人文論叢(三重大学)第8号 1991

# 集合算公理系の不完全性

山岡悦郎

**要旨**　Tarskiは，人工言語における真理の定義可能性を問題とする際，ある集合算公理系の言語をとりあげた．これは，Huntingtonの与えた2番目のBoole代数公理系から若干の公理を取り除いてえられる公理系の解釈とみなしうるものである．論理学的観点からみると，この体系で矛盾律や排中律が成立することを真理の定義を用いて示すことができるのみならず，極めて初等的な方法を用いることによって，この体系が不完全であることを証明することができる．

## はじめに

数学理論の不完全性については，Gödelの業績が有名であるが，ほぼ同じ頃，Tarskiが集合算公理系の不完全性について言及したことはあまりに知られていないように思われる．Gödelの場合，不完全性定理はほとんど全ての数学理論に対して成立するものであったし，その証明方法もGödel数化，帰納的関数の理論の使用等，極めて斬新なものであった．また，その定理の内容も秀れて重要な哲学的意義を有するものであった．それに比べると，Tarskiの場合は，Gödelとは独立に主張されたとはいえ，時期的にも若干遅れ，かつ，不完全性そのものが直接の研究課題だったのではなく，彼の輝かしい真理論研究の，いわば副次的産物ともみなしうるものだったのである．さらに，その証明を実際に遂行してみればわかるように，Tarskiの主張は初等的なやり方でもって明らかにすることができるのであり，Gödelの場合のような，目を瞠る程の斬新さを必要とするものではなかった．

こうしたことから，数学界，哲学界に与えた衝撃の大きさという点では，両者の間には確かに大きな違いがある．だがそれにもかかわらず，何ら新奇な方法を用いずに，たとえ制限された領域であるとはいえ，数学の基礎的分野の不完全性を示すことができるという点では，Tarskiの主張は看過できないものをもっていると思われるのである．

Tarskiは，1935年，真理の定義に関する画期的な論文「形式化された言語における真理概念」を発表したが，そこにおいて，彼は次のことを明らかにした．(1)　日常言語においては，真理の定義は困難である．(2)　有限階の言語においては，真理の定義は可能である．(3)　無限階の言語においては，真理の定義は不可能である．

そして，その際，‘真’を‘満足’でもって定義すると同時に，有限階の言語の一例として，Tarskiは集合算の言語（Sprache des Klassenkalküls）をとりあげ，その体系では矛盾律や排中律が成立すること，ならびに，その体系は無矛盾，不完全であると主張したのである．

ところで，前述の論文では，Tarskiは不完全性に言及はしていても，それについての厳密な証明は与えていない．また，論文全般についての彼の記述は，対象言語的表現とメタ言語的表現が入りみだれ，決して読みやすいものではない．そこで，本小論では，基本的にはTarski的概念を採用しながらも，彼の記述にとらわれることなく，平明を旨としつつ，自

由かつ informal な仕方でもって，集合算公理系の不完全性についての証明を与えてみたい．

## 1．集合算の公理系

1.1　Tarski のとりあげる公理系は，次のようにして定義される．まず記号について．

**定義1**

(1)　論理記号：~，∨，( )

$A$, $B$ を命題とするとき，$\sim A$ は‘$A$ でない’という命題を意味し，$A \vee B$ は‘$A$ または $B$’という命題を意味する．また，変項 $v$ に対して，$(v)A$ は‘全ての $v$ に対して $A$ が成立する’という命題を意味する．連言記号‘∧’，含意記号‘→’，同値記号‘↔’，存在記号‘(∃)’は通常の仕方で定義される．

(2)　集合記号

(i)　定項記号：$f_i(i=1, 2 \cdots)$

(ii)　変項記号：$v_i(i=1, 2 \cdots)$

(3)　関数記号：─，∩，∪．

$\alpha$, $\beta$ を任意の集合とするとき，$\overline{\alpha}$, $\alpha \cap \beta$, $\alpha \cup \beta$ はそれぞれ，‘$\alpha$ の補集合’，‘$\alpha$ と $\beta$ の積’，‘$\alpha$ と $\beta$ の和’を表す．

(4)　括弧：(,　)，[,　]，{,　}等．

(5)　述語記号：⊆．

集合 $\alpha$, $\beta$ に対して，$\alpha \subseteq \beta$ は‘$\alpha$ は $\beta$ に包含される’を意味する．

1.2　次に，項(ターム)と論理式については，次のように定義される．ただし，論理式については，Tarski は‘文関数’という表現を用いているので，以下ではその表現の方を採用することにする．

**定義2**

A　項について．

(1)　集合記号は項である．

(2)　$\alpha$, $\beta$ が項ならば，$\overline{\alpha}$, $\alpha \cap \beta$, $\alpha \cup \beta$ は項である．

(3)　以上(1)，(2)によって項とわかるものだけが項である．

B　文関数について．

$x$ が次の4つの条件の1つを満足するとき，かつそのときに限って，$x$ は文関数である：

(1)　$x = v_k \subseteq v_l$ なる自然数 $k$, $l$ が存在する．

(2)　$x = \sim y$ なる文関数 $y$ が存在する．

(3)　$x = y \vee z$ なる文関数 $y$, $z$ が存在する．

(4)　$x = (v_k)y$ なる文関数 $y$ と自然数 $k$ が存在する．

1.3　文関数と，通常の仕方で定義される自由変項を用いて，文は次のように定義される．

**定義3**　$x$ が文関数であり，かつ，いかなる変項 $v_k$ もその関数 $x$ の自由変項でないとき，かつそのときに限って，$x$ は文である．記号で表すと

$$x \in S$$

ここで，記号‘$S$’は‘文の集合’を意味する．

集合算公理系での公理は次のようである．

**定義4**　$x$が次の2つの条件の1つを満足するとき，かつそのときに限って，$x$は公理である：

A　$x \in S$，かつ，$x$が次の4つの関数のうちの1つの全称量化であるような文関数$y$，$z$，$u$が存在する．

(1)　$\sim(y \vee y) \vee y$.

(2)　$\sim y \vee (y \vee z)$.

(3)　$\sim(y \vee z) \vee (z \vee y)$.

(4)　$\sim(\sim y \vee z) \vee \{\sim(u \vee y) \vee (u \vee z)\}$.

B　$x$は次の5つの文の1つと同じである．

(1)　$(v_1)(v_1 \subseteq v_1)$.

(2)　$(v_1)(v_2)(v_3)\{\sim(v_1 \subseteq v_2) \vee \sim(v_2 \subseteq v_3) \vee (v_1 \subseteq v_3)\}$.

(3)　$(v_1)(v_2)(\exists v_3)\{(v_1 \subseteq v_3) \wedge (v_2 \subseteq v_3) \wedge (v_4)\{\sim(v_1 \subseteq v_4) \vee \sim(v_2 \subseteq v_4) \vee (v_3 \subseteq v_4)\}\}$.

(4)　$(v_1)(v_2)(\exists v_3)\{(v_3 \subseteq v_1) \wedge (v_3 \subseteq v_2) \wedge (v_4)\{\sim(v_4 \subseteq v_1) \vee \sim(v_4 \subseteq v_2) \vee (v_4 \subseteq v_3)\}\}$.

(5)　$(v_1)(\exists v_2)\{(v_3)(v_4)\{\{\sim(v_3 \subseteq v_1) \vee \sim(v_3 \subseteq v_2) \vee (v_3 \subseteq v_4)\} \wedge \{\sim(v_1 \subseteq v_3) \vee \sim(v_2 \subseteq v_3) \vee (v_4 \subseteq v_3)\}\} \wedge (v_5)\{(v_5 \subseteq v_2) \vee (\exists v_6)\{(v_6 \subseteq v_1) \wedge \sim(v_6 \subseteq v_2) \wedge (v_6 \subseteq v_5)\}\}\}$.

記号で表すと

$$x \in Ax$$

ここで，記号‘$A_x$’は‘公理の集合’を意味する．

通常の公理系では，公理図式が与えられるが，この場合は，自由変項を含まない文が公理となる．(1)

**1.4**　推論規則は‘代入’，‘分離’，‘全称作用素の導入’，‘全称作用素の除去’の諸規則であり，それぞれについては次のように定義される．

**定義5**

A　代入の規則について．

$k$と$l$が0とは異なる自然数であり，かつ，$x$と$y$が次の6つの条件の1つを満足する文関数であるとき，かつそのときに限って，$x$は(自由)変項$v_l$に(自由)変項$v_k$を代入することによって，$y$からえられる表現である．

(1)　$x = v_k \subseteq v_k$，かつ，$y = v_l \subseteq v_l$

(2)　$x = v_k \subseteq v_m$，かつ，$y = v_l \subseteq v_m$，あるいは，$x = v_m \subseteq v_k$，かつ，$y = v_m \subseteq v_l$となるような，$l$とは異なる自然数$m$が存在する．

(3)　$v_l$は関数$y$の自由変項ではなく，かつ，$x = y$

(4)　$x = \sim z$，$y = \sim t$となるような文関数$z$，$t$が存在し，かつ，$z$は，変項$v_l$に変項$v_k$を代入することによって，$t$からえられる表現である．

(5)　$x = z \vee u$，$y = t \vee w$となるような文関数$z$，$t$，$w$が存在する．ただし，$z$と$u$は，変項$v_l$に変項$v_k$を代入することによって，それぞれ$t$および$w$からえられる．

(6)　$x = (v_m)z$，$y = (v_m)t$，かつ，$z$は変項$v_l$に変項$v_k$を代入することによって$t$からえられる，といったような文関数$z$，$t$，および，$k$，$l$とは異なる自然数$m$が存在する．

B　分離則について．

関数$\sim y \vee z$と関数$y$から関数$z$を推論することができる．

C　全称作用素の導入の規則について．

$v_k$ が関数 $y$ の自由変項でないとき，関数 $y \vee z$ から関数 $y \vee (v_k)z$ を推論することができる．

D　全称作用素の除去の規則について．

関数 $y \vee (v_k)z$ から関数 $y \vee z$ を推論することができる．

前提としての文の集合から推論規則を用いて導出される文のことを，文の集合の結論という．そのような結論として考えられるのは，(1)　その(前提としての)文の集合に属する全ての文，(2)　上記4つの推論規則を任意の回数適用することによって，それらの文からえられる全ての文，である．この‘結論’の概念を定式化するためには，まず補助的概念として‘$n$ 次の結論’という概念を定義する．

**定義6**　$x \in S$，$X \subseteq S$，かつ，$n$ が自然数であるときに，次の6つのうちのどれかが成立するとき，かつそのときに限って，$x$ は文の集合 $X$ の $n$ 次の結論である：

(1)　$n=0$，かつ，$x \in X$.

(2)　$n>0$ で，$x$ は集合 $X$ の $n-1$ 次の結論である．

(3)　$n>0$ で，次の3つの全てを満たすような文関数 $u$，$w$，文 $y$，および自然数 $k$，$l$ が存在する．

(i)　$x$，$y$ はそれぞれ，関数 $u$，$w$ の全称量化である．

(ii)　$u$ は，変項 $v_l$ に変項 $v_k$ を代入することによって，関数 $w$ からえられる．

(iii)　$y$ は集合 $X$ の $n-1$ 次の結論である．

(4)　$n>0$ で，次の2つの両方を満たすような文関数 $u$，$w$，文 $y$，$z$ が存在する．

(i)　$x$，$y$，$z$ はそれぞれ，関数 $u$，$\sim w \vee u$，$w$ の全称量化である．

(ii)　$y$，$z$ は共に，集合 $X$ の $n-1$ 次の結論である．

(5)　$n>0$ で，次の3つの全てを満たすような文関数 $u$，$w$，文 $y$，および自然数 $k$ が存在する．

(i)　$x$，$y$ はそれぞれ，関数 $u \vee (v_k)w$，$u \vee w$ の全称量化である．

(ii)　$v_k$ は $u$ の自由変項でない．

(iii)　$y$ は集合 $X$ の $n-1$ 次の結論である．

(6)　$n>0$ で，次の2つの両方を満たすような文関数 $u$，$w$，文 $y$，および自然数 $k$ が存在する．

(i)　$x$，$y$ はそれぞれ，関数 $u \vee w$，$u \vee (v_k)w$ の全称量化である．

(ii)　$y$ は集合 $X$ の $n-1$ の次の結論である．

**定義7**　$x$ は集合 $X$ の $n$ 次の結論である，といったような自然数 $n$ が存在するとき，かつそのときに限って，$x$ は文の集合 $X$ の結論である．記号で表せば

$$x \in C(X)$$

ここで，記号‘$C(X)$’は‘文の集合 $X$ の結論の集合’を意味する．また，記号‘$Cn(X)$’で‘文の集合 $X$ の $n$ 次の結論の集合’を表す．すると次が成立する．

$$x \in C(X) \equiv (\exists n)\{x \in Cn(X)\}$$

**定義8**　$x$ が全ての公理の集合の結論であるとき，かつそのときに限って，$x$ は証明可能な文，あるいは定理である．記号で表せば

$$x \in Pr$$

ここで，記号‘$Pr$’は‘証明可能な文の集合’を意味する．

**1.5**　上に定義された諸概念，とりわけ‘文’や‘結論’の概念を用いて，‘演繹的体系’，‘無矛

盾性'，さらに'完全性'といった概念をメタ理論の中に導入することができる．

**定義 9**　$C(X) \subseteq X \subseteq S$ のとき，かつそのときに限って，$X$ は演繹的体系である．

**定義10**　$X \subseteq S$ で，あらゆる文 $x$ に対して，$x \in C(X)$ であると同時に $\sim x \in C(X)$ ということがないとき，かつそのときに限って，$X$ は文の無矛盾な集合である．

**定義11**　$X \subseteq S$ で，あらゆる文 $x$ に対して，$x \in C(X)$ あるいは $\sim x \in C(X)$ のいずれか一方が成立するとき，かつそのときに限って，$X$ は文の完全な集合である．

**1.6**　ところで，Tarskiのとりあげる集合算の言語は，形式的な純粋に構文論的な言語ではなく，真偽などの意味論的概念をも含むところの'形式化された'言語である．彼は'満足'概念を用いて'真なる文'を定義するが，まず'集合の列 $f$ が文関数 $x$ を満足する'ということについて，次のような定義を与える［なお，以下においては，$f$：$f_1$，$f_2$，…であり，$f_k$ は列 $f$ の $k$ 番目の集合(ターム)を意味する］．

**定義 12**　集合の無限列 $f$，および文関数 $x$ に対して，次の 4 つの条件のうちの 1 つが成立するとき，かつそのときに限って，列 $f$ は関数 $x$ を満足する：

(1)　$x = v_k \subseteq v_l$ で，$f_k \subseteq f_l$ となるような自然数 $k$，$l$ が存在する．

(2)　$x = \sim y$ で，$f$ は $y$ を満足しない，といったような文関数 $y$ が存在する．

(3)　$x = y \vee z$ で，$f$ は $y$ を満足するか $z$ を満足するかのいずれかである，といったような文関数 $y$，$z$ が存在する．

(4)　$x = (v_k) y$ で，$f$ とはせいぜい $k$ 番目の場所で異なるにすぎないような，集合の全ての無限列は $y$ を満足する，といったような自然数 $k$，および文関数 $y$ が存在する．

さて，列 $f$ が文関数 $x$ を満足するか否かは，その関数に含まれる自由変項 $v_k$ とそれに対応するところの列 $f$ の $k$ 番目のターム $f_k$ にのみ依存することは明らかである．また，自由変項を含まない文関数，すなわち文の場合，そのような関数を列によって満足することは，その列のタームの性質には依存しない．よって文の場合は，(1)　集合の全ての無限列が所与の文を満足するか，(2)　いかなる列もそれを満足しないか，のいずれかである．Tarskiは文の真偽を'集合の無限列による文の満足'で定義するが，それは次のようなものである．

**定義13**　$x \in S$ で，集合の全ての無限列が $x$ を満足するとき，かつそのときに限って，$x$ は真なる文である．記号で表すと

$$x \in Tr$$

ここで，記号'$Tr$'は'真なる文の集合'を意味する．

**定義14**　$x \in S$ で，集合のいかなる無限列も $x$ を満足しないとき，かつそのときに限って，$x$ は偽なる文である．

## 2　集合算公理系の不完全性

上のように定義づけられる集合算公理系では，以下の補題，定理が成立する．

**補題 A**　集合の無限列 $f$ が文関数 $x$ を満足し，集合の無限列 $g$ が

$v_k$ が関数 $x$ の自由変項であれば，あらゆる $k$ に対して，$f_k = g_k$

という条件を満足するならば，列 $g$ もまた関数 $x$ を満足する．

**証明**　集合の無限列 $f$ が文関数 $x$ を満足するのは，定義 12 における(1)～(4)の場合であるが，そのどの場合においても，集合の無限列 $g$ が上の条件を満足するならば，列 $g$ もまた関

数 $x$ を満足することを示せばよい．他の場合も同様であるので，(1)の場合だけを示す：$x=v_k \subseteq v_l$ で，条件より列 $f$ は関数 $x$ を満足する．よって，定義 12 より，$f_k \subseteq f_l$ となるような自然数 $k$，$l$ が存在する．また，条件より，あらゆる $k$ に対して，$f_k=g_k$ であるから，$f_k=g_k$，$f_l=g_l$ が成立する．よって，$g_k \subseteq g_l$ が成立する．故に，再び定義12より，列 $g$ は関数 $x$ を満足する．(証明終)

**補題 B**　$x \in S$ で，集合の少なくとも 1 つの無限列が文 $x$ を満足するならば，集合の全ての無限列が $x$ を満足する．

**証明**　ある集合の無限列が文 $x$ を満足するならば，任意の無限列が $x$ を満足するということを示せばよい．ある集合の無限列 $f$ が文 $x$ を満足するとする．ところで，$x$ は文であるので，自由変項は含んでいない．よって，集合の任意の無限列 $g$ に対して

$v_k$ が関数 $x$ の自由変項であるならば，あらゆる $k$ に対して，$f_k=g_k$

が成立する．故に，補題 A より，列 $f$ が文 $x$ を満足するならば，任意の列 $g$ もまた文 $x$ を満足する．(証明終)

**補題 C**　$x \in S$ で，$x$ が真なる文でないとき，かつそのときに限って，$x$ は偽なる文である．

**証明**　$x$ は偽なる文であるとする．定義 14 より，集合のいかなる無限列も $x$ を満足しない．よって，定義 13 より，$x$ は真なる文ではない．逆に，$x$ は真なる文でないとする．すると，定義 13，補題 B の対偶より，$x$ は偽なる文である．(証明終)

**定理1**　全ての文 $x$ に対して，$x$ は真なる文であると同時に偽なる文であるということはない．(矛盾律)

**証明**　定義 12 より，集合のある無限列がある文関数を満足すると同時に満足しないということは不可能である．したがって，集合の全ての無限列が文 $x$ を満足すると同時に満足しないということは不可能である．これは，定義 13，14 より，‘$x$ は真なる文であると同時に偽なる文であるということはない’ということを意味する．(証明終)

**定理 2**　全ての文 $x$ に対して，$x$ は真なる文であるか偽なる文であるかのどちらかである．(排中律)

**証明**　補題 B とそれの対偶により，文 $x$ に対しては，集合の全ての無限列が $x$ を満足するか満足しないかのどちらかであって，それ以外の可能性はない．これは，定義 13，14 より，‘$x$ は真なる文であるか偽なる文であるかのどちらかである’を意味する．(証明終)

**補題 D**　$y$ が文関数 $x$ の全称量化であれば，集合の全ての無限列が $x$ を満足するためには，集合の全ての無限列が $y$ を満足することが必要十分条件である．

**証明**　集合の全ての無限列が $x$ を満足するならば，どのようなタームを自由変項に代入してもよく，そのときはまた，$x$ の全称量化たる $y$ も集合の全ての無限列によって満たされるのは明らかである．逆に，集合の全ての無限列が $y$ を満足するのであれば，$x$ の自由変項にはどのようなタームを代入してもよく，そのときは，$x$ は集合の全ての無限列によって満たされることになる．(証明終)

**定理3**　$X \subseteq Tr$ であれば，$C(X) \subseteq Tr$，特に，$C(Tr) \subseteq Tr$.

**証明**　$x \in S$，$x \in Cn(X)$ として，全ての $n$ に対して，$Cn(X) \subseteq Tr$ となることを示せばよい．$n$ についての数学的帰納法による．

(I)　$n=0$ のときは，定義 6 の(1)より，$x \in X$ である．よって，$C_0(X) \subseteq X$．他方，条件より，$X \subseteq Tr$．よって，$C_0(X) \subseteq X \subseteq Tr$．すなわち，$C_0(X) \subseteq Tr$.

（Ⅱ）$n=k(>0)$のとき成立すると仮定し，$n=k+1$のときも成立することを示す．$n=k+1$（つまり，$x\in C_{k+1}(X)$）のときとは，定義6によれば，次の5つの場合のいずれかである．

(1)　$x\in C_k(X)$ならば$x\in C_{k+1}(X)$であるというとき．この場合は，帰納法の仮定より，$C_k(X)\subseteq Tr$が成立するから，$C_{k+1}(X)\subseteq Tr$.

(2)　次の3つの条件が成立するならば，$x\in C_{k+1}(X)$であるというとき：(i)文$x$，$y$はそれぞれ，文関数$u$，$w$の全称量化である．(ii)　$u$は，変項$v_l$に変項$v_k$を代入することによって，$w$からえられる．(iii)　$y\in C_k(X)$.

この場合での$x\in C_{k+1}(X)$のときは次のことがいえる：

仮定より，$y\in C_k(X)\subseteq Tr$であるから，$y$は真なる文である．したがって，$y$は集合の全ての無限列によって満たされる．よって，補題Dより，文関数$w$も集合の全ての無限列によって満たされる．ここで，$w$の変項$v_l$に変項$v_k$を代入して文関数$u$を作ると，$y$が真ならば，$u$も集合の全ての無限列によって満たされるのは明らかである．したがって，再び補題Dを用いると，$u$の全称量化たる$x$も集合の全ての無限列によって満たされる．すなわち，$x\in Tr$. よって，$x\in C_{k+1}(X)$のときは，$x\in Tr$. 故に，$C_{k+1}(X)\subseteq Tr$.

(3)　文$x$，$y$，$z$はそれぞれ，文関数$u$，$\sim w\vee u$，$w$の全称量化であり，かつ$y\in C_k(X)$，$z\in C_k(X)$ならば，$x\in C_{k+1}(X)$であるというとき．この場合での$x\in C_{k+1}(X)$のときは，次のことがいえる：

仮定より，$C_k(X)\subseteq Tr$. 故に，$y$，$z$は共に真なる文である．したがって，集合の全ての無限列が$y$，$z$を満足する．よって，補題Dより，文関数$\sim w\vee u$，$w$は共に集合の全ての無限列によって満たされる．また，推論規則より，$\sim w\vee u$と$w$から$u$を推論することができる．よって，集合の全ての無限列は$u$をも満足する．ここで再び補題Dを用いると，$u$の全称量化たる$x$も集合の全ての無限列によって満たされる．すなわち，$x\in Tr$. よって，この場合，$C_{k+1}(X)\subseteq Tr$.

なお，定義6における(5)，(6)の場合での$x\in C_{k+1}(X)$のときも，同じようにして，$C_{k+1}(X)\subseteq Tr$となることを示すことができる．

以上によって，$n=k+1$のときも成立することが示された．すなわち，$X\subseteq Tr$であれば，$C(X)\subseteq Tr$. また，$Tr\subseteq Tr$. よって，$C(Tr)\subseteq Tr$.　（証明終）

**定理4**　集合$Tr$は無矛盾で完全な演繹的体系である．

**証明**　定理3より，$C(Tr)\subseteq Tr\subseteq S$. よって，定義9より，$Tr$は演繹的体系である．また，$C(Tr)\subseteq Tr$であるから，補題C，定理1，定義10より，任意の$x\in S$に対して，$x\in C(Tr)$であると同時に$\sim x\in C(Tr)$ということはない．故に，$Tr$は無矛盾な集合である．さらに，補題C，定理2，定義11より，任意の$x\in S$に対して，$x\in C(Tr)$か$\sim x\in C(Tr)$のいずれか1つが成立する．よって，$Tr$は完全な集合である．　（証明終）

**補題E**　あらゆる公理は真なる文である．

**証明**　定義4におけるAの(1)，Bの(1)の場合だけを示せば十分である．

Aの(1)の場合：$x=\sim(y\vee y)\vee y$とすると，$x$は命題論理におけるトートロジーである．よって，$x$は集合の全ての無限列によって満たされる．したがって，補題D，定義13より，$x$の全称量化たる$y\in Ax$もまた，集合の全ての無限列によって満たされる，つまり真である．次に，Bの(1)の場合：$x=v_1\subseteq v_1$とすると，$x$は明らかに真である．よって，補題D，定義13より，$y=(v_1)(v_1\subseteq v_1)$は真となる．　（証明終）

**定理5**　あらゆる証明可能な文は真なる文である．すなわち，$Pr \subseteq Tr$.

**証明**　補題Eより，$Ax \subseteq Tr$．また，定理3より，$Ax \subseteq Tr$ならば，$C(Ax) \subseteq Tr$．よって，$C(Ax) \subseteq Tr$．したがって，定義8より，$Pr \subseteq Tr$.　(証明終)

**補題F**　次の2つが共に成立する：

$$\sim \{(v_1)(v_2)(v_1 \subseteq v_2) \in Pr\},$$
$$\sim \{\sim \{(v_1)(v_2)(v_1 \subseteq v_2)\} \in Pr\}.$$

**証明**　証明可能な文なら必ずもつべき性質を上記2つの文はもたないことを示す．そのためにまず，定義4において定義された公理に対して次の2つの操作をほどこす．

(α)　包含記号 '⊆' を含意記号 '→' で読みかえる．

(β)　命題変項 '$p$', '$q$' を用いて，次の規約にしたがい，全称作用素，存在作用素を取り除く．

(β1)　$(v)F(v)$を$F(p) \wedge F(q)$にかえる．

(β2)　$(\exists v)F(v)$を$F(p) \vee F(q)$にかえる．

A　以上の2つの操作を公理に対してほどこすと，全ての公理が命題論理におけるトートロジーとなることを示す．定義4のAの(1), Bの(1)の場合を示せば十分である．

(Ⅰ)　公理$x$が文関数$\sim(y \vee y) \vee y$の全称量化である場合：

この文関数に含まれている自由変項の数を$m$個とし，関数記号を'$F$'で表すと

$$x = (v_1) \cdots (v_m) F(v_1, \cdots, v_m)$$

となる．この$x$に対して上の規約(β1)にしたがう操作をほどこしてえられるものを$x'$とすると，$x'$は次のようになる．

$$\begin{aligned} x' &= (v_2) \cdots (v_m) F(p, \cdots, v_m) \wedge (v_2) \cdots (v_m) F(q, \cdots, v_m) \\ &= \{(v_3) \cdots (v_m) F(p, p, \cdots, v_m) \wedge (v_3) \cdots (v_m) F(p, q, \cdots, v_m)\} \\ &\quad \wedge \{(v_3) \cdots (v_m) F(q, p, \cdots, v_m) \wedge (v_3) \cdots (v_m) F(q, q, \cdots, v_m)\} \\ &\quad \cdots \\ &= F(p, p, \cdots, p) \wedge \cdots \wedge F(q, q, \cdots, q) \end{aligned}$$

すなわち，$m$個の変項$v_1, \cdots, v_m$に代入できるものは$p$，$q$の2つだけであり，その全ての変項に$p$と$q$のどちらかを代入してえられる$2^m$個の関数値の連言が$x'$となる(厳密には，$m$に関する数学的帰納法を用いる)．そして，明らかに，$F(v_1, \cdots, v_m) = \sim(y \vee y) \vee y$であり，文関数$y$に含まれる$m$個の自由変項に$p$，$q$のどちらを代入しても，$F$はトートロジーとなる．よって，$x'$もまたトートロジーである．

(Ⅱ)　公理$x$が$(v_1)(v_1 \subseteq v_1)$と同一の場合：

この$x$に上の(α)，(β)の規約にしたがう操作をほどこすと

$$\begin{aligned} x' &= (v_1)(v_1 \rightarrow v_1) \\ &= (p \rightarrow p) \wedge (q \rightarrow q) \end{aligned}$$

よって，$x'$はトートロジーとなる．

B　次に，全ての公理の集合の結論(すなわち，証明可能な文)も，上の操作をほどこすならば，同じくトートロジーとなることを示す．そのために，$x \in Cn(Ax)$であるとして，定義6に基づいて，どのような$n$に対しても上が成り立つことを，$n$に関する数学的帰納法で示す．以下において，$x \in Cn(Ax)$に対して，上の諸操作をほどこしてえられるものを$x'$とする．$y$，$z$についても同様である．

（Ⅰ）　$n=0$ で，$x\in Ax$ のとき．

A の結果より，$x'$ は明らかにトートロジーである．

（Ⅱ）　$n=k$ のとき成立すると仮定する．つまり，$x\in C_k(Ax)$ なる $x'$ はトートロジーであると仮定する．そして，この仮定の下で，$n=k+1$ のときも，それに対応する $x'$ はトートロジーとなることを示す．定義6によれば，次のうちのどれかが成立するとき，$x\in C_{k+1}(Ax)$ である．

(1)　$x\in C_k(Ax)$ であるとき：

このときは，帰納法の仮定より，$x'$ はトートロジーである．よって，$x\in C_{k+1}(Ax)$ なる $x'$ もトートロジーである．故にこの場合，$n=k+1$ のときも成立する．

(2)　文 $x$，$y$ がそれぞれ，文関数 $u$，$w$ の全称量化であり，$u$ は変項 $v_l$ に変項 $v_k$ を代入することによって $w$ からえられ，かつ，$y\in C_k(Ax)$ であるというとき：

仮定より，$y'$ はトートロジーである．また，$w$ の中の変項 $v_l$ を他の変項 $v_k$ にかえても，上の諸操作の結果には影響を与えない．したがって，$y'$ がトートロジーならば，$x'$ もトートロジーである．よってこの場合，$n=k+1$ のときも成立する．

(3)　文 $x$，$y$，$z$ はそれぞれ，文関数 $u$，$\sim w\vee u$，$w$ の全称量化であり，しかも，$y\in C_k(Ax)$，$z\in C_k(Ax)$ であるというとき：

A の(Ⅰ)の結果より

(i)　$x'$ は，関数 $u$ の論理的形式をした，$u$ の自由変項の全てに $p$ か $q$ を代入してえられる関数値の全ての連言である．

(ii)　$y'$ は，関数 $\sim w\vee u$ の論理的形式をした，$\sim w\vee u$ の自由変項の全てに $p$ か $q$ を代入してえられる関数値の全ての連言である．

(iii)　$z'$ は，関数 $w$ の論理的形式をした，$w$ の自由変項の全てに $p$ か $q$ を代入してえられる関数値の全ての連言である．

以上3つが成立する．そして，$y'$ の連言肢と $z'$ の連言肢から，分離則にしたがって，$x'$ の連言肢を推論することができる．ところで，$y\in C_k(Ax)$，$z\in C_k(Ax)$．したがって，$y'$，$z'$ は共に仮定よりトートロジーである．よって，$y'$ と $z'$ の連言肢も全てトートロジーである．したがって，$x'$ の連言肢も全てトートロジーとなるから，$x'$ はトートロジーとなる．故にこの場合，$n=k+1$ のときも成立する．

(4)　文 $x$，$y$ はそれぞれ，文関数 $u\vee(v_k)w$，$u\vee w$ の全称量化であり，$v_k$ は $u$ の自由変項でなく，しかも，$y\in C_k(Ax)$ であるというとき：

$u$ を $m$ 変数関数 $u(v_1,\ \cdots\ ,v_m)$，$w$ を $n-m$ 変数関数 $w(v_{m+1},\ \cdots\ ,v_n)$ とすると $(0\leqq m<n)$，$y$ は

$$y=(v_1)\cdots(v_n)\{u(v_1,\ \cdots\ ,v_m)\vee w(v_{m+1},\ \cdots\ ,v_n)\}$$

として表すことができる．この場合，$u$，$w$ の変項の全てに $p$ か $q$ を代入してえられる関数値の場合の数はそれぞれ，$2^m$，$2^{n-m}$ 通りである．そして，$y'$ は，$2^m$ 通りの $u$ の関数値 $u(a_1,\ \cdots\ ,a_m)$ の各々に対して $2^{n-m}$ 通りの $w$ の関数値 $w(a_{m+1},\ \cdots\ ,a_n)$ の各々を選言記号で結びあわせたもの（これは $2^n$ 通り存在する）の連言となる．（ただし，$a_1,\ \cdots\ ,a_n$ はいずれも $p$ か $q$ に等しい．以下同じ）　また

$$x=(v_1)\cdots(v_{n-1})\{u(v_1,\ \cdots\ ,v_m)\vee(v_n)w(v_{m+1},\ \cdots\ ,v_n)\}$$

とすると，$x'$ は，$2^m$ 通りの $u$ の関数値の各々に対して $2^{n-m-1}$ 通りの $(v_n)w(a_{m+1},\ \cdots\ ,a_{n-1},$

$v_n$)の各々を選言記号で結びあわせたもの(これは$2^{n-1}$通り存在する)の連言である．ここで，$u(p,\ \cdots,p)$，すなわち，$u$の全ての変項に$p$を代入した場合を1つ固定して考える．$y'$においては，$u(p,\ \cdots,p)$と$w$の関数値からできる選言の数は全部で$2^{n-m}$である．他方において，$x'$の場合は，$u(p,\ \cdots,p)$と$(v_n)w(a_{m+1},\ \cdots,a_{n-1},\ v_n)$からできる選言の数は全部で$2^{n-m-1}$であるが，$v_n$に$p$，$q$を代入して全称作用素を除去すると，$u(p,\ \cdots,p)$と$w(a_{m+1},\ \cdots,a_n)$からできる選言の数は$2^{n-m}$となり，しかも，$w(a_{m+1},\ \cdots,a_n)$の方は，$w(v_{m+1},\ \cdots,v_n)$の変項に$p$，$q$を代入してえられる$w$の関数値の全ての場合をつくしている．したがって，$u(p,\ \cdots,p)$を1つ固定して考えた場合は，$y'$のその部分と$x'$のその部分は等しい．そして，これは$u$のどのような関数値に対しても成立するから，結局，$x'$と$y'$は等しいということになる．仮定より，$y \in C_k(Ax)$で，しかも，$y'$はトートロジーである．よって，$x'$もトートロジーとなるから，この場合，$n=k+1$のときも成立する．

(5) 文$x$，$y$はそれぞれ，文関数$u \vee w$，$u \vee (v_k)w$の全称量化であり，かつ，$y \in C_k(Ax)$であるというとき：

これは(4)の逆の場合であるから，$y'$がトートロジーなら$x'$もトートロジーである．よってこの場合，$n=k+1$のときも成立する．

以上(Ⅰ)，(Ⅱ)より，$x \in C(Ax)$なる$x$に対して上記の諸操作をほどこしてえられたものもトートロジーとなることが示された．

ここで，$(v_1)(v_2)(v_1 \subseteq v_2)$，$\sim\{(v_1)(v_2)(v_1 \subseteq v_2)\}$の2つの文を考えてみる．それぞれに対して上記の諸操作をほどこすと，$(p \rightarrow p) \wedge (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \wedge (q \rightarrow q)$，$\sim\{(p \rightarrow p) \wedge (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \wedge (q \rightarrow q)\}$となり，トートロジーではない．よって，$\sim\{(v_1)(v_2)(v_1 \subseteq v_2) \in Pr\}$と$\sim\{\sim\{(v_1)(v_2)(v_1 \subseteq v_2)\} \in Pr\}$が共に成立する．[(2)] (証明終)

**定理6** 証明可能でない真なる文が存在する．すなわち，$\sim\{Tr \subseteq Pr\}$．

**証明** 2つの文$(v_1)(v_2)(v_1 \subseteq v_2)$，$\sim\{(v_1)(v_2)(v_1 \subseteq v_2)\}$のうちのどちらかは，補題C，定理2より，真である．したがって，補題Fより，証明可能でない真なる文が存在する．

(証明終)

**定理7** 集合$Pr$は無矛盾の演繹的体系ではあるが，完全な体系ではない．

**証明** 定理5より，$Pr \subseteq Tr$．したがって，定理5と定理4より，集合$Pr$は無矛盾で演繹的な体系である．また，補題Fより，$\sim\{x \in Pr\}$かつ$\sim\{\sim x \in Pr\}$となる$x \in S$が存在する．他方において，明らかに，$x \in Pr$が成立するとき，かつそのときに限って，$x \in C(Pr)$が成立する．よって，$\sim\{x \in C(Pr)\}$かつ$\sim\{\sim x \in C(Pr)\}$となる$x \in S$が存在する．したがって，定義11より，集合$Pr$は不完全な集合である． (証明終)

## 注

(1) Tarskiの体系は集合算公理系の1つではあるが，Boole代数の解釈としての集合算公理系と同一視されてはならない．Tarski自身述べているように，彼の与える体系は，Huntingtonの与えたBoole代数公理系を簡素化したものなのである(Huntingtonの体系のうち，例えば，最大元，最小元の存在公理などが欠けている)．Boole代数の公理系では完全性の成立することが知られている(それについての簡単な記述としては，野崎昭弘：証明論入門，数学セミナー，1987年7月号，日本評論社)．したがって，不完全性に関するTarskiの主張はかなり制限

された体系についてのものだということができる.

(2) ここでの証明のアイデアは, Hilbert と Ackermann が狭義の述語論理 (Der engere Pradikatenkalkul) の無矛盾性および不完全性を証明する際に用いた方法に負うている.

## 文献

[1] D. Hilbert und W. Ackermann, *Grundzüge der theoretischen Logik*, 3te Aufl, Springer, 1949.

[2] E. V. Huntington, Sets of independent postulates for the algebra of logic, *Transactions American Mathematical Society* **5** (1904) 288-309.

[3] A. Tarski, Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen, *Studia Philosophica* **1** (1935) 261-405. also in : *Alfred Tarski Collected Papers* II (S. R. Givant & R. N. Mckenzie, eds., Birkhäuser, 1986) 51-198.

[4] A. Tarski, The semantic conception of truth and the foundations of semantics, *Philosophy and Phenomenological Research* **4** (1944) 341-376. also in : *Semantics and the Philosophy of Language* (L. Linsky (ed.), Univ. of Illinois Pr., 1952) 13-47.

[5] A. Tarski, *Introduction to Logic and to the Methodology of Deductive Sciences*, trasl. by O. Helmer, Oxford Univ. Pr., 1954.

なお, [3] には次の英訳がある.

[3 ※] A. Tarski, The Concept of Truth in Formalized Languages (*Logic, Semantics, Metamathematics*, transl. by J. H. Woodger, Oxford Clarendon Pr., 1956, 152-278)

また, [5] は次の文献の英訳であるが, ここでは [5] の方を参照した.

[5 ※] A. Tarski, *Einführung in die mathematische Logik und in die Methodologie der Mathematik*, Julis Springer Verlag, 1937.