他方に振動エネルギーが集中することを繰り返す振動エネルギーの移動現象が発生する事を確認した。得られた内部共振の振動数比には従来の研究では指摘されなかった多数の複雑な振動数比が存在した。最後に、上述の振動エネルギー移動の周期に関する解析解を導出した。その周期は各振動子の振動数比に依らず、小振動子間の質量比に依存した。

(2)三自由度衝突振動系において、振動エネルギー移動によって振動エネルギーを失った状態に発生する **Graze** 衝突現象について検討した。小振動子間の相互作用が大振動子から切り離される場合、衝突位置に依らず、小振動子間に周期的な運動エネルギーの移動が発生した。衝突によって位相が進むタイプ I 型衝突と位相が遅れるタイプ II 型衝突の衝突モードが存在した。**Graze** 衝突の前後でタイプ I 型衝突とタイプ II 型衝突のモードの切り替えが発生した。**Graze** 衝突は、小振動子間の運動エネルギーの移動により、衝突小振動子の運動エネルギーが 0 に近づく際に発生した。離散速度の漸化式から、完全に速度が 0 となる衝突である完全 **Graze** 衝突の発生条件を導出し、さらにこれが周期的に現れる条件を導出した。**Graze** 衝突の瞬間において非衝突小振動子に衝突を加えることにより、タイプ I 型衝突のみの衝突を発生させるように系を制御できる可能性を示した。

(3)三自由度衝突振動系について、比例粘性減衰を考慮した場合について検討した。モード減衰率が等しい場合、無減衰系の場合と同様に、衝突小振動子と非衝突小振動子間に完全概周期振動が発生した。振動エネルギーの移動周期を導出し、衝突周期と二小振動子間の質量比の関数であることを示した。特別な質量比において小振動子間の振動エネルギー移動に起因した分数調波共振が発生した。衝突小振動子のモード減衰率のみを他のモード減衰率からずらした場合、無減衰系での衝突振動演算子に摂動が加わり、振動エネルギーの移動周期が変調を受けた。

(4)多自由度系の内部系モード間の振動エネルギーの移動について、端部可動振動子を有する等質量二自由度系を対象とし、発生条件の検討をおこなった。擬モーダルモデル内に境界座標を設定し、擬モーダルモデル内に新たな擬似的モードを作成し、擬似的モードの固有角振動数と内部系モードの固有角振動数を一致させる、擬モーダルモデルにおける共鳴構造設計法を提案し、内部系モード間の振動エネルギー移動を実現する物理モデルのばね定数と質量の設計式を導出した。また、振動エネルギー移動の周期の解析解を導出した。比例粘性減衰を導入し、この系のモ

ード減衰率を適切に設計することにより，内部系モード間の振動エネルギー移動の一方向遷移を実現できる可能性を示した．

(5) 多自由度系の内部系モード間の振動エネルギー移動について，端部可動振動子とモード制御振動子を有する等質量直列 N 自由度系を対象とし，発生条件の検討をおこなった．端部可動振動子とモード制御振動子を設計する部分空間共鳴構造設計法を提案し，内部系モード間の振動エネルギー移動を実現する，モード制御振動子と端部可動振動子の質量とばね定数の設計式を導出した．固有角振動数とモード形状の対応から，端部可動振動子とモード制御振動子を含む全系の固有角振動数，モード形状は，主系の固有角振動数，モード形状の特徴を有した．対象モードにおける対象モードの重根となる固有角振動数の二乗差をパラメータとした根軌跡の検討から，共鳴条件から外れた場合に，端部可動振動子のばね定数が負となり，系が不安定化することが分かった．比例粘性減衰を導入し，一方向の内部系モード間の振動エネルギー移動に関する検討をおこない，モード減衰率を調整することにより，内部系モード間の一方向振動エネルギー移動が生じる可能性を示した．

以上により，多自由度衝突振動系での振動エネルギーの移動に関する特性，多自由度系での内部系モード間の振動エネルギーの移動に関する特性を明らかにした．本研究から三自由度衝突振動系の振動エネルギー移動の発生条件である内部共振条件と衝突周期が明らかとなり，その衝突モードを制御するための資料が得られた．また比例粘性減衰の検討により，一方向エネルギー移動に関する資料が得られた．また，多自由度系の内部系モード間の振動エネルギー移動に関して，有限自由度系で構成された任意の主系に対するモード制御振動子と端部可動振動子の質量，ばね定数の設計式の形で発生条件が得られた．

謝 辞

本研究を行うにあたり、量子物性工学研究室(鈴木研究室)の皆様をはじめとする非常に多くの方々にご助言、ご指導していただいたことに深く感謝いたします。特に本研究は学部課程から社会人課程を経た10年にわたる研究であり、非常に多くの方にご支援を賜りました。ここにその方々のお名前を記すことで御礼とかえさせていただきます。

指導教官である鈴木泰之教授には、高い視座から本研究の方向性や研究の意義についての指導、ご助言を賜りました。また外国語の不得手な私に、先生流のノウハウも伝授していただきました。経済面についても大変親身にしていただき、社会人課程を乗り切ることができました。深く感謝いたします。小竹茂夫准教授には、ご多忙の中、休日や昼夜をいとわず、10年間にわたり辛抱強く丁寧なご指導をいただきました。現在、機械力学の分野で研究者として名を連ねられているのも先生の丁寧なご指導の賜物であります。先生の幅広い見識と境界領域での課題発見センスは、テーマ設定の本質であり、研究者として多くを学ばせていただきました。今後の先生の益々の研究の発展をお祈りするとともに、深く感謝をいたします。

三重大学大学院生体システム工学研究室の稲葉忠司教授、システム設計研究室の池浦良淳教授には大変有益なるご助言と御討論を賜りました。特に稲葉教授には社会人課程の講義での温かいご配慮を頂きました。感謝いたします。

名古屋大学大学院旧中村研究室の中村新男教授には、光物性論に関し、実験から理論までご指導をいただきました。研究に取り組む姿勢、論文執筆の際の着眼点など基礎スキルについて伝授していただきました。分野は異なれ科学者として共通するスキルであり、研究の基礎体力を養うことができました。深く感謝いたします。

日本電気株式会社中央研究所の山田敬嗣中央研究所理事、橋本雅伸前システム実装研究所所長(現 C&C 財団専務理事)、西直樹前グリーンプラットフォーム研究所所長、中村祐一システムプラットフォーム研究所所長には社会人博士課程の活動承認から休暇時の手当などご理解をいただきました。特に橋本雅伸所長には専門分野が機械力学ということもあり、財団に移られた後も私の学会活動について叱咤激励をいただきました。深く感謝いたします。

群馬大学の永井健一名誉教授には、振動基礎研究会や D&D など連続体非線形振動に関する最新動向や研究手法、今後の分野の発展方向など多くを学ばせていただきました。京都大学の中井幹雄元教授には、衝突系などの区分線形系の解析方法に関する最新動向や本研究に関する心温まるコメントをいただきました。筑波大学の藪野浩司教授には非線形連成系に関する研究動向や文献について学ばせていただきました。神奈川大学の山崎徹教授には振動インテンシティや統計的エネルギー解析法などエネルギー移動に関する最新の研究手法について学ばせていただきました。また D&D にて本研究に関する温かいコメントをいただきました。群馬大学の丸山真一准教授、北海道大学の本田真也准教授、北見工業大学の星野洋平准教授、島根大学の田村晋司講師、長崎大学の原田晃助教、東京工業大学の土田崇弘助教には研究会や D&D で心温まる指摘や議論をしていただきました。深く感謝いたします。

研究室の後輩である内田秀範君、芹澤洋介君、八木一憲君、川北雄一郎君、道智寛之君、壺崎遼君には研究室でのミーティングや学会などで大変お世話になりました。

最後に、両親と家庭を支えてくれた妻景子と娘結衣に感謝いたします。

2017年 9月

高田 宗一郎

関連論文

発表論文

- (1) 高田宗一郎, 小竹茂夫, 鈴木泰之, “一振動子に結合された内部共振衝突振動系に現れる周期的な完全概周期振動の波動アルゴリズムによる解析 (釣合位置で完全弾性衝突する場合)”, 日本機械学会論文集 C 編, Vol. 77, No. 773 (2011), pp. 14-27.
- (2) 高田宗一郎, 小竹茂夫, 鈴木泰之, “一振動子に結合された二体衝突振動系の内部共振によるエネルギー移動に起因した周期的な Graze 現象”, 日本機械学会論文集 C 編, Vol. 77, No. 777 (2011), pp. 1911-1925.
- (3) 高田宗一郎, 小竹茂夫, 鈴木泰之, “比例粘性減衰を有する内部共振衝突振動系に現れる減衰概周期振動の波動アルゴリズムによる解析 (釣合位置で完全弾性衝突する場合)”, 日本機械学会論文集 C 編, Vol. 78, No. 791 (2012), pp. 2369-2385.
- (4) 高田宗一郎, 小竹茂夫, 鈴木泰之, “端部可動振動子を有する等質量二自由度系の同相一逆相状態間遷移”, 日本機械学会論文集, Vol. 82, No. 835 (2016), 15-00530-15-00530.
- (5) 高田宗一郎, 小竹茂夫, 鈴木泰之, “内部系モード間エネルギー移動を実現する部分空間共鳴構造設計法”, 日本機械学会論文集, will be submitted.

研究発表

- (1) 高田宗一郎, 小竹茂夫, 花井宏旭, “多体衝突振動系に現れる Grover 量子アルゴリズムの定式化”, 日本機械学会東海支部総会講演論文集, 459, 57 (2008), 309-310.
- (2) 高田宗一郎, 小竹茂夫, 鈴木泰之, “一振動子に結合された内部共振衝突振動系のエネルギー移動に起因した周期的な Graze 現象”, Dynamics & Design Conference 2010, (2010), 233-1-233-6.
- (3) 芹澤洋介, 内田秀範, 高田宗一郎, 小竹茂夫, 鈴木泰之, “大振動子に結合した衝突線形 2 体振動子に現れる同期現象のシミュレーション”, Dynamics & Design Conference 2010, (2010), 236-1-236-6.
- (4) 高田宗一郎, 小竹茂夫, 鈴木泰之, “比例粘性減衰を有する内部共振衝突振動系に現れる減衰概周期振動の周期変調現象”, Dynamics & Design Conference 2012, (2012), 203-1-203-9.

文 献

- 相原建人, 熊野博之, 鈴木健二, “任意変位周期励振を受けるばね-質量系の定常衝突振動: 第1報, 調和共振, 高調波共振, および分数調波共振における応答振動解析”, 日本機械学会論文集 C 編, Vol. 75, No.752 (2009), pp. 815-823.
- 相原建人, 熊野博之, “復元力にヒステリシス履歴を有する付加質量付き両端単純支持ばりの定常衝突振動解析”, 日本機械学会論文集 C 編, Vol. 77, No.777 (2011), pp. 1640-1648.
- 相原建人, 熊野博之, “周期励振を受ける無減衰 2 自由度系の衝突振動解析”, 日本機械学会論文集, Vol. 82, No.835 (2016), 15-00527-15-00527.
- Bajaj, A. K. and Vyas, A., Global dynamics of an autoparametric system with multiple pendulums, *Transaction of the ASME, Journal of computational and nonlinear dynamics*, Vol.1 (2006), pp.35-46.
- Berg, R. E. and Marshall, T. S., Wilberforce pendulum oscillations and normal modes, *American Journal of Physics*, Vol.59 No.32, (1991), pp.32-37.
- Bolotin, V. V., *Nonconservative problems in the theory of elastic stability* (1963), p.417, p.655, Macmillan.
- Bolotin, V. V., *The dynamic stability of elastic systems* (1964), p.44, p.45, p.53, p.54, p.76, p.417, HoldenDay.
- Briggs, J. S. and Eisfeld, A., Coherent quantum state from classical oscillator amplitudes, *Physical Review A*, Vol. 85 (2012), 052111.
- Caughey, T. K., Classical Normal Modes in Damped Linear Dynamic Systems, *Transaction of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol.27 (1960), pp.269-271.
- Caughey, T. K., O'Kelly, M. E. J., Classical Normal Modes in Damped Linear Dynamic Systems, *Transaction of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol.32 (1965), pp.583-588.
- Chin, W., Ott, E., Nusse, H.E., and Grebogi, C., “Grazing Bifurcation in Impact Oscillators”, *Physical Review E*, Vol. 50, No. 6(1994), pp. 4427-4444.
- Den Hartog, J. P., *Mechanical vibrations* (1956), p.86-94, McGraw-Hill.
- ゴールドスタイン, 古典力学 (上), (1983), p.349, 吉岡書店.
- Grover, L. K., “Quantum Computers can Search Arbitrarily Large Databases by a Single Query”, *Physical Review Letter*, 79(23) (1997), pp.4709-4712.
- Grover, L. K. and Sengupta, A.M., Classical Analog of Quantum Search, *Physical Review A*, Vol. 65 (2002), 032319.
- 原田晃, 吉武裕, 荻野弘章, “二本の梁の衝突振動”, 日本機械学会論文集 C 編, Vol. 76, No.763 (2010), pp. 483-491.
- 原田晃, 吉武裕, “強い非対称性を有する梁の衝突振動(内部共振を伴う場合も含む分数調波振動)”, 日本機械学会論文集 C 編, Vol. 79, No.798 (2013), pp. 325-339.
- 堀内敏彦, 中川正紀, 笠井洋昭, “一次元配列の棒群の衝突振動解析”, 日本機械学会論文集 C 編, Vol. 59, No.559 (1993), pp. 650-657.
- 井上順吉, 松下修己, 機械力学 I -線形実践振動論- (2002), p.180, 理工学社.
- 伊藤彰浩, 川崎瑠衣, 藤谷秀雄, “セミアクティブ制御免振構造のリアルタイム・ハイブリッド実験の有効性”, 日本建築学会構造系論文集, Vol. 663, No.663, (2011), pp.891-pp.897.
- Imre, S. and Brazis, F., The generalized quantum database search algorithm, *Computing*, Vol.73(3), (2004), pp.245-269.
- 石田幸男, 山本敏男, “非線形ばね特性を持つ二自由度係数励振系の内部共振現象: 第一報, 分数係数励振振動について”, 日本機械学会論文集 C 編, Vol. 52, No.474 (1986), pp. 648-656.
- 今村仁, “衝突振動系の周期解の厳密な導出: 初期値補正周期化法の提案”, 日本機械学会論文集 C 編, Vol. 70, No.695 (2004), pp. 1914-1921.
- JIS G 0583, “鋼管の自動渦電流探傷検査方法”, (2012).
- 上坂吉則, “量子コンピュータの基礎数理”, (2000), コロナ社.

- 小竹茂夫, 花井宏旭, 鈴木泰之, “一振動子に結合された内部共振二体小振動子間エネルギー移動を操作する波動アルゴリズム”, 日本機械学会論文集 C 編, Vol. 77, No. 781 (2011), pp. 3337-3349.
- 小泉邦雄, 横山泰男, “衝突振動をするハンマ (第 2 報) : 最適設計法”, 精密機械, Vol. 49, No.11 (1983), pp. 1517-1521.
- 長松昭男, モード解析入門, (1993), p.102, コロナ社.
- Long, G. L., Grover algorithm with zero theoretical failure rate, *Physical Review A*, Vol. 64 (2001), 022307.
- Long, G. L., Chang, C. T., Song, L. Y., Zhang, W. L., and Yan, H. Y., An SO(3) picture for quantum searching, *Journal of Physics A*, Vol.34, (2001), pp.861-866.
- Luo, G. W., Lv, X. H., and Zhu, X. F., Dynamics of vibro-impact mechanical systems with large dissipation, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol.50 (2008), pp.214-232.
- Lamba, H. and Budd, C., “Scaling of Lyapunov Exponents at Nonsmooth Bifurcations”, *Physical Review E*, Vol. 50, No. 50(1994), pp. 84-90.
- 松本幸人, 土井文夫, 背戸一登, 多連ビル構造物のアクティブ振動制御, 日本機械学会論文集 C 編, Vol. 64, No. 624 (1998), pp. 2840-2846.
- 森下信, “セミアクティブ制振システム”, 計測と制御, Vol. 38, No. 8, (1998), pp.541-pp.545.
- 美多勉, H ∞ 制御” (1994), 昭晃堂.
- 前澤成一郎, 渡辺武, “履歴特性を持つ物体の定常衝突振動の解析”, 日本機械学会論文集, Vol. 41, No.342 (1975), pp. 420-431.
- Meirovitch, V. K., *Method of analytical dynamics* (1970), 2, 3, 4, McGraw-Hill.
- 長松昭男, 大熊政明, 部分構造合成法 (1991), p.103, 培風館.
- 長松昭男, モード解析入門 (1993), p.123, コロナ社.
- 中井幹雄, 北野幸彦, “はつ弦の減衰特性に関する研究”, 日本機械学会論文集 C 編, Vol. 50, No.458 (1984), pp. 1774-1782.
- 長嶺拓夫, 佐藤勇一, 森博輝, “複数振動子と支持系の連成振動”, 日本機械学会論文集 C 編, Vol. 74, No. 739 (2008), pp. 554-561.
- Nayfer, A. H., *Nonlinear interactions* (2000), John Wiley & Sons, Inc.
- Newman, M., “Some Results on Roots of Unity, with an Application to a Diophantine Problem”, *Aequationes Mathematicae.*, Vol.2, (1969) pp.163-166.
- Nodmark, A. B., “Non-Periodic Motion Caused by Grazing Incidence in an Impact Oscillator”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 145, No. 2(1991), pp. 279-297.
- Nodmark, A. B., “Effects due to Low Velocity Impact in Mechanical Oscillators”, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, Vol. 2, No. 3(1992), pp. 597-605.
- 野波健蔵, 田宏奇, スライディングモード制御—非線形ロバスト制御の設計理論— (1994), コロナ社.
- Nucera, F., Vakakis, A. F., McFarland, D. M., Bergman, L. A. and Kerschen. G., “Targeted Energy Transfers in Vibro-Impact Oscillators for Seismic Mitigation”, *Nonlinear Dynamics*, Vol. 50 (2007), pp. 651-677.
- 西村正治, 伊勢史郎, アクティブノイズコントロール (2006), コロナ社.
- 大島明男, 藤井弘之, 土井文夫, 背戸一登, 長大橋主塔模型構造物の多モード振動制御 (低次元物理モデル作成法および, 簡易ロバスト制御法による四次モードまでの制御), 日本機械学会論文集 C 編, Vol. 64, No. 627 (1998), pp. 4224-4230.
- 尾崎武二, 宇野原信行, “腐食双極電極の交流インピーダンス法による鉄の腐食速度測定”, 日本化学会誌, No.4, (1985), pp.655-pp.660.
- Patel, A. D., Wave Algorithm: Optimal Database Search: Wave and Catalysis, *International Journal of Quantum Information*, Vol.4, (2006), pp.815-825.
- Razi, P. and Taheri, F., ‘A vibration-based strategy for health monitoring of offshore pipelens’ girth-welds’, *Sensors*, 14, (2014), pp.17174pp.17191.

- 背戸一登, 振動制御の現状, 計測と制御, Vol. 28, No. 8 (1989), pp. 67-74.
- 高田宗一郎, 小竹茂夫, 鈴木泰之, “一振動子に結合された内部共振衝突振動系に現れる周期的な完全概周期振動の波動アルゴリズムによる解析 (釣合位置で完全弾性衝突する場合)”, 日本機械学会論文集 C 編, Vol. 77, No. 773 (2011), pp. 14-27.
- 高田宗一郎, 小竹茂夫, 鈴木泰之, “一振動子に結合された二体衝突振動系の内部共振によるエネルギー移動に起因した周期的な Graze 現象”, 日本機械学会論文集 C 編, Vol. 77, No. 777 (2011), pp. 1911-1925.
- 高田宗一郎, 小竹茂夫, 鈴木泰之, 端部可動振動子を有する等質量二自由度系の同相一逆相状態間遷移, 日本機械学会論文集, Vol. 82, No. 835 (2016), pp. 1-13.
- 田島清ひろ, 振動の工学 (1970), p.181-190, 産業図書.
- 土谷武士, 江上正, 現代制御工学 (1991), p.141-p.158.
- 卵西裕之, 石川昌己, 大谷靖弘, “ガイド波を用いた配管腐食検査技術”, NKK 技法, No.177, (2002), pp.38-pp.42.
- Vakakis, A. F., Gendelman, O. V., Bergman, L. A., MaFarland, D. M., Kerschen, G. and Lee, Y. S., *Nonlinear Targeted Energy Transfer in Mechanical and Structural Systems*, (2008), Springer.
- Vakakis, A. F. et al., *Nonlinear targeted energy transfer in mechanical and structural systems* (2009), Springer.
- Vakakis, A. F., Manevitch, L. I., Mikhlin, Y. V., Pilipchuk, V. N., and Zevin, A. A., *Normal Modes and Localization in Nonlinear Systems*, (1996), John Wiley & Sons, Inc.
- Widrow, B. and Sterns, S. D., *Adaptive Signal Processing* (1985), Prentice-Hall.
- 安田仁彦, 山本敏男, 加藤正義, “多自由度非線形振動系の内部共振: 固有振動数が $p_1+p_2=p_3$ および $2p_1+p_2=p_3$ の関係を満たす場合”, 日本機械学会論文集 C 編, Vol. 52, No.474 (1986), pp. 639-647.
- 山本敏男, 安田仁彦, “二自由度非線形振動系の内部共振について: 固有振動数比が 1:2 のときの低速の共振点付近の強制振動”, 日本機械学会論文集, Vol. 42, No. 358 (1976), pp. 1692-1700.
- 山本敏男, 安田仁彦, 長坂今夫, “二自由度非線形振動系の内部共振について: 固有振動数比が 1:2 のときの高速の共振点付近の強制振動”, 日本機械学会論文集, Vol. 43, No. 365 (1977), pp. 105-113.
- 山本敏男, 安田仁彦, 長坂今夫, “二自由度非線形振動系の内部共振について: 固有振動数比が 2:3 の場合”, 日本機械学会論文集, Vol. 45, No.389 (1979), pp. 1-11.
- 山内恭彦, “回転群とその表現”, (1957), p83,岩波書店.
- 横山誠, Hedrick, J. K., 外山茂浩, “セミアクティブサスペンションのスライディングモード制御”, 日本機械学会論文集 C 編, Vol. 67, No.657, (2001), pp.1449-pp.1454.
- 葉建瑞, 安田仁彦, “1:1:1 の内部共振の条件を満たす三自由度系の非線形振動解析”, 日本機械学会論文集 C 編, Vol. 63, No.613 (1997), pp. 2967-2975.

付 録

A. 振動のエネルギー移動を利用した既設構造物のセンシング

A・1 問題設定

本研究で提案するセンシング法のシステム構成図を図 A.1 に示す。主系となる既設構造物は、初期の諸元(弾性係数、密度、断面形状)が既知であると仮定する。主系に対し、二つの副系 1, 2 を設置する。副系 1, 2 は主系を介し、両者の間で振動のエネルギー移動が生じるよう設計する。主系の老朽化に伴い、副系間の振動エネルギー移動の状態が変化し、これをセンサーによって検出する。本センシング法の設計では副系の設計方法、すなわち副系の質量とばね定数を求めることが課題となる。

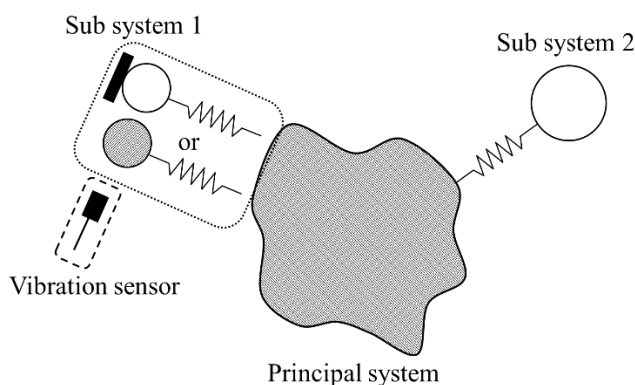


Fig.A.1 Schematic figure of propose deterioration sensing system.

副系は大別して二つの構成を考える。一つは衝突振動を用いた方法であり、もう一つは特殊振動子を用いた方法である。衝突振動を用いた方法では、副系 1 は周期的に完全弾性衝突を受ける。この時、副系 1 と副系 2 の固有角振動数を一致させる。一方、特殊振動子を用いた方法では、副系 1 と副系 2 の固有角振動数は異なり、主系と副系 2 からなる部分系の固有角振動数の一方と副系 1 の固有角振動数を一致させる。いずれの場合も、副系 1 に振動センサーを設置し、時刻歴を計測する。副系 1 では振動のエネルギー移動に伴い、大きな振幅が発生するため振動計測が容易になる。副系 1, 2 間において、振動のエネルギー移動を発生させるメカニズムには、本文中 3 章, 4 章, 5 章で定式化した衝突振動モデル、および 2 章において概説した Grover の提案した線形振動モデルの解析結果を用いる。

A・2 モードモデルを用いた主系の等価 1 自由度モデル化とエッセンシャルモデルの導出

一般に主系は、梁、棒、円筒殻などの構造部材から構成される。構造部材は連続体であるため、無限の数の固有モードが生じる。他方、各固有モードに対応する周波数帯域近傍では、各々のモードに対応するモード等価質量とモード等価剛性を定義することにより、等価 1 自由度系に近似することができる。等価 1 自由度系は本文中の振動モデルにおける大振動子に対応する。以後、この等価 1 自由度系をモードモデルと呼ぶ。

主系のモードモデルを用いて、センシングシステムを構成した場合のエッセンシャルモデルの概念図を図 A.2 に示す。図 A.2 では、主系を円筒殻にした場合を示している。図左にはシステム構成図、右に後述するモードモデルを用いたエッセンシャルモデルを示す。ここでは、円筒殻の減肉検知を考え、主系の面内曲げ変形モードを対象としたモードモデルを用いる。円筒には副

系 1, 2 が対称配置で設置される. 面内曲げ変形モードに対応するモード等価質量, モード等価剛性より定義される等価 1 自由度系を定義すると, 副系 1, 2 はモードモデルに対し並列に接続される. 以上のように定義された図 A.2 右で示した 3 自由度系をエッセンシャルモデルと呼ぶ. なお, エッセンシャルモデルにおけるモードモデルは, 任意の構造物のモードに対し任意に定義することができる点に留意されたい. 例えば, 梁や弦では曲げ振動モード, 棒では縦振動モードなどを用いることができる. 主系のモード選択によって, 副系の変形の自由度を調整する必要が生じるため, センシング要件に応じて主系のモード選択をおこなう必要がある.

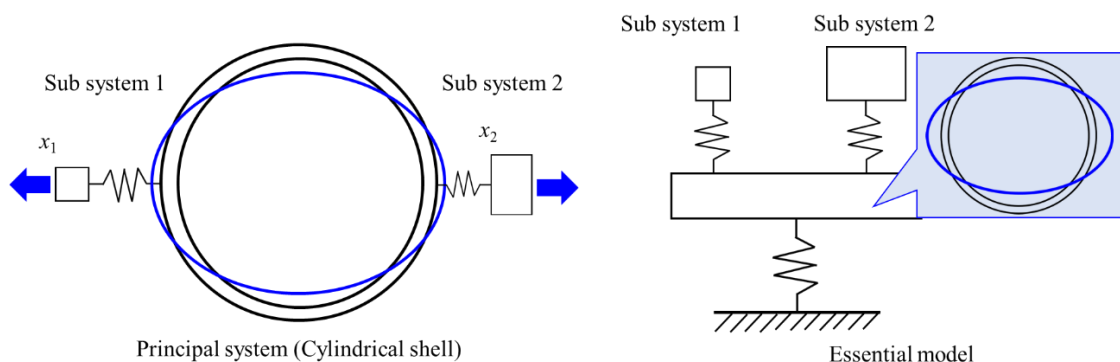


Fig.A.2 Essential model for pipe thinning detection of cylindrical shell using energy transfer between sub-system 1 and sub-system 2.

A・3 副系設計式の導出

本節では本文中の 2・3 節, 3・2 節, 3・3 節, 3・4 節, 3・5 節の議論を用いて, 副系の設計式を導出する. 最初に衝突振動を用いた場合について導出をおこない, 次いで特殊振動子を用いた場合について導出をおこなう.

A・3・1 衝突振動を用いた場合

副系の設計式を得るため, 3 章の式(3.3)を無次元化せず求めた系の固有角振動数を式(A1), 式(A2)に示す.

$$\omega_{\pm}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{k}{m} + \frac{K + (\gamma + 1)k}{M} \right) \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{k}{m} + \frac{K + (\gamma + 1)k}{M} \right)^2 - \frac{k}{m} \frac{K}{M}} \quad (\text{A1})$$

$$\omega_1^2 = \frac{k}{m} \quad (\text{A2})$$

ここで, モードモデルの等価質量を M , 等価剛性を K , 副系 1 (衝突小振動子) の質量を m , ばね定数を k , 副系 2 (非衝突小振動子) の質量を γm , ばね定数を γk , 副系間の質量比を γ とした. 式(A1), (A2)を k, m について解けば, 副系の設計式(A3), (A4)が得られる.

$$m = \frac{M}{(\gamma + 1)} \left\{ \left(p + \frac{1}{2} \right)^2 - 1 \right\} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^2 \right\} \quad (\text{A3})$$

$$k = \frac{K}{(\gamma+1)} \frac{\left\{ \left(p + \frac{1}{2} \right)^2 - 1 \right\} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^2 \right\}}{\left(p + \frac{1}{2} \right)^2 \left(\frac{1}{2} \right)^2} \quad (\text{A4})$$

ここで、 $\omega_+ = (p + 1/2)$, $\omega_- = 1/2$, p は自然数とした。

A・3・2 特殊振動子を用いた場合

エッセンシャルモデルの運動方程式を式(A5)に示す。

$$\begin{bmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \cdot m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K + k_1 + \gamma \cdot k & -k_1 & -\gamma \cdot k \\ -k_1 & k_1 & 0 \\ -\gamma \cdot k & 0 & \gamma \cdot k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A5})$$

ここで、 X は大振動子の変位、 x_1 は副系1（特殊振動子）の変位、 x_2 は副系2（小振動子）の変位、 γ は副系間質量比、 m_1 は副系1の質量、 k_1 は副系1のばね定数、 m は副系2の質量、 k は副系2のばね定数をそれぞれ表す。式(A5)において、質量比 γ が非常に大きいとし、副系1の運動方程式を無視すると、式(A5)を低次数化した運動方程式として式(A6)が得られる。

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & \gamma \cdot m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K + k_1 + \gamma \cdot k & -\gamma \cdot k \\ -\gamma \cdot k & \gamma \cdot k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A6})$$

式(A6)の固有値問題を解き、固有角振動数を求めると式(A7)が得られる。

$$\omega_{\pm}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{k}{m} + \frac{K + k_1 + \gamma \cdot k}{M} \right) \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{k}{m} + \frac{K + k_1 + \gamma \cdot k}{M} \right)^2 - \frac{k}{m} \frac{K + k_1}{M}} \quad (\text{A7})$$

式(A7)を用い、 k , m について解けば、副系の設計式(A8), (A9)が得られる。

$$m = \frac{M}{\gamma} \left\{ \left(p + \frac{1}{2} \right)^2 - 1 \right\} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^2 \right\} \quad (\text{A8})$$

$$k = \frac{K + k_1}{\gamma} \frac{\left\{ \left(p + \frac{1}{2} \right)^2 - 1 \right\} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^2 \right\}}{\left(p + \frac{1}{2} \right)^2 \left(\frac{1}{2} \right)^2} \quad (\text{A9})$$

ここで、 $\omega_+ = (p + 1/2)$, $\omega_- = 1/2$, p は自然数とした。また、副系1（特殊振動子）の固有角振動数には式(A10)は式(A7)の固有角振動数 ω と一致させることにより、式(A10)の関係式より定める。

$$k_1 = \frac{K}{4(M/m_1)(p+1/2)^2(1/2)^2 - 1} \quad (\text{A10})$$

式(A10)を用い、副系1の質量 m_1 を与えることによりばね定数 k_1 が得られる。

A・4 円筒構造物の減肉検知への適用

A・4・1 モデル化

本節では、円筒構造物の減肉検知に適用した例を記述する。円筒構造物では、縦振動、ねじり振動、面外曲げ振動、面内曲げ振動および厚み縦振動など多数の振動モードが生じるが、減肉検知の観点から、固有振動数が肉厚に比例する面内曲げ振動モードを用いるのが好適と考えられる。副系設計の便宜のため、円筒を二次元円環で近似する。面内曲げ振動における円筒部のポテンシャルエネルギー U_R と運動エネルギー T_R を式(A11)に示す。

$$U_R = \frac{EI}{2} \frac{1}{R^4} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + w \right)^2 \cdot R \cdot d\theta \quad (\text{A11})$$

$$T_R = \frac{\rho A}{2} \int_0^{2\pi} (\dot{w}^2 + \dot{v}^2) \cdot R \cdot d\theta$$

ここで、 R は円環の半径、 θ は円周方向の座標（反時計回りが正）、 w は半径方向変位（外側が正）、 v は円周方向変位（反時計回りが正）、 E は縦弾性係数、 A は断面積（円環の厚さ t と軸方向長さ L との積）、 I は断面二次モーメント（ $I = Lt^3/12$ ）、 ρ は密度である。

一方、 $\theta = \theta_j (j=1,2)$ に設置した副系のポテンシャルエネルギーを U_1, U_2 、運動エネルギーを T_1, T_2 とすると式(A12)、(A13)となる。

$$U_1 = \frac{1}{2} k_1 (x_1 - w_1)^2 \quad (\text{A12})$$

$$U_2 = \frac{1}{2} k_2 (x_2 - w_2)^2$$

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 \quad (\text{A13})$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2$$

ここで、 w_1, w_2 は $\theta = \theta_j (j=1,2)$ における円環の半径方向変位である。ここで、円環の半径方向変位は式(A14)、(A15)で表される。

$$w = a_2 \cdot \cos 2\theta + b_2 \cdot \sin 2\theta \quad (\text{A14})$$

$$v = - \left(\frac{a_2}{2} \cdot \sin 2\theta - \frac{b_2}{2} \cdot \cos 2\theta \right) \quad (\text{A15})$$

ここでは、主系となる円環の面内曲げ変形の2次モードのみ考慮している。式(A11)～(A15)を用いて、Lagrangeの運動方程式を導けば、式(A16)～式(A19)が得られる。

$$M \cdot \ddot{a}_2 + K \cdot a_2 + k_1 \cdot \cos 2\theta_1 \cdot \{a_2 \cdot \cos 2\theta_1 + b_2 \cdot \sin 2\theta_1 - x_1\} + k_2 \cdot \cos 2\theta_2 \cdot \{a_2 \cdot \cos 2\theta_2 + b_2 \cdot \sin 2\theta_2 - x_2\} = 0 \quad (\text{A16})$$

$$M \cdot \ddot{b}_2 + K \cdot b_2 + k_1 \cdot \sin 2\theta_1 \cdot \{a_2 \cdot \cos 2\theta_1 + b_2 \cdot \sin 2\theta_1 - x_1\} + k_2 \cdot \sin 2\theta_2 \cdot \{a_2 \cdot \cos 2\theta_2 + b_2 \cdot \sin 2\theta_2 - x_2\} = 0 \quad (\text{A17})$$

$$m_1 \cdot \ddot{x}_1 + k_1 \cdot \{x_1 - (a_2 \cdot \cos 2\theta_1 + b_2 \cdot \sin 2\theta_1)\} = 0 \quad (\text{A18})$$

$$m_2 \cdot \ddot{x}_2 + k_2 \cdot \{x_2 - (a_2 \cdot \cos 2\theta_2 + b_2 \cdot \sin 2\theta_2)\} = 0 \quad (\text{A19})$$

ここで、 $M = 5\pi\rho RA/4$ 、 $K = 9EI\pi R^3$ とした。ここで、副系1、2の設置角をそれぞれ $\theta_1 = 0$ 、 $\theta_2 = \pi$ とすると、運動方程式は式(A20)となる。

$$\begin{bmatrix} M & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{a}_2 \\ \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{b}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K+k_1+k_2 & -k_1 & -k_2 & 0 \\ -k_1 & k_1 & 0 & 0 \\ -k_2 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ x_1 \\ x_2 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A20})$$

式(A20)は、式(3・1)、式(A5)の運動方程式を内在し、副系の設計問題はA・3に帰着する。

A・4・2 設計曲線

副系1、2の質量、ばね定数の口径別の設計曲線を図A3、図A4に示す。図A3は衝突振動を用いた場合、図A4は特殊振動子を用いた場合をそれぞれ示す。

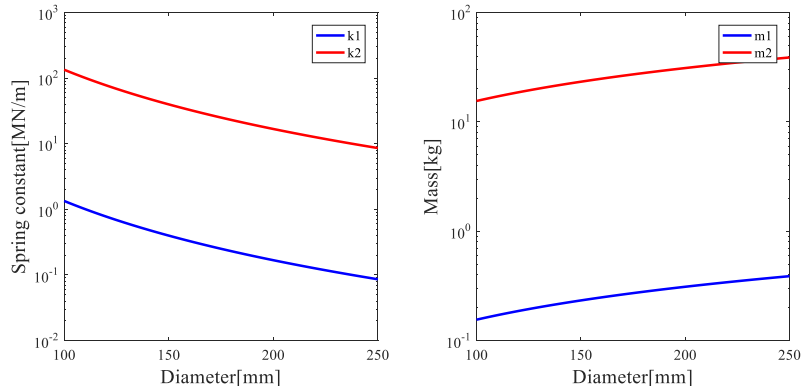


Fig.A.3 Design curve of sub-system parameters in case of impact oscillation. Left shows the spring constant, right shows the mass. Blue solid line shows parameter of sub-system1, red solid line shows the parameter of sub-system2, respectively.

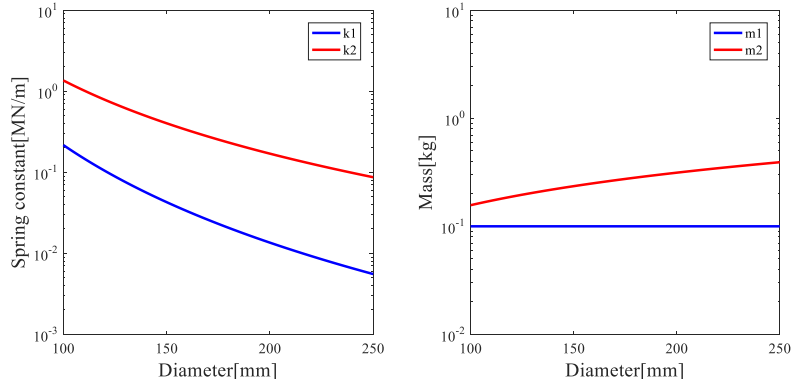


Fig.A.4 Design curve of sub-system parameters in case of special oscillator. Left shows the spring constant, right shows the mass. Blue solid line shows parameter of sub-system1, red solid line shows the parameter of sub-system2, respectively.

図中横軸は口径，縦軸はばね定数，質量をそれぞれ表している．計算条件は縦弾性係数 $E = 160\text{GPa}$ ，密度 $\rho = 7100\text{kg/m}^3$ ，肉厚 $t = 6\text{mm}$ ，長さ $L = 1\text{m}$ とした．衝突振動を用いた場合の設計パラメータは $\gamma = 100$ ， $p = 1$ ，特殊振動子を用いた場合の設計パラメータは $\gamma = 100$ ， $p = 1$ とした．

A・4・3 検出性能

本節では数値計算を用い，減肉検知性能に関するシミュレーションをおこなう．最初に衝突振動を用いた場合について検討する．初期肉厚 $t = 6\text{mm}$ とした場合に，肉厚 $t' = 4.5\text{mm}$ に減肉した場合の時刻歴応答の変化を図 A5 に示す．図上段は初期肉厚 $t = 6\text{mm}$ の場合，下段は肉厚 $t' = 4.5\text{mm}$ に減肉した場合を表す．横軸は時間，縦軸は変位を表し，黒実線は円筒殻の半径方向変位，赤実線は副系 1 の変位，青実線は副系 2 の変位をそれぞれ表している．

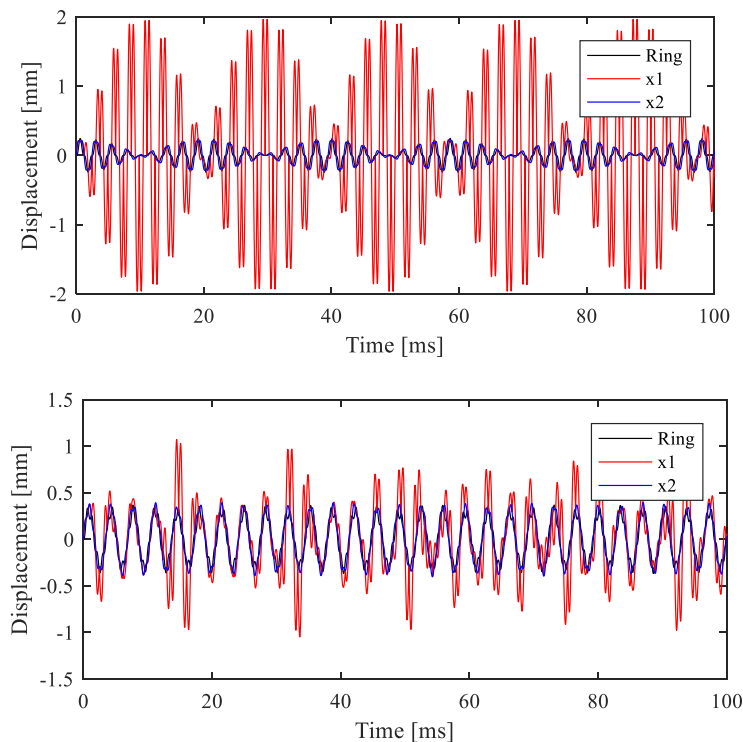


Fig.A.5 Simulation for pipe wall thinning detection in cylindrical shell in case of vibro-impact oscillation. Upper shows the time histories of normal state, lower shows the time histories of thinning state.

図より，初期肉厚 $t = 6\text{mm}$ の場合には，副系 1，2 間で明瞭な振動のエネルギー移動が観察される．他方，肉厚 $t' = 4.5\text{mm}$ に減肉した場合には振動のエネルギー移動が消失することが確認できる．減肉に伴い，系全体の固有角振動数が変化し，振動のエネルギー移動を生じさせ得るよう設計された衝突周期や主系と副系の関係が崩れたため，振動のエネルギー移動が消失する．

提案手法の有効性を示すため，固有角振動数を用いた方法と比較し，図 A6 に示す．図中横軸は減肉厚さ，縦軸は初期肉厚からの指標の変化率を表す．提案法では，センサーが副系 1 に設置されるため，500 回の衝突振動のうち最大速度の絶対値を指標とした．本図の曲線の傾きは，減肉に対する感度を表しており，提案法は減肉厚さ 1mm までの領域において，高い検出感度を有することがわかる．

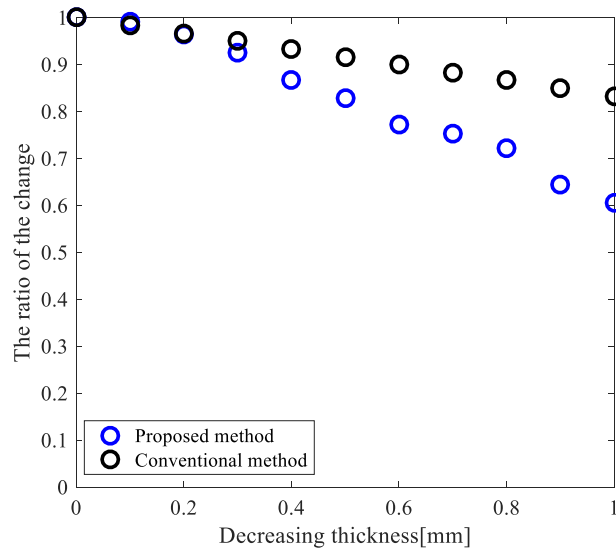


Fig.A.6 Benchmark result of pipe wall thinning detection in case of vibro-impact oscillation. Black circle shows the case of eigen frequency method, blue circle shows the case of proposed method.

次に、特殊振動子を用いた場合について検討をおこなう。先と同様に、初期肉厚 $t=6\text{mm}$ とした場合に、肉厚 $t'=4.5\text{mm}$ に減肉した場合の時刻歴応答の変化を図 A7 に示す。図上段は初期肉厚 $t=6\text{mm}$ の場合、下段は肉厚 $t'=4.5\text{mm}$ に減肉した場合を表す。横軸は時間、縦軸は変位を表し、黒実線は円筒殻の半径方向変位、赤実線は副系 1 の変位、青実線は副系 2 の変位をそれぞれ表している。

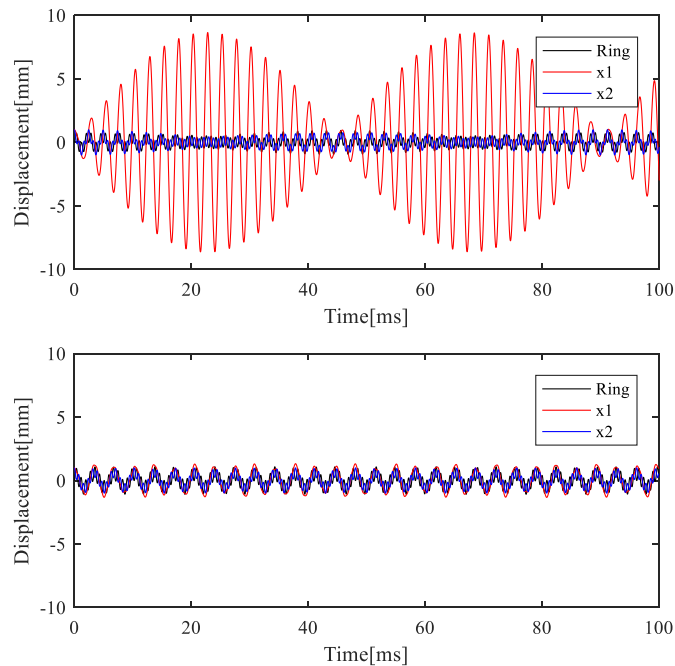


Fig.A.7 Simulation for pipe wall thinning detection in cylindrical shell in case of special oscillator. Upper shows the time histories of normal state, lower shows the time histories of thinning state.

先と同様、初期肉厚 $t = 6\text{mm}$ の場合には、副系 1, 2 間で明瞭な振動のエネルギー移動が観察されるが、肉厚 $t' = 4.5\text{mm}$ に減肉した場合には振動のエネルギー移動が消失することが確認できる。

固有角振動数を用いた方法と比較したベンチマーク結果を図 A8 に示す。図中横軸は減肉厚さ、縦軸は初期肉厚からの指標の変化率を表す。提案法では、センサーが副系 1 に設置されるため、最大変位の絶対値を指標とした。減肉厚さ 1mm までの領域において、固有角振動数法と比較して、高い検出感度を有することがわかる。以上により、衝突振動を用いた場合、特殊振動子を用いた場合の双方において、提案法の有効性を確認できる。

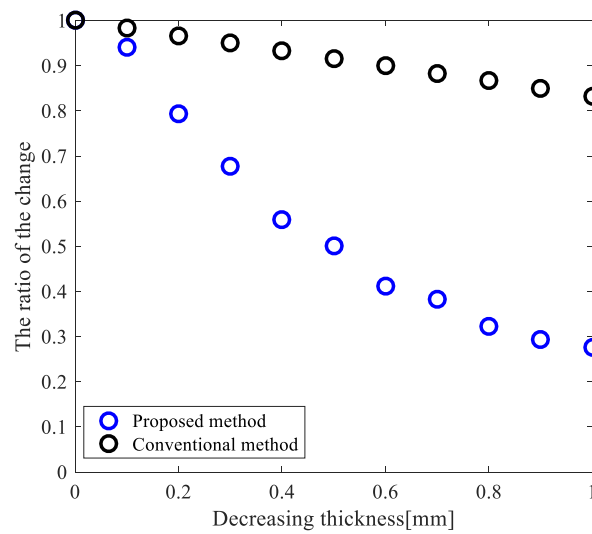


Fig.A.8 Benchmark result of pipe wall thinning detection in case of special oscillator. Black circle shows the case of eigen frequency method, blue circle shows the case of proposed method.

A・5 梁構造物の減肉検知への適用

A・5・1 モデル化

本節では、梁構造物の減肉検知に適用した例を記述する。梁構造物では、縦振動、曲げ振動、ねじり振動および厚み縦振動が生じる。減肉検知の観点から、固有振動数が肉厚に依存する曲げ振動モードを採用する。

対象とする系のモデルを図 A.9 に示す。梁の軸方向座標を x 、鉛直軸方向たわみを $y(x, t)$ で表す。軸方向座標 x_1^* および x_2^* において、副系 1, 2 のばね質量系が設置される。梁の曲げ振動に対する運動エネルギー T_B とポテンシャルエネルギー U_B は式(A21)、式(A22)で与えられる。

$$T_B = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 \cdot dx \quad (\text{A21})$$

$$U_B = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (A22)$$

ここで、 E は縦弾性係数、 A は断面積、 I は断面二次モーメント ($I=bt^3/12$)、 b は梁の幅、 ρl は密度である。

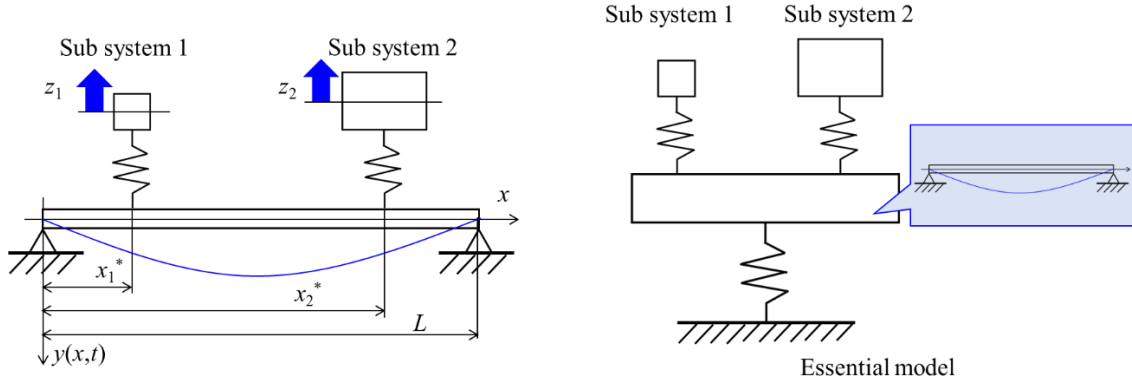


Fig.A.9 Essential model of thinning detection of simply supported beam using energy transfer between sub-system 1 and sub-system 2

一方、副系 1, 2 の運動エネルギー T_1 , T_2 およびポテンシャルエネルギー U_1 , U_2 は式(A23), 式(A24)で表される。

$$U_1 = \frac{1}{2} \cdot k_1 \cdot (z_1 - y(x_1^*))^2 \quad (A23)$$

$$U_2 = \frac{1}{2} \cdot k_2 \cdot (z_2 - y(x_2^*))^2$$

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 \dot{z}_1^2 \quad (A24)$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 \dot{z}_2^2$$

ここで、副系 1, 2 の変位を z_1 , z_2 で表す。梁の曲げ振動の 1 次モードのみを考慮すると、梁のたわみは式(A25)で表される。

$$y(x) = Y \cdot \sin\left(\frac{\pi}{L} x\right) \quad (A25)$$

ここでは梁の境界条件は両端単純支持を考慮した。なお、厳密な固有振動解析では、ばね質量は力学的境界条件を満たすよう取り扱わなければならない。本節のモデルは近似モデルであることに注意する。式(A21)から式(A25)を用い、Lagrange 方程式を導くと式(A26)になる。

$$\begin{bmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 \\ 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{Y} \\ \ddot{z}_1 \\ \ddot{z}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K + k_1 \sin^2\left(\frac{\pi}{L}x_1^*\right) + k_2 \sin^2\left(\frac{\pi}{L}x_2^*\right) & -k_1 \sin\left(\frac{\pi}{L}x_1^*\right) & -k_2 \sin\left(\frac{\pi}{L}x_2^*\right) \\ -k_1 \sin\left(\frac{\pi}{L}x_1^*\right) & k_1 & 0 \\ -k_2 \sin\left(\frac{\pi}{L}x_2^*\right) & 0 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A26})$$

ここで、梁の等価質量 $M = \rho AL/2$ 、等価剛性 $K = EI(\pi/L)^4 L/2$ である。

A・5・2 副系の設計

本節では、特殊振動子を用いた方法について検討する。式(A26)は A・3 と運動方程式が異なっているが、同様な手順で副系 1, 2 の質量とばね定数の設計式を得る事ができる。

式(A26)を低次数化すると、運動方程式は式(A27)となる。

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{Y} \\ \ddot{z}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K + k_1 \sin^2\left(\frac{\pi}{L}x_1^*\right) + k_2 \sin^2\left(\frac{\pi}{L}x_2^*\right) & -k_2 \sin\left(\frac{\pi}{L}x_2^*\right) \\ -k_2 \sin\left(\frac{\pi}{L}x_2^*\right) & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A27})$$

ここで $m_2 = \gamma m$ 、 $k_2 = \gamma k$ を代入し、式(A27)の固有値問題を解いて固有角振動数を求めると式(A28)を得る。

$$\omega_{\pm}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{k}{m} + \frac{K + k_1 \cdot \sin^2(\pi x_1^*/L) + \gamma \cdot k \cdot \sin^2(\pi x_2^*/L)}{M} \right) \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{k}{m} + \frac{K + k_1 \cdot \sin^2(\pi x_1^*/L) + \gamma \cdot k \cdot \sin^2(\pi x_1^*/L)}{M} \right)^2 - \frac{k}{m} \frac{K + k_1 \cdot \sin^2(\pi x_1^*/L)}{M}} \quad (\text{A28})$$

式(A28)より k 、 m について解けば、副系の設計式(A29)、(A30)が得られる。

$$m = \frac{M}{\gamma \sin^2(\pi x_2^*/L)} \left\{ (p+1/2)^2 - 1 \right\} \left\{ 1 - (1/2)^2 \right\} \quad (\text{A29})$$

$$k = \frac{K + k_1 \cdot \sin^2(\pi x_1^*/L)}{\gamma \cdot \sin^2(\pi x_2^*/L)} \frac{\left\{ (p+1/2)^2 - 1 \right\} \left\{ 1 - (1/2)^2 \right\}}{(p+1/2)^2 (1/2)^2} \quad (\text{A30})$$

ここで、 $\omega_+ = (p+1/2)$ 、 $\omega_- = 1/2$ 、 p は正整数とした。また、副系 1 (特殊振動子) の固有角振動数は式(A28)の固有角振動数 ω と一致させることにより、式(A31)の関係式より定める。

$$k_1 = \frac{K}{4(M/m_1)(p+1/2)^2 (1/2)^2 - \sin^2(\pi x_2^*/L)} \quad (\text{A31})$$

式(A31)を用い、副系 1 の質量 m_1 を与えることによりばね定数 k_1 が得られる。

A・5・3 検出性能

本節では数値計算を用い、減肉検知性能に関するシミュレーションをおこなう。計算条件は縦弾性係数 $E = 210\text{GPa}$ 、密度 $\rho = 7800\text{kg/m}^3$ 、肉厚 $t = 6\text{mm}$ 、幅 $b = 20\text{mm}$ 、長さ $L = 1\text{m}$ とした。副系 1 の設置位置 $x_1^* = 0.25\text{m}$ 、副系 2 の設置位置 $x_2^* = 0.75$ 、設計パラメータは $\gamma = 100$ 、 $p = 1$ とした。

初期肉厚 $t = 6\text{mm}$ とした場合に、肉厚 $t' = 4.5\text{mm}$ に減肉した場合の時刻歴応答の変化を図 A10 に示す。図上段は初期肉厚 $t = 6\text{mm}$ の場合、下段は肉厚 $t' = 4.5\text{mm}$ に減肉した場合を表す。横軸は時間、縦軸は変位を表し、黒実線は梁のたわみ、赤実線は副系 1 の変位、青実線は副系 2 の変位をそれぞれ表している。

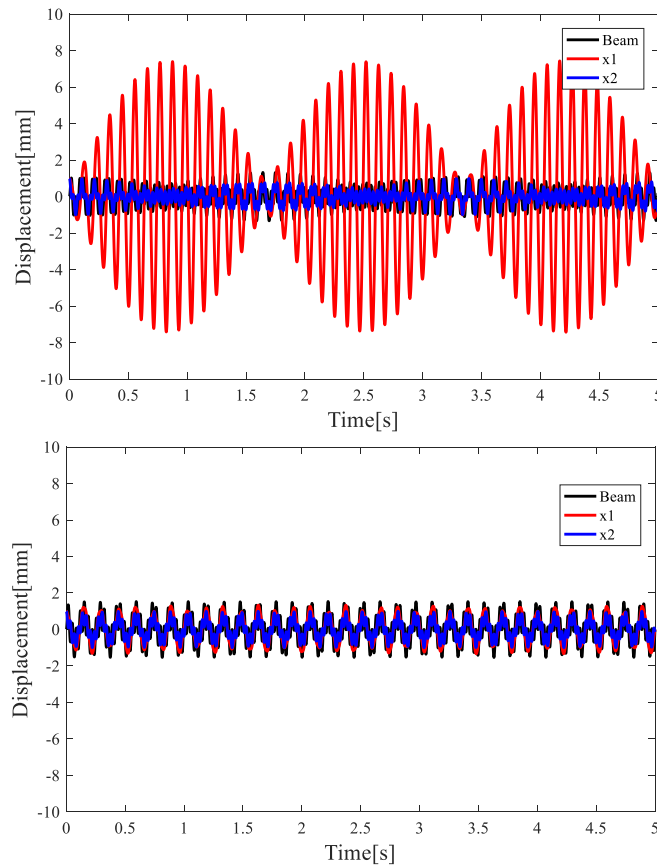


Fig.A.10 Simulation for thinning detection in beam in case of special oscillator. Upper shows the time histories of normal state, lower shows the time histories of thinning state.

初期肉厚 $t = 6\text{mm}$ の場合には、副系 1, 2 間で明瞭な振動のエネルギー移動が観察されるが、肉厚 $t' = 4.5\text{mm}$ に減肉した場合には振動のエネルギー移動が消失することが確認できる。

固有角振動数を用いた方法と比較したベンチマーク結果を図 A11 に示す。図中横軸は減肉厚さ、縦軸は初期肉厚からの指標の変化率を表す。提案法では、センサーが副系 1 に設置されるため、最大変位の絶対値を指標とした。減肉厚さ 1mm までの領域において、固有角振動数法と比較して、高い検出感度を有することがわかる。

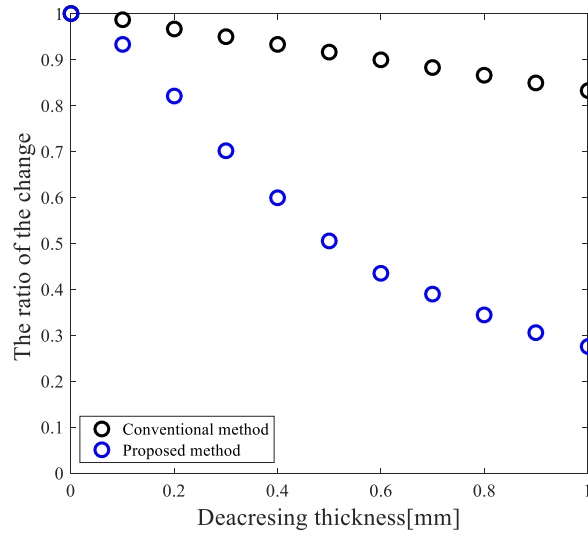


Fig.A.11 Benchmark result of beam wall thinning detection in case of special oscillator. Black circle shows the case of eigen frequency method, blue circle shows the case of proposed method.