

特異点が存在する曲線と曲面の全曲率について

竹内 洋介¹・田中 健雄²・新田 貴士³

Some examples for total curvatures of curves and surfaces with singularities

Yosuke TAKEUCHI, Takeo TANAKA and Takashi NITTA

要旨

本研究を進めるにあたり、「小林昭七著：曲線と曲面の微分幾何（改訂版）」（裳華房）と「梅原雅顕, 山田光太郎著：曲線と曲面 -微分幾何的アプローチ-」（裳華房）を用いて曲線曲面論を学習した。その中で閉曲線と閉曲面の全曲率に注目した。閉曲線の全曲率は曲率を求めたのち、積分をすることで計算できる。しかし、閉曲線を複素数平面上に表示し、留数定理を用いることで容易に計算することができると考え、本研究に至った。その結果、複素数平面上の閉曲線 $\gamma(\theta)$ の全曲率は、 $\dot{\gamma}(\theta) = 0$ の解の大きさによって定まる関係を見つけた。また、閉曲面は回転面に限定し、回転軸と回転させる曲線が交わることで全曲率がどのようになるのかを計算した。

本論文⁴について、竹内の論文「複素数を用いた平面曲線の全曲率の考察」と田中の論文「曲線の変形における全曲率の変化」を1つにまとめたものである。全5章の構成のうち、2章と3章は竹内の研究成果を、4章と5章は田中の研究成果をまとめた。1章では曲線と曲率の定義、そして閉曲線と全曲率の定義について触れ、さらに複素数を用いて計算するために留数定理を、本研究を進めるにあたっての準備として説明している。2章,3章では平面曲線の全曲率について、複素数を用いることの利便性と簡単な関数について定理を考え、さらに一般の閉曲線とその全曲率との関係を複素数を用いて説明した。4章では特異点をもつ平面曲線を特異点をもたない空間曲線として実現させることを考える。そして5章では閉曲面を回転面に限定し、全曲率を計算している。通常では回転面は回転軸と回転させる曲線が交わらないように設定するが、本論文では回転軸と曲線が交わるような回転面も考えていく。

序文

17世紀に微分積分が発展して以来、曲線曲面の研究は進んできた。さらに19世紀には測量に興味を持った Carolus Fridericus Gauss により曲面論が創始され、ガウス・ボンネの定理の発見など更に発展してきた。現代においてもコンピューター技術の発展により、コンピューターグラフィックなどに応用され、関心が広がっている。そして、曲線曲面論の中でも重要な考え方の1つとして曲率というものがあり、これは簡潔に説明すると、曲線曲面の曲がり具合を数値で表したものである。更に、閉曲線や閉曲面においては曲率を積分により計算して算出される全曲率というものがあり、この数値を知ることによって曲線曲面の回転の数を知ることができる。しかし、この全曲率という数値は一般では全体的になめらかな曲線や曲面で考えられており、なめらかでない点を含んだ曲線曲面ではあまり考えられていない。そのようななめらかでない点(特異点)を含む曲線曲面の全曲率について平面上と空間上に分け、様々な場合を考察する。

¹ 三重大学教育学部

² 三重大学教育学部

³ 三重大学教育学部

⁴ この論文は全て竹内, 田中の仕事であり、彼らの論文をまとめたものである。新田は修士論文の指導にあたった。

1 準備

本章では、本研究における必要な知識を準備として述べる．詳しくは小林 [1] 及び梅原・山田 [2] を参照のこと．

1.1 曲線と曲率

まず、今回の研究における基礎知識として曲線の定義について触れていく．

定義 1.1 $a, b \in \mathbb{R}$ に対し、 $I = [a, b]$ と定める．写像

$$\begin{array}{ccc} \gamma: I & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \psi & & \psi \\ t & \mapsto & \gamma(t) \end{array}$$

の像 $\{\gamma(t) \mid t \in I\}$ のことを曲線という．このとき、 $\gamma(t)$ は C^∞ 級であるとする．

このとき、曲線の関数は $\gamma(t) = (f(t), g(t))$ であるとし、 $\gamma(t)$ を t に関して微分したものを $\dot{\gamma}(t)$ と表すことにする． $\gamma(t)$ における t をパラメータ(助変数)といい、本研究を進めるため、曲率を求める必要があるが、これを求める際にこのパラメータを曲線の長さ、つまり弧長に変換した弧長パラメータを使って表示する．弧長パラメータの定義は以下のとおりである．

定義 1.2 $a, b \in \mathbb{R}$ に対し、 $\gamma(t) (a \leq t \leq b)$ で表される曲線の長さを $s (= \int_a^t |\dot{\gamma}(t)| dt)$ としたとき、この曲線は

$$\gamma(s) \quad (0 \leq s \leq l, \quad l = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt)$$

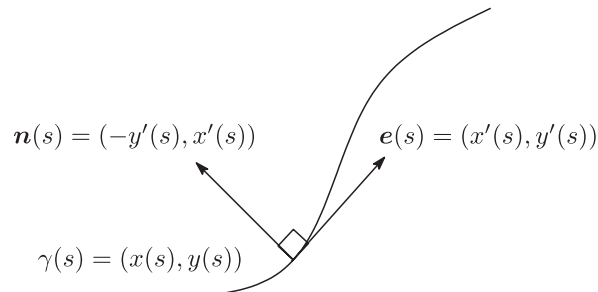
と表すことができる．このときの変数 s を弧長パラメータという．

弧長パラメータをもつ曲線 $\gamma(s)$ に対し、

$$\gamma'(s) = \frac{d\gamma}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{d\gamma}{dt} \frac{1}{\frac{ds}{dt}} = \frac{\dot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t)|}$$

より、速度ベクトル(接ベクトル) $\gamma'(s)$ の大きさ $|\gamma'(s)|$ は 1 となる．また、弧長パラメータで表示された曲線 $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ において、単位接ベクトルと単位法線ベクトルをそれぞれ $\mathbf{e}(s)$ 、 $\mathbf{n}(s)$ としたとき、

$$\begin{aligned} \mathbf{e}(s) &= (x'(s), y'(s)) = \gamma'(s) \\ \mathbf{n}(s) &= (-y'(s), x'(s)) \end{aligned}$$



と表すことができる．また、 $|\gamma'(s)| = 1, \gamma'(s) \cdot \gamma'(s) = |\gamma'(s)|^2$ より、

$$\gamma'(s) \cdot \gamma'(s) = 1$$

であり、この式の両辺を s で微分すると、

$$2\gamma'(s) \cdot \gamma''(s) = 0$$

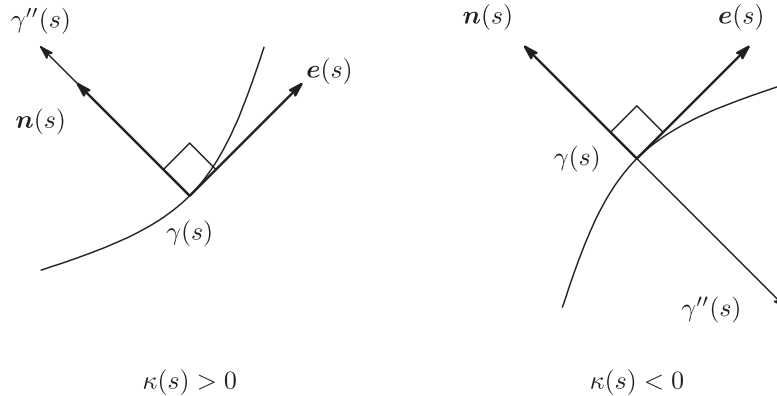
である. これにより $\gamma'(s)$ と $\gamma''(s)$ の内積は 0 であるということが分かり, $\gamma''(s)$ は $\gamma'(s)$ に直交するので, $\gamma''(s)$ は $\mathbf{n}(s)$ の定数倍のベクトルである. つまり, 定数 $\kappa(s)$ を用いて $\gamma''(s)$ を $\mathbf{n}(s)$ で表すことができる. このとき $\kappa(s)$ を曲率といい, 以下の通りに定義する.

定義 1.3 s を弧長パラメータとする $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ に対し,

$$\gamma''(s) = \kappa(s)\mathbf{n}(s)$$

を満たす定数 $\kappa(s)$ を曲率という.

この曲率 $\kappa(s)$ が正であれば, 曲線はその周りで左曲がりであり, 負であれば右曲がりとなる. 0 であればその周りで直線となっている.



また, $\mathbf{n}(s) = (-y'(s), x'(s))$ について,

$$\det(\mathbf{e}(s), \mathbf{n}(s)) = \{x'(s)\}^2 + \{y'(s)\}^2 = 1$$

となるので,

$$\begin{aligned} \det(\gamma'(s), \gamma''(s)) &= \det(\mathbf{e}(s), \kappa(s)\mathbf{n}(s)) \\ &= \kappa(s) \det(\mathbf{e}(s), \mathbf{n}(s)) = \kappa(s) \end{aligned}$$

したがって, 曲率 $\kappa(s)$ は $\gamma(s)$ を用いて,

$$\kappa(s) = \det(\gamma'(s), \gamma''(s))$$

と表すことができる. さらに, 弧長でないパラメータ t で表された曲線 $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ について,

$$\begin{aligned} \gamma'(s) &= \frac{\dot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t)|} \\ \gamma''(s) &= \frac{d}{ds} \frac{\dot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t)|} = \frac{dt}{ds} \frac{d}{dt} \frac{\dot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t)|} \\ &= \frac{1}{|\dot{\gamma}(t)|} \left\{ \frac{\ddot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t)|} + \left(\frac{d}{dt} \frac{1}{|\dot{\gamma}(t)|} \right) \dot{\gamma}(t) \right\} \end{aligned}$$

となるので, 曲率 $\kappa(s)$ は $\gamma(t)$ を用いて

$$\begin{aligned} \kappa(s) &= \det(\gamma'(s), \gamma''(s)) \\ &= \det \left(\frac{\dot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t)|}, \frac{1}{|\dot{\gamma}(t)|} \left\{ \frac{\ddot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t)|} + \left(\frac{d}{dt} \frac{1}{|\dot{\gamma}(t)|} \right) \dot{\gamma}(t) \right\} \right) \\ &= \det \left(\frac{\dot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t)|}, \frac{\ddot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t)|^2} \right) + \det \left(\frac{\dot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t)|}, \frac{1}{|\dot{\gamma}(t)|} \left(\frac{d}{dt} \frac{1}{|\dot{\gamma}(t)|} \right) \dot{\gamma}(t) \right) \\ &= \frac{\det(\dot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(t))}{|\dot{\gamma}(t)|^3} \end{aligned}$$

と表すことができる。また、曲線が弧長 s によりパラメータ表示されている場合、曲率の定義よりフルネの公式が導き出される。フルネの公式については以下の通りである。

定理 1.1 (フルネの公式) 曲線 $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ (s は弧長パラメータであるとする) の単位接ベクトルと単位法線ベクトルをそれぞれ $e(s)$, $n(s)$ とする。このとき、次の式が成り立つ。

$$e'(s) = \kappa(s)n(s), \quad n'(s) = -\kappa(s)e(s)$$

1.2 閉曲線と全曲率

次に、今回の研究の主題である閉曲線について触れていく。閉曲線とは簡潔に説明すると 1 周して元に戻る曲線のことをいう。閉曲線の定義は以下の通りである。

定義 1.4 s を弧長パラメータとして表示された曲線 $\gamma(s)$ ($0 \leq s \leq l$) について、

$$\gamma(l) = \gamma(0), \quad \lim_{s \rightarrow +0} \gamma^{(n)}(s) = \lim_{s \rightarrow l-0} \gamma^{(n)}(s) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

が成り立つとき、 $\gamma(s)$ は閉曲線であるという。

また、閉曲線 $\gamma(s)$ ($0 \leq s \leq l$) の曲率 $\kappa(s)$ を $0 \leq s \leq l$ の範囲で積分したものを全曲率という。全曲率の定義は以下の通りである。

定義 1.5 s を弧長パラメータとする曲線 $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ ($0 \leq s \leq l$) が閉曲線であるとする。このとき $\gamma(s)$ の曲率 $\kappa(s)$ の積分

$$\mu = \int_0^l \kappa(s) ds$$

を $\gamma(s)$ の全曲率といい、全曲率 μ を 2π で割った数を $\gamma(s)$ の回転数という。

1.3 留数定理

本研究の目的は、複素数を用いて全曲率を計算することであるが、ここではその計算に必要な留数定理について説明する。まずは留数について触れておく。

定義 1.6 複素数平面上の関数 $w = f(z)$ ($z \in \mathbb{C}$) について、点 $z = \alpha$ を $f(z)$ の孤立特異点とする。また、領域 $D: (0 < |z - \alpha| < R)$ において $f(z)$ が 1 価関数であるとするとき、

$$f(z) = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{a_t}{(z - \alpha)^t} + \sum_{t=0}^{\infty} b_t (z - \alpha)^t$$

と展開することができ、このとき $\frac{1}{z - \alpha}$ の項の係数を $f(z)$ の $z = \alpha$ における留数といい、 $Res_{z=\alpha} f(z) = \lim_{z \rightarrow \alpha} (z - \alpha) f(z)$ と表す。

ここで書かれている特異点とは、関数 $f(z)$ において正則でない点であり、特異点の近傍でそれ以外の特異点を持たない場合を孤立特異点という。次に留数定理について説明する。

定理 1.2 (留数定理) 関数 $f(z)$ が単純閉曲線 C 上とその内部で、 C 内の有限個の孤立特異点 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ を除いて正則である 1 価関数であるとしたとき、次のような式が成り立ち、これを留数定理という。

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i (R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_n)$$

ここで, $R_k = \text{Res}_{z=a_k} f(z) = \lim_{z \rightarrow a_k} (z - a_k) f(z)$ とおく.

つまり, 関数 $f(z)$ の 1 周線積分は $f(z)$ 留数の総和の $2\pi i$ 倍であることがわかり, この考えを応用して本研究では全曲率を計算していく. また, 本論文では取り扱っていないが, 全曲率の計算のもう 1 つの方法として偏角の原理について触れておく.

定理 1.3 (偏角の原理) 関数 $f(z)$ が単純閉曲線 C 上とその内部で有理型関数であるとする. このとき, C の内部の $f(z)$ の零点と極の個数をそれぞれ N, P とすると次の式が成り立つ.

$$\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} = 2\pi i(N - P)$$

ただし, N, P は重複を含めて数え, C 上で $f(z) \neq 0$ であるものとする.

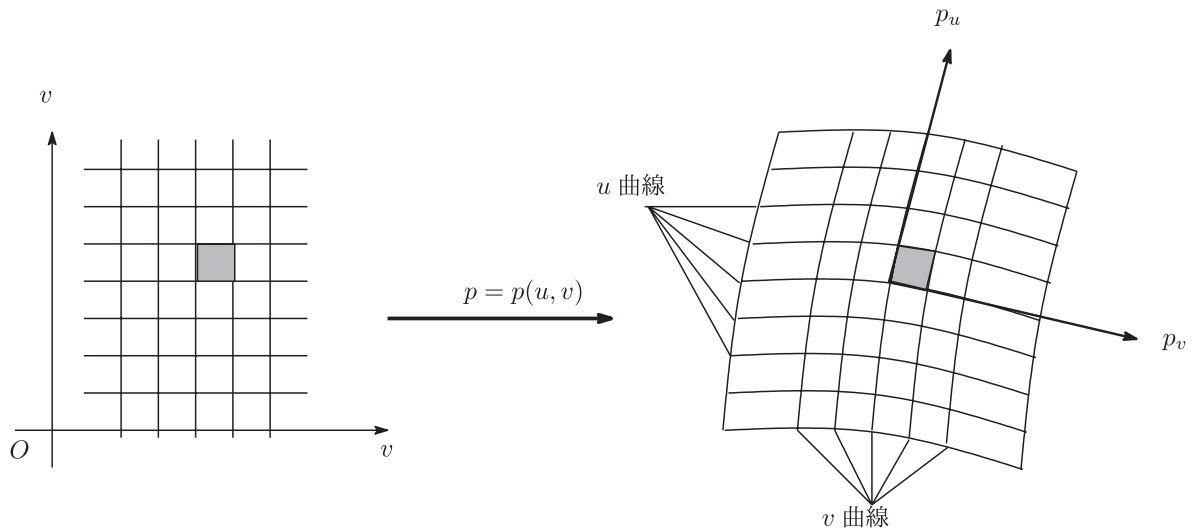
1.4 閉曲面と全曲率

次に閉曲面とその全曲率を計算するために必要なガウス曲率の定義について触れていく. 閉曲面の定義は以下の通りである.

定義 1.7 曲面を u, v をパラメータとして

$$p(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in D$$

で表す. ここで D は uv 平面の領域である. 特に境界のない曲面を閉曲面という.



$p(u, v)$ において v を 1 つ固定したときの対応 $u \mapsto p(u, v)$ によって決まる曲線を u 曲線といい, u を固定したときの対応 $v \mapsto p(u, v)$ によって決まる曲線を v 曲線という. これら 2 つの曲線の族は曲面を網のようにおおう. ベクトル $p_u(u, v)$ は u 曲線の各点での速度ベクトルを表し, ベクトル $p_v(u, v)$ は v 曲線の各点での速度ベクトルを表している. また, 点 $p(u, v)$ で曲面に接するベクトルは $p_u(u, v)$ と $p_v(u, v)$ の一次結合で表すことができる. したがって, 点 $p(u, v)$ を通りこれらの接ベクトルに平行な平面

$$\{p(u, v) + s p_u(u, v) + t p_v(u, v) | s, t \in \mathbb{R}\}$$

が曲面の接平面となり, p_u, p_v の両方に直交する単位ベクトルを ν と定義すると,

$$\nu = \frac{p_u \times p_v}{|p_u \times p_v|}$$

と表すことができる. この ν を曲面の単位法線ベクトルとよぶ. さらに, ガウス曲率については以下のよ
うに定義する

定義 1.8 曲面 $p(s)$ の接ベクトル $p_u(u, v), p_v(u, v)$ の内積で与えられる 3 つの関数

$$E = p_u \cdot p_u, \quad F = p_u \cdot p_v, \quad G = p_v \cdot p_v$$

を第一基本量といい, 曲面の単位法線ベクトルを ν としたときの 3 つの関数

$$L = p_{uu} \cdot \nu, \quad M = p_{uv} \cdot \nu, \quad N = p_{vv} \cdot \nu$$

を第二基本量という. これらを使って表される

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

となる K をガウス曲率という.

閉曲面の全曲率は, このガウス曲率を曲面上で積分することで求めることができる. さらに閉曲面の全
曲率について, 以下の定理が成り立つ.

定理 1.4 (ガウス・ボンネの定理) 閉曲面 S を三角形に分割したとき, その分割に対し $\chi(S) = (\text{頂点の数}) - (\text{辺の数}) + (\text{面の数})$ とおくと

$$\iint_S K dA = 2\pi\chi(S)$$

が成立する. ここで dA は面積要素である.

dA は第一基本量を使って

$$dA = \sqrt{EG - F^2} du dv$$

と表される. また $\chi(S)$ はオイラー数といい, g を曲面の種数とすると $\chi(S) = 2 - 2g$ となることが知ら
れている.

定理 1.5 xz 平面上の曲線

$$x = f(u), \quad z = g(u)$$

を考え, それを z 軸の周りに回転して得られる曲面は

$$x = f(u) \cos v, \quad y = f(u) \sin v, \quad z = g(u)$$

という式で与えられる. この曲面 S を回転面とする.

この回転面の全曲率は

$$\iint_S K dA = \iint_D \frac{|f(u)g'(u)(f'(u)g''(u) - f''(u)g'(u))|}{f(u)(f'(u)^2 + g'(u)^2)^{\frac{3}{2}}} du dv$$

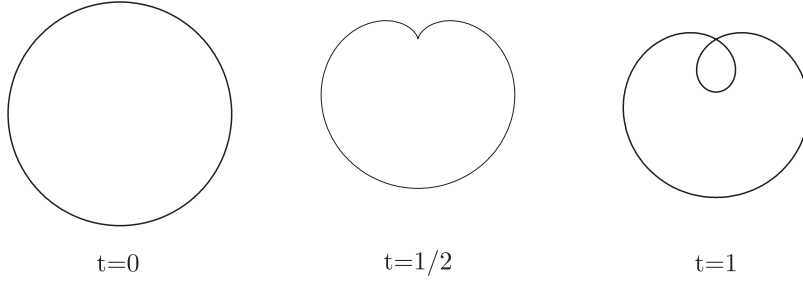
で与えられる.

2 複素数を用いた全曲率の計算

2.1 複素数と全曲率

前章 1.2 より, 閉曲線の全曲率を求めることでその曲線の回転の数を調べられることを述べた. こ
こで, 次のような特殊な例を考えてみる.

(例1) $0 \leq t \leq 1$ に対して, 曲線 $\gamma(\theta) = (1 - 2t \sin \theta)(\cos \theta, \sin \theta)$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) を考える.



このとき, t の範囲によって全曲率 μ がどのように変化しているのかを調べていく.

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}(\theta) &= (-2t \cos 2\theta - \sin \theta, -2t \sin 2\theta + \cos \theta), \\ |\dot{\gamma}(\theta)| &= \sqrt{4t^2 \cos^2 2\theta + 4t^2 \sin^2 2\theta + \sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 4t \cos 2\theta \sin \theta - 4t \sin 2\theta \cos \theta} \\ &= \sqrt{4t^2 + 1 - 4t \sin \theta} \end{aligned}$$

s ($0 \leq s \leq l$) を $\gamma(\theta)$ の弧長パラメータとするとき, 曲率 $\kappa(s)$ は

$$\begin{aligned} \ddot{\gamma}(\theta) &= (4t \sin 2\theta - \cos \theta, -4t \cos 2\theta - \sin \theta), \\ \kappa(s) &= \frac{\det(\dot{\gamma}(\theta), \ddot{\gamma}(\theta))}{|\dot{\gamma}(\theta)|^3} = \frac{8t^2 + 1 - 6t \sin \theta}{(4t^2 + 1 - 4t \sin \theta)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

となり, $\gamma(\theta)$ の全曲率 μ は

$$\begin{aligned} \mu &= \int_0^l \kappa(s) ds = \int_0^{2\pi} \frac{8t^2 + 1 - 6t \sin \theta}{(4t^2 + 1 - 4t \sin \theta)^{\frac{3}{2}}} ds d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{8t^2 + 1 - 6t \sin \theta}{(4t^2 + 1 - 4t \sin \theta)^{\frac{3}{2}}} \sqrt{4t^2 + 1 - 4t \sin \theta} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{8t^2 + 1 - 6t \sin \theta}{4t^2 + 1 - 4t \sin \theta} d\theta \end{aligned}$$

となる. ここで $t = \frac{1}{2}$ のとき, 全曲率 μ は

$$\mu = \int_0^{2\pi} \frac{8(\frac{1}{2})^2 + 1 - 6\frac{1}{2} \sin \theta}{4(\frac{1}{2})^2 + 1 - 4\frac{1}{2} \sin \theta} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{3 - 3 \sin \theta}{2 - 2 \sin \theta} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{3}{2} d\theta = 3\pi$$

となり, 簡単に求めることができる. それ以外の t の範囲では全曲率を以下の通りに求める.

$$\begin{aligned} \mu &= \int_0^{2\pi} \frac{8t^2 + 1 - 6t \sin \theta}{4t^2 + 1 - 4t \sin \theta} d\theta = 3\pi + \frac{4t^2 - 1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{4t^2 + 1 - 4t \sin \theta} d\theta \\ &= 3\pi + \frac{4t^2 - 1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{4t^2 + 1 + 4t \sin \theta'} d\theta' \quad (\theta' = \theta - \pi, \quad d\theta' = d\theta) \end{aligned}$$

ここで, $\tan \frac{\theta'}{2} = x$ とおくと, $\sin \theta' = \frac{2x}{1+x^2}$, $d\theta' = \frac{2}{1+x^2} dx$ となり, x に変換して積分すると,

$$\begin{aligned} \mu &= 3\pi + \frac{4t^2 - 1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4t^2 + 1 + 4t \frac{2x}{1+x^2}} \frac{2}{1+x^2} dx \\ &= 3\pi + \frac{4t^2 - 1}{4t^2 + 1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\left(x + \frac{4t}{4t^2+1}\right)^2 + \left(\frac{4t^2-1}{4t^2+1}\right)^2} dx \\ &= 3\pi + \frac{4t^2 - 1}{4t^2 + 1} \left[\frac{4t^2 + 1}{|4t^2 - 1|} \tan^{-1} \frac{(4t^2 + 1)x + 4t}{|4t^2 - 1|} \right]_{-\infty}^{+\infty} \quad \left(\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} + C \right) \\ &= 3\pi + \frac{4t^2 - 1}{|4t^2 - 1|} \left[\tan^{-1} \frac{(4t^2 + 1)x + 4t}{|4t^2 - 1|} \right]_{-\infty}^{+\infty} = 3\pi + \frac{4t^2 - 1}{|4t^2 - 1|} \pi \end{aligned}$$

となるので、全曲率 μ は $t < \frac{1}{2}$ のときは 2π となり、 $t > \frac{1}{2}$ のときは 4π となる。したがって、 $f(\theta)$ の全曲率は以下のようにまとめられる。

$$\mu = \begin{cases} 2\pi & (t < \frac{1}{2}) \\ 3\pi & (t = \frac{1}{2}) \\ 4\pi & (t > \frac{1}{2}) \end{cases}$$

つまり、 t の値によって $\gamma(\theta)$ の全曲率は変化することが示された。このように、 \mathbb{R}^2 空間で全曲率を計算するとき、場合によっては別の計算方法を考える必要がある。しかし、曲線を複素数平面上に表示することにより、全曲率を統一的に計算することができる。実際に(例1)を複素数平面上に移して計算してみる。

(例1)' 曲線 $\gamma(\theta)$ を複素数平面で表示すると、 $\gamma(\theta) = (1 - 2t \sin \theta)(\cos \theta + i \sin \theta)$ となり、これを $z = \cos \theta + i \sin \theta (|z| = 1)$ を使って表示すると、

$$\gamma(\theta) = \left(1 - 2t \frac{z - z^{-1}}{2i}\right) z = (1 + itz - itz^{-1}) z = itz^2 + z - it$$

となる。このとき速度ベクトル $\dot{\gamma}(\theta)$ は、

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}(\theta) &= -2tz^2 + iz, \\ |\dot{\gamma}(\theta)| &= \sqrt{(-2tz^2 + iz)(-2tz^{-2} - iz^{-1})} = \sqrt{4t^2 + 1 + 2it(z - z^{-1})} \end{aligned}$$

であるので、 $\gamma(\theta)$ の弧長パラメータを s とすると、

$$\begin{aligned} \gamma'(s) &= \frac{\dot{\gamma}(\theta)}{|\dot{\gamma}(\theta)|} \quad (= \mathbf{e}(s)), \\ \gamma''(s) &= \frac{\dot{\gamma}(\theta)}{|\dot{\gamma}(\theta)|} \frac{d}{ds} = \frac{\dot{\gamma}(\theta)}{|\dot{\gamma}(\theta)|} \frac{d}{d\theta} \frac{d\theta}{ds} \quad \left(\frac{ds}{d\theta} = |\dot{\gamma}(\theta)|\right) \\ &= \frac{i(-2tz^2 + iz)\{8t^2 + 1 + 3it(z - z^{-1})\}}{\{4t^2 + 1 + 2it(z - z^{-1})\}^2} \quad (= \mathbf{e}'(s)). \end{aligned}$$

ここで、フルネの公式より、 $\mathbf{e}'(s) = \kappa(s)\mathbf{n}(s)$ であり、 $\mathbf{n}(s) = i\mathbf{e}(s)$ であるので、

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'(s) &= \frac{i(-2tz^2 + iz)\{8t^2 + 1 + 3it(z - z^{-1})\}}{\{4t^2 + 1 + 2it(z - z^{-1})\}^2} \\ &= \frac{8t^2 + 1 + 3it(z - z^{-1})}{\{4t^2 + 1 + 2it(z - z^{-1})\}^{\frac{3}{2}}} \frac{i(-2tz^2 + iz)}{\sqrt{4t^2 + 1 + 2it(z - z^{-1})}} \\ &= \kappa(s)i\mathbf{e}(s). \end{aligned}$$

したがって、 $\gamma(\theta)$ の曲率 $\kappa(s)$ は以下のように表される。

$$\kappa(s) = \frac{8t^2 + 1 + 3it(z - z^{-1})}{\{4t^2 + 1 + 2it(z - z^{-1})\}^{\frac{3}{2}}}$$

ここから、留数定理を用いて全曲率 μ を求める。

$$\begin{aligned} \mu &= \int_0^{2\pi} \kappa(s) ds = \oint \frac{8t^2 + 1 + 3it(z - z^{-1})}{\{4t^2 + 1 + 2it(z - z^{-1})\}^{\frac{3}{2}}} dz \frac{d\theta}{dz} \frac{ds}{d\theta} \quad \left(\frac{dz}{d\theta} = iz\right) \\ &= \oint \frac{8t^2 + 1 + 3it(z - z^{-1})}{iz\{4t^2 + 1 + 2it(z - z^{-1})\}} dz = \oint \left\{ \frac{3}{2iz} + \frac{4t^2 - 1}{2} \frac{1}{i(-2tz + i)(-iz - 2t)} \right\} dz \\ &= 3\pi - \oint \frac{4t^2 - 1}{4t} \frac{1}{(z - \frac{i}{2t})(z - 2it)} dz = 3\pi + \frac{1}{2i} \oint \left\{ \frac{1}{z - \frac{i}{2t}} - \frac{1}{z - 2it} \right\} dz \end{aligned}$$

$|z| = 1$ であるので留数定理より、全曲率は t の値により以下の場合分け (i)(ii)(iii) に定まる.

(i) $t < \frac{1}{2}$ のとき, $|\frac{i}{2t}| > 1$, $|2it| < 1$ となるので,

$$\mu = 3\pi + \frac{1}{2i} \oint \left(\frac{1}{z - \frac{i}{2t}} - \frac{1}{z - 2it} \right) dz = 3\pi - \frac{1}{2i} \oint \frac{1}{z - 2it} dz = 3\pi - \pi = 2\pi$$

である.

(ii) $t > \frac{1}{2}$ のとき, $|\frac{i}{2t}| < 1$, $|2it| > 1$ となるので,

$$\mu = 3\pi + \frac{1}{2i} \oint \left(\frac{1}{z - \frac{i}{2t}} - \frac{1}{z - 2it} \right) dz = 3\pi + \frac{1}{2i} \oint \frac{1}{z - \frac{i}{2t}} dz = 3\pi + \pi = 4\pi$$

である.

(iii) $t = \frac{1}{2}$ のとき, $|\frac{i}{2t}| = 1$, $|2it| = 1$ となるので,

$$\mu = 3\pi + \frac{1}{2i} \oint \left(\frac{1}{z - \frac{i}{2t}} - \frac{1}{z - 2it} \right) dz = 3\pi + \frac{1}{2i}(2i\pi - 2i\pi) = 3\pi$$

である.

以上より、複素数を用いて全曲率は容易に求められることがわかる. 以降、 z は全て $z = \cos \theta + i \sin \theta$ ($|z| = 1$) として考えていく.

2.2 $\gamma(\theta) = az^2 + bz$ の全曲率の計算

前節の (例 1)' と同様に、複素数平面上において z の 2 次関数で表示される閉曲線について、次のような定理が考えられる.

定理 2.1 閉曲線 $\gamma(\theta) = az^2 + bz$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$, $a, b \in \mathbb{C}$) の全曲率 μ は,

$$\mu = 3\pi + \frac{1}{2i} \oint \left(\frac{1}{z + \frac{b}{2a}} - \frac{1}{z + \frac{2a}{b}} \right) dz$$

となり、 a, b の大きさによって以下に定まる.

$$\mu = \begin{cases} 2\pi & (2|a| < |b|) \\ 3\pi & (2|a| = |b|) \\ 4\pi & (2|a| > |b|) \end{cases}$$

(証明) 曲線 $\gamma(\theta)$ の速度ベクトル $\dot{\gamma}(\theta)$ は,

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}(\theta) &= 2iaz^2 + ibz, \\ |\dot{\gamma}(\theta)| &= \sqrt{(2iaz^2 + ibz)(-2i\bar{a}z^{-2} - i\bar{b}z^{-1})} = \sqrt{4|a|^2 + |b|^2 + 2a\bar{b}z + 2\bar{a}bz^{-1}} \end{aligned}$$

であるので、 $\gamma(\theta)$ の弧長パラメータを s とすると,

$$\begin{aligned} \gamma'(s) &= \frac{\dot{\gamma}(\theta)}{|\dot{\gamma}(\theta)|} \quad (= e(s)), \\ \gamma''(s) &= \frac{\dot{\gamma}(\theta)}{|\dot{\gamma}(\theta)|} \frac{d}{ds} = \frac{\dot{\gamma}(\theta)}{|\dot{\gamma}(\theta)|} \frac{d}{d\theta} \frac{d\theta}{ds} \quad \left(\frac{ds}{d\theta} = |\dot{\gamma}(\theta)| \right) \\ &= \frac{i(2iaz^2 + ibz)\{8|a|^2 + |b|^2 + 3a\bar{b}z + 3\bar{a}bz^{-1}\}}{\{4|a|^2 + |b|^2 + 2a\bar{b}z + 2\bar{a}bz^{-1}\}^2} \quad (= e'(s)). \end{aligned}$$

フルネの公式より, $e'(s) = \kappa(s)\mathbf{n}(s)$ であり, $\mathbf{n}(s) = ie(s)$ であるので,

$$\begin{aligned} e'(s) &= \frac{i(2iaz^2 + ibz)\{8|a|^2 + |b| + 3a\bar{b}z + 3\bar{a}bz^{-1}\}}{\{4|a|^2 + |b|^2 + 2a\bar{b}z + 2\bar{a}bz^{-1}\}^2} \\ &= \frac{8|a|^2 + |b| + 3a\bar{b}z + 3\bar{a}bz^{-1}}{\{4|a|^2 + |b|^2 + 2a\bar{b}z + 2\bar{a}bz^{-1}\}^{\frac{3}{2}}} \frac{i(2iaz^2 + ibz)}{\sqrt{4|a|^2 + |b|^2 + 2a\bar{b}z + 2\bar{a}bz^{-1}}} \\ &= \kappa(s)ie(s). \end{aligned}$$

したがって, $\gamma(\theta)$ の曲率 $\kappa(s)$ は,

$$\kappa(s) = \frac{8|a|^2 + |b| + 3a\bar{b}z + 3\bar{a}bz^{-1}}{\{4|a|^2 + |b|^2 + 2a\bar{b}z + 2\bar{a}bz^{-1}\}^{\frac{3}{2}}}$$

であり, 全曲率 μ は,

$$\begin{aligned} \mu &= \int_0^{2\pi} \kappa(s) ds \\ &= \oint \frac{8|a|^2 + |b| + 3a\bar{b}z + 3\bar{a}bz^{-1}}{\{4|a|^2 + |b|^2 + 2a\bar{b}z + 2\bar{a}bz^{-1}\}^{\frac{3}{2}}} dz \frac{d\theta}{dz} \frac{ds}{d\theta} \quad \left(\frac{dz}{d\theta} = iz \right) \\ &= 3\pi + \frac{1}{2i} \oint \left(\frac{1}{z + \frac{b}{2a}} - \frac{1}{z + \frac{2\bar{a}}{b}} \right) dz \end{aligned}$$

である. 留数定理より, 全曲率 μ は $2|a|$, $|b|$ の関係により以下の場合分け (i)(ii)(iii) に定まる.

(i) $2|a| < |b|$ のとき, $|\frac{b}{2a}| > 1$, $|\frac{2\bar{a}}{b}| < 1$ となるので,

$$\mu = 3\pi + \frac{1}{2i} \oint \left(\frac{1}{z + \frac{b}{2a}} - \frac{1}{z + \frac{2\bar{a}}{b}} \right) dz = 3\pi - \frac{1}{2i} \oint \frac{1}{z + \frac{2\bar{a}}{b}} dz = 3\pi - \pi = 2\pi$$

である.

(ii) $2|a| > |b|$ のとき, $|\frac{b}{2a}| < 1$, $|\frac{2\bar{a}}{b}| > 1$ となるので,

$$\mu = 3\pi + \frac{1}{2i} \oint \left(\frac{1}{z + \frac{b}{2a}} - \frac{1}{z + \frac{2\bar{a}}{b}} \right) dz = 3\pi + \frac{1}{2i} \oint \frac{1}{z + \frac{b}{2a}} dz = 3\pi + \pi = 4\pi$$

である.

(iii) $2|a| = |b|$ のとき, $|\frac{b}{2a}| = 1$, $|\frac{2\bar{a}}{b}| = 1$ となるので,

$$\mu = 3\pi + \frac{1}{2i} \oint \left(\frac{1}{z + \frac{b}{2a}} - \frac{1}{z + \frac{2\bar{a}}{b}} \right) dz = 3\pi + \frac{1}{2i}(2i\pi - 2i\pi) = 3\pi$$

である. □

この定理から, 閉曲線 $\gamma(\theta)$ が z の 2 次関数で表される場合, z の項にかかる係数の関係により全曲率は決まることがわかった. さらにこの考え方は, 逆回転の場合にも適用される.

定理 2.2 閉曲線 $\gamma(\theta) = az^{-2} + bz^{-1}$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$, $a, b \in \mathbb{C}$) の全曲率 μ は,

$$\mu = -3\pi - \frac{1}{2i} \oint \left(\frac{1}{z + \frac{b}{2a}} - \frac{1}{z + \frac{2\bar{a}}{b}} \right) dz$$

となり, a, b の大きさによって以下に定まる.

$$\mu = \begin{cases} -2\pi & (2|a| < |b|) \\ -3\pi & (2|a| = |b|) \\ -4\pi & (2|a| > |b|) \end{cases}$$

3 一般閉曲線の全曲率

3.1 対数を用いた全曲率の計算

前章により 2 次の場合, $\gamma(\theta)$ の全曲率の決定には z の項にかかる係数が関係していることがわかった. 本章ではさらに次数を拡張して高次の関数で表示される場合, 全曲率がどのように決定されるかを考えていく. しかし, 前節で扱った計算のままでは複雑である. そこで, 全曲率の計算について次のことを考えた.

定理 3.1 z についての関数 $\gamma(\theta)$ で表された閉曲線の全曲率 μ は次のように表すことできる.

$$\mu = \frac{i}{2} \oint \frac{d}{dz} (\log \bar{\gamma}(\theta) - \log \dot{\gamma}(\theta)) dz$$

(証明) 曲線 $\gamma(\theta)$ について, 弧長パラメータ s で表示されたものを $\gamma(s)$ とする. $\gamma(s)$ の微分について, 合成関数の微分公式を使って表すと,

$$\begin{aligned} \gamma'(s) &= \frac{\dot{\gamma}(\theta)}{|\dot{\gamma}(\theta)|} \quad (= \mathbf{e}(s)), \\ \gamma''(s) &= \frac{\dot{\gamma}(\theta)}{|\dot{\gamma}(\theta)|} \frac{d}{ds} = \frac{\dot{\gamma}(\theta)}{|\dot{\gamma}(\theta)|} \frac{d}{d\theta} \frac{d\theta}{ds} \quad \left(\frac{ds}{d\theta} = |\dot{\gamma}(\theta)| \right) \\ &= \frac{\dot{\gamma}(\theta)\ddot{\gamma}(\theta)\bar{\gamma}(\theta) - \dot{\gamma}(\theta)\dot{\gamma}(\theta)\ddot{\gamma}(\theta)}{2(\dot{\gamma}(\theta)\bar{\gamma}(\theta))^2} \quad (= \mathbf{e}'(s)) \end{aligned}$$

となる. フルネの公式より, $\mathbf{e}'(s) = \kappa(s)\mathbf{n}(s)$ であり, $\mathbf{n}(s) = i\mathbf{e}(s)$ であるので,

$$\mathbf{e}'(s) = \frac{\dot{\gamma}(\theta)\ddot{\gamma}(\theta)\bar{\gamma}(\theta) - \dot{\gamma}(\theta)\dot{\gamma}(\theta)\ddot{\gamma}(\theta)}{2(\dot{\gamma}(\theta)\bar{\gamma}(\theta))^2} = \frac{\ddot{\gamma}(\theta)\bar{\gamma}(\theta) - \dot{\gamma}(\theta)\ddot{\gamma}(\theta)}{2i(\dot{\gamma}(\theta)\bar{\gamma}(\theta))^{\frac{3}{2}}} \frac{i\dot{\gamma}(\theta)}{(\dot{\gamma}(\theta)\bar{\gamma}(\theta))^{\frac{1}{2}}} = \kappa(s)i\mathbf{e}(s).$$

したがって, $\gamma(\theta)$ の曲率 $\kappa(s)$ は

$$\kappa(s) = \frac{\ddot{\gamma}(\theta)\bar{\gamma}(\theta) - \dot{\gamma}(\theta)\ddot{\gamma}(\theta)}{2i(\dot{\gamma}(\theta)\bar{\gamma}(\theta))^{\frac{3}{2}}}$$

となり, 全曲率 μ は,

$$\begin{aligned} \mu &= \int_0^{2\pi} \kappa(s) ds = \oint \frac{\ddot{\gamma}(\theta)\bar{\gamma}(\theta) - \dot{\gamma}(\theta)\ddot{\gamma}(\theta)}{2i(\dot{\gamma}(\theta)\bar{\gamma}(\theta))^{\frac{3}{2}}} dz \frac{d\theta}{dz} \frac{ds}{d\theta} \quad \left(\frac{dz}{d\theta} = iz \right) \\ &= \oint \frac{\dot{\gamma}(\theta)\ddot{\gamma}(\theta) - \ddot{\gamma}(\theta)\dot{\gamma}(\theta)}{2z(\dot{\gamma}(\theta)\bar{\gamma}(\theta))} dz = \oint \frac{1}{2z} \left(\frac{\ddot{\gamma}(\theta)}{\bar{\gamma}(\theta)} - \frac{\dot{\gamma}(\theta)}{\dot{\gamma}(\theta)} \right) dz \\ &= \oint \frac{1}{2z} \frac{d}{d\theta} (\log \bar{\gamma}(\theta) - \log \dot{\gamma}(\theta)) dz = \frac{i}{2} \oint \frac{d}{dz} (\log \bar{\gamma}(\theta) - \log \dot{\gamma}(\theta)) dz \end{aligned}$$

となる. □

3.2 一般閉曲線の全曲率

前節による複素数を用いた全曲率の計算方法から、一般的な閉曲線について次のように全曲率が求
 ることができる。

定理 3.2 0 以上の整数 m, n に対し、

$$\gamma(\theta) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n + a_{n+1} z^{-1} + \cdots + a_{n+m-1} z^{1-m} + a_{n+m} z^{-m}$$

($a_0 = 1$, a_1, a_2, \dots, a_{n+m} は 0 でない複素数であるとする.)

で表示される閉曲線の全曲率 μ は、

$$\mu = (n-m)\pi + \frac{i}{2} \oint \left(\sum_{t=1}^{n+m} \frac{1}{z - \frac{1}{\bar{c}_t}} - \sum_{t=1}^{n+m} \frac{1}{z - c_t} \right) dz$$

(c_1, c_2, \dots, c_{n+m} は $\dot{\gamma}(\theta) = 0$ の解)

で表される。このとき、 $|c_t| < 1$ となる c_t の数を A 、 $|c_t| > 1$ となる c_t の数を B 、 $|c_t| = 1$ となる c_t の数を C とすると、 μ は以下のように定まる。

$$\mu = (n-m+A-B)\pi$$

(証明) $\dot{\gamma}(\theta)$ と $\bar{\dot{\gamma}}(\theta)$ を求める。このとき、 $a_0 = 1$ に注意する。

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}(\theta) &= inz^n + i(n-1)a_1 z^{n-1} + \cdots + ia_{n-1} z - ia_{n+1} z^{-1} - \cdots - i(1-m)a_{n+m-1} z^{1-m} - ima_{n+m} z^{-m} \\ &= inz^{-m} (z^{n+m} + b_1 z^{n+m-1} + \cdots + b_{n-1} z^{m+1} + b_{n+1} z^{m-1} + \cdots + b_{n+m-1} z + b_{n+m}) \left(b_t = \frac{(n-t)a_t}{n} \right) \\ &= inz^{-m} \prod_{t=1}^{n+m} (z - c_t), \\ \bar{\dot{\gamma}}(\theta) &= -inz^m \prod_{t=1}^{n+m} (z^{-1} - \bar{c}_t) = (-1)^{n+m+1} inz^{-n} \prod_{t=1}^{n+m} \bar{c}_t \left(z - \frac{1}{\bar{c}_t} \right). \end{aligned}$$

また、 $\log \dot{\gamma}(\theta)$ 、 $\log \bar{\dot{\gamma}}(\theta)$ は、

$$\begin{aligned} \log \dot{\gamma}(\theta) &= \log inz^{-m} \prod_{t=1}^{n+m} (z - c_t) = \log inz^{-m} + \sum_{t=1}^{n+m} \log(z - c_t), \\ \log \bar{\dot{\gamma}}(\theta) &= \log \left\{ (-1)^{n+m+1} inz^{-n} \prod_{t=1}^{n+m} \bar{c}_t \right\} + \sum_{t=1}^{n+m} \log \left(z - \frac{1}{\bar{c}_t} \right) \end{aligned}$$

となる。これを定理 3.1 の式に代入すると全曲率 μ は、

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{i}{2} \oint \frac{d}{dz} (\log \bar{\dot{\gamma}}(\theta) - \log \dot{\gamma}(\theta)) dz \\ &= \frac{i}{2} \oint \frac{d}{dz} \left\{ \log \left\{ (-1)^{n+m+1} inz^{-n} \prod_{t=1}^{n+m} \bar{c}_t \right\} + \sum_{t=1}^{n+m} \log \left(z - \frac{1}{\bar{c}_t} \right) - \log inz^{-m} \sum_{t=1}^{n+m} \log(z - c_t) \right\} dz \\ &= \frac{i}{2} \oint \left(-\frac{n}{z} + \sum_{t=1}^{n+m} \frac{1}{z - \frac{1}{\bar{c}_t}} + \frac{m}{z} - \sum_{t=1}^{n+m} \frac{1}{z - c_t} \right) dz = (n-m)\pi + \frac{i}{2} \oint \left(\sum_{t=1}^{n+m} \frac{1}{z - \frac{1}{\bar{c}_t}} - \sum_{t=1}^{n+m} \frac{1}{z - c_t} \right) dz \end{aligned}$$

となる。ここで、留数定理より全曲率 μ は $|c_t| > 1$ のとき π 減少し、 $|c_t| < 1$ のとき π 増加し、 $|c_t| = 1$ のときは変化は起こらない。つまり、 $|c_t| < 1$ となる c_t の数を A 、 $|c_t| > 1$ となる c_t の数を B 、 $|c_t| = 1$ となる c_t の数を C とすると μ は、

$$\mu = (n-m+A-B)\pi$$

となる. 更に μ は, $A = m + n$, $B = 0$, $C = 0$ で最大値 $2n\pi$ をとり, $A = 0$, $B = m + n$, $C = 0$ で最小値 $-2m\pi$ をとる. \square

この定理により, 閉曲線の全曲率は $\dot{\gamma}(\theta) = 0$ の解の大きさによって決まることが明らかになった. さらに $\dot{\gamma}(\theta)$ について, 分母と分子がそれぞれ z の多項式で表されている場合の一般化として次の定理を考えた.

定理 3.3 0 以上の整数 m, n, p, q に対し, 関数 $\gamma(\theta)$ の微分が

$$\dot{\gamma}(\theta) = \frac{\xi(\theta)}{\eta(\theta)} = \frac{in(a_0z^n + a_1z^{n-1} + \cdots + a_{n-1}z + a_n + a_{n+1}z^{-1} + \cdots + a_{n+m-1}z^{1-m} + a_{n+m}z^{-m})}{iq(b_0z^q + b_1z^{q-1} + \cdots + b_{q-1}z + b_q + b_{q+1}z^{-1} + \cdots + b_{q+p-1}z^{1-p} + b_{q+p}z^{-p})}$$

($a_0 = b_0 = 1$, $a_1, \dots, a_{m+n}, b_1, \dots, b_{q+p}$ は 0 でない複素数であるとする.)

で表示される閉曲線の全曲率 μ は,

$$\mu = (n - m - q + p)\pi + \frac{i}{2} \oint \left(\sum_{j=1}^{n+m} \frac{1}{z - \frac{1}{\bar{c}_j}} - \sum_{j=1}^{n+m} \frac{1}{z - c_j} - \sum_{k=1}^{q+p} \frac{1}{z - \frac{1}{\bar{d}_k}} + \sum_{k=1}^{q+p} \frac{1}{z - d_k} \right) dz$$

(c_1, c_2, \dots, c_{m+n} と d_1, d_2, \dots, d_{q+p} はそれぞれ $\xi(\theta) = 0$, $\eta(\theta) = 0$ の解)

で表される. このとき, $|c_t| < 1$ となる c_t の数を α_1 , $|c_t| > 1$ となる c_t の数を α_2 , $|c_t| = 1$ となる c_t の数を α_3 とし, $|d_t| < 1$ となる d_t の数を β_1 , $|d_t| > 1$ となる d_t の数を β_2 , $|d_t| = 1$ となる d_t の数を β_3 とすると, μ は以下のように定まる.

$$\mu = (n - m - q + p + \alpha_1 - \alpha_2 - \beta_1 + \beta_2)\pi$$

(証明) $\dot{\gamma}(\theta)$ と $\bar{\dot{\gamma}}(\theta)$ について, $a_0 = b_0 = 1$ に注意すると,

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}(\theta) &= \frac{in(a_0z^n + a_1z^{n-1} + \cdots + a_{n-1}z + a_n + a_{n+1}z^{-1} + \cdots + a_{n+m-1}z^{1-m} + a_{n+m}z^{-m})}{iq(b_0z^q + b_1z^{q-1} + \cdots + b_{q-1}z + b_q + b_{q+1}z^{-1} + \cdots + b_{q+p-1}z^{1-p} + b_{q+p}z^{-p})} \\ &= \frac{inz^{-m} \prod_{j=1}^{n+m} (z - c_j)}{iqz^{-p} \prod_{k=1}^{q+p} (z - d_k)}, \\ \bar{\dot{\gamma}}(\theta) &= \frac{-inz^m \prod_{j=1}^{n+m} (z^{-1} - \bar{c}_j)}{-iqz^p \prod_{k=1}^{q+p} (z^{-1} - \bar{d}_k)} = \frac{(-1)^{n+m+1} in z^{-n} \prod_{j=1}^{n+m} \bar{c}_j \left(z - \frac{1}{\bar{c}_j} \right)}{(-1)^{q+p+1} in z^{-q} \prod_{k=1}^{q+p} \bar{d}_k \left(z - \frac{1}{\bar{d}_k} \right)} \end{aligned}$$

となる. また, $\log \dot{\gamma}(\theta)$, $\log \bar{\dot{\gamma}}(\theta)$ は,

$$\begin{aligned} \log \dot{\gamma}(\theta) &= \log \frac{inz^{-m} \prod_{j=1}^{n+m} (z - c_j)}{iqz^{-p} \prod_{k=1}^{q+p} (z - d_k)} = \log in z^{-m} + \sum_{j=1}^{n+m} \log (z - c_j) - \log iq z^{-p} - \sum_{k=1}^{q+p} \log (z - d_k), \\ \log \bar{\dot{\gamma}}(\theta) &= \log \left\{ (-1)^{n+m+1} in z^{-n} \prod_{j=1}^{n+m} \bar{c}_j \right\} + \sum_{j=1}^{n+m} \log \left(z - \frac{1}{\bar{c}_j} \right) - \log \left\{ (-1)^{q+p+1} in z^{-q} \prod_{k=1}^{q+p} \bar{d}_k \right\} \\ &\quad - \sum_{k=1}^{q+p} \log \left(z - \frac{1}{\bar{d}_k} \right) \end{aligned}$$

となる. これを定理 3.1 の式に代入すると全曲率 μ は,

$$\begin{aligned}
 \mu &= \frac{i}{2} \oint \frac{d}{dz} (\log \bar{\gamma}(\theta) - \log \dot{\gamma}(\theta)) dz \\
 &= \frac{i}{2} \oint \frac{d}{dz} \left\{ \log \left\{ (-1)^{n+m+1} i n z^{-n} \prod_{j=1}^{n+m} \bar{c}_j \right\} + \sum_{j=1}^{n+m} \log \left(z - \frac{1}{\bar{c}_j} \right) - \log \left\{ (-1)^{q+p+1} i n z^{-q} \prod_{k=1}^{q+p} \bar{d}_k \right\} \right. \\
 &\quad \left. - \sum_{k=1}^{q+p} \log \left(z - \frac{1}{\bar{d}_k} \right) - \log i n z^{-m} - \sum_{j=1}^{n+m} \log(z - c_j) + \log i q z^{-p} + \sum_{k=1}^{q+p} \log(z - d_k) \right\} dz \\
 &= \frac{i}{2} \oint \left(-\frac{n}{z} + \sum_{j=1}^{n+m} \frac{1}{z - \frac{1}{\bar{c}_j}} + \frac{m}{z} - \sum_{j=1}^{n+m} \frac{1}{z - c_j} + \frac{q}{z} - \sum_{k=1}^{q+p} \frac{1}{z - \frac{1}{\bar{d}_k}} - \frac{p}{z} + \sum_{k=1}^{q+p} \frac{1}{z - d_k} \right) dz \\
 &= (n - m - q + p)\pi + \frac{i}{2} \oint \left(\sum_{j=1}^{n+m} \frac{1}{z - \frac{1}{\bar{c}_j}} - \sum_{j=1}^{n+m} \frac{1}{z - c_j} - \sum_{k=1}^{q+p} \frac{1}{z - \frac{1}{\bar{d}_k}} + \sum_{k=1}^{q+p} \frac{1}{z - d_k} \right) dz
 \end{aligned}$$

となる. ここで, 留数定理より全曲率 μ は $|c_t| > 1$ のとき π 減少し, $|c_t| < 1$ のとき π 増加し, $|c_t| = 1$ のときは変化は起こらない. つまり, $|c_t| < 1$ となる c_t の数を α_1 , $|c_t| > 1$ となる c_t の数を α_2 , $|c_t| = 1$ となる c_t の数を α_3 とし, $|c_t| < 1$ となる c_t の数を β_1 , $|c_t| > 1$ となる c_t の数を β_2 , $|c_t| = 1$ となる c_t の数を β_3 とすると μ は,

$$\mu = (n - m - q + p + \alpha_1 - \alpha_2 - \beta_1 + \beta_2)\pi$$

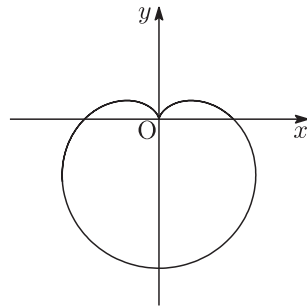
となる. 更に μ は, $\alpha_1 = m + n$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$, $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = q + p$, $\beta_3 = 0$ で最大値 $2(n + p)\pi$ をとり, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = m + n$, $\alpha_3 = 0$, $\beta_1 = q + p$, $\beta_2 = 0$, $\beta_3 = 0$ で最小値 $-2(m + q)\pi$ をとる. \square

以上により, 閉曲線の全曲率について複素数を用いることで容易に求めることができ, さらに $\dot{\gamma}(\theta) = 0$ の解を求めることで留数定理により, 全曲率の値が定まることがわかった.

4 特異点の解消

次の平面曲線 $\gamma(\theta)$ は $\theta = \frac{\pi}{2}$ で特異点をもつ.

$$\gamma(\theta) = ((1 - \sin \theta) \cos \theta, (1 - \sin \theta) \sin \theta) \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$



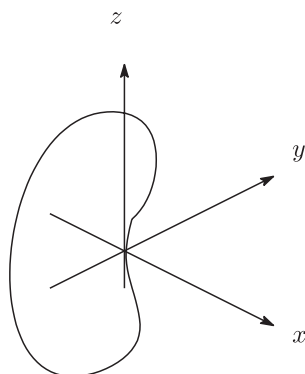
以下で平面上で特異点をもつ曲線を空間の中でなめらかな曲線として実現することを考える. 実際 $\dot{\gamma}(\theta) = (-\sin \theta - \cos 2\theta, \cos \theta - \sin 2\theta)$ であるので $\dot{\gamma}(\frac{\pi}{2}) = 0$ となっている. ここで $z = \cos \theta$ として空間曲線

$$\tilde{\gamma}(\theta) = ((1 - \sin \theta) \cos \theta, (1 - \sin \theta) \sin \theta, \cos \theta)$$

を考えると

$$\dot{\tilde{\gamma}}(\theta) = (-\sin \theta - \cos 2\theta, \cos \theta - \sin 2\theta, -\sin \theta)$$

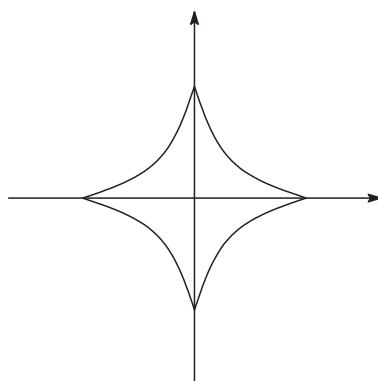
であるので $\dot{\tilde{\gamma}}(\theta) \neq 0$ となり特異点が解消できる.



同様にアステロイド曲線を空間の中でなめらかな曲線として実現することを考える. アステロイド曲線は

$$\gamma(\theta) = (\cos^3 \theta, \sin^3 \theta) \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

と表せる.



図よりわかるように $\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi$ で特異点をもつ. 実際 $\dot{\gamma}(\theta) = (-3 \sin \theta \cos^2 \theta, 3 \cos \theta \sin^2 \theta)$ であるので $\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi$ のとき $\dot{\gamma}(\theta) = 0$ となる. ここで $z = \sin(\theta + \frac{\pi}{4})$ として空間曲線

$$\tilde{\gamma}(\theta) = \left(\cos^3 \theta, \sin^3 \theta, \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) \right) \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

を考えると,

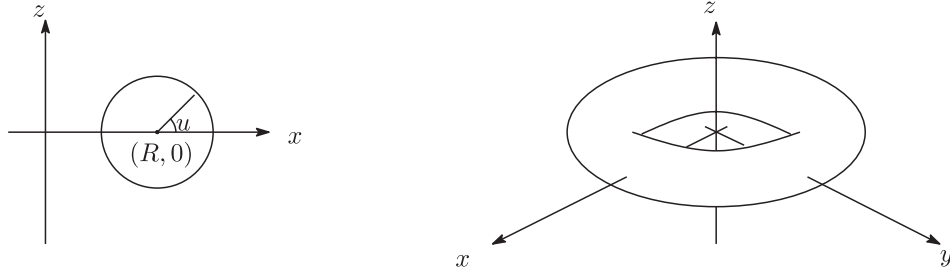
$$\dot{\tilde{\gamma}}(\theta) = \left(-3 \sin \theta \cos^2 \theta, 3 \cos \theta \sin^2 \theta, \cos \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) \right)$$

であるので $\dot{\tilde{\gamma}}(\theta) \neq 0$ となり特異点が解消できる.

5 曲面の全曲率

5.1 トーラスの全曲率

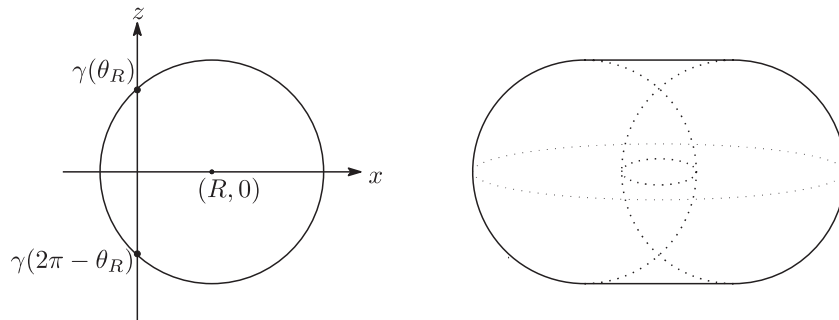
xz 平面上の中心 $(R, 0)$ で半径 1 の円を z 軸の周りに一回転してできる曲面はトーラスを表す. 以下の図のようなトーラスを考える.



このトーラスは

$$p(u, v) = ((R + \cos u) \cos v, (R + \cos u) \sin v, \sin u) \quad (0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq 2\pi,)$$

と表される. $R < 1$ のときは, z 軸と交叉するため以下の図のように特異点をもった閉曲面となる.



定理 5.1 トーラス

$$p(u, v) = ((R + \cos u) \cos v, (R + \cos u) \sin v, \sin u) \quad (0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq 2\pi)$$

の全曲率は

$$\iint_S \kappa(s) ds = \begin{cases} 0 & (1 \leq R) \\ 8\pi\sqrt{1-R^2} & (0 \leq R < 1) \end{cases}$$

により与えられる.

(証明) まず, 第一基本量を求めるために $p_u(u, v), p_v(u, v)$ を計算する.

$$\begin{aligned} p_u(u, v) &= (-\sin u \cos v, -\sin u \sin v, \cos u), \\ p_v(u, v) &= (-(R + \cos u) \sin v, (R + \cos u) \cos v, 0) \end{aligned}$$

であるので, 第一基本量は

$$\begin{aligned} E &= p_u \cdot p_u = \sin^2 u \cos^2 v + \sin^2 u \sin^2 v + \cos^2 u = 1, \\ F &= p_u \cdot p_v = (R + \cos u) \sin u \sin v \cos v - (R + \cos u) \sin u \sin v \cos v = 0, \\ G &= p_v \cdot p_v = (R + \cos u)^2 \sin^2 v + (R + \cos u)^2 \cos^2 v = (R + \cos u)^2 \end{aligned}$$

となる. 次に第二基本量を求めていく.

$$\begin{aligned} p_{uu}(u, v) &= (-\cos u \cos v, -\cos u \sin v, -\sin u), \\ p_{uv}(u, v) &= (\sin u \sin v, -\sin u \cos v, 0), \\ p_{vv}(u, v) &= -(R + \cos u) \cos v, -(R + \cos u) \sin v, 0 \end{aligned}$$

であり, 単位法線ベクトル ν は

$$\nu = \frac{p_u \times p_v}{|p_u \times p_v|} = (-\cos u \cos v, -\cos u \sin v, -\sin u)$$

となるので, 第二基本量は

$$\begin{aligned} L &= p_{uu} \cdot \nu = \cos^2 u \cos^2 v + \cos^2 u \sin^2 v + \sin^2 u = 1, \\ M &= p_{uv} \cdot \nu = \sin u \cos u \sin v \cos v - \sin u \cos u \sin v \cos v = 0, \\ N &= p_{vv} \cdot \nu = (R + \cos u) \cos u \cos^2 v + (R + \cos u) \cos u \sin^2 v = (R + \cos u) \cos u \end{aligned}$$

となる. ゆえにガウス曲率 K と面積要素 dA は

$$\begin{aligned} K &= \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{(R + \cos u) \cos u}{(R + \cos u)^2} = \frac{\cos u}{R + \cos u}, \\ dA &= \sqrt{EG - F^2} dudv = \sqrt{(R + \cos u)^2} dudv \end{aligned}$$

により与えられる. $R \geq 1$ のとき $R + \cos u \geq 0$ であるので

$$\begin{aligned} \iint_S K dA &= \iint_D \frac{\cos u}{R + \cos u} (R + \cos u) dudv \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos u \, dudv \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる. $0 \leq R < 1$ のとき $R + \cos \theta_R = 0$ とすると

$$\begin{aligned} \iint_S K dA &= \iint_D \frac{\cos u}{R + \cos u} |R + \cos u| dudv \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\theta_R} \cos u \, du \right) dv + \int_0^{2\pi} \left(\int_{\theta_R}^{2\pi - \theta_R} -\cos u \, du \right) dv + \int_0^{2\pi} \left(\int_{2\pi - \theta_R}^{2\pi} \cos u \, du \right) dv \\ &= \int_0^{2\pi} \sin \theta_R dv + \int_0^{2\pi} 2 \sin \theta_R dv + \int_0^{2\pi} \sin \theta_R dv \\ &= 4 \sin \theta_R \int_0^{2\pi} dv \\ &= 8\pi \sin \theta_R \\ &= 8\pi \sqrt{1 - \cos^2 \theta_R} \\ &= 8\pi \sqrt{1 - R^2} \end{aligned}$$

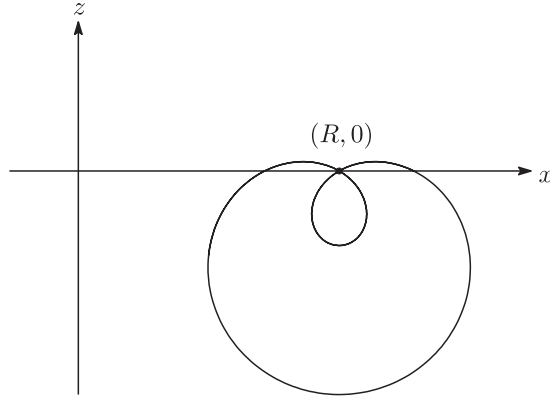
である. □

5.2 トーラスを変形させた曲面の全曲率

xz 平面上の曲線

$$x = f(u) = R + (1 - 2t \sin u) \cos u, \quad z = g(u) = (1 - 2t \sin u) \sin u \quad (0 \leq u \leq 2\pi)$$

は以下の図のような形をしている.



この曲線を z 軸の周りに一回転してできる曲面 S は

$$x = f(u) \cos v, y = f(u) \sin v, z = g(u) \quad (0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq 2\pi)$$

とパラメータ表示できる. まず, 回転させる曲線が回転軸に交わらないとき, すなわち $f > 0$ のときのこの曲面の全曲率を考えていく.

定理 5.2 $f > 0$ のとき全曲率 $\iint_S K dA$ は

$$\iint_S K dA = 0$$

である.

(証明)

$$\begin{aligned} f &= (1 - 2t \sin u) \cos u + R, \\ g &= (1 - 2t \sin u) \sin u \end{aligned}$$

であるので

$$\begin{aligned} f' &= -\sin u - 2t \cos 2u, \\ f'' &= -\cos u + 4t \sin 2u, \\ g' &= \cos u - 2t \sin 2u, \\ g'' &= -\sin u - 4t \cos 2u \end{aligned}$$

となる. $f > 0$ より全曲率は

$$\begin{aligned} \iint_S K dA &= \iint_D \frac{((1 - 2t \sin u) \cos u + R)(8t^2 + 1 - 6t \sin u)(1 - 4t \sin u) \cos u}{((1 - 2t \sin u) \cos u + R)(4t^2 + 1 - 4t \sin u)^{\frac{3}{2}}} du \\ &= 2\pi \int_0^{2\pi} \frac{(8t^2 + 1 - 6t \sin u)(1 - 4t \sin u) \cos u}{(4t^2 + 1 - 4t \sin u)^{\frac{3}{2}}} du \end{aligned}$$

となる. ここで $\sin u = x$ とおくと $\cos u du = dx$ であることから

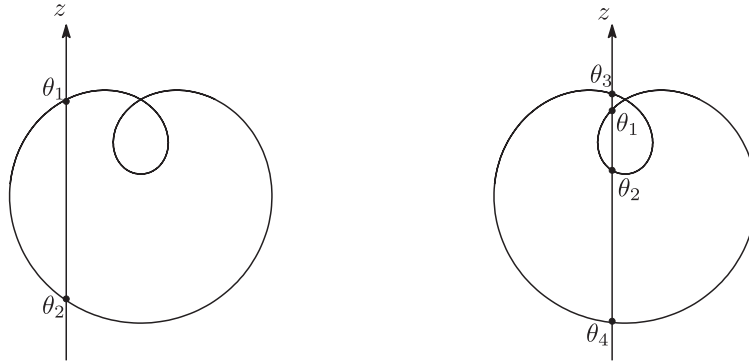
$$\begin{aligned} \iint_S K dA &= 2\pi \int_0^1 \frac{(8t^2 + 1 - 6tx)(1 - 4tx)}{(4t^2 + 1 - 4tx)\sqrt{4t^2 + 1 - 4tx}} dx \\ &\quad + 2\pi \int_1^{-1} \frac{(8t^2 + 1 - 6tx)(1 - 4tx)}{(4t^2 + 1 - 4tx)\sqrt{4t^2 + 1 - 4tx}} dx + 2\pi \int_{-1}^0 \frac{(8t^2 + 1 - 6tx)(1 - 4tx)}{(4t^2 + 1 - 4tx)\sqrt{4t^2 + 1 - 4tx}} dx \end{aligned}$$

となり, ここで $\frac{(8t^2 + 1 - 6tx)(1 - 4tx)}{(4t^2 + 1 - 4tx)\sqrt{4t^2 + 1 - 4tx}}$ の原始関数を $F(x)$ とすると

$$\begin{aligned} \iint_S K dA &= 2\pi(F(1) - F(0) + F(-1) - F(1) + F(0) - F(-1)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

が得られる. □

次に回転させる曲線が回転軸と交わる时候を考える. つまり $f < 0$ になる u がある时候を考える. 次の図のように回転させる曲線と z 軸との交点の数が 2 個のときと 4 個のときを考える.



まず, 交点の数が 2 個のときを考える.

定理 5.3 区間 (θ_1, θ_2) で $f < 0$ であるとき, 全曲率は

$$\iint_S K dA = 4\pi \left(\frac{4t \sin^2 \theta_2 - \sin \theta_2 - 2t}{\sqrt{4t^2 + 1 - 4t \sin \theta_2}} - \frac{4t \sin^2 \theta_1 - \sin \theta_1 - 2t}{\sqrt{4t^2 + 1 - 4t \sin \theta_1}} \right)$$

である. ここで θ_n ($n = 1, 2$) は $(1 - 2t \sin \theta_n) \cos \theta_n + R = 0$ を満たす角度である.

(証明) 区間 (θ_1, θ_2) で $f = (1 - 2t \sin u) \cos u + R < 0$ であるとして全曲率を求めていく.

$$\begin{aligned} \iint_S K dA &= \iint_0^{2\pi} \frac{|(1 - 2t \sin u) \cos u + R|(8t^2 + 1 - 6t \sin u)(1 - 4t \sin u) \cos u}{((1 - 2t \sin u) \cos u + R)(4t^2 + 1 - 4t \sin u)^{\frac{3}{2}}} du dv \\ &= 2\pi \int_0^{2\pi} \frac{|(1 - 2t \sin u) \cos u + R|(8t^2 + 1 - 6t \sin u)(1 - 4t \sin u) \cos u}{((1 - 2t \sin u) \cos u + R)(4t^2 + 1 - 4t \sin u)^{\frac{3}{2}}} du \\ &= 2\pi \int_0^{\theta_1} \frac{(8t^2 + 1 - 6t \sin u)(1 - 4t \sin u) \cos u}{(4t^2 + 1 - 4t \sin u)^{\frac{3}{2}}} du - 2\pi \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{(8t^2 + 1 - 6t \sin u)(1 - 4t \sin u) \cos u}{(4t^2 + 1 - 4t \sin u)^{\frac{3}{2}}} du \\ &\quad + 2\pi \int_{\theta_2}^{2\pi} \frac{(8t^2 + 1 - 6t \sin u)(1 - 4t \sin u) \cos u}{(4t^2 + 1 - 4t \sin u)^{\frac{3}{2}}} du \end{aligned}$$

となるので, $\frac{(8t^2 + 1 - 6t \sin u)(1 - 4t \sin u) \cos u}{(4t^2 + 1 - 4t \sin u)^{\frac{3}{2}}}$ の原始関数を $F(x)$ とすると

$$\begin{aligned} \iint_S K dA &= 2\pi(F(\theta_1) - F(0) - (F(\theta_2) - F(\theta_1)) + F(2\pi) - F(\theta_2)) \\ &= 4\pi(F(\theta_1) - F(\theta_2)) \\ &= 4\pi \int_{\theta_2}^{\theta_1} \frac{(8t^2 + 1 - 6t \sin u)(1 - 4t \sin u) \cos u}{(4t^2 + 1 - 4t \sin u)^{\frac{3}{2}}} du. \end{aligned}$$

$\sin u = x$ とおくと

$$\iint_S K dA = 4\pi \int_{\sin \theta_2}^{\sin \theta_1} \frac{(8t^2 + 1 - 6tx)(1 - 4tx)}{(4t^2 + 1 - 4tx)^{\frac{3}{2}}} dx.$$

$\sqrt{4t^2 + 1 - 4tx} = y$ とおくと, $dx = -\frac{y}{2t} dy, x = \frac{4t^2 + 1 - y^2}{4t}$ となるので

$$\begin{aligned} \iint_S K dA &= 4\pi \int_{\sqrt{4t^2+1-4t\sin\theta_2}}^{\sqrt{4t^2+1-4t\sin\theta_1}} \frac{(8t^2 + 1 - 6t\frac{4t^2+1-y^2}{4t})(1 - 4t\frac{4t^2+1-y^2}{4t})}{y^3} \left(-\frac{y}{2t}\right) dy \\ &= -\frac{\pi}{t} \int_{\sqrt{4t^2+1-4t\sin\theta_2}}^{\sqrt{4t^2+1-4t\sin\theta_1}} \left(3y^2 - 8t^2 - 1 + \frac{-16t^4 + 4t^2}{y^2}\right) dy \\ &= \frac{\pi}{t} \left[y^3 + (-8t^2 - 1)y - \frac{-16t^4 + 4t^2}{y} \right]_{\sqrt{4t^2+1-4t\sin\theta_1}}^{\sqrt{4t^2+1-4t\sin\theta_2}} \\ &= 4\pi \left(\frac{4t\sin^2\theta_2 - \sin\theta_2 - 2t}{\sqrt{4t^2 + 1 - 4t\sin\theta_2}} - \frac{4t\sin^2\theta_1 - \sin\theta_1 - 2t}{\sqrt{4t^2 + 1 - 4t\sin\theta_1}} \right) \end{aligned}$$

となり, この場合の全曲率は

$$\iint_S K dA = 4\pi \left(\frac{4t\sin^2\theta_2 - \sin\theta_2 - 2t}{\sqrt{4t^2 + 1 - 4t\sin\theta_2}} - \frac{4t\sin^2\theta_1 - \sin\theta_1 - 2t}{\sqrt{4t^2 + 1 - 4t\sin\theta_1}} \right)$$

となる. □

次に交点が4個のときは以下ようになる.

定理 5.4 区間 $(\theta_1, \theta_2), (\theta_3, \theta_4)$ で $f < 0$ であるとき, この曲面の全曲率は

$$\iint_S K d = 4\pi \left(\frac{4t\sin^2\theta_2 - \sin\theta_2 - 2t}{\sqrt{4t^2 + 1 - 4t\sin\theta_2}} - \frac{4t\sin^2\theta_1 - \sin\theta_1 - 2t}{\sqrt{4t^2 + 1 - 4t\sin\theta_1}} + \frac{4t\sin^2\theta_4 - \sin\theta_4 - 2t}{\sqrt{4t^2 + 1 - 4t\sin\theta_4}} - \frac{4t\sin^2\theta_3 - \sin\theta_3 - 2t}{\sqrt{4t^2 + 1 - 4t\sin\theta_3}} \right)$$

となる. ここで θ_n ($n = 1, 2, 3, 4$) は $(1 - 2t\sin\theta_n)\cos\theta_n + R = 0$ を満たす角度である.

(証明) 区間 $(\theta_1, \theta_2), (\theta_3, \theta_4)$ で $f < 0$ であるとして全曲率を求めていく.

$$\begin{aligned} \iint_S K dA &= 2\pi \int_0^{2\pi} \frac{|(1 - 2t\sin u)\cos u + R|(8t^2 + 1 - 6t\sin u)(1 - 4t\sin u)\cos u}{((1 - 2t\sin u)\cos u + R)(4t^2 + 1 - 4t\sin u)^{\frac{3}{2}}} du \\ &= 2\pi \int_0^{\theta_1} \frac{(8t^2 + 1 - 6t\sin u)(1 - 4t\sin u)\cos u}{(4t^2 + 1 - 4t\sin u)^{\frac{3}{2}}} du - 2\pi \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{(8t^2 + 1 - 6t\sin u)(1 - 4t\sin u)\cos u}{(4t^2 + 1 - 4t\sin u)^{\frac{3}{2}}} du \\ &\quad + 2\pi \int_{\theta_2}^{\theta_3} \frac{(8t^2 + 1 - 6t\sin u)(1 - 4t\sin u)\cos u}{(4t^2 + 1 - 4t\sin u)^{\frac{3}{2}}} du - 2\pi \int_{\theta_3}^{\theta_4} \frac{(8t^2 + 1 - 6t\sin u)(1 - 4t\sin u)\cos u}{(4t^2 + 1 - 4t\sin u)^{\frac{3}{2}}} du \\ &\quad + 2\pi \int_{\theta_4}^{2\pi} \frac{(8t^2 + 1 - 6t\sin u)(1 - 4t\sin u)\cos u}{(4t^2 + 1 - 4t\sin u)^{\frac{3}{2}}} du \end{aligned}$$

となるので $\frac{(8t^2 + 1 - 6t\sin u)(1 - 4t\sin u)\cos u}{(4t^2 + 1 - 4t\sin u)^{\frac{3}{2}}}$ の原始関数を $F(x)$ とすると

$$\begin{aligned} \iint_S K dA &= 2\pi (F(\theta_1) - F(0) - (F(\theta_2) - F(\theta_1)) + F(\theta_3) - F(\theta_2) - (F(\theta_4) - F(\theta_3)) + F(2\pi) - F(\theta_4)) \\ &= 4\pi (F(\theta_1) - F(\theta_2) + F(\theta_3) - F(\theta_4)) \\ &= 4\pi \left(\int_{\theta_2}^{\theta_1} \frac{(8t^2 + 1 - 6t\sin u)(1 - 4t\sin u)\cos u}{(4t^2 + 1 - 4t\sin u)^{\frac{3}{2}}} du + \int_{\theta_4}^{\theta_3} \frac{(8t^2 + 1 - 6t\sin u)(1 - 4t\sin u)\cos u}{(4t^2 + 1 - 4t\sin u)^{\frac{3}{2}}} du \right) \\ &= 4\pi \left(\frac{4t\sin^2\theta_2 - \sin\theta_2 - 2t}{\sqrt{4t^2 + 1 - 4t\sin\theta_2}} - \frac{4t\sin^2\theta_1 - \sin\theta_1 - 2t}{\sqrt{4t^2 + 1 - 4t\sin\theta_1}} + \frac{4t\sin^2\theta_4 - \sin\theta_4 - 2t}{\sqrt{4t^2 + 1 - 4t\sin\theta_4}} - \frac{4t\sin^2\theta_3 - \sin\theta_3 - 2t}{\sqrt{4t^2 + 1 - 4t\sin\theta_3}} \right) \end{aligned}$$

よって、この場合の全曲率は

$$\iint_S Kd = 4\pi \left(\frac{4t \sin^2 \theta_2 - \sin \theta_2 - 2t}{\sqrt{4t^2 + 1 - 4t \sin \theta_2}} - \frac{4t \sin^2 \theta_1 - \sin \theta_1 - 2t}{\sqrt{4t^2 + 1 - 4t \sin \theta_1}} + \frac{4t \sin^2 \theta_4 - \sin \theta_4 - 2t}{\sqrt{4t^2 + 1 - 4t \sin \theta_4}} - \frac{4t \sin^2 \theta_3 - \sin \theta_3 - 2t}{\sqrt{4t^2 + 1 - 4t \sin \theta_3}} \right)$$

となる. □

トーラスの場合は曲線と回転軸の交点を $\gamma(\theta_R)$, $\gamma(2\pi - \theta_R)$ と表すことができた. 今回の場合は $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$, を用いて表すことができた.

参考文献

- [1] 小林昭七著 曲線と曲面の微分幾何 (改訂版) 1995年 (裳華房)
- [2] 梅原雅顕, 山田光太郎著 曲線と曲面 -微分幾何的アプローチ- 2002年 (裳華房)
- [3] 竹内洋介, 田中健雄, 中島甫著 曲面のガウス曲率と平均曲率についての考察 2015年 (三重大学教育学部卒業ゼミナール報告書)
- [4] 竹内洋介著 複素数を用いた平面曲線の全曲率の考察 2017年 (三重大学教育学研究科修士論文)
- [5] 田中健雄著 曲線の変形における全曲率の変化 2017年 (三重大学教育学研究科修士論文)