

—修士学位論文—

周波数応答を用いた  $H_\infty$  ループ整形法のための  
低次多変数重み関数と制御器の設計に  
関する研究

A Study on Designs of  
Low-Order Multivariable Weighting Function and  
Controller for  $H_\infty$  Loop Shaping Method  
Using Frequency Responses

平成 29 年度

三重大学大学院工学研究科  
博士前期課程 電気電子工学専攻  
宇佐美朋大

# 目次

第1章 緒言	1
1.1 研究の背景と目的	1
1.2 論文の構成	4
1.3 表記	6
第2章 $H_\infty$ ループ整形法	7
2.1 制御器設計手順	7
2.1.1 開ループ整形	8
2.1.2 安定化制御器 $C_\infty$ の設計及び制御器 $C$ の導出	11
2.2 性能レベル $\gamma$ と性能の関係	13
2.3 $H_\infty$ ループ整形法の利点と課題	13
2.4 性能レベルを保証する重み関数設計法	14
2.4.1 $\nu$ -gap	15
2.4.2 Directed-gap	16
2.4.3 性能レベルを保証する重み関数の設計問題	16
2.4.4 性能レベルを保証する重み関数の設計法の課題	19
2.5 周波数応答を用いた固定構造安定化制御器設計法	20
2.5.1 設計問題	20
2.5.2 固定構造安定化制御器設計法の課題	22
第3章 周波数応答を用いた低次多変数重み関数の設計	23
3.1 重み関数のパラメータ表示	23
3.2 重み関数の設計問題	24
3.2.1 反復 LMI 制約による解法	25
3.3 重み関数の極に対する制約	27
3.3.1 設計アルゴリズム	28
3.4 SISO システムに対するシミュレーション	29

3.4.1	シミュレーション条件	30
3.4.2	結果と考察	30
<b>第4章</b>	<b>周波数応答を用いた低次多変数安定化制御器の設計</b>	<b>34</b>
4.1	制御器のパラメータ表示	35
4.2	安定化制御器の設計問題	35
4.2.1	反復 LMI 制約による解法	37
4.3	制御器の安定制約	38
4.4	閉ループシステムに対する安定性の保証	38
4.4.1	設計アルゴリズム	42
4.5	シミュレーション検証	43
4.5.1	シミュレーション条件	44
4.5.2	結果と考察	45
4.6	実機検証	50
4.6.1	制御対象	50
4.6.2	実験条件 1	51
4.6.3	実験結果 1	53
4.6.4	実験条件 2	56
4.6.5	実験結果 2	57
<b>第5章</b>	<b>周波数応答のみを用いた</b>	
	$H_\infty$ ループ整形法の実機適用	<b>59</b>
5.1	制御対象と設計周波数点	59
5.2	重み関数の設計	60
5.2.1	設計条件	60
5.2.2	重み関数の設計結果	61
5.3	安定化制御器の設計	61
5.3.1	設計条件	61
5.3.2	設計結果	63
5.3.3	時間応答	63
5.4	積分器を有する制御器の設計	65
5.4.1	制御器構造の検討	65
5.4.2	設計条件	66

5.4.3	設計結果 . . . . .	67
5.4.4	積分器を有する制御器の時間応答 . . . . .	67
<b>第 6 章</b>	<b>結言</b>	<b>70</b>
6.1	まとめ . . . . .	70
6.2	今後の課題と展望 . . . . .	70
6.2.1	本研究における課題 . . . . .	70
6.2.2	今後の展望 . . . . .	71
	<b>参考文献</b>	<b>72</b>
	<b>謝辞</b>	<b>76</b>
	<b>論文目録</b>	<b>77</b>

# 第1章 緒言

## 1.1 研究の背景と目的

モデルベース制御器設計法は、制御対象を伝達関数や状態関数としてモデル化したのち、その数式モデルに対して制御器の設計を行う。しかし、制御対象を正確にモデル化することは困難であり、モデル化誤差や特性変動、経年劣化を原因として、実システムに制御器を実装する際、性能劣化が生じ、最悪の場合は実システムが不安定化する恐れがある。この問題に対し、モデル化誤差や不確かさをあらかじめ見積もり、その範囲における制御性能と安定性の保証を目的とした解析及び設計理論としてロバスト制御が提案された。ロバスト制御に基づく設計法の一つに、McFarlane らにより提案された  $H_\infty$  ループ整形法<sup>[1]</sup>がある。この設計法は性能と安定性のバランスが取れた良好な制御器を設計できることで知られている。 $H_\infty$  ループ整形法において制御器の設計は性能決定を目的とした重み関数の設計とシステムの安定化を行う安定化制御器の導出に分けられており、重み関数の設計が適切であれば、閉ループシステムは十分な性能とロバスト性を確保できる。比較的容易にロバストな制御器を設計できることから、工作機の超精密位置決め<sup>[2]</sup>、コンバータ制御<sup>[3]</sup>、ビーム構造物の振動抑制<sup>[4]</sup>など幅広く適用されている。特に、入出力端の外乱に対しバランスのとれたシステムが構築可能となることから、Single-Input-Single-Output システム（以下、SISO システムと呼ぶ）だけでなくヘリコプターの制御<sup>[5]</sup>や電力システムの制御<sup>[6, 7]</sup>などの Multi-Input-Multi-Output システム（以下、MIMO システムと呼ぶ）においても広く利用されている。

一方、従来の  $H_\infty$  ループ整形法では、安定化制御器の設計過程において制御対象の数式モデルを必要とし、これに伴うモデル化誤差により性能劣化や不安定化が起きる恐れがあるとともに、制御対象などのモデル化に対して試行錯誤を必要とした。さらに、この設計法では重み関数の明確な設計指標が確立されておらず、重み関数が適切かどうかの判断が難しい。ゆえに、経験の浅い設計者にとって制御対象などのモデル化に続き、適切な重み関数の設計が課題であり、熟練の設計者でも適切な数式モデルや重み関数を設計することは容易ではない。そこで、実際には応答特性や  $H_\infty$  ループ整形法で評価される性能レベルが所望の水準に達しているかを確認しながら試行錯誤

的に設計を繰り返すという方法が取られる。つまり、得られた評価に応じて重み関数を試行錯誤的に調整する工程と安定化制御器の設計をする工程を繰り返すという煩雑さが生じた。加えて、この手法における最終的な制御器の次数は重み関数の次数の 2 倍と制御対象の次数の和になるため、制御対象や重み関数次第で最終的な制御器が高次数化する問題も存在する。

このような背景の下、Lanzon は文献 [8] において周波数応答を用いた重みの最適化法を提案した。これは、重み関数の設計が古典制御の開ループ整形に基づく観点から、事前に指定した周波数点でシステムの開ループゲインを所望の領域に制限しながらロバスト安定余裕を最大化する準最適化問題として設計問題を定式化したものである。また、片山らは文献 [9] においてこの手法を重み関数の構造を陽に指定した手法に拡張することで、制御器の高次数化を避ける低次数重み関数の設計法を提案した。これらの手法は、ロバスト安定余裕の最大化という観点においては試行錯誤を必要とせず、準最適な重み関数を設計できる。しかし、所望の開ループゲイン領域を定めるために設計者が与える 2 つの規範モデルと最終的な性能レベルとの間には明確な関係性が存在せず、その決定には依然として試行錯誤を伴う。さらに、設計問題における評価関数は重み関数と安定化制御器の両方に依存するため、設計問題は重み関数と安定化制御器の設計を繰り返す問題として定式化され、保守的な局所解に陥る可能性が存在する。また、安定化制御器の設計に関しては述べられず、従来通り数式モデルを用いて設計される。ゆえに、制御対象の数式モデルが必要であるという問題を解決することが出来ていない。この問題に対して、土井らは文献 [10] において安定化制御器の設計問題を周波数応答を利用できる形に変形することで、周波数応答のみを用いた固定構造制御器の設計法を提案した。これにより、 $H_\infty$  ループ整形法の全手順において制御対象の数式モデルを必要としない設計法が実現された。一方、制御器の設計問題を凸近似するために望みの開ループ特性を与える必要があり、その選定によって求解が困難になる場合が存在する。また、依然として重み関数と安定化制御器の設計を繰り返す必要があるため、最適化において保守的な局所解に陥る恐れがあった。

近年、この繰り返しの問題に対して久保らは性能レベルを保証する重み関数設計法<sup>[11]</sup>と望みの開ループ特性を必要としない安定化制御器設計法<sup>[12]</sup>を提案した。この重み関数設計法では、設計指標として所望の特性を持つ 1 つの数式モデルを導入し、そのモデルとの  $\nu$ -gap の上界である Directed gap を最小化する重み関数を設計する。また、設計問題は周波数応答のみを用いた最適化問題に拡張され、システム同定の手間やモデル化誤差に起因する制御性能の低下を意識することなく、準最適な重み関数が設計可能

となった。さらに、この設計指標によって安定化制御器の設計を行わなくても、Directed gap と  $\nu$ -gap および  $\nu$ -gap とロバスト安定余裕の関係から重み関数の適切さを知ることができ、重み関数の設計の段階で一定の性能が保証される。つまり、この重み関数設計法により  $H_\infty$  ループ整形法における重み関数の設計に伴う試行錯誤が軽減される。しかし、この手法では Directed gap の最小化と後述する媒介変数である周波数関数  $Q$  の導出の繰り返しが必要である。また、望みの開ループ特性を必要としない安定化制御器設計法では、周波数応答のみを用いた凸な設計問題を定式化し、容易に任意構造の安定化制御器の設計を可能とした。ここで、久保らは近年注目を集めている制御対象の数学モデルを用いずに制御器を設計する手法である周波数応答を用いた制御器設計法<sup>[9, 10, 13, 14, 15, 16]</sup>に着目した。これらの設計法は、制御対象から取得した入出力データより周波数応答を推定し、その周波数応答を直接用いて低次の制御器を設計している。このため、制御対象の数学モデルの構築が必要なく、モデル化誤差による性能の変動を抑制できるとともに、モデルベース制御器設計法と同等以上の性能をもつ制御器の設計が期待される。さらに、設計者が制御器の構造を指定でき、制御対象の複雑さに影響を受けずに任意の構造を持つ制御器が設計できる。久保らは上記の手法の概念と最適化問題の近似手法である CCCP (Concave-Convex Procedure)<sup>[17]</sup>を用いて凸な設計問題を定式化し、望みの開ループ特性を必要としなくても準最適な任意構造の安定化制御器を設計可能とした。これらの重み関数と安定化制御器の設計法により、 $H_\infty$  ループ整形法の従来の課題であった重み関数の設計に伴う試行錯誤コストや制御器の高次数化の問題が軽減された。しかしながら、これらの手法では SISO システムのみに着目していたため、重み関数や制御器の調整の難度が高い MIMO システムへの拡張が困難な形式で設計問題が記述された。この問題に対し、著者らは安定化制御器設計法を MIMO システムに拡張した<sup>[18]</sup>。この手法によって、MIMO システムにおいても制御器の高次数化の問題を軽減した。しかしながら、文献 [12, 18] では、制御器の分子多項式のみが調整可能であり、制御器の極は設計者が事前に定めておく必要がある。最適な極を選択するためには設計者の試行錯誤が必要不可欠であり、設計における煩雑さを増大させることに繋がる。特に MIMO システムにおいては、その調整は容易ではない。

以上の背景から、本研究では、 $H_\infty$  ループ整形法の全手順において制御対象の数式モデルを必要としない設計法を MIMO システムで実現することを目的とする。本論文では、この目標に対して、MIMO システムに対する重み関数と安定化制御器の設計法を提案する。本手法においても、前任者の手法と同様に重み関数と安定化制御器の設計



を独立して行うことが可能である。提案する重み関数の設計法において、 $\nu$ -gap を直接最小化する設計問題を周波数応答のみを用いた最適化問題として記述し、準最適な重み関数を試行錯誤なく設計することを可能とする。つまり、この手法では  $\nu$ -gap を直接評価するため、前任者の手法とは異なり周波数関数  $Q$  の導出を必要としない。また、提案する安定化制御器の設計法において、安定化制御器の設計問題を反復 LMI (Linear Matrix Inequality) 最適化問題として定式化し、制御対象と重み関数の周波数応答から固定次数の安定化制御器を直接設計することを可能とする。さらに、制御器の分母多項式もパラメータ表示し、準最適な極へと調整する。この手法の最適化問題の求解は反復 LMI 制約のアルゴリズム<sup>[15]</sup>に基づき行う。このアルゴリズムでは、大域的最適解が導出される保証はないが、評価値は少なくとも鞍点もしくは局所最適値に単調収束し、あるクラスの QMI (Quadratic Matrix Inequality) 制約を持つ問題を LMI 最適化計算により効率的に解くことができる。また、Gershgorin bands を用いた安定性評価を導入し、閉ループシステムの安定性を保証する。ゆえに、制御対象のモデル化が省略可能で直接低次数の重み関数と制御器が設計可能であることから設計コストを低減できるとともに、モデル化誤差の影響の抑制が期待できる。さらに、重み関数と制御器の次数をある程度指定可能であり、設計者が与える指標が少ない観点から、より自由度の高い設計が期待できる。

## 1.2 論文の構成

本論文は全 6 章で構成されており、各章の内容は以下の通りである。

### 第 2 章 $H_\infty$ ループ整形法

本研究の基礎となる  $H_\infty$  ループ整形法について述べる。また、前任者により提案された重み関数設計法<sup>[11]</sup>および著者らが提案した安定化制御器の設計法である文献 [18] の概要と課題について述べる。

### 第 3 章 周波数応答を用いた低次多変数重み関数の設計

文献 [11] で提案された固定次数重み関数の設計法の課題であった  $\nu$ -gap の間接的な評価である課題を解決するとともに、MIMO システムへの拡張を実現する手法として、周波数応答を用いた低次重み関数の設計法を提案する。そして、SISO システムのシミュレーションを通じて文献 [12] の手法と同等の性能が達成されることと  $\nu$ -gap による評価の利点を確認する。さらに、MIMO システムのシミュレーションを通じて、重み関数の設計の容易さについて示す。ここでは、重み関数の特徴のみを確認することを目



標とする。なお、時間応答の取得には、安定化制御器の設計が必須であるため、この章では確認せず 5 章で示す。

## 第 4 章 周波数応答を用いた低次多変数安定化制御器の設計

文献 [18] で提案された固定構造安定化制御器設計法の課題であった制御器の極の調整を設計問題に組み込んだ手法として、周波数応答を用いた低次安定化制御器の設計法を提案する。そして、SISO システムにおいてモデルベース制御器設計法<sup>[21]</sup>、モデルベースの低次安定化制御器設計法<sup>[26]</sup>と比較を行い、準最適な安定化制御器が設計されることを確認する。さらに、MIMO システムの実機検証を通じて良好な安定化制御器が設計可能であることを示す。なお、この章のシミュレーションおよび実機検証では、安定化制御器のみの有効性を確認する。

## 第 5 章 周波数応答のみを用いた $H_\infty$ ループ整形法の実機適用

第 3 章と第 4 章の提案手法によって実現される周波数応答のみを用いた  $H_\infty$  ループ整形法を実機実験に適用した結果を確認する。また、モデルベースの設計法や従来手法との比較を通じて提案手法の有効性を示す。

## 第 6 章 結言

本論文のまとめを述べる。そして、今後の課題および本論文の主題である周波数応答を用いた制御器設計と  $H_\infty$  ループ整形法における今後の展望について言及する。

## 1.3 表記

本論文で用いる表記を以下に示す。

$\ \mathbf{G}(s)\ _\infty$	伝達関数 $\mathbf{G}(s)$ の $H_\infty$ ノルム
$\sigma(\mathbf{A})$	行列 $\mathbf{A}$ の特異値
$\bar{\sigma}(\mathbf{A})$	行列 $\mathbf{A}$ の最大特異値
$\underline{\sigma}(\mathbf{A})$	行列 $\mathbf{A}$ の最小特異値
$\lambda(\mathbf{A})$	行列 $\mathbf{A}$ の固有値
$\bar{\lambda}(\mathbf{A})$	行列 $\mathbf{A}$ の最大固有値
$\mathbf{\Lambda}(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} \lambda_1(\mathbf{A}) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2(\mathbf{A}) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n(\mathbf{A}) \end{bmatrix}$	行列 $\mathbf{A}$ の固有値行列
$\mathbf{A}^T$	行列 $\mathbf{A}$ の転置
$\mathbf{A}^*$	行列 $\mathbf{A}$ の複素共役転置
$\mathbf{A}^{-*}$	行列 $\mathbf{A}$ の逆行列の複素共役転置 $((\mathbf{A}^{-1})^*)$
$\mathbf{A}_{pq}$	行列 $\mathbf{A}$ の $(p, q)$ 要素
$\text{Re}\{C\}, \text{Im}\{C\}$	複素数 $C$ の実部および虚部
$\mathbf{I}$	単位行列 ( $\mathbf{I}_n : n$ 次の単位行列)
$\mathcal{R}^{p \times q}$	$q$ 入力 $p$ 出力の実有理伝達関数行列の集合

## 第2章 $H_\infty$ ループ整形法

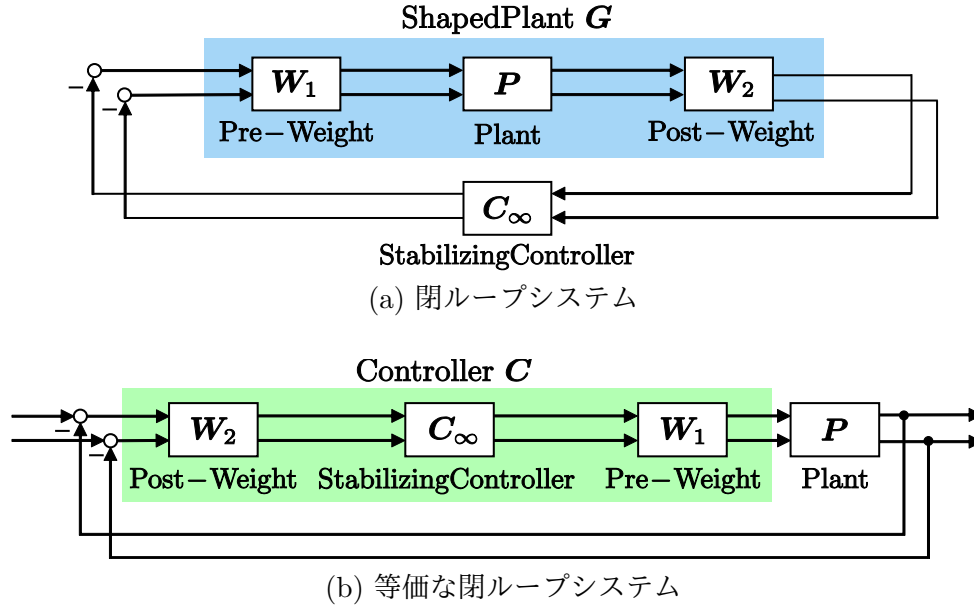
この章では、本研究で用いる線形時不変制御器の設計法である  $H_\infty$  ループ整形法について文献 [1] に基づき制御器設計の手順と特徴を説明する。 $H_\infty$  ループ整形法には、

- 重み関数の設計によりおよそその制御性能が決定可能
- 安定化制御器の設計により位相特性が最適化される
- 適切なループ整形をする重み関数が設計できれば良好な制御性能を示す
- 感度関数と相補感度関数が入力側と出力側でバランスよく整形される
- 反復計算をせずに最適な安定化制御器を求めることができる
- $H_\infty$  標準問題の可解条件である虚軸に近い極や零点の考慮が必要ない

といった利点がある。線形時不変制御器の設計において  $H_\infty$  ループ整形法を用いる理由としては、MIMO システムにおいても良好な制御性能を有するロバストな制御器を比較的容易に設計できることが挙げられる。一方、適切なループ整形をする重み関数の設計において明確な指標が存在しない点や、制御器の設計に制御対象の数式モデルを必要とし煩雑さを伴う点といった問題を有している。さらに、安定化制御器の次数が制御対象の次数と重み関数の次数の和になり、かつ最終的な制御器の次数が制御対象の次数と重みの次数の2倍の和になるため、制御対象や重み関数次第で制御器が高次化しやすいという問題が存在する。

### 2.1 制御器設計手順

$H_\infty$  ループ整形法における制御器設計は、重み関数  $\mathbf{W}_1$ ,  $\mathbf{W}_2$  による開ループ整形 (重み関数の設計) の工程と整形後の拡大システム  $\mathbf{G} = \mathbf{W}_2 \mathbf{P} \mathbf{W}_1$  に対して後述するロバスト安定余裕を最小化する制御器  $\mathbf{C}_\infty$  の設計からなる。また、重み関数と安定化制御器の設計時は図 2.1(a) に示すシステムで行われ、最終的な制御器  $\mathbf{C}$  は図 2.1(b) のシステムに変形されて  $\mathbf{C} = \mathbf{W}_1 \mathbf{C}_\infty \mathbf{W}_2$  として得られる。


 図 2.1:  $H_\infty$  ループ整形法の基本概念

### Step 1 重み関数 $W_1, W_2$ の設計

古典制御の開ループ整形に基づき，図 2.1(a) に示す拡大制御対象  $G = W_2 P W_1$  のゲイン特性が望みの形となるように重み関数  $W_1, W_2$  を決定する。

### Step 2 安定化制御器 $C_\infty$ の設計

開ループ整形後の拡大制御対象  $G$  を安定化し，望みの条件を満足する安定化制御器  $C_\infty$  を設計する。

### Step 3 制御器 $C$ の導出

制御器  $C$  を図 2.1(b) のように  $C = W_1 C_\infty W_2$  として導出する。

このように  $H_\infty$  ループ整形法は非常に単純な 3 つの手順から構成されている。この各手順について 2.1.1 項及び 2.1.2 項で詳しく説明する。

## 2.1.1 開ループ整形

説明の簡潔化のために，まず SISO システムに対する開ループ整形を示し，その後に MIMO システムに対する開ループ整形を示す。

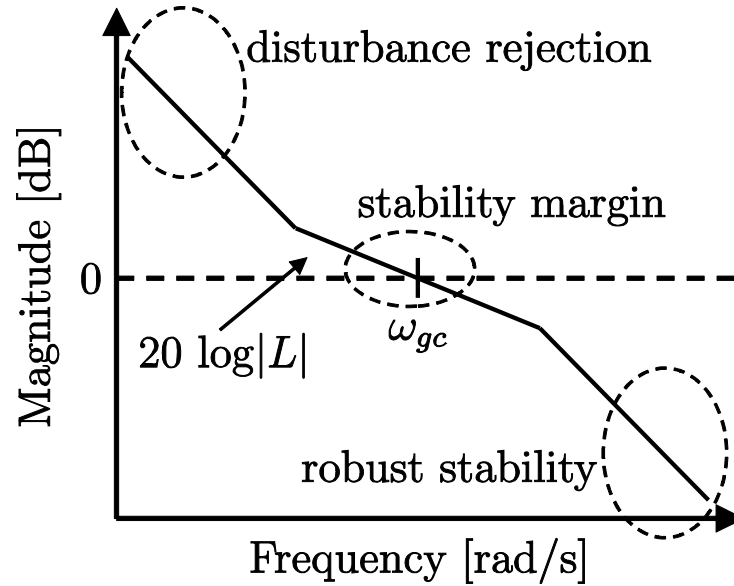


図 2.2: SISO システムにおける開ループ整形

### SISO システムにおける開ループ整形

閉ループシステムにおいて、感度関数  $S$  および相補感度関数  $T$  は制御対象  $P$  と制御器  $C$  を用いて次のように記述される。

$$S = \frac{1}{1 + PC} = \frac{1}{1 + L}, \quad T = \frac{PC}{1 + PC} = \frac{L}{1 + L} \quad (2.1)$$

ここで、 $L = PC$  は開ループ伝達関数である。一般に、閉ループシステムに対して低感度特性や外乱抑圧特性および定常特性の観点からは低周波数帯域で感度関数  $S$  を小さくすることが望まれる。また、ロバスト安定性や雑音除去の観点からは高周波数帯域で相補感度関数  $T$  を小さくすることが望ましい。上記の要求を  $H_\infty$  ループ整形法における開ループ特性  $G = W_2 P W_1$  を用いて記述すると以下のように周波数整形すべきである。

- 図 2.2 のように低周波数帯域では開ループ特性のゲインを大きくとる。
- 高周波数帯域では開ループ特性のゲインが小さくする。
- 中周波数帯域では開ループ特性が 0 dB と交わる点（交差角周波数）が存在し、応答性の向上のために交差角周波数を高くする。
- 交差角周波数付近でのゲインの変化が大きいと安定性にとって望ましくない位相遅れを引き起こすため、緩やかな傾き（ $-20$  dB/dec 以下）に整形すべきである。

このように開ループ特性が設計者にとって望ましいものとなるように周波数整形を行

う考え方が開ループ整形の基本概念である。ここで、SISO システムにおいては重み関数  $W_1$ ,  $W_2$  の役割の違いがないため、どちらかの設計のみでよい。なお、古典制御における開ループ整形ではゲイン特性に加え、位相特性も考慮する必要があるが、 $H_\infty$  ループ整形法では安定化制御器  $C_\infty$  により位相特性が最適化されるためゲイン特性のみに着目すればよい。また、安定化制御器  $C_\infty$  は適切な重み関数が設計された場合、そのゲインがほぼ 0 dB となる。したがって、 $H_\infty$  ループ整形法では拡大システム  $G = W_2 P W_1$  が上述の要望を満たすように整形し、重み関数  $W_1$  または  $W_2$  を決定する。

### MIMO システムにおける開ループ整形

一方、MIMO システムでは  $H_\infty$  ループ整形法における開ループ伝達関数  $G = W_2 P W_1$  が行列で記述されるため、SISO システムと異なり容易な開ループ整形が行えない。

この節では、Papageorgiou らによって提案された開ループ整形法<sup>[19]</sup>を簡潔に示す。まず、周波数ごとに制御対象  $P(j\omega)$  を特異値分解する複素行列  $T_{r1}(j\omega)$ ,  $T_{r2}(j\omega)$  と特異値行列  $D(j\omega) = T_{r2}(j\omega) P(j\omega) T_{r1}(j\omega)$  を求める。次に、周波数ごとに変換された特異値行列  $D(j\omega)$  に対して、開ループ整形を行う重み行列  $\tilde{W}_1(j\omega)$ ,  $\tilde{W}_2(j\omega)$  を決定する。このとき、 $D(j\omega)$  のそれぞれの特異値  $\sigma_i(D(j\omega))$  ( $i = 1, \dots, n$ ) を SISO システムと同様に古典的な開ループ整形の概念に基づいて整形し、図 2.3 のように整形された開ループ行列  $G(j\omega) = \tilde{W}_2(j\omega) D(j\omega) \tilde{W}_1(j\omega)$  の最大特異値  $\bar{\sigma}(G(j\omega))$ , 最小特異値  $\underline{\sigma}(G(j\omega))$  が低周波数帯域でゲインを大きくとり、高周波数帯域でゲインを小さくするように開ループ整形を行うこととなる。また、この整形においても SISO システムと同様に安定化制御器  $C_{\infty(s)}$  により位相特性が改善されるためゲイン特性のみに着目すればよい。さらに、安定化制御器  $C_{\infty(s)}$  は、適切な重み設計がされた場合、そのゲインがほぼ 0 dB となるように設計される。最後に、最終的な重み関数  $W_1(s)$ ,  $W_2(s)$  を  $W_1(j\omega) = T_{r1}(j\omega) \tilde{W}_1(j\omega)$ ,  $W_2(j\omega) = \tilde{W}_2(j\omega) T_{r2}(j\omega)$  となるようにフィッティングを行い導出する。ここで、フィッティングを行う重み関数  $W_1(s)$ ,  $W_2(s)$  の次数によっては完全に制御対象を特異値分解できない可能性がある。この場合には入力端の特性と出力端の特性の差異が生じるが、 $H_\infty$  ループ整形法の安定化制御器設計では、入力端の特性と出力端の特性を含む評価に基づいており、入力端と出力端の両特性の劣化が軽減される。ゆえに、入力端と出力端のすべて特性を深く考慮しなければならないわけではない。以上のように、MIMO システムにおける開ループ整形は SISO システムに比べて工程が複雑であるが、古典的な開ループ整形とは異なり MIMO システムの位相の調整といった非常に困難な作業をしなくてよい。しかし、重み関数のフィッティングの精度次第では性能の劣化や重み関

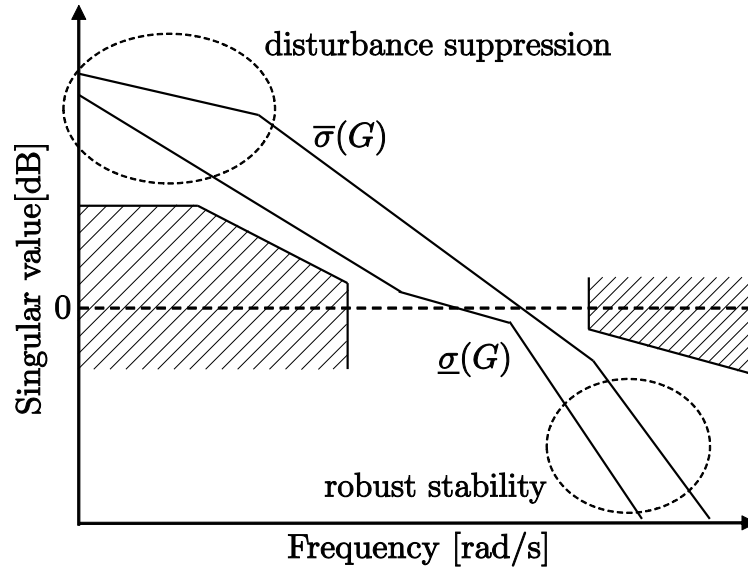


図 2.3: MIMO システムにおける開ループ整形

数の高次数化といった問題を助長する恐れがある。

### 2.1.2 安定化制御器 $C_\infty$ の設計及び制御器 $C$ の導出

$H_\infty$  ループ整形法では、重み関数  $\mathbf{W}_1(s)$ ,  $\mathbf{W}_2(s)$  によって周波数整形された拡大制御対象  $\mathbf{G}(s) = \mathbf{W}_2(s)\mathbf{P}(s)\mathbf{W}_1(s)$  に対して、(2.2) 式の評価値  $\gamma$  を最小化する安定化制御器  $\mathbf{C}_\infty(s)$  を設計する。

#### $H_\infty$ Loop Shaping Method

$$\min_{\mathbf{C}_\infty} \gamma$$

subject to

$$\left\| \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{C}_\infty(s) \end{bmatrix} (\mathbf{I} + \mathbf{G}(s)\mathbf{C}_\infty(s))^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{G}(s) \end{bmatrix} \right\|_\infty < \gamma \quad (2.2)$$

この  $\gamma$  を最小化する安定化制御器  $\mathbf{C}_\infty(s)$  の設計問題は図 2.4 のように外生信号  $\mathbf{d}_i$ ,  $\mathbf{d}_o$  から評価信号  $\mathbf{z}_i$ ,  $\mathbf{z}_o$  までの 4 つのループに対する  $H_\infty$  ノルムを評価する  $H_\infty$  制御問題の特殊な場合に相当する。図 2.4 から分かるように、入力端と出力端から見た感度関数



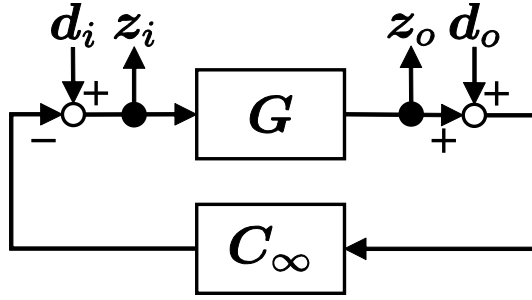


図 2.4: 設計問題導出における概略図

が評価として含まれているため、入出力間でバランスのとれた制御器設計が可能となる。また、(2.2) 式について以下のような関係式が成立することが述べられており<sup>[20]</sup>、(2.2) 式の評価によって入力端と出力端の感度特性、相補感度特性がすべて考慮される。

$$\left\| \begin{bmatrix} I \\ C_\infty(s) \end{bmatrix} (I + G(s)C_\infty(s))^{-1} \begin{bmatrix} I & G(s) \end{bmatrix} \right\|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} I \\ G(s) \end{bmatrix} (I + C_\infty(s)G(s))^{-1} \begin{bmatrix} I & C_\infty(s) \end{bmatrix} \right\|_\infty \quad (2.3)$$

具体的な安定化制御器の設計法として、McFarlane らにより提案された安定化制御器の設計法<sup>[21]</sup>を説明する。いま、(2.4) 式の状態空間表現を持つ拡大制御対象  $G(s)$  に対する安定化制御器  $C_\infty(s)$  は以下の手順で設計される。

$$G(s) = \left[ \begin{array}{c|c} A_p & B_p \\ \hline C_p & D_p \end{array} \right] \quad (2.4)$$

まず、(2.5) 及び (2.6) 式のリカッチ方程式の正定対称解  $X$ ,  $Z$  を計算する。

$$(A_p - B_p S^{-1} D_p^T C_p)^T X + X (A_p - B_p S^{-1} D_p^T C_p) - X B_p S^{-1} B_p^T X + C_p^T R^{-1} C_p = 0 \quad (2.5)$$

$$(A_p - B_p S^{-1} D_p^T C_p) Z + Z (A_p - B_p S^{-1} D_p^T C_p)^T - Z C_p^T R^{-1} C_p Z + B_p S^{-1} B_p^T = 0 \quad (2.6)$$

ここで、

$$S = I + D_p^T D_p, \quad R = I + D_p D_p^T$$

である。この時、最適値  $\gamma_{\min}$  は (2.7) 式により直接計算できる。

$$\gamma_{\min} = \sqrt{1 + \bar{\lambda}(XZ)} \quad (2.7)$$

そして、 $\gamma > \gamma_{\min}$  となる  $\gamma$  を選び、安定化制御器  $C_\infty(s)$  を (2.8) 式として導出する。

$$C_\infty(s) = \left[ \begin{array}{c|c} A_p + B_p F + H(C_p + D_p F) & H \\ \hline B_p^T X & -D_p^T \end{array} \right] \quad (2.8)$$

ここで,

$$\mathbf{F} = -\mathbf{S}^{-1}(\mathbf{D}_p^T \mathbf{C}_p + \mathbf{B}_p^T \mathbf{X}), \quad \mathbf{H} = \gamma^2 \mathbf{W}_a^{-T} \mathbf{Z} \mathbf{C}_p^T, \quad \mathbf{W}_a = (1 - \gamma^2) \mathbf{I} + \mathbf{X} \mathbf{Z}$$

である。このように安定化制御器  $\mathbf{C}_{\infty(s)}$  が設計できたら, 2.1.1 項により求めた重み関数  $\mathbf{W}_1(s)$ ,  $\mathbf{W}_2(s)$  を用いて, 制御対象  $\mathbf{P}(s)$  に対する制御器を  $\mathbf{C}(s) = \mathbf{W}_1(s) \mathbf{C}_{\infty(s)} \mathbf{W}_2(s)$  として導出する。

## 2.2 性能レベル $\gamma$ と性能の関係

性能レベル  $\gamma$  はシステムの外乱等に対する影響を表す指標であると同時にシステムの性能を表す。本節では, 特に重要な 2 つの事項について述べる。

第一に, 性能レベル  $\gamma$  は安定化前の拡大システム  $\mathbf{G}$  と安定化後の開ループ伝達関数  $\mathbf{G}\mathbf{C}_\infty$  の一致度を示し,  $\gamma$  が大きいほど  $\mathbf{G}$  と  $\mathbf{G}\mathbf{C}_\infty$  のずれが大きくなる。すなわち, 大きな  $\gamma$  は重み関数の設計が適切でなく, 開ループ整形によって設計者が指定した望みの制御性能を得られないことを意味する。これに対して,  $H_\infty$  ループ整形法<sup>[1]</sup>や Vinnicombe の文献 [22] において  $\gamma \leq 4$  が推奨されると述べられており, 菅野らは文献 [23] において  $\gamma \leq 2\sqrt{2}$  ( $\simeq 2.8284$ ) である 2 次システムおよび一部の 3 次のシステムは安定化時にゲイン交差角周波数付近で  $\mathbf{C}_\infty$  のゲインが大きくならず,  $\mathbf{G}$  と  $\mathbf{G}\mathbf{C}_\infty$  の一致度が高いと述べている。

第二に, SISO システムにおける安定化後のシステムの位相余裕 (PM) 及びゲイン余裕 (GM) は, (2.9) および (2.10) 式の関係を満たす。これは, 文献 [22] で述べられ, システムの安定余裕の下限が  $\gamma$  によって決定付けられること, 小さな  $\gamma$  は大きな安定余裕を意味することを示す。

$$\text{PM} \geq 2 \arcsin \left( \frac{1}{\gamma} \right) [\text{rad}] \quad (2.9)$$

$$\text{GM} \geq 20 \log \left( \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \right) [\text{dB}] \quad (2.10)$$

## 2.3 $H_\infty$ ループ整形法の利点と課題

2.1.1 および 2.1.2 項で述べたように, 重み関数の設計時にはシステムの位相特性を考慮する必要がなく, 理想的な安定化制御器はシステムのゲイン特性に大きな影響を

与えない。また、安定化制御器の設計法<sup>[21]</sup>では解析的に望みの安定化制御器が設計でき、試行錯誤を必要としない。すなわち、ゲイン特性と位相特性を独立して調整可能で、かつ調整が難しい位相特性は安定化制御器により最適化される。これは、ゲインと位相の同時調整に大きな煩雑さを伴う古典制御の開ループ整形に対して大きな利点であり、MIMO システムにおいてもゲインと位相の同時調整という非常に困難な作業が緩和される。さらに、 $H_\infty$  制御問題の可解条件に必要な虚軸上の極や零点の条件を気にする必要もない。

一方で、重み関数の良否は拡大システム  $\mathbf{G} = \mathbf{W}_2 \mathbf{P} \mathbf{W}_1$  から最適性能レベル  $\gamma_{\min}$  に大きく影響するにも関わらず、その設計には明確な指標が存在しない。そこで、実際には所望の性能レベル以下の  $\gamma$  を得るまで、重み関数を試行錯誤的に設計しなおす必要がある。また、制御器設計全般に言えることであるが、重み関数が良好であっても所望の応答性能が得られないこともあり、その際には制御対象などの数式モデルを再構築する必要がある。これらは、設計にかかる時間的コストや重み関数の最適性の観点から好ましくない。さらに、(2.4)～(2.8) 式が示すように上記の安定化制御器設計法では制御対象の数式モデルが必要不可欠であり、数式モデルの再構築に伴う試行錯誤が不可避である。また、最終的な制御器は  $\mathbf{C} = \mathbf{W}_1 \mathbf{C}_\infty \mathbf{W}_2$  として得られるため、その次数は制御対象の次数と重みの次数の 2 倍の和となる。ゆえに、複雑な特性を持つ制御対象に対してはシステム同定の煩雑さや実装コストの増大を招く。

上記の  $H_\infty$  ループ整形法におけるさまざまな課題に対して、最適化を用いた重み関数設計法<sup>[8, 9, 11, 24]</sup>や低次の安定化制御器設計法<sup>[12, 18, 25, 26]</sup>など多様なアプローチが行われ、課題の完全な解決に向けて多くの研究が行われている。以降では、これらの中でも高い優位性を持つ手法である性能レベルを保証する重み関数設計法<sup>[11]</sup>、周波数応答を用いた MIMO システムに対する固定構造の安定化制御器設計法<sup>[18]</sup>について紹介し、その利点と課題を述べる。

## 2.4 性能レベルを保証する重み関数設計法

文献 [11] では、適切な重み関数を設計するために、新たな重み関数の設計問題として  $\nu$ -gap の上界である Directed gap を最小化する設計問題を定式化し、重み関数の設計の段階で少なくとも達成可能な性能レベル  $\gamma$  の保証を実現した。また、他の重み関数の設計法<sup>[8, 9, 24]</sup>とは異なり、重み関数の設計問題が安定化制御器に依存しないため、安定化制御器とは独立して重み関数の設計ができ、重み関数と安定化制御器の繰り返し設計といった煩雑な作業を省くことができる。さらに、設計に必要なとされる規範モ

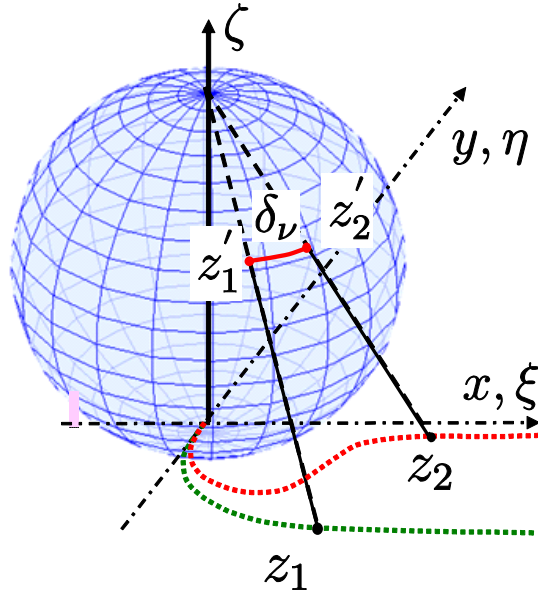


図 2.5: Rieman 球面

デルが 1 つの伝達関数のみであり，比較的容易に適切な重み関数が設計できる。本節では，上記の優位性を有する重み関数の設計法<sup>[11]</sup>について示す。

### 2.4.1 $\nu$ -gap

まず，この設計法の根幹をなす  $\nu$ -gap<sup>[22]</sup>について示す。 $\nu$ -gap は，2 つのシステムの周波数特性の違いを距離として表す指標であり，2 つの安定なシステム  $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{G}_d$  に対しては (2.11) 式で定義される。

$$\delta_\nu(\mathbf{G}, \mathbf{G}_d) = \sup_\omega \bar{\sigma}(\mathbf{M}(j\omega)) \quad (2.11)$$

ここで，

$$\mathbf{M}(j\omega) = (\mathbf{I} + \mathbf{G}_d(j\omega)\mathbf{G}_d(j\omega)^*)^{-1/2}(\mathbf{G}_d(j\omega) - \mathbf{G}(j\omega))(\mathbf{I} + \mathbf{G}(j\omega)^*\mathbf{G}(j\omega))^{-1/2}$$

である。(2.11) 式は，図 2.5 に示される Rieman 球面上に射影された 2 つの複素数の距離の最大値に相当する。なお，図 2.5 における  $z'_1$  および  $z'_2$  は 2 つの複素数  $z_1$  および  $z_2$  の Rieman 球面上への射影であり，複素数  $z = x + iy$  に対して，射影後の座標  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  は以下のように得られる。

$$\xi = \frac{x}{x^2 + y^2 + 1}, \quad \eta = \frac{y}{x^2 + y^2 + 1}, \quad \zeta = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + 1}$$

したがって、小さな  $\nu$ -gap は 2 つのシステムの Nyquist 線図上での距離、すなわち周波数特性が近いことを意味する。また、文献 [22] において (2.12) 式を満たし、2 つのシステム  $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{G}_d$  を共に安定化する制御器  $\mathbf{C}$  が存在することが述べられている。

$$\arcsin \frac{1}{\gamma(\mathbf{G}, \mathbf{C})} = \arcsin \frac{1}{\gamma(\mathbf{G}_d, \mathbf{C})} - \arcsin \delta_\nu(\mathbf{G}, \mathbf{G}_d) \quad (2.12)$$

(2.12) 式より、 $\mathbf{G}_d$  に対する性能レベル  $\gamma(\mathbf{G}_d, \mathbf{C})$  および  $\mathbf{G}$  と  $\mathbf{G}_d$  に対する  $\delta_\nu(\mathbf{G}, \mathbf{G}_d)$  が既知であれば  $\gamma(\mathbf{G}, \mathbf{C})$  が計算可能であることが分かる。また、安定化制御器の設計により達成可能な最小の性能レベル  $\gamma_{\min}$  は定義 ( $\gamma(\mathbf{G}, \mathbf{C}) \geq \gamma_{\min}$ ) から  $\mathbf{G}$  に対する  $\gamma_{\min}$  は  $\gamma(\mathbf{G}, \mathbf{C})$  以下のある値となることが期待される。つまり、 $\mathbf{G}_d$  を安定化する制御器  $\mathbf{C}$  が既知であれば、 $\mathbf{G}$  に対する安定化制御器を設計しなくても、 $\gamma_{\min}$  の上界である  $\gamma(\mathbf{G}, \mathbf{C})$  を算出可能であり、 $\nu$ -gap が小さいならば  $\gamma(\mathbf{G}, \mathbf{C})$  と  $\gamma(\mathbf{G}_d, \mathbf{C})$  は近い値となる。このように、 $\nu$ -gap を用いることにより Nyquist 線図上での評価になかった優位性が生まれ、 $H_\infty$  ループ整形法における重み関数と安定化制御器の繰返し設計の試行錯誤を低減することができる。以上より、 $\nu$ -gap が小さい 2 つのシステムは周波数特性のみならず、 $H_\infty$  ループ整形法における性能レベル  $\gamma(\mathbf{G}, \mathbf{C})$  の観点でも近い特性を示すことを意味する。

### 2.4.2 Directed-gap

Directed gap は  $\nu$ -gap と同様に 2 つのシステムの距離を表す。安定な 2 つの SISO システム  $G$ ,  $G_d$  間の Directed gap は以下 (2.13) 式で定義される。

$$\delta_g(G, G_d) = \inf_{Q, Q^{-1} \in \mathcal{H}_\infty} \|\mathbf{F}_d - \mathbf{D}_w Q\|_\infty \quad (2.13)$$

ここで、 $\mathbf{F}_d$  は  $G_d$  の正規右既約分解表現  $N_d$ ,  $D_d$  を用いて  $\mathbf{F}_d = [N_d \ D_d]^T$  として表現したもので、以降ではこの表現を正規化右グラフと呼ぶ。また、 $\mathbf{D}_w$  は  $G$  の任意の右グラフ  $\mathbf{D}_w = [N_g \ D_g]^T$  (正規化条件を満たす必要はない) であり、 $Q$  はプロパーでかつ安定な任意の伝達関数ある。また、Directed gap と  $\nu$ -gap の間に (2.14) 式の関係が成り立ち、Directed gap は距離の観点で  $\nu$ -gap の保守的な評価であることを意味する。

$$\delta_g(G, G_d) \geq \delta_\nu(G, G_d) \quad (2.14)$$

### 2.4.3 性能レベルを保証する重み関数の設計問題

文献 [11] では、所望の特性を持つ伝達関数  $G_d$  と周波数整形される拡大システム  $G = W_2 P W_1$  の Directed gap を最小化する重み関数を設計する。この際の設計問題は、周

波数応答の利用により離散周波数点  $e^{j\omega_i}$  に対して記述する。なお、この手法は SISO システムのみに対して適用可能であり、 $W_2 = 1$  とする。

設計する重み関数は (2.15) 式の構造のように分母および分子多項式においてパラメータ  $\alpha$ ,  $\beta$  に対してそれぞれ線形に定義される。

$$W_1(e^{j\omega_i}, \alpha, \beta) = \frac{[\beta_n \ \beta_{n-1} \ \cdots \ \beta_0] \phi(e^{j\omega_i})^T}{[\alpha_n \ \alpha_{n-1} \ \cdots \ \alpha_0] \phi(e^{j\omega_i})^T} \quad (2.15)$$

なお、 $\phi(e^{j\omega_i}) = [1 \ e^{-j\omega_i} \ \cdots \ e^{-jn\omega_i}]$  は基底関数ベクトルである。この構造の重み関数を用いて設計問題は以下のように定式化される。

Design problem of weighting function guaranteeing performance level

$$\min_{\rho_k, Q} \lambda$$

subject to

$$\begin{bmatrix} -\lambda & (\mathbf{F}_d(e^{j\omega_i}) - \mathbf{D}_w(e^{j\omega_i}, \rho_k) Q_{k-1}(e^{j\omega_i}))^* \\ \mathbf{F}_d(e^{j\omega_i}) - \mathbf{D}_w(e^{j\omega_i}, \rho_k) Q_{k-1}(e^{j\omega_i}) & -\lambda \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} < 0 \quad (2.16)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}_{k-1}^{-1} & \mathbf{A}_k(\rho_k) \\ \mathbf{A}_k(\rho_k)^T & \mathbf{X}_{k-1} \end{bmatrix} > 0 \quad (2.17)$$

for  $i = 1, 2, \dots, N$

ここで、添え字  $k$  は設計の繰り返し回数を意味し、添え字  $k-1$  は 1 つ前の設計で求めた値を意味する。また、 $\mathbf{F}_d$  は (2.18) 式に示す所望の特性を持つ伝達関数  $G_d$  の正規化右グラフの周波数応答であり、 $\mathbf{D}_w$  は拡大システム  $G = PW_1$  のグラフであり (2.19) 式で表現される。なお、重み関数の  $\mathbf{A}$  行列を可制御正準形で示し安定性を保証するため

に,  $\alpha_n = 1$  とする。

$$\mathbf{F}_{d(e^{j\omega_i})} = \begin{bmatrix} \frac{G_d(e^{j\omega_i})}{\sqrt{1+|G_d(e^{j\omega_i})|^2}} & \frac{1}{\sqrt{1+|G_d(e^{j\omega_i})|^2}} \end{bmatrix}^T \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{w(e^{j\omega_i}, \boldsymbol{\rho}_k)} &= \boldsymbol{\phi}_{w(e^{j\omega_i})} \boldsymbol{\rho} \\ &= \begin{bmatrix} N_p(e^{j\omega_i}) \boldsymbol{\phi}(e^{j\omega_i})^T \\ M_p(e^{j\omega_i}) \boldsymbol{\phi}(e^{j\omega_i})^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\beta_n \ \beta_{n-1} \ \cdots \ \beta_0] & \mathbf{0}_{1 \times (n+1)} \\ \mathbf{0}_{1 \times (n+1)} & [1 \ \alpha_{n-1} \ \cdots \ \alpha_0] \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{F}_p(e^{j\omega_i}) \begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi}(e^{j\omega_i})^T \\ \boldsymbol{\phi}(e^{j\omega_i})^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\alpha} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.19)$$

なお,  $N_p(e^{j\omega_i})$ ,  $M_p(e^{j\omega_i})$  は (2.20) 式に示す制御対象  $P$  の正規化グラフの要素に対応する。

$$\mathbf{F}_p(e^{j\omega_i}) = \begin{bmatrix} N_p(e^{j\omega_i}) & M_p(e^{j\omega_i}) \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \frac{P(e^{j\omega_i})}{\sqrt{1+|P(e^{j\omega_i})|^2}} & \frac{1}{\sqrt{1+|P(e^{j\omega_i})|^2}} \end{bmatrix}^T \quad (2.20)$$

この設計問題における (2.16) 式の制約は,  $\lambda > 0$  であることから Schur complement より以下の不等式と等価な評価であり, (2.13) 式に対応する。

$$\begin{aligned} (\mathbf{F}_{d(e^{j\omega_i})} - \mathbf{D}_{w(e^{j\omega_i}, \boldsymbol{\rho}_k)} \mathbf{Q}(e^{j\omega_i}))^* (\mathbf{F}_{d(e^{j\omega_i})} - \mathbf{D}_{w(e^{j\omega_i}, \boldsymbol{\rho}_k)} \mathbf{Q}(e^{j\omega_i})) &< \lambda^2 \\ &\text{for } i = 1, 2, \dots, N \end{aligned}$$

ゆえに, 1 つ目の制約および  $\lambda$  の最小化により, Directed gap を小さくする重み関数が設計可能となる。また, (2.17) 式の制約は  $\mathbf{X}_{k-1}$  が正定対称行列であることを利用して Schur complement より LMI 形式で表現した制約であり, 離散系に対する Lyapunov の安定条件  $\mathbf{X}_{k-1} - \mathbf{A}_k^T \mathbf{X}_{k-1} \mathbf{A}_k > 0$  を満たす重み関数の状態行列  $\mathbf{A}_k$  に制限することで, 重み関数に不安定極を持たせないための制約である。この 2 つの制約により, 所望の特性を持つ伝達関数  $G_d$  と拡大システム  $G = PW_1$  の Directed gap が小さい安定な重み関数を設計でき,  $H_\infty$  ループ整形法の重み関数の設計に伴う試行錯誤を軽減できる。また, この設計法の設計手順は以下の通りである。

### Step 1 前準備

$\alpha_0 = \cdots = \alpha_{n-1} = 0$  とし, 初期重み関数の状態行列を以下のように可制御正準形式で表現する。

$$\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \cdots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} \quad (2.21)$$



この  $\mathbf{A}_0$  に対して (2.22) 式の Lyapunov 方程式を満たす正定対称行列  $\mathbf{X}_0$  を求める。

$$\mathbf{X}_0 - \mathbf{A}_0^T \mathbf{X}_0 \mathbf{A}_0 = \mathbf{I} \quad (2.22)$$

また,  $k = 1$ ,  $Q_0$  の値を周波数ごとに  $Q_0(e^{j\omega_i}) = 1$  ( $i = 1, \dots, N$ ) として与える。

### Step 2 Directed gap を最小化する重み関数の設計

所望の特性を持つ伝達関数  $G_d$  に対して,  $Q_k$  の周波数応答を固定し, Directed gap 最小化問題を重み関数のパラメータ  $\rho_k$  について解く。

### Step 3 媒介変数 $Q_k$ および正定対称行列 $\mathbf{X}_k$ の導出

各周波数点ごとに (2.13) 式のノルムが最小となる複素数  $Q_k$  を (2.23) 式により求める。

$$Q_k(e^{j\omega_i}) = \frac{\mathbf{D}_w^*(\rho_k, e^{j\omega_i}) \mathbf{F}_d(e^{j\omega_i})}{\mathbf{D}_w^*(\rho_k, e^{j\omega_i}) \mathbf{D}_w(\rho_k, e^{j\omega_i})} \quad (2.23)$$

また, 設計した重み関数の状態行列  $\mathbf{A}_k$  に対して (2.24) の Lyapunov 方程式を満たす正定対称行列  $\mathbf{X}_k$  を求める。

$$\mathbf{X}_k - \mathbf{A}_k^T \mathbf{X}_k \mathbf{A}_k = \mathbf{I} \quad (2.24)$$

### Step 4 終了判定

(2.25) 式により  $\gamma_{\min}$  の保証値  $\gamma$  を計算する。算出された  $\gamma$  が所望の値以下となっており, かつ解が収束していれば設計を終了する。

$$\gamma = \frac{1}{\sin\{\arcsin \frac{1}{\gamma(G_d, C_d)} - \arcsin \lambda\}} \quad (2.25)$$

条件を満たさない場合は (2.26) 式により  $\mathbf{P}_k$  を更新し,  $k = k+1$  として Step 2 へ戻る。

$$\mathbf{P}_k - \mathbf{A}_k^T \mathbf{P}_k \mathbf{A}_k = \mathbf{I} \quad (2.26)$$

## 2.4.4 性能レベルを保証する重み関数の設計法の課題

前項で述べた手法は,  $\nu$ -gap を直接評価しておらず,  $\gamma_{\min}$  の保証値が保守的な値を示す可能性がある。この保守性は周波数ごとに求めた複素数  $Q$  により生じ,  $Q$  の値によっては  $\nu$ -gap と Directed gap の差が大きくなる場合が存在する。さらに, SISO システムのみに着目していたために MIMO システムへの拡張が困難な形式で設計問題が定式化されている。これらの問題に対して 3 章では直接  $\nu$ -gap を最小化する重み関数の設計を可能とし, 媒介変数のような振る舞いをする周波数関数  $Q$  の導出を省く。また, MIMO システムに対して適用可能とすることで, 2.1.1 節のような重み関数の設計に伴う煩雑で複雑な作業を軽減する。

## 2.5 周波数応答を用いた固定構造安定化制御器設計法

この章では、文献 [18] で提案した周波数応答を用いた MIMO システムに対する固定構造安定化制御器設計法を紹介する。この手法では、 $H_\infty$  ループ整形法における  $H_\infty$  ノルムを周波数応答を用いて評価することで、制御対象の数式モデルを用いない安定化制御器設計法を実現している。また、 $H_\infty$  ノルムを最小化しロバスト安定余裕を増加させる設計問題は、パラメータに対して凸な形式であるため容易に準最適な制御器を設計することができ、設計に伴う煩雑さを軽減することが可能となった。

### 2.5.1 設計問題

設計する制御器は (2.27) 式の構造のようにパラメータ  $\rho$  に対して線形に定義される。

$$C_\infty(s, \rho) = \rho \phi(s) \quad (2.27)$$

ここで、 $\phi(s)$  は制御器の安定な基底関数ベクトルである。この構造の制御器を用いて設計問題は以下のように定式化される。

Design problem of multivariable fixed-structural controller

$$\min_{\rho_k} \gamma_k^2$$

subject to

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}(j\omega_i, \rho_k) & \mathbf{Y}(j\omega_i, \rho_k) \\ \mathbf{Y}(j\omega_i, \rho_k)^* & \gamma_k^2 \mathbf{I}_{m+n} \end{bmatrix} > 0 \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} & |r_{Sq}(\omega_i, \rho_k)[1 + \lambda_q(j\omega_i, \rho_{k-1})]| \\ & - \text{Re}\{[1 + \lambda_q(-j\omega_i, \rho_{k-1})][1 + L_{Sq}(j\omega_i, \rho_k)]\} < 0 \end{aligned} \quad (2.29)$$

for  $i = 1, 2, \dots, N$

ここで、添え字  $k$  は設計の繰り返し回数を意味し、添え字  $k-1$  は 1 つ前の設計で求め

た値を意味する。また,  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{Z}$ ,  $\mathbf{Y}$  等は以下のように定義する。

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}_k) &:= \mathbf{Z}(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}_k) \mathbf{Z}(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}_{k-1})^* + \mathbf{Z}(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}_{k-1}) \mathbf{Z}(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}_k)^* \\
 &\quad - \mathbf{Z}(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}_{k-1}) \mathbf{Z}(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}_{k-1})^* \\
 \mathbf{Z}(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}_k) &:= \begin{bmatrix} (\mathbf{I}_n + \mathbf{G}(j\omega_i) \mathbf{C}_\infty(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}_k)) & \mathbf{0}_{n \times m} \\ \mathbf{0}_{m \times n} & (\mathbf{I}_m + \mathbf{C}_\infty(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}_k) \mathbf{G}(j\omega_i)) \end{bmatrix} \\
 \mathbf{Y}(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}_k) &:= \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & \mathbf{G}(j\omega_i) \\ \mathbf{C}_\infty(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}_k) & \mathbf{C}_\infty(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}_k) \mathbf{G}(j\omega_i) \end{bmatrix} \\
 \mathbf{L}(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}_k) &:= \mathbf{G}(j\omega_i) \mathbf{C}(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}_k) \\
 \mathbf{L}_{Sp}(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}_k) &:= \mathbf{V}(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}_{k-1})^{-1} \mathbf{C}(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}_k) \mathbf{V}(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}_{k-1}) \\
 r_{Sq}(\omega_i, \boldsymbol{\rho}_k) &:= \sum_{p=1, p \neq q}^n |L_{Spq}(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}_k)|
 \end{aligned}$$

ここで,  $\mathbf{V}(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}_{k-1})$  は以下の式で示す相似変換行列であり,  $k-1$  回目の開ループ関数を対角化するように導出する。

$$\boldsymbol{\Lambda}(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}_{k-1}) = \mathbf{V}(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}_{k-1})^{-1} \mathbf{L}(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}_{k-1}) \mathbf{V}(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}_{k-1})$$

この設計問題における (2.28) 式の制約は,  $H_\infty$  ループ整形法の  $\gamma$  に対する制約であり, この  $\gamma$  を直接最小化することにより, ロバスト安定余裕を最大化できる。また, (2.29) 式の制約は MIMO システムにおける閉ループシステムの安定性を保証するための Nyquist の安定判別法<sup>[28]</sup>に基づく安定制約である。ゆえに, 設計される任意構造の制御器においてロバスト安定余裕を最大化するとともに閉ループシステムの安定性が保証される。また, この設計の設計手順は以下の通りである。

### Step 1 前準備

任意構造の基底関数ベクトル  $\boldsymbol{\phi}_{(s)}$  を設定し, 閉ループシステムを安定化する初期制御器のパラメータ  $\boldsymbol{\rho}_0$  を選択する。なお, このとき初期制御器が達成する  $\gamma$  の値を考慮する必要はない。また, 初期の開ループ関数に対して固有値分解を実現する  $\mathbf{V}$  を導出する。ここで,  $k=1$  として与える。

### Step 2 安定化制御器の設計

$\boldsymbol{\rho}_{k-1}$  および  $\mathbf{V}$  を用いて,  $\gamma_k$  の最小化問題をパラメータ  $\boldsymbol{\rho}_k$  について解く。

### Step 3 終了判定

(2.30) 式で定義される評価値  $\gamma_k$  の相対誤差  $\delta(\gamma_k)$  が、終了判定 ( $\delta(\gamma_k) < \delta_e$ ) を設定した回数だけ連続して満たすまで設計を繰り返す。

$$\delta(\gamma_k) = \frac{|\gamma_{k-1} - \gamma_k|}{|\gamma_{k-1}|} \times 100 [\%] \quad (2.30)$$

終了判定を満たさない場合はこの設計で得られた開ループ関数に対して固有値分解を実現する  $V$  を導出し、**Step 2** に戻り設計を繰り返す。最終的に、繰り返しが終了した時点の設計パラメータ  $\rho_k$  がこの手法における設計結果となる。

### 2.5.2 固定構造安定化制御器設計法の課題

この手法により MIMO システムであってもロバスト安定余裕を最大化するように任意構造の制御器を調整可能となった。しかしながら、設計者が制御器の構造として極を指定する必要があるが、指定する極次第では良好なロバスト安定性を確保できない可能性がある。ゆえに、良好なロバスト安定性を確保するためには、試行錯誤的に制御器の極を決定する必要があるが、これに伴う試行錯誤コストが発生している。この問題に対して 4 章では極の調整も可能とし、制御器設計に伴う試行錯誤コストを軽減するとともに、性能の向上を図る。

## 第3章 周波数応答を用いた低次多変数重み関数の設計

本章では、安定な MIMO システムに対して周波数応答を用いた  $H_\infty$  ループ整形法における性能レベルを保証する低次重み関数の設計法を提案する。この提案において、 $\nu$ -gap を直接最小化する設計問題を周波数応答のみを用いた最適化問題として記述し、準最適な重み関数を試行錯誤なく設計することを可能とする。また、この手法では所望の特性を持つ伝達関数  $\mathbf{G}_d$  と周波数整形される拡大システム  $\mathbf{G} = \mathbf{W}_2 \mathbf{P} \mathbf{W}_1$  の  $\nu$ -gap を最小化する重み関数を設計し、先行研究<sup>[11]</sup>と同様に重み関数の設計の段階で達成可能な評価値  $\gamma_{\min}$  を保証する。ここで、本来は MIMO システムでは行列の要素をそれぞれ調整するため前置重み関数と後置重み関数の2つを設計する必要があるが、提案手法では設計の簡易化のために、 $\mathbf{W}_2 \in \mathcal{R}^{m \times m}$  を  $\mathbf{W}_2 = \mathbf{I}_m$  として固定し、 $\mathbf{W}_1 \in \mathcal{R}^{n \times n}$  のみを設計することに焦点を当てる。

### 3.1 重み関数のパラメータ表示

提案手法では、制御対象  $\mathbf{P} \in \mathcal{R}^{m \times n}$  に対して、 $\mathbf{W}_2 \in \mathcal{R}^{m \times m}$  を  $\mathbf{W}_2 = \mathbf{I}_m$  として固定し、 $\mathbf{W}_1 \in \mathcal{R}^{n \times n}$  のみを設計することを考える。各要素の次数が  $\alpha$  次の  $\mathbf{W}_1$  を (3.1) 式のように  $\boldsymbol{\rho} \in \mathcal{R}^{(\alpha+1)n \times n}$ 、 $\boldsymbol{\eta} \in \mathcal{R}^{(\alpha+1) \times 1}$  を用いてパラメータ表示する。

$$\mathbf{W}_1(s, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta}) = \begin{bmatrix} \frac{N_{11}(s, \boldsymbol{\rho})}{D(s, \boldsymbol{\eta})} & \dots & \frac{N_{1n}(s, \boldsymbol{\rho})}{D(s, \boldsymbol{\eta})} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{N_{m1}(s, \boldsymbol{\rho})}{D(s, \boldsymbol{\eta})} & \dots & \frac{N_{mn}(s, \boldsymbol{\rho})}{D(s, \boldsymbol{\eta})} \end{bmatrix} = \frac{1}{D(s, \boldsymbol{\eta})} \mathbf{N}(s, \boldsymbol{\rho}) = \frac{1}{\boldsymbol{\eta}^T \boldsymbol{\phi}_D(s)} \boldsymbol{\rho}^T \boldsymbol{\phi}_N(s) \quad (3.1)$$

$$\boldsymbol{\phi}_D(s) = [1 \quad \dots \quad s^{\alpha-1} \quad s^\alpha]^T \quad (3.2)$$

$$\boldsymbol{\phi}_N(s) = [\mathbf{I}_n \quad \dots \quad s^{\alpha-1} \mathbf{I}_n \quad s^\alpha \mathbf{I}_n]^T \quad (3.3)$$

ここで、 $D(s, \boldsymbol{\eta})$  は共通分母多項式、 $\mathbf{N}(s, \boldsymbol{\rho})$  は  $m \times n$  の分子多項式行列であり、 $\boldsymbol{\phi}_D(s)$ 、 $\boldsymbol{\phi}_N(s)$  は重み関数  $\mathbf{W}_1$  の分母多項式  $D(s, \boldsymbol{\eta})$  および分子多項式行列  $\mathbf{N}(s, \boldsymbol{\rho})$  における基底関

数ベクトルである。また，分母多項式  $D_{(s,\eta)}$  の最高次数の係数は 1 とする。このように重み関数をパラメトライズすることにより，分子多項式と分母多項式をそれぞれ調整することができる。また，重み関数  $\mathbf{W}_1$  の各要素の分母多項式は共通な  $D_{(s,\eta)}$  となるが， $D_{(s,\eta)}$  と  $N_{(s,\rho)}$  の各要素が極零相殺することによって重み関数  $\mathbf{W}_1$  が各要素ごとに最適な構造に調整される。

## 3.2 重み関数の設計問題

所望の特性を持つ伝達関数  $\mathbf{G}_d \in \mathcal{R}^{m \times n}$  と拡大システム  $\mathbf{G} = \mathbf{W}_2 \mathbf{P} \mathbf{W}_1 \in \mathcal{R}^{m \times n}$  の  $\nu$ -gap を最小化する設計は変数  $\delta$  を  $\delta_{\nu}(\mathbf{G}, \mathbf{G}_d)$  の上界として導入し，その  $\delta$  の最小化を行うことで実現できる。制御対象  $\mathbf{P} \in \mathcal{R}^{m \times n}$  に対する設計問題は以下のように記述できる。ここでは，設計問題を数値的に求解可能とするため，設計者があらかじめ定義した  $N_\omega$  個の周波数点  $\omega_i$  ( $i = 1, \dots, N_\omega$ ) について (3.4) 式の制約を考える。

Design problem I for multivariable weighting function

$$\begin{aligned} & \min_{\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta}} \delta \\ & \text{subject to} \\ & \quad \bar{\sigma}(\mathbf{M}_{(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta})}) < \delta \\ & \quad \text{for } i = 1, \dots, N_\omega \end{aligned} \tag{3.4}$$

ここで，

$$\mathbf{M}_{(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta})} = (\mathbf{I} + \mathbf{G}_{d(j\omega_i)} \mathbf{G}_{d(j\omega_i)}^*)^{-1/2} (\mathbf{G}_{d(j\omega_i)} - \mathbf{G}_{(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta})}) (\mathbf{I} + \mathbf{G}_{(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta})}^* \mathbf{G}_{(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta})})^{-1/2}$$

である。(3.4) 式は設計パラメータ  $\boldsymbol{\rho}$ ,  $\boldsymbol{\eta}$  に対して非凸な関数であり，重み関数を簡易に求めることができない。そこで，設計問題を凸最適化問題へと変形していく。まず，(3.4) 式と等価な評価として (3.5) 式が導出できる。

$$\mathbf{M}_{(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta})}^* \mathbf{M}_{(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta})} < \delta^2 \mathbf{I}_n \tag{3.5}$$

$$\text{for } i = 1, 2, \dots, N_\omega$$

(3.5) 式の左辺は (3.6) 式のように展開できる。

$$\begin{aligned}
 M_{(j\omega_i, \rho, \eta)}^* M_{(j\omega_i, \rho, \eta)} &= \left( (I_n + G_{(j\omega_i, \rho, \eta)}^* G_{(j\omega_i, \rho, \eta)})^{-1/2} \right)^* (G_{d(j\omega_i)} - G_{(j\omega_i, \rho, \eta)})^* \cdot \\
 &\quad \cdot (I_m + G_{d(j\omega_i)} G_{d(j\omega_i)}^*)^{-1} (G_{d(j\omega_i)} - G_{(j\omega_i, \rho, \eta)}) \cdot \\
 &\quad \cdot (I_n + G_{(j\omega_i, \rho, \eta)}^* G_{(j\omega_i, \rho, \eta)})^{-1/2}
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

そして, (3.5) 式の左と右から  $(I_n + G_{(j\omega_i, \rho, \eta)}^* G_{(j\omega_i, \rho, \eta)})^{1/2}$  を掛けて (3.6) 式の関係を用いて整理することで, (3.7) 式のように記述できる。

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{\delta^2} (G_{d(j\omega_i)} - G_{(j\omega_i, \rho, \eta)})^* (I_m + G_{d(j\omega_i)} G_{d(j\omega_i)}^*)^{-1} (G_{d(j\omega_i)} - G_{(j\omega_i, \rho, \eta)}) \\
 &< (I_n + G_{(j\omega_i, \rho, \eta)}^* G_{(j\omega_i, \rho, \eta)})
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

また, 重み関数を非線形にパラメータ表示しているため, (3.7) 式に  $D_{(j\omega_i, \eta)}^* D_{(j\omega_i, \eta)}$  を掛け, (3.8) 式に変形する。

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{\delta^2} (D_{(j\omega_i, \eta)} G_{d(j\omega_i)} - W_{2(j\omega_i)} P_{(j\omega_i)} N_{(j\omega_i, \rho)})^* (I_m + G_{d(j\omega_i)} G_{d(j\omega_i)}^*)^{-1} \\
 &\quad (D_{(j\omega_i, \eta)} G_{d(j\omega_i)} - W_{2(j\omega_i)} P_{(j\omega_i)} N_{(j\omega_i, \rho)}) \\
 &< D_{(j\omega_i, \eta)}^* D_{(j\omega_i, \eta)} I_n + (W_{2(j\omega_i)} P_{(j\omega_i)} N_{(j\omega_i, \rho)})^* (W_{2(j\omega_i)} P_{(j\omega_i)} N_{(j\omega_i, \rho)})
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

(3.8) 式の左辺と右辺は  $\rho, \eta$  に対して凸関数であり, (3.8) 式は  $\rho, \eta$  は QMI 制約となっている。一般に QMI 制約を持つ最適化問題の求解は困難であるが, この形の QMI に対して反復 LMI 制約のアルゴリズム<sup>[15]</sup>を適用し容易に求解を行うことができる。

### 3.2.1 反復 LMI 制約による解法

文献 [15] では, (3.8) 式の形の QMI 制約を線形近似を用いて LMI として記述し, 反復的に設計問題を解く近似解法を提案している。この文献では, 非特異な  $n \times n$  の任意な複素行列  $Y, Z, \tilde{Z}$  を考え, (3.9) 式の形の制約を課している。

$$Z^* Z - \frac{1}{\gamma^2} Y^* Y > 0 \tag{3.9}$$

(3.9) 式の制約は,  $\gamma > 0$  であれば Schur complement より (3.10) 式の不等式と等価である。

$$\begin{bmatrix} Z^* Z & Y^* \\ Y & \gamma^2 I \end{bmatrix} > 0 \tag{3.10}$$



また、任意の複素行列  $\tilde{\mathbf{Z}}$  に対して  $(\mathbf{Z} - \tilde{\mathbf{Z}})^*(\mathbf{Z} - \tilde{\mathbf{Z}}) \geq 0$  が成り立つので (3.11) 式の不等式が成り立つ。

$$\mathbf{Z}^* \mathbf{Z} \geq \mathbf{Z}^* \tilde{\mathbf{Z}} + \tilde{\mathbf{Z}}^* \mathbf{Z} - \tilde{\mathbf{Z}}^* \tilde{\mathbf{Z}} \quad (3.11)$$

(3.11) 式より (3.10) 式の十分条件の (3.12) 式が導出される。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Z}^* \tilde{\mathbf{Z}} + \tilde{\mathbf{Z}}^* \mathbf{Z} - \tilde{\mathbf{Z}}^* \tilde{\mathbf{Z}} & \mathbf{Y}^* \\ \mathbf{Y} & \gamma^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} > 0 \quad (3.12)$$

(3.10)–(3.12) 式の関係から、設計パラメータに対して線形に定義された  $\mathbf{Y}$ ,  $\mathbf{Z}$  に関する非凸な最適化問題を、設計パラメータに依存しない  $\tilde{\mathbf{Z}}$  を導入することで LMI として記述できる。上述の通り (3.12) 式は原問題 (3.10) 式の十分条件であるが、 $\tilde{\mathbf{Z}}$  を 1 回前における最適化の解に対する  $\mathbf{Z}$  とすれば最適化計算と  $\tilde{\mathbf{Z}}$  の更新の繰り返しにより解が収束し、 $\mathbf{Z} = \tilde{\mathbf{Z}}$  となれば (3.11) 式の等号が成り立ち、(3.12) 式が原問題と一致する。また、(3.12) 式は常に原問題の下界を示すため、導出される解は元の制約を満たし、繰り返しに対して評価値は単調収束する。

提案手法において  $\mathbf{Y}$ ,  $\mathbf{Z}$ ,  $\tilde{\mathbf{Z}}$  を以下のようにおくことで上記の手法と同様に LMI 制約へと変換する。なお、 $k$  は設計の繰り返し回数を示す。

$$\mathbf{Y}_{(j\omega_i, \rho_k, \eta_k)} := D_{(j\omega_i, \eta_k)} \mathbf{G}_d(j\omega_i) - \mathbf{W}_2(j\omega_i) \mathbf{P}_{(j\omega_i)} \mathbf{N}_{(\rho_k)} \quad (3.13)$$

$$\mathbf{Z}_{(j\omega_i, \rho_k, \eta_k)} := [D_{(j\omega_i, \eta_k)} \mathbf{I}_n \quad \mathbf{W}_2(j\omega_i) \mathbf{P}_{(j\omega_i)} \mathbf{N}_{(j\omega_i, \rho_k)}]^T \quad (3.14)$$

$$\tilde{\mathbf{Z}}_{(j\omega_i)} := [D_{(j\omega_i, \eta_{k-1})} \mathbf{I}_n \quad \mathbf{W}_2(j\omega_i) \mathbf{P}_{(j\omega_i)} \mathbf{N}_{(j\omega_i, \rho_{k-1})}]^T \quad (3.15)$$

また、 $\delta_k^2(\mathbf{I}_m + \mathbf{G}_d(j\omega_i) \mathbf{G}_d(j\omega_i)^*) > 0$  であり、Schur complement より設計問題は以下のように表現される。

Design problem II for multivariable weighting function

$$\min_{\rho_k, \eta_k} \delta_k^2$$

subject to

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_{(j\omega_i, \rho_k, \eta_k)} & \mathbf{Y}_{(j\omega_i, \rho_k, \eta_k)}^* \\ \mathbf{Y}_{(j\omega_i, \rho_k, \eta_k)} & \delta_k^2(\mathbf{I}_m + \mathbf{G}_d(j\omega_i) \mathbf{G}_d(j\omega_i)^*) \end{bmatrix} > 0 \quad (3.16)$$

for  $i = 1, 2, \dots, N_\omega$

ここで,

$$\mathbf{R}(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}_k, \boldsymbol{\eta}_k) = \mathbf{Z}(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}_k, \boldsymbol{\eta}_k)^* \tilde{\mathbf{Z}}(j\omega_i) + \tilde{\mathbf{Z}}(j\omega_i)^* \mathbf{Z}(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}_k, \boldsymbol{\eta}_k) - \tilde{\mathbf{Z}}(j\omega_i)^* \tilde{\mathbf{Z}}(j\omega_i)$$

である。以上より、設計問題は前述のように LMI 最適化問題として記述することができる。準最適な重み関数を繰り返し最適化を行うことにより求めることができる。

### 3.3 重み関数の極に対する制約

提案手法では重み関数の分子多項式と分母多項式を調整しているため、不安定極を持つ可能性がある。また、 $H_\infty$  ループ整形法では、重み関数は安定化制御器と掛け合わせ最終的な制御器を構築する。つまり、重み関数が不安定極を持つことは最終的な制御器が不安定極を持つことを意味する。一般に耐故障性の観点から安定な制御器の方が好ましい。そのため、本節では伝達関数自体が不安定極を持たないためのリアプノフの安定性に基づく制約<sup>[27]</sup>を導入する。ここでは、重み関数の極に対して評価を行うので  $D(s, \boldsymbol{\eta}_k) = 0$  の根、すなわち (3.17) 式のシステムの極について考える。ただし、 $D(s, \boldsymbol{\eta}_k)$  の最高次数を 1 とするため、 $\alpha+1$  次元ベクトルである  $\boldsymbol{\eta}_k$  の第  $\alpha+1$  要素  $\eta_k^{(\alpha+1)} = 1$  とする。

$$\frac{1}{D(s, \boldsymbol{\eta}_k)} = \frac{1}{s^\alpha + \eta_k^{(\alpha)} s^{\alpha-1} + \dots + \eta_k^{(2)} s + \eta_k^{(1)}} \quad (3.17)$$

$k$  回目の最適化における (3.17) 式の伝達関数の状態空間表現の可制御正準形を考えると、その状態行列  $\mathbf{A}_D(\boldsymbol{\eta}_k)$  は (3.18) 式となる。

$$\mathbf{A}_D(\boldsymbol{\eta}_k) = \begin{bmatrix} -\eta_k^{(\alpha)} & \dots & -\eta_k^{(2)} & -\eta_k^{(1)} \\ 1 & & 0 & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

さらに、1 回前の最適化の解  $\boldsymbol{\eta}_{k-1}$  用いた  $\mathbf{A}_D(\boldsymbol{\eta}_{k-1})$  に対して (3.19) 式を満たすような正定対称行列  $\mathbf{X}_{k-1}$  を用いれば安定制約として (3.20) 式を定式化できる。

$$\mathbf{X}_{k-1} \mathbf{A}_D(\boldsymbol{\eta}_{k-1}) + \mathbf{A}_D(\boldsymbol{\eta}_{k-1})^T \mathbf{X}_{k-1} = -\mathbf{I} \quad (3.19)$$

$$\mathbf{X}_{k-1} \mathbf{A}_D(\boldsymbol{\eta}_k) + \mathbf{A}_D(\boldsymbol{\eta}_k)^T \mathbf{X}_{k-1} < 0 \quad (3.20)$$

(3.20) 式により,  $\mathbf{X}_{k-1}$  に対してリアプノフ不等式を満たす範囲内から  $\mathbf{A}_D(\boldsymbol{\eta}_{k-1})$  が選択される。ゆえに, 初期解  $\boldsymbol{\eta}_0$  により安定な重み関数を与え, (3.19) 式を満たす  $\mathbf{X}_0$  を求め (3.20) 式の安定制約を含めた設計問題を繰り返し解くことで, 重み関数自体の安定性が保証される。

この制約を組み込み, 最終的な設計問題は以下ようになる。

Design problem III for multivariable weighting function

$$\min_{\boldsymbol{\rho}_k, \boldsymbol{\eta}_k} \delta_k^2$$

subject to

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_{(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}_k, \boldsymbol{\eta}_k)} & \mathbf{Y}_{(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}_k, \boldsymbol{\eta}_k)}^* \\ \mathbf{Y}_{(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}_k, \boldsymbol{\eta}_k)} & \delta_k^2 (\mathbf{I}_m + \mathbf{G}_{d(j\omega_i)} \mathbf{G}_{d(j\omega_i)}^*) \end{bmatrix} > 0 \quad (3.21)$$

$$\mathbf{X}_{k-1} \mathbf{A}_D(\boldsymbol{\eta}_k) + \mathbf{A}_D(\boldsymbol{\eta}_k)^T \mathbf{X}_{k-1} < 0 \quad (3.22)$$

for  $i = 1, 2, \dots, N_\omega$

### 3.3.1 設計アルゴリズム

本節では提案手法の設計アルゴリズムを示す。

#### Step 1 設計準備

制御対象の入出力データより設計者が定める  $N_\omega$  個の周波数点  $\omega_i$  ( $i = 1, \dots, N_\omega$ ) に対する周波数応答  $\mathbf{P}_{(j\omega_i)}$  を推定する。なお, 制御対象から動作条件の異なる複数組の周波数応答を推定し, 同時に評価することで, 不確かさなどに対してロバストな制御器の設計が可能である。また, 所望の特性を持つ伝達関数  $\mathbf{G}_{d(j\omega_i)}$  の周波数応答を設定する。そして, 強安定化の実現および  $\nu$ -gap の条件のために, 安定な重み関数を与える初期設計パラメータ  $\boldsymbol{\rho}_0, \boldsymbol{\eta}_0$  を与え, 繰り返し回数  $k$  を  $k=1$  とする。

#### Step 2 正定対称行列 $\mathbf{X}_{k-1}$ などの導出

現在得られている設計パラメータ  $\boldsymbol{\rho}_{k-1}, \boldsymbol{\eta}_{k-1}$  を用いて  $\mathbf{X}_{k-1}$  を  $\mathbf{A}_D(\boldsymbol{\eta}_{k-1})$  から導出する。さらに,  $\boldsymbol{\rho}_{k-1}, \boldsymbol{\eta}_{k-1}$  を用いて  $\tilde{\mathbf{Z}}, \mathbf{R}$  を求める。

### Step 3 凸最適化計算

以下の LMI 最適化問題を解き、新たな解  $\rho_k, \eta_k$  を得る。

$$\begin{aligned} & \min_{\rho_k, \eta_k} \delta_k^2 \\ & \text{subject to} \\ & \begin{bmatrix} \mathbf{R}(j\omega_i, \rho_k, \eta_k) & \mathbf{Y}(j\omega_i, \rho_k, \eta_k)^* \\ \mathbf{Y}(j\omega_i, \rho_k, \eta_k) & \delta_k^2(\mathbf{I}_m + \mathbf{G}_d(j\omega_i)\mathbf{G}_d(j\omega_i)^*) \end{bmatrix} > 0 \end{aligned} \quad (3.23) \\ & \mathbf{X}_{k-1}\mathbf{A}_D(\eta_k) + \mathbf{A}_D(\eta_k)^T\mathbf{X}_{k-1} < 0 \quad (3.24) \\ & \text{for } i = 1, 2, \dots, N_\omega \end{aligned}$$

### Step 4 繰り返し終了判定

(3.25) 式で定義される評価値  $\gamma_k$  の相対誤差  $\delta_{gap}$  が、終了判定 ( $\delta_{gap} < \delta_e$ ) を設定した回数だけ連続して満たすまで設計を繰り返す。

$$\delta_{gap} = \frac{|\delta_{k-1} - \delta_k|}{|\delta_{k-1}|} \times 100 [\%] \quad (3.25)$$

終了判定を満たさない場合は **Step 2** に戻り設計を繰り返す。最終的に、繰り返しを終了した時点の設計パラメータ  $\rho_k, \eta_k$  がこの手法における設計結果となる。

## 3.4 SISO システムに対するシミュレーション

この SISO システムに対するシミュレーションを通じて重み関数の妥当性を確認し、 $\nu$ -gap を用いた重み関数の利点を示す。この際、設計する重み関数は 2 次とし、先行研究である文献 [11] の手法と所望の特性を持つ開ループ関数から算出した理想の重み関数およびその重み関数をハンケルノルム近似<sup>[30]</sup>で低次化したものに対して比較を行う。なお、文献 [11] の手法の結果、理想の重み関数の結果、低次元化した結果に対して添え字  $\bullet_{\text{pre}}$ ,  $\bullet_{\text{ideal}}$ ,  $\bullet_{\text{red}}$  をつけて表示する。

### 3.4.1 シミュレーション条件

シミュレーションには 2 慣性共振制御装置を例にとり，この装置を模擬した数式モデルである (3.26) 式を用いた。

$$P(s) = \frac{55.48s^3 + 813.9s^2 + 5.33 \times 10^4 s + 2.374 \times 10^5}{s^4 + 13.47s^3 + 1722s^2 + 6083s + 3281} \quad (3.26)$$

この設計における所望の特性を持つ伝達関数  $G_d$  を (3.27) 式として与える。

$$G_d(s) = \frac{3.25 \times 10^7}{s^2 + 5.155s + 4.863} \quad (3.27)$$

また，設計周波数点は  $10^{-4}$ – $10^3$  rad/s の区間で対数的に等間隔な 300 点とし，取得した周波数応答を用いて，2 次の重み関数を提案手法で設計する。この際，提案手法の重み関数の設計には，(3.28) 式に示す構造を用いる。

$$W_{1,\text{pro}}(s, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta}) = \frac{1}{D(s, \boldsymbol{\eta})} \boldsymbol{\rho}^T \begin{bmatrix} 1 \\ s \\ s^2 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

$$D(s, \boldsymbol{\eta}) = \boldsymbol{\eta}^T \begin{bmatrix} 1 & s & s^2 \end{bmatrix}^T \quad (3.29)$$

ここで，提案手法では安定な重み関数を構築するパラメータとして (3.30) 式の重み関数を与える。

$$W_{\text{ini}}(s) = \frac{0.3922s^2 + 0.6555s + 0.1712}{s^2 + 5.155s + 4.863} \quad (3.30)$$

そして，先行手法において提案手法と初期条件が同じになるように (3.30) 式の初期重み関数から周波数関数  $Q$  を求める。また，先行研究および提案手法における求解アルゴリズムの収束判定条件は，反復に対する性能レベルの相対誤差が 3 回連続して 0.1 % を下回ることとする。

### 3.4.2 結果と考察

各手法により (3.31)–(3.32) 式のような重み関数が設計された。

$$W_{1,\text{pro}}(s) = \frac{0.6458s^2 + 9.09s + 1040}{s^2 + 7.302s + 832.9} \quad (3.31)$$

$$W_{1,\text{pre}}(s) = \frac{0.648s^2 + 9.204s + 1053}{s^2 + 7.541s + 829.9} \quad (3.32)$$

表 3.1:  $\nu$ -gap の比較

	$\nu$ -gap	order	Iteration
Proposed method	0.0793	2	16
Previous method	0.0793	2	71
Ideal weighting function	0	6	-
Reduced method	0.635	2	-

また、理想の重み関数は  $W_{1,\text{ideal}}(s) = G_d(s)P(s)^{-1}$  から (3.33) 式のように導出できる。

$$W_{1,\text{ideal}}(s) = \frac{5.86 \times 10^5 (s + 2.935)(s + 0.6635)(s^2 + 9.871s + 1685)}{(s + 951.5)(s + 794)(s + 4.682)(s + 0.01)(s^2 + 9.99s + 914)} \quad (3.33)$$

この (3.33) 式の理想の重み関数に対して低次元化を行い、(3.34) 式の重み関数が得られた。

$$W_{1,\text{red}}(s) = \frac{-1.376s^2 + 301.8s + 184.6}{s^2 + 310.5s + 3.105} \quad (3.34)$$

これらの重み関数による  $\nu$ -gap 等を表 3.1 に示す。提案手法と先行手法の重み関数について着目する。(3.31) 式、(3.32) 式および表 3.1 より近い特性を持つ重み関数が設計されている。また、この設計において先行研究と提案手法の初期条件は揃えたが、表 3.1 より設計の反復回数の違いが見られた。先行研究では周波数関数  $Q$  と重み関数に設計問題が依存しており、 $Q$  と重み関数の両方が収束しなければならないため繰り返し回数が増加したと考えられる。全ての条件に対してこのことは断言できないが、今まで著者が確認した設計においては先行研究は提案手法に比べ繰り返し設計回数が多くなる傾向が見られた。

次に、理想の重み関数と低次元化した重み関数を比較する。なお、次数の違いから理想の重み関数に対して直接比較を行わない。まず、提案手法、理想の重み関数と低次元化したものの拡大制御対象のゲイン特性を図 3.1 に示す。この図から、低次元化した重み関数の方が提案手法よりも低周波域で理想の周波数特性に近いことが確認できる。一方で、ゲイン交差角周波数付近では、提案手法の方が低次元化した重み関数よりも近づいている。このときの  $\nu$ -gap は表 3.1 より提案手法の方が小さくなっており、これらの結果は  $\nu$ -gap の性質によりゲイン交差角周波数付近での距離を重視して評価されるためであるといえる。また、 $\nu$ -gap は開ループ関数における周波数特性の距離だけでなく、閉ループ特性における対する距離の評価も示す。拡大制御対象に対する感度関数、相補感度関数のゲイン特性は図 3.2, 3.3 のようになっており、提案手法の方が

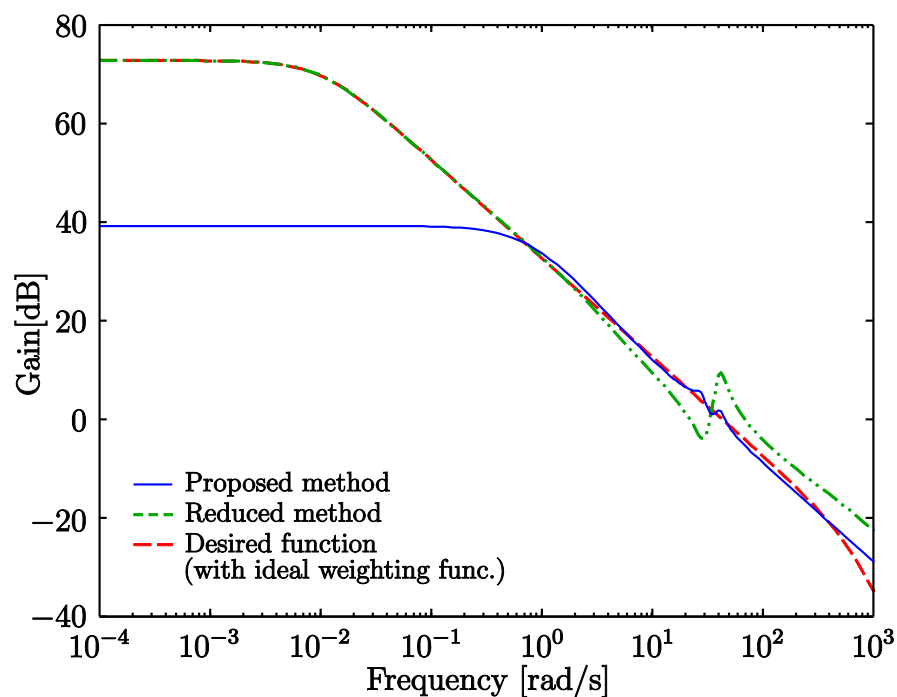


図 3.1: 各重み関数を用いた拡大制御対象のゲイン特性

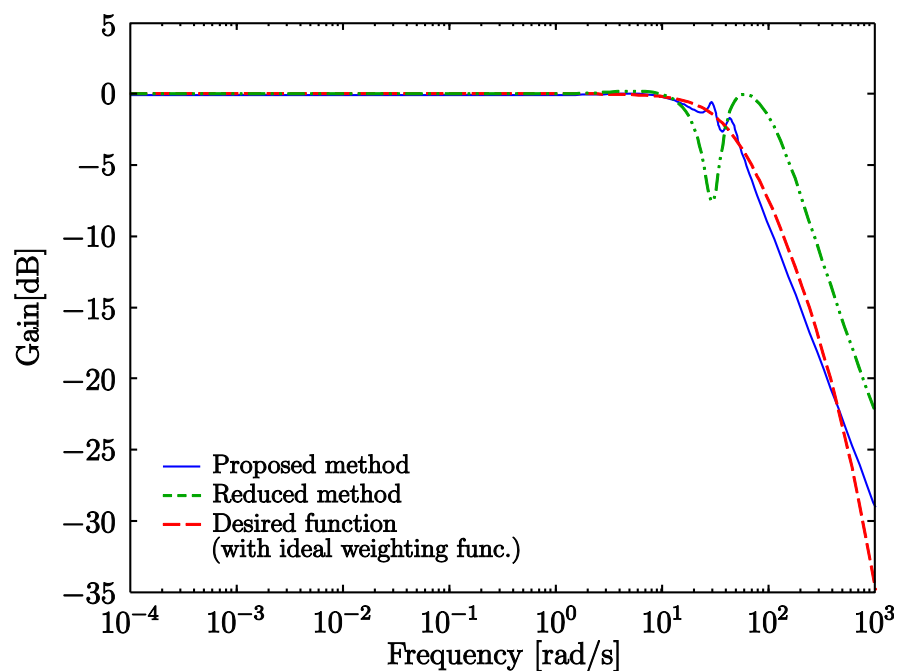


図 3.2: 各重み関数を用いた際の相補感度関数のゲイン特性

特性の差が小さいことが確認される。ゆえに、 $\nu$ -gap を用いることにより、閉ループ特性に関連付けしやすいことが分かる。また、達成可能な最小の性能レベル  $\gamma_{\min}$  は  $G_d$



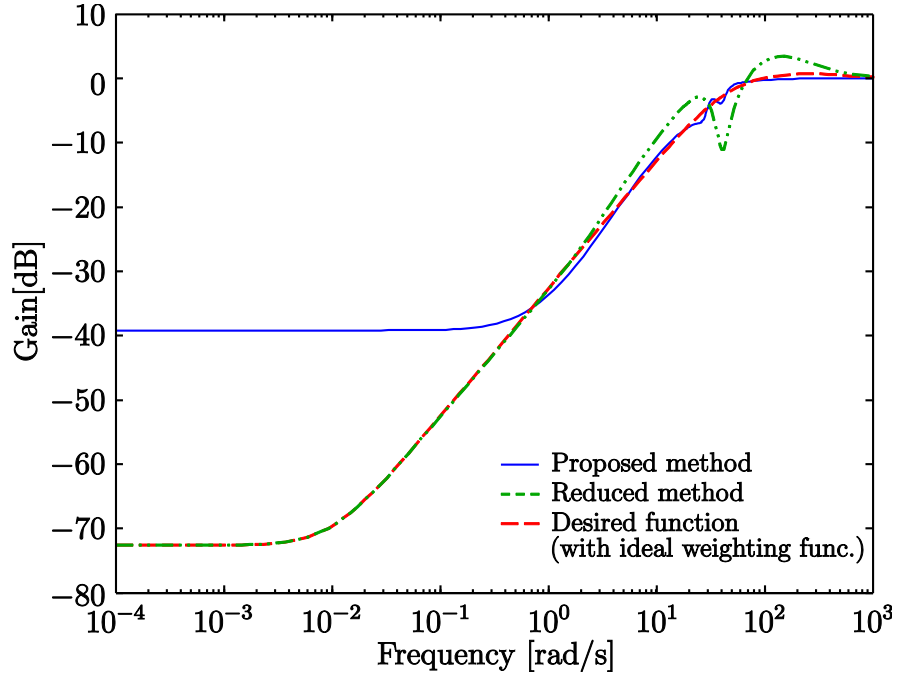


図 3.3: 各重み関数を用いた際の感度関数のゲイン特性

を安定化する制御器  $C_d$  が既知であれば, (3.35) 式より算出可能である。

$$\gamma_{\min} \leq \arcsin \frac{1}{\gamma(G_d, C_d)} - \arcsin \delta_\nu(G, G_d) \quad (3.35)$$

$G_d$  に関して性能レベルは  $\gamma(G_d, C_d) = 1.48$  となった。この結果から, 提案手法では  $\gamma_{\min} \leq 1.63$  の性能レベルを達成可能であると考えられる。以上より,  $\nu$ -gap を用いる設計による利点を確認し, 提案手法と先行研究の違いを示した。

## 第4章 周波数応答を用いた低次多変数安定化制御器の設計

高次数化の問題を解決するために、低次の安定化制御器設計法としてなど多様なアプローチ<sup>[12, 18, 25, 26]</sup>が行われてきた。しかし、モデルに基づく設計<sup>[25, 26]</sup>では、モデル化誤差により性能が劣化するなど影響を受けやすい問題が存在する。このような問題に対し、先行研究である文献<sup>[12, 18]</sup>では、周波数応答のみを直接用いて制御器の設計を行い、モデル化誤差による影響の抑制や設計の簡易化などの有効性を確認した。しかしながら、これらの手法において、制御器は分子多項式のみが調整可能であり、制御器の極は設計者が事前に定めておく必要がある。ゆえに、最適な極を選択するために設計者の試行錯誤が必要不可欠となり、設計における煩雑さを増大させることに繋がる。特に、MIMO システムにおいては、その調整は容易ではなく、制御器の最適な極や構造を求めるために多くの時間を必要とした。

本章では、高次数化やモデル化誤差、制御器の分母多項式の適切さに関する問題点を解決する手法として、周波数応答を用いた低次多変数安定化制御器設計法を提案する。この手法は制御対象の周波数応答を用いた最適化を行うことで直接的に低次の制御器を設計可能にする。また、制御器の分子多項式だけでなく分母多項式についてもパラメータ表示し、準最適な極への調整を実現し、制御器の高次数化とモデル化誤差による性能の変動を抑制する。なお、本章では重み関数  $\mathbf{W}_1$ ,  $\mathbf{W}_2$  は設計者によりあらかじめ与えられるものとして、その設計法は議論しない。

## 4.1 制御器のパラメータ表示

提案手法では (4.1) 式のように各要素の次数が  $\alpha$  次の制御器を  $\boldsymbol{\rho} \in \mathcal{R}^{(\alpha+1)n \times m}$ ,  $\boldsymbol{\eta} \in \mathcal{R}^{(\alpha+1) \times 1}$  を用いてパラメータ表示する。

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{\infty(s, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta})} &= \begin{bmatrix} \frac{N_{11}(s, \boldsymbol{\rho})}{D(s, \boldsymbol{\eta})} & \cdots & \frac{N_{1n}(s, \boldsymbol{\rho})}{D(s, \boldsymbol{\eta})} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{N_{m1}(s, \boldsymbol{\rho})}{D(s, \boldsymbol{\eta})} & \cdots & \frac{N_{mn}(s, \boldsymbol{\rho})}{D(s, \boldsymbol{\eta})} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{D(s, \boldsymbol{\eta})} \mathbf{N}(s, \boldsymbol{\rho}) = \frac{1}{\boldsymbol{\eta}^T \boldsymbol{\phi}_D(s)} \boldsymbol{\rho}^T \boldsymbol{\phi}_N(s) \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\boldsymbol{\phi}_D(s) = [1 \quad \cdots \quad s^{\alpha-1} \quad s^{\alpha}]^T \quad (4.2)$$

$$\boldsymbol{\phi}_N(s) = [\mathbf{I}_n \quad \cdots \quad s^{\alpha-1} \mathbf{I}_n \quad s^{\alpha} \mathbf{I}_n]^T \quad (4.3)$$

ここで,  $D(s, \boldsymbol{\eta})$  は共通分母多項式,  $\mathbf{N}(s, \boldsymbol{\rho})$  は  $m \times n$  の分子多項式行列であり,  $\boldsymbol{\phi}_D(s)$ ,  $\boldsymbol{\phi}_N(s)$  は制御器の分母多項式  $D(s, \boldsymbol{\eta})$  および分子多項式行列  $\mathbf{N}(s, \boldsymbol{\rho})$  における基底関数ベクトルである。また, 分母多項式  $D(s, \boldsymbol{\eta})$  の最高次数の係数は 1 とする。このように制御器をパラメトライズすることにより, 分子多項式と分母多項式をそれぞれ調整することができる。制御器の各要素の分母多項式は共通な  $D(s, \boldsymbol{\eta})$  となるが,  $D(s, \boldsymbol{\eta})$  と  $\mathbf{N}(s, \boldsymbol{\rho})$  の各要素が極零相殺することによって制御器が各要素ごとに最適な構造に調整される。

## 4.2 安定化制御器の設計問題

(2.1) 式の性能レベル  $\gamma$  を最小化する固定次数制御器  $\mathbf{C}_{\infty}$  の設計問題を凸関数として定式化する。線形時不変な拡大システム  $\mathbf{G}(s) \in \mathcal{R}^{n \times m}$  と (4.1) 式の構造を持つ制御器  $\mathbf{C}_{\infty(s, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta})} \in \mathcal{R}^{m \times n}$  に対して, ロバスト安定余裕を最大化する制御器の設計問題は以下のように表現される。

Design problem I for stabilizing controller

$$\min_{\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta}} \gamma$$

subject to

$$\|\mathbf{H}(s, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta})\|_{\infty} < \gamma \quad (4.4)$$

ここで,

$$\mathbf{H}_{(s,\rho,\eta)} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n \\ \mathbf{C}_{\infty(s,\rho,\eta)} \end{bmatrix} (\mathbf{I}_n + \mathbf{G}_{(s)} \mathbf{C}_{\infty(s,\rho,\eta)})^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & \mathbf{G}_{(s)} \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

である。(4.4) 式のノルム制約は (4.6) 式のように周波数応答を用いた評価に書き換えることができる。

$$\gamma^2 \mathbf{I}_{m+n} - \mathbf{H}_{(j\omega_i,\rho,\eta)}^* \mathbf{H}_{(j\omega_i,\rho,\eta)} > 0 \quad (4.6)$$

$$\text{for } i = 1, 2, \dots, N_\omega$$

厳密には (4.6) 式はすべての周波数点について評価しなければならないが, 設計問題を数値的に可解な問題として扱うために, 十分に細かく刻まれた  $N_\omega$  個の周波数点  $\omega_i$  ( $i = 1, \dots, N_\omega$ ) について評価を行う。さらに,  $\mathbf{H}_{(j\omega_i,\rho,\eta)}$  は (4.7) 式のように変形できる。なお, 紙面スペースの都合につき (4.7) 式内では引数  $j\omega_i$  を省略する。

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{(\rho,\eta)} &= \begin{bmatrix} (\mathbf{I}_n + \mathbf{G}\mathbf{C}_{\infty(\rho,\eta)})^{-1} & (\mathbf{I}_n + \mathbf{G}\mathbf{C}_{\infty(\rho,\eta)})^{-1}\mathbf{G} \\ \mathbf{C}_{\infty(\rho,\eta)}(\mathbf{I}_n + \mathbf{G}\mathbf{C}_{\infty(\rho,\eta)})^{-1} & \mathbf{C}_{\infty(\rho,\eta)}(\mathbf{I}_n + \mathbf{G}\mathbf{C}_{\infty(\rho,\eta)})^{-1}\mathbf{G} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (\mathbf{I}_n + \mathbf{G}\mathbf{C}_{\infty(\rho,\eta)})^{-1} & \mathbf{G}(\mathbf{I}_m + \mathbf{C}_{\infty(\rho,\eta)}\mathbf{G})^{-1} \\ \mathbf{C}_{\infty(\rho,\eta)}(\mathbf{I}_n + \mathbf{G}\mathbf{C}_{\infty(\rho,\eta)})^{-1} & \mathbf{C}_{\infty(\rho,\eta)}\mathbf{G}(\mathbf{I}_m + \mathbf{C}_{\infty(\rho,\eta)}\mathbf{G})^{-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & \mathbf{G} \\ \mathbf{C}_{\infty(\rho,\eta)} & \mathbf{C}_{\infty(\rho,\eta)}\mathbf{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n + \mathbf{G}\mathbf{C}_{\infty(\rho,\eta)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_m + \mathbf{C}_{\infty(\rho,\eta)}\mathbf{G} \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} D(\eta)\mathbf{I}_n & D(\eta)\mathbf{G} \\ \mathbf{N}(\rho) & \mathbf{N}(\rho)\mathbf{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D(\eta)\mathbf{I}_n + \mathbf{G}\mathbf{N}(\rho) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D(\eta)\mathbf{I}_m + \mathbf{N}(\rho)\mathbf{G} \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \mathbf{Y}_{(\rho,\eta)} \mathbf{Z}_{(\rho,\eta)}^{-1} \end{aligned} \quad (4.7)$$

ここで,  $\mathbf{Y}_{(j\omega_i,\rho,\eta)}$ ,  $\mathbf{Z}_{(j\omega_i,\rho,\eta)}$  は  $\rho$ ,  $\eta$  に対して線形であることに注意されたい。

(4.7) 式の関係を利用することにより，設計問題は以下のように変換できる。

Design problem II for stabilizing controller

$$\begin{aligned}
 & \min_{\rho, \eta} \gamma \\
 & \text{subject to} \\
 & \mathbf{Z}_{(j\omega_i, \rho, \eta)}^* \mathbf{Z}_{(j\omega_i, \rho, \eta)} - \frac{1}{\gamma^2} \mathbf{Y}_{(j\omega_i, \rho, \eta)}^* \mathbf{Y}_{(j\omega_i, \rho, \eta)} > 0 \quad (4.8) \\
 & \text{for } i = 1, 2, \dots, N_\omega
 \end{aligned}$$

(4.8) 式は  $\mathbf{Y}_{(j\omega_i, \rho, \eta)}$ ,  $\mathbf{Z}_{(j\omega_i, \rho, \eta)}$  に対する QMI 制約となっている。一般に QMI 制約を持つ最適化問題の求解は困難であるが，この形の QMI に対して，文献 [15] で提案されている反復 LMI 制約のアルゴリズムを利用して求解を行う。

#### 4.2.1 反復 LMI 制約による解法

3.2.1 節にて述べた QMI 制約を持つ設計問題を反復的に解く近似解法<sup>[15]</sup>を適用すると，提案手法の設計問題は以下のように表現される。

Design problem III for stabilizing controller

$$\begin{aligned}
 & \min_{\rho_k, \eta_k} \gamma_k^2 \\
 & \text{subject to} \\
 & \left[ \begin{array}{cc} \mathbf{Z}_{(j\omega_i, \rho_k, \eta_k)}^* \tilde{\mathbf{Z}}_k(j\omega_i) + \tilde{\mathbf{Z}}_k(j\omega_i)^* \mathbf{Z}_{(j\omega_i, \rho_k, \eta_k)} - \tilde{\mathbf{Z}}_k(j\omega_i)^* \tilde{\mathbf{Z}}_k(j\omega_i) & \mathbf{Y}_{(j\omega_i, \rho_k, \eta_k)}^* \\ \mathbf{Y}_{(j\omega_i, \rho_k, \eta_k)} & \gamma_k^2 \mathbf{I}_{m+n} \end{array} \right] > 0 \quad (4.9) \\
 & \text{for } i = 1, 2, \dots, N_\omega
 \end{aligned}$$

ここで，下添え字  $k$  は最適化の繰り返し回数を表し，

$$\tilde{\mathbf{Z}}_k(j\omega_i) = \mathbf{Z}_{(j\omega_i, \rho_{k-1}, \eta_{k-1})} \quad (4.10)$$

であり、1 回前の最適化の解  $\boldsymbol{\rho}_{k-1}$ ,  $\boldsymbol{\eta}_{k-1}$  を用いて与える。この最適化において、大域的最適解に収束する保証はなく、局所的最適解あるいは鞍点に収束する可能性がある。しかしながら、非凸な制約を含む最適化問題に対して、性能レベルの単調収束を保証して LMI 最適化により簡易に準最適解を導出することが可能である。

### 4.3 制御器の安定制約

前述した設計問題を解くことにより、ロバスト安定余裕を最大化する固定次数の制御器  $C_{\infty}(s)$  の設計が可能となる。しかし、制御器の分母多項式もパラメータ表示されるため、制御器が不安定極を持つ可能性が生じる。耐故障性の観点から安定な制御器の方が好ましい。そのため、本節では 3.3 節にて示した伝達関数自体が不安定極を持たないための制約を導入し、安定性の保証を図る。この制約を組み込み、設計問題は以下になる。

Design problem III with stability constraint for controller

$$\min_{\boldsymbol{\rho}_k, \boldsymbol{\eta}_k} \gamma_k^2$$

subject to

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Z}(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}_k, \boldsymbol{\eta}_k)^* \tilde{\mathbf{Z}}_k(j\omega_i) + \tilde{\mathbf{Z}}_k(j\omega_i)^* \mathbf{Z}(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}_k, \boldsymbol{\eta}_k) - \tilde{\mathbf{Z}}_k(j\omega_i)^* \tilde{\mathbf{Z}}_k(j\omega_i) & \mathbf{Y}(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}_k, \boldsymbol{\eta}_k)^* \\ \mathbf{Y}(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}_k, \boldsymbol{\eta}_k) & \gamma_k^2 \mathbf{I}_{m+n} \end{bmatrix} > 0 \quad (4.11)$$

$$\mathbf{X}_{k-1} \mathbf{A}_D(\boldsymbol{\eta}_k) + \mathbf{A}_D(\boldsymbol{\eta}_k)^T \mathbf{X}_{k-1} < 0 \quad (4.12)$$

for  $i = 1, 2, \dots, N_\omega$

### 4.4 閉ループシステムに対する安定性の保証

前節で示した設計問題だけでは閉ループシステムの安定性は考慮されていない。そのため、Nyquist 安定判別に基づく閉ループシステムの安定制約を定式化する。

MIMO システムにおいて閉ループシステムが安定となる必要十分条件は、Nyquist の安定判別法より、開ループシステム  $\mathbf{L}(s)$  の不安定極の数と  $\mathbf{L}(s)$  の固有値軌跡  $\lambda_q(j\omega)$  ( $q = 1, \dots, n$ ) が臨界点  $(-1, j0)$  を反時計回りに回る回数の和が等しいことである<sup>[28]</sup>。提案

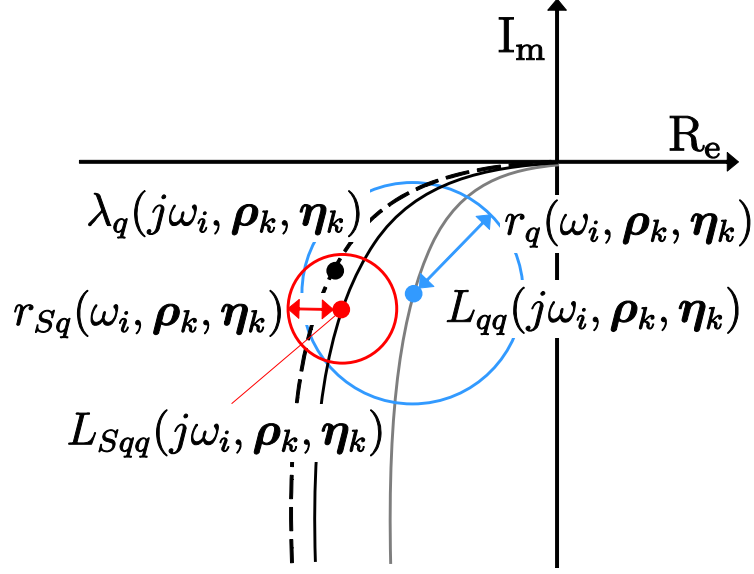


図 4.1: 相似変換による Gershgorin circle の縮小

手法では、前提として閉ループシステムを安定化する初期制御器パラメータ  $\rho_0, \eta_0$  が与えられているものとする。制御器パラメータを  $\rho_0, \eta_0$  から更新する際に、固有値軌跡  $\lambda_q(j\omega, \rho_k, \eta_k)$  ( $q=1, \dots, n$ ) が臨界点を反時計回りに回る回数を変えないように更新すれば、Nyquist の安定判別法により閉ループシステムの安定性は維持される。MIMO システムである  $L(s)$  の周波数応答からその不安定極の数を推定することは難しいが、上述の考えに基づいて  $\rho_k, \eta_k$  を更新すれば不安定極の数を推定することなく閉ループシステムの安定性を保証することができる。しかし、開ループシステムは  $L(s, \rho_k, \eta_k) = G(s)C_\infty(s, \rho_k, \eta_k)$  の固有値軌跡  $\lambda_q(j\omega, \rho_k, \eta_k)$  は設計パラメータ  $\rho_k, \eta_k$  に対して凸関数で表現できず、最適化が困難である。これに対し、固有値の存在範囲を記述する Gershgorin の定理を用いた安定性評価が提案されている<sup>[13, 16]</sup>。

Gershgorin の定理によると周波数  $\omega_i$  における  $L(j\omega_i, \rho_k, \eta_k)$  の  $q$  番目の固有値  $\lambda_q(j\omega_i, \rho_k, \eta_k)$  は図 4.1 のように  $L(j\omega_i, \rho_k, \eta_k)$  の  $q$  番目の対角要素  $L_{qq}(j\omega_i, \rho_k, \eta_k)$  を中心とし、半径  $r_q(\omega_i, \rho_k, \eta_k)$  の円盤 (Gershgorin circle) の内部に存在することが知られている<sup>[29]</sup>。ここで、 $r_q(\omega_i, \rho_k, \eta_k)$  は (4.13) 式で定義される。

$$r_q(\omega_i, \rho_k, \eta_k) = \sum_{p=1, p \neq q}^n |L_{qp}(j\omega_i, \rho_k, \eta_k)| \quad (4.13)$$

固有値の存在範囲を表す円盤が作る領域を Gershgorin bands と呼び、固有値の数だけ存在するすべての Gershgorin bands を用いて間接的に固有値の評価が可能となる。しかし、固有値の存在範囲であるバンドの大きさは (4.13) 式の定義上  $L(j\omega_i, \rho_k, \eta_k)$  の非対



角要素のゲインに依存する。そのため、扱う制御対象によっては制御器設計時の安定性の評価が保守的となる。保守性の改善として、文献 [16] において相似変換による固有値軌跡の存在範囲の縮小が提案されている。相似変換によって  $\mathbf{L}_{(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}_k, \boldsymbol{\eta}_k)}$  の固有値を変化させずに非対角要素を縮小した行列  $\mathbf{L}_{S(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}_k, \boldsymbol{\eta}_k)}$  に変換でき、図 4.1 のように固有値の存在範囲である円盤を縮小できる。 $\mathbf{L}_{S(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}_k, \boldsymbol{\eta}_k)}$  は (4.14) 式で表現できる。

$$\mathbf{L}_{S(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}_k, \boldsymbol{\eta}_k)} = \mathbf{V}_{(j\omega_i)}^{-1} \mathbf{L}_{(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}_k, \boldsymbol{\eta}_k)} \mathbf{V}_{(j\omega_i)} \quad (4.14)$$

相似変換行列  $\mathbf{V}_{(j\omega_i)}$  は理想的には  $\mathbf{L}_{(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}_k, \boldsymbol{\eta}_k)}$  を対角化することが望ましいが、 $\mathbf{V}_{(j\omega_i)}$  は設計すべき  $\mathbf{L}_{(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}_k, \boldsymbol{\eta}_k)}$  に依存するため、文献 [16] と同様に  $\mathbf{L}_{(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}_{k-1}, \boldsymbol{\eta}_{k-1})}$  を対角化する  $\mathbf{V}_{(j\omega_i)}$  を用いる。これにより、 $k$  回目の設計における Gershgorin bands は、 $\mathbf{L}_{S(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}_k, \boldsymbol{\eta}_k)}$  の対角要素  $L_{Sqq}(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}_k, \boldsymbol{\eta}_k)$  を中心した半径  $r_{Sq}(\omega_i, \boldsymbol{\rho}_k, \boldsymbol{\eta}_k)$  の円盤群となり、 $r_{Sq}(\omega_i, \boldsymbol{\rho}_k, \boldsymbol{\eta}_k)$  は設計パラメータ  $\boldsymbol{\rho}_k, \boldsymbol{\eta}_k$  に対して (4.15) 式で定義される。

$$r_{Sq}(\omega_i, \boldsymbol{\rho}_k, \boldsymbol{\eta}_k) = \sum_{p=1, p \neq q}^n |L_{Sqp}(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}_k, \boldsymbol{\eta}_k)| \quad (4.15)$$

相似変換の前後で固有値は不変であるので、 $\mathbf{L}_{S(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}_k, \boldsymbol{\eta}_k)}$  の Gershgorin bands を用いて  $\mathbf{L}_{(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}_k, \boldsymbol{\eta}_k)}$  の固有値を評価することができる。

次に、閉ループシステムが安定となる条件を考える。閉ループシステムを安定化する初期設計パラメータ  $\boldsymbol{\rho}_0, \boldsymbol{\eta}_0$  が与えられており、1 回前の最適化によって得られた固有値  $\lambda_q(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}_{k-1}, \boldsymbol{\eta}_{k-1})$  ( $q=1, \dots, n$ ) と、現在の固有値  $\lambda_q(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}_k, \boldsymbol{\eta}_k)$  ( $q=1, \dots, n$ ) の臨界点に対する回転数が維持されるように更新されれば、繰り返し設計を経ても閉ループシステムの安定性が保証できる。ゆえに、すべての周波数点において更新前における固有値と臨界点との距離よりも更新前後における固有値の変化が小さくなるように (4.16) 式の制約を付加すれば、更新の前後で臨界点を回る回数に変化せず、安定性が維持される。

$$|1 + \lambda_q(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}_{k-1}, \boldsymbol{\eta}_{k-1})| > |\lambda_q(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}_k, \boldsymbol{\eta}_k) - \lambda_q(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}_{k-1}, \boldsymbol{\eta}_{k-1})| \quad (4.16)$$

$$\text{for } i = 1, \dots, N_\omega \text{ and } q = 1, \dots, n$$

また、Gershgorin の定理から  $\lambda_q(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}_k, \boldsymbol{\eta}_k)$  は中心  $L_{Sqq}(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}_k, \boldsymbol{\eta}_k)$ 、半径  $r_{Sq}(\omega_i, \boldsymbol{\rho}_k, \boldsymbol{\eta}_k)$  の円盤内部に存在することから、(4.17) 式を満たす複素関数  $\Delta(j\omega_i)$  ( $|\Delta(j\omega_i)| \leq 1$ ) が存在する。

$$\lambda_q(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}_k, \boldsymbol{\eta}_k) = L_{Sqq}(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}_k, \boldsymbol{\eta}_k) + r_{Sq}(\omega_i, \boldsymbol{\rho}_k, \boldsymbol{\eta}_k) \Delta(j\omega_i) \quad (4.17)$$

(4.16) 式右辺に関して (4.17) 式と三角不等式から以下の関係が成り立つ。

$$\begin{aligned}
 & |\lambda_q(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}_k, \boldsymbol{\eta}_k) - \lambda_q(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}_{k-1}, \boldsymbol{\eta}_{k-1})| \\
 &= |L_{Sq}(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}_k, \boldsymbol{\eta}_k) + r_{Sq}(\omega_i, \boldsymbol{\rho}_k, \boldsymbol{\eta}_k) \Delta(j\omega_i) - \lambda_q(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}_{k-1}, \boldsymbol{\eta}_{k-1})| \\
 &\leq |L_{Sq}(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}_k, \boldsymbol{\eta}_k) - \lambda_q(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}_{k-1}, \boldsymbol{\eta}_{k-1})| + r_{Sq}(\omega_i, \boldsymbol{\rho}_k, \boldsymbol{\eta}_k) |\Delta(j\omega_i)| \\
 &\leq |L_{Sq}(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}_k, \boldsymbol{\eta}_k) - \lambda_q(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}_{k-1}, \boldsymbol{\eta}_{k-1})| + r_{Sq}(\omega_i, \boldsymbol{\rho}_k, \boldsymbol{\eta}_k)
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

よって, (4.16) 式の十分条件として (4.19) 式が得られる。

$$|1 + \lambda_q(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}_{k-1}, \boldsymbol{\eta}_{k-1})| - r_{Sq}(\omega_i, \boldsymbol{\rho}_k, \boldsymbol{\eta}_k) - |L_{Sq}(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}_k, \boldsymbol{\eta}_k) - \lambda_q(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}_{k-1}, \boldsymbol{\eta}_{k-1})| > 0 \tag{4.19}$$

for  $i = 1, \dots, N_\omega$  and  $q = 1, \dots, n$

(4.18) 式において三角不等式を導入し,  $|\Delta(j\omega_i)|$  を消去したことによって生じた保守性は, 解収束と相似変換によって  $r_{Sq}(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}_k, \boldsymbol{\eta}_k)$  が 0 へと近づくことで改善される。さらに, 制御器の構造 (4.1) 式と  $|D(j\omega_i, \boldsymbol{\eta}_k)| > 0$  より (4.19) 式は (4.20) 式に変換できる。

$$\begin{aligned}
 & |D(j\omega_i, \boldsymbol{\eta}_k)| |1 + \lambda_q(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}_{k-1}, \boldsymbol{\eta}_{k-1})| - \hat{r}_{Sq}(\omega_i, \boldsymbol{\rho}_k) \\
 & - \left| \hat{L}_{Sq}(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}_k) - \lambda_q(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}_{k-1}, \boldsymbol{\eta}_{k-1}) D(j\omega_i, \boldsymbol{\eta}_k) \right| > 0
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

for  $i = 1, \dots, N_\omega$  and  $q = 1, \dots, n$

ただし,  $\hat{L}_{Sq}(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}_k)$  は (4.21) 式に示される  $\hat{\mathbf{L}}_S(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}_k)$  の  $q$  番目の対角要素であり,  $\hat{r}_{Sq}(\omega_i, \boldsymbol{\rho}_k)$  は (4.22) 式である。

$$\hat{\mathbf{L}}_S(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}_k) = \mathbf{G}(j\omega_i) \mathbf{N}(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}_k) \tag{4.21}$$

$$\hat{r}_{Sq}(\omega_i, \boldsymbol{\rho}_k) = \sum_{p=1, q \neq p}^n \left| \hat{L}_{Sqp}(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}_k) \right| \tag{4.22}$$

(4.20) 式の安定制約は, 設計パラメータ  $\boldsymbol{\rho}_k, \boldsymbol{\eta}_k$  に対して凸関数と凸関数の差として表現される非凸な制約となるため, 凸最適化により求解することが困難である。そこで, 文献 [17] で述べられている近似法に基づき (4.20) 式の第一項を  $\boldsymbol{\rho}_{k-1}, \boldsymbol{\eta}_{k-1}$  において線形化し, 元の関数の上界を表現する関数に近似することにより (4.20) 式の十分条件として (4.23) 式が導出できる。

$$\begin{aligned}
 & \frac{\operatorname{Re}(D(j\omega_i, \boldsymbol{\eta}_{k-1}) D(j\omega_i, \boldsymbol{\eta}_k)^*)}{|D(j\omega_i, \boldsymbol{\eta}_{k-1})|} |1 + \lambda_q(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}_{k-1}, \boldsymbol{\eta}_{k-1})| - \hat{r}_{Sq}(\omega_i, \boldsymbol{\rho}_k) \\
 & - \left| \hat{L}_{Sq}(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}_k) - \lambda_q(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}_{k-1}, \boldsymbol{\eta}_{k-1}) D(j\omega_i, \boldsymbol{\eta}_k) \right| > 0
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

for  $i = 1, \dots, N_\omega$  and  $q = 1, \dots, n$

なお、解の収束により  $D(j\omega_i, \boldsymbol{\eta}_k) = D(j\omega_i, \boldsymbol{\eta}_{k-1})$  となることで近似前の制約と近似後の制約は一致する。この安定制約を付加することにより、最終的な設計問題は以下のようになる。

Design problem III with stability constraints for controller and closed-loop system

$$\min_{\boldsymbol{\rho}_k, \boldsymbol{\eta}_k} \gamma_k^2$$

subject to

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Z}(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}_k, \boldsymbol{\eta}_k)^* \tilde{\mathbf{Z}}_k(j\omega_i) + \tilde{\mathbf{Z}}_k(j\omega_i)^* \mathbf{Z}(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}_k, \boldsymbol{\eta}_k) - \tilde{\mathbf{Z}}_k(j\omega_i)^* \tilde{\mathbf{Z}}_k(j\omega_i) & \mathbf{Y}(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}_k, \boldsymbol{\eta}_k)^* \\ \mathbf{Y}(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}_k, \boldsymbol{\eta}_k) & \gamma_k^2 \mathbf{I}_{m+n} \end{bmatrix} > 0 \quad (4.24)$$

$$\mathbf{X}_{k-1} \mathbf{A}_D(\boldsymbol{\eta}_k) + \mathbf{A}_D(\boldsymbol{\eta}_k)^T \mathbf{X}_{k-1} < 0 \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\operatorname{Re}(D(j\omega_i, \boldsymbol{\eta}_{k-1}) D(j\omega_i, \boldsymbol{\eta}_k)^*)}{|D(j\omega_i, \boldsymbol{\eta}_{k-1})|} |1 + \lambda_q(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}_{k-1}, \boldsymbol{\eta}_{k-1})| - \hat{r}_{Sq}(\omega_i, \boldsymbol{\rho}_k) \\ & - \left| \hat{L}_{Sq}(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}_k) - \lambda_q(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}_{k-1}, \boldsymbol{\eta}_{k-1}) D(j\omega_i, \boldsymbol{\eta}_k) \right| > 0 \quad (4.26) \end{aligned}$$

$$\text{for } i = 1, \dots, N_\omega \text{ and } q = 1, \dots, n$$

#### 4.4.1 設計アルゴリズム

本節では提案手法の設計アルゴリズムを示す。

##### Step 1 設計準備

制御対象の入出力データより設計者が定める  $N_\omega$  個の周波数点  $\omega_i$  ( $i=1, \dots, N_\omega$ ) に対し周波数応答  $\mathbf{P}(j\omega_i)$  を推定し、拡大システムの周波数応答  $\mathbf{G}(j\omega_i) = \mathbf{W}_2(j\omega_i) \mathbf{P}(j\omega_i) \mathbf{W}_1(j\omega_i)$  を導出する。なお、このとき初期制御器が達成する  $\gamma$  の値を考慮する必要はない。また、制御対象から動作条件の異なる複数組の周波数応答を推定し、同時に評価することで、不確かさなどに対してロバストな制御器の設計が可能である。そして、強安定化を実現するために、閉ループシステムを安定化する安定な制御器を与える初期設計パラメータ  $\boldsymbol{\rho}_0, \boldsymbol{\eta}_0$  を与え、繰り返し回数  $k$  を  $k=1$  とする。

##### Step 2 変換行列 $\mathbf{V}(j\omega_i)$ などの導出

現在得られている設計パラメータ  $\boldsymbol{\rho}_{k-1}, \boldsymbol{\eta}_{k-1}$  からなる開ループシステム  $\mathbf{L}(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}_{k-1}, \boldsymbol{\eta}_{k-1})$  に対して相似変換を考え、 $\mathbf{L}(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}_{k-1}, \boldsymbol{\eta}_{k-1})$  を対角化する変換行列  $\mathbf{V}(j\omega_i)$  を求める。また、

$\mathbf{L}(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}_{k-1}, \boldsymbol{\eta}_{k-1})$  から  $\lambda_q(j\omega, \boldsymbol{\rho}_{k-1}, \boldsymbol{\eta}_{k-1})$  を計算し,  $\mathbf{A}_D(\boldsymbol{\eta}_{k-1})$  から  $\mathbf{X}_{k-1}$  を導出する。さらに,  $\boldsymbol{\rho}_{k-1}, \boldsymbol{\eta}_{k-1}$  を用いて  $\tilde{\mathbf{Z}}_k$  を求める。

### Step 3 凸最適化計算

以下の LMI 最適化問題を解き, 新たな解  $\boldsymbol{\rho}_k, \boldsymbol{\eta}_k$  を得る。

$$\begin{aligned} & \min_{\boldsymbol{\rho}_k, \boldsymbol{\eta}_k} \gamma_k^2 \\ & \text{subject to} \\ & \begin{bmatrix} \mathbf{Z}(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}_k, \boldsymbol{\eta}_k)^* \tilde{\mathbf{Z}}_k(j\omega_i) + \tilde{\mathbf{Z}}_k(j\omega_i)^* \mathbf{Z}(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}_k, \boldsymbol{\eta}_k) - \tilde{\mathbf{Z}}_k(j\omega_i)^* \tilde{\mathbf{Z}}_k(j\omega_i) & \mathbf{Y}(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}_k, \boldsymbol{\eta}_k)^* \\ \mathbf{Y}(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}_k, \boldsymbol{\eta}_k) & \gamma_k^2 \mathbf{I}_{m+n} \end{bmatrix} > 0 \quad (4.27) \\ & \mathbf{X}_{k-1} \mathbf{A}_D(\boldsymbol{\eta}_k) + \mathbf{A}_D(\boldsymbol{\eta}_k)^T \mathbf{X}_{k-1} < 0 \quad (4.28) \\ & \frac{\text{Re}(D(j\omega_i, \boldsymbol{\eta}_{k-1}) D(j\omega_i, \boldsymbol{\eta}_k)^*)}{|D(j\omega_i, \boldsymbol{\eta}_{k-1})|} |1 + \lambda_q(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}_{k-1}, \boldsymbol{\eta}_{k-1})| - \hat{r}_{Sq}(\omega_i, \boldsymbol{\rho}_k) \\ & \quad - \left| \hat{L}_{Sq}(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}_k) - \lambda_q(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}_{k-1}, \boldsymbol{\eta}_{k-1}) D(j\omega_i, \boldsymbol{\eta}_k) \right| > 0 \quad (4.29) \\ & \text{for } i = 1, \dots, N_\omega \text{ and } q = 1, \dots, n \end{aligned}$$

### Step 4 繰り返し終了判定

(4.30) 式で定義される性能レベル  $\gamma_k$  の相対誤差  $\delta(\gamma_k)$  が, 終了判定 ( $\delta(\gamma_k) < \delta_e$ ) を設定した回数だけ連続して満たすまで設計を繰り返す。

$$\delta(\gamma_k) = \frac{|\gamma_{k-1} - \gamma_k|}{|\gamma_{k-1}|} \times 100 \quad [\%] \quad (4.30)$$

終了判定を満たさない場合は step 2 に戻り設計を繰り返す。最終的に, 繰り返しを終了した時点の設計パラメータ  $\boldsymbol{\rho}_k, \boldsymbol{\eta}_k$  がこの手法における設計結果となる。

## 4.5 シミュレーション検証

この SISO システムに対するシミュレーションを通じて制御器の調整による結果の違いとその極の妥当性を確認する。この際, 制御器の極を固定し分子多項式のみを調整する文献<sup>[12]</sup>の手法, 制御器の極も調整する文献<sup>[26]</sup>のモデルベースの手法, 最適な高次の制御器を設計するモデルベースの手法である文献<sup>[21]</sup>と比較する。なお, 文献<sup>[21]</sup>, <sup>[26]</sup>, <sup>[12]</sup>をそれぞれ最適手法, 従来手法, 先行手法とする。

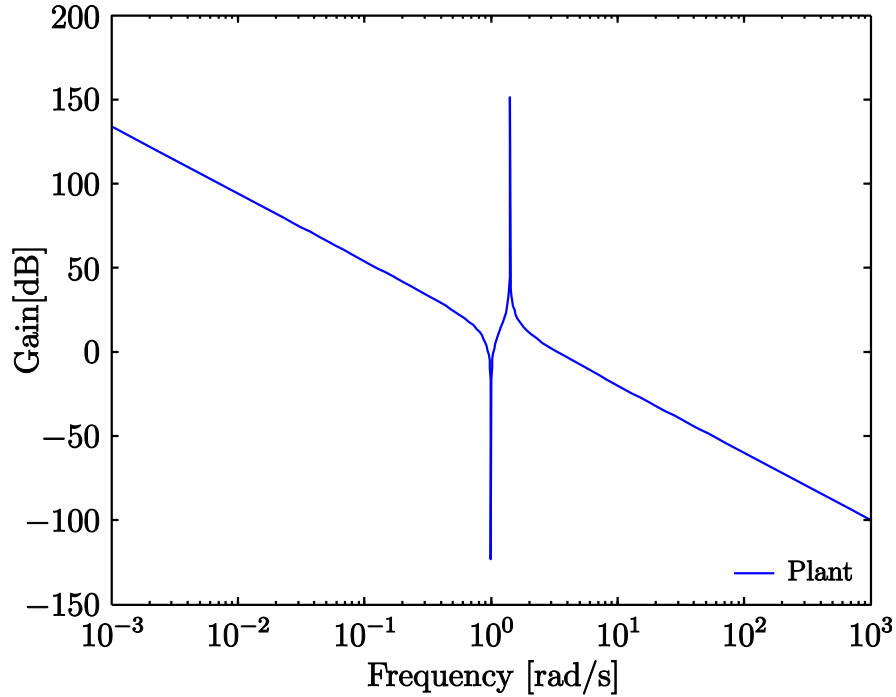


図 4.2: 制御対象のゲイン特性

#### 4.5.1 シミュレーション条件

シミュレーションは、文献<sup>[26]</sup>で用いられている (4.31) 式の安定限界な 2 慣性システムを例にとった。

$$P(s) = \frac{10(s^2 + 1)}{s^2(s^2 + 2)} \quad (4.31)$$

このシステムのゲイン特性を図 4.2 に示す。図 4.2 から確認できるように、このシステムは 1[rad/s] と 1.41[rad/s] に共振周波数点を有する。設計周波数点は、 $10^{-2}$ – $10^2$  rad/s の区間で対数的に等間隔な 500 点とした。そして、取得した周波数応答を用いて、低次の制御器として 1 次の制御器と最適な制御器と同じ次数となる 4 次の制御器の 2 種の制御器をそれぞれ以下の条件で設計する。

1 次の制御器は、先行手法および提案手法それぞれ (4.32), (4.33) 式に示す PD 制御

器を設計する。

$$C_{\text{pre}}(s, \boldsymbol{\rho}) = \boldsymbol{\rho}^T \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{s}{s+10} \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

$$C_{1,\text{pro}}(s, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta}) = \frac{1}{\mathcal{D}(s, \boldsymbol{\eta})} \boldsymbol{\rho}^T \begin{bmatrix} 1 \\ s \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

$$\mathcal{D}(s, \boldsymbol{\eta}) = \boldsymbol{\eta}^T \begin{bmatrix} 1 & s \end{bmatrix}^T \quad (4.34)$$

ここで、先行手法および提案手法では、閉ループシステムを安定化する (4.35) 式の制御器を与える。

$$C_0(s) = \frac{s+9}{s+10} \quad (4.35)$$

また、4 次の制御器は、提案手法にて (4.36) 式に示す PD 制御器を設計する。

$$C_{4,\text{pro}}(s, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta}) = \frac{1}{\mathcal{D}(s, \boldsymbol{\eta})} \boldsymbol{\rho}^T \begin{bmatrix} 1 & s & s^2 & s^3 & s^4 \end{bmatrix}^T \quad (4.36)$$

$$\mathcal{D}(s, \boldsymbol{\eta}) = \boldsymbol{\eta}^T \begin{bmatrix} 1 & s & s^2 & s^3 & s^4 \end{bmatrix}^T \quad (4.37)$$

ここで、閉ループシステムを安定化する (4.38) 式の制御器を与える。

$$C_0(s) = \frac{0.009271s^4 + 0.07683s^3 + 0.2107s^2 + 0.2585s + 0.1232}{s^4 + 5.648s^3 + 15.73s^2 + 23.41s + 13.29} \quad (4.38)$$

そして、先行手法および提案手法における求解アルゴリズムの収束判定条件は、反復に対する性能レベルの相対誤差が 3 回連続して 0.01 % を下回ることとする。

## 4.5.2 結果と考察

各手法により設計された制御器は、(4.39)–(4.43) 式のようになった。

$$C_{1,\text{pro}}(s) = \frac{2.584s + 1.688}{s + 5.565} \quad (4.39)$$

$$C_{\text{pre}}(s) = \frac{3.783s + 2.792}{s + 10} \quad (4.40)$$

$$C_{\text{con}}(s) = \frac{2.565s + 1.673}{s + 5.516} \quad (4.41)$$

$$C_{4,\text{pro}}(s) = \frac{2.365s^4 + 5.527s^3 + 6.553s^2 + 7.218s + 3.878}{s^4 + 8.653s^3 + 9.59s^2 + 9.326s + 9.168} \quad (4.42)$$

$$C_{\text{opt}}(s) = \frac{4.26 \times 10^6 s^3 + 5.007 \times 10^6 s^2 + 5.697 \times 10^6 s + 6.113 \times 10^6}{s^4 + 1.815 \times 10^6 s^3 + 1.359 \times 10^7 s^2 + 1.713 \times 10^6 s + 1.435 \times 10^7} \quad (4.43)$$

表 4.1: 性能レベルの比較

	$\gamma$	order
Proposed method	3.445	1
Previous method	3.910	1
Conventional method	3.445	1
Proposed method	2.567	4
Optimal method	2.552	4

提案手法を用いて設計を行った結果、1 次の制御器に対する (4.6) 式の性能レベル  $\gamma$  の値は 3.445 となった。表 4.1 にそれぞれの手法の制御器に対し、取得周波数において評価した  $\gamma$  の値を示す。なお、制御器の次数は 1 次と 4 次があり、1 次と 4 次制御器の間には自由度の差があるため、性能レベルを直接的に比較しない。まず、1 次の制御器の結果について着目する。提案手法の結果を先行手法による性能レベル  $\gamma = 3.910$  と比較すると、提案手法の方が先行手法より一層性能レベルが抑制され、より大きなロバスト安定余裕を確保された。この結果から、提案手法では分子多項式だけでなく制御器の極の調整もできるため、設計の自由度が増して一層性能レベルを抑制する制御器の設計が実現されている。また、極の調整が行われるモデルベースのアプローチである従来手法では性能レベル  $\gamma = 3.445$  となり、提案手法は従来手法と同等の性能を達成している。この結果から、提案手法により達成される性能レベルが十分に抑制されることが確認できる。

次に、各手法における制御器の極を比較する。固定されている先行手法の制御器の極:  $-10$  に対して、提案手法では極が  $-5.565$ 、従来手法では極が  $-5.516$  へと調整されている。この極の位置から、提案手法における極の調整により極が  $-10$  から大きく変化しており、これに伴い性能レベルが向上していることが確認できる。また、提案手法と従来手法では近い位置に極が調整されており、提案手法により調整された極は妥当であると考えられる。

次に、提案手法と先行手法、従来手法および最適手法により設計を行った制御器のボード線図を図 4.3, 4.4 に示す。ここで、最適制御器は制御対象の共振を打ち消すようなゲイン特性を実現している。提案手法と先行手法のボード線図を比較すると、提案手法の方が先行手法と比べ、最適制御器のゲイン特性と位相特性に近い特性を達成している。また、提案手法と従来手法を比較すると、これらの手法による制御器のゲイン特性と位相特性は一致し、それぞれの制御器の分子多項式の値も近い値となってい



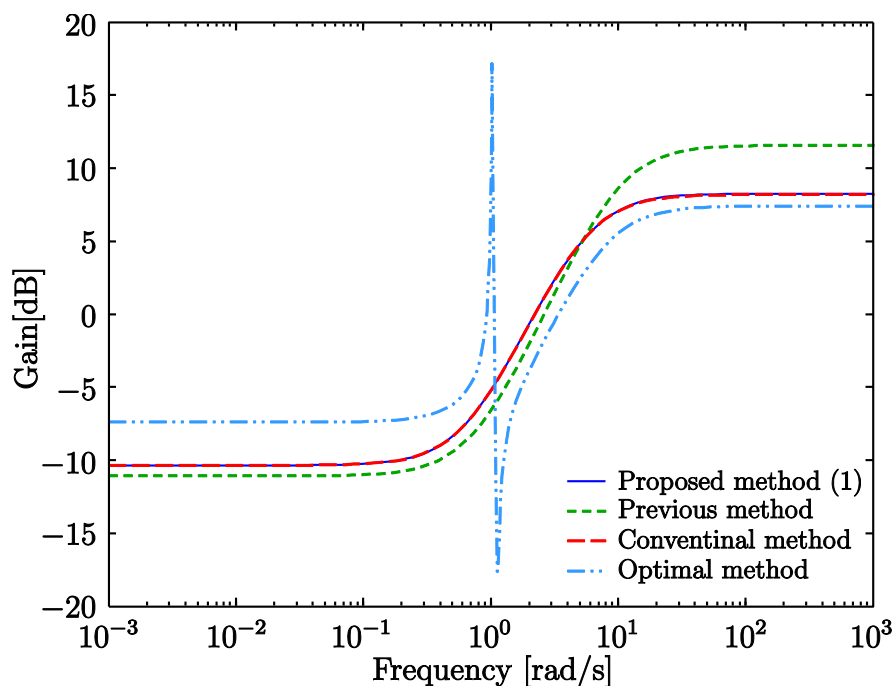


図 4.3: 各手法の制御器のゲイン特性

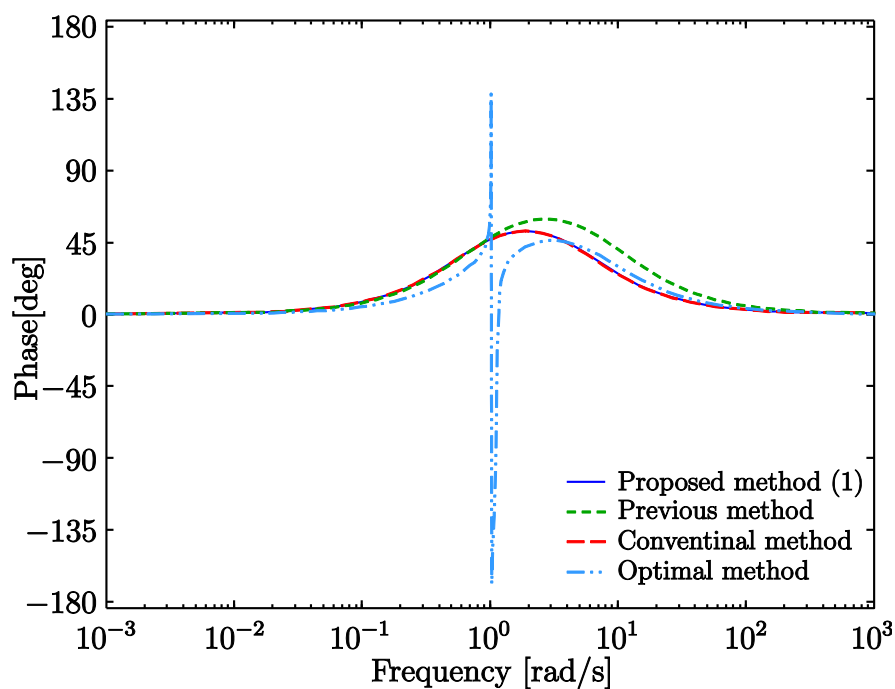


図 4.4: 各手法の制御器の位相特性

る。このことから、モデルベースの制御器設計法と同等の性能を持つ制御器を設計できたことが確認できる。

最後に、4 次の制御器に対する (4.6) 式の性能レベル  $\gamma$  の値を表 4.1 に合わせて示す。

表 4.2: 4 次の制御器の極

Proposed method	-1.132	-7.521	$-0.0002 \pm j1.038$
Optimal method	$-1.814 \times 10^6$	-7.502	$0.0074 \pm j1.026$

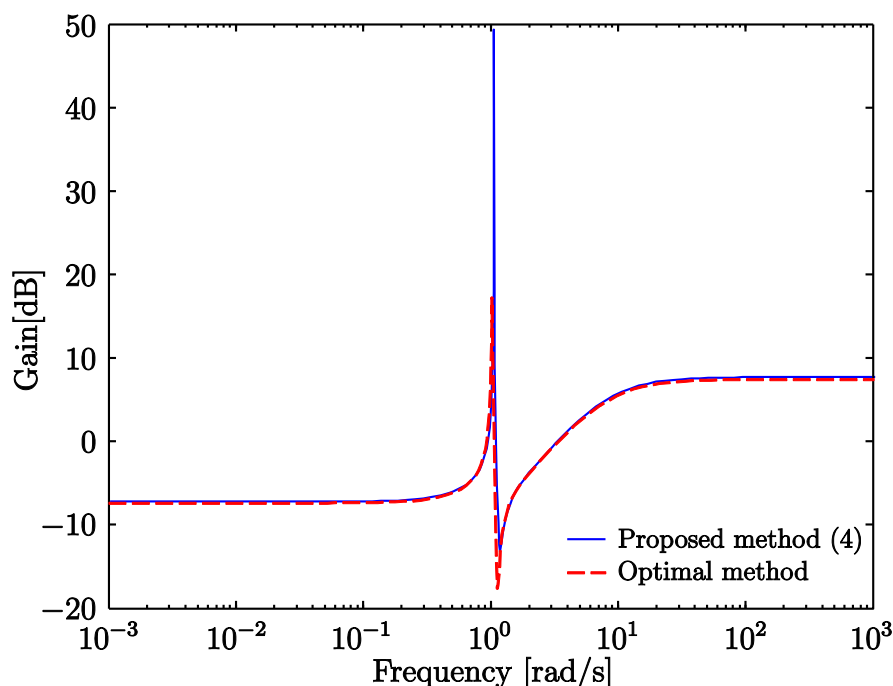


図 4.5: 4 次の制御器のゲイン特性

提案手法では、性能レベルが2.567となり、1次の制御器の設計結果よりも良いことが確認できる。しかしながら、最適な制御器の性能レベル2.552を達成できていない。これは、制御器の極の違いから生じていると考えられる。この際の制御器の極を表4.2にまとめる。この表より、最適な制御器が不安定な極を有している反面、提案手法ではすべてが安定な極を持っていることが確認できる。このように、提案手法では制御器自体に対する安定制約により、性能レベルがやや悪化するものの、強安定化を簡易に実現された。この時の制御器のボード線図である図4.5,4.6を確認すると、提案手法と最適な制御器で分母・分子多項式が異なるが、両制御器ともに制御対象の共振の影響を打ち消すようなゲイン特性を実現している。

以上より、提案手法では周波数応答を直接用いてロバスト安定余裕を達成する良好な強安定化制御器  $C_{\infty}(s)$  が容易に設計されることが確認できる。

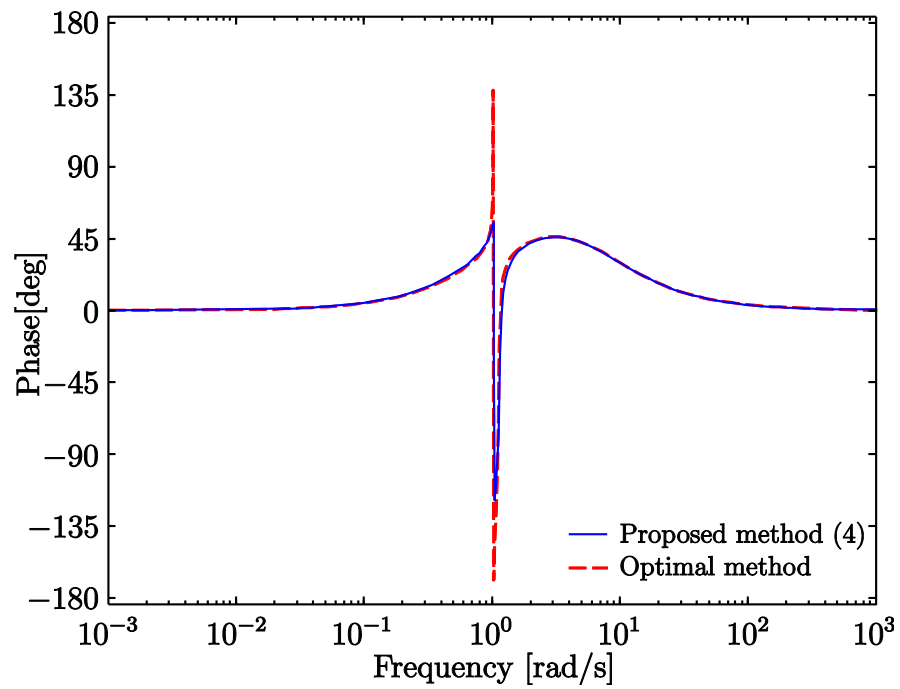


図 4.6: 4 次の制御器の位相特性

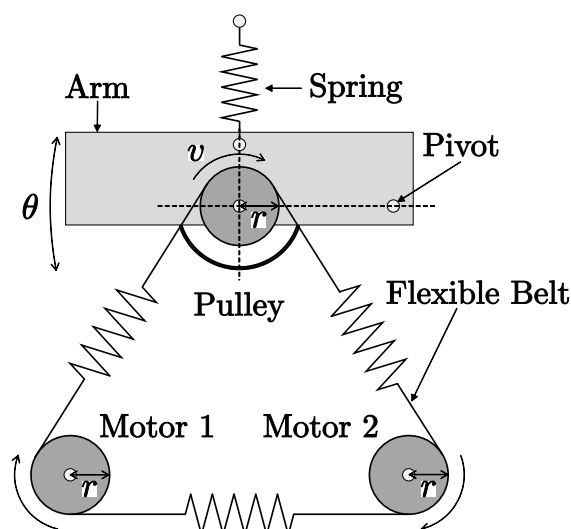


図 4.7: 張力速度制御装置の概要図

## 4.6 実機検証

本節では、2 種の実機実験を通して提案手法の有効性を検証する。1 つ目の実験では複数の初期パラメータを与え、その初期パラメータにより設計される制御器への影響と閉ループシステムの安定性について確認する。さらに、モデルベースの安定化制御器設計法<sup>[21]</sup>、およびその設計法で得た制御器をハンケルノルム近似<sup>[30]</sup>で低次化した制御器、周波数応答のみを用いた分子多項式のみを調整する固定構造安定化制御器設計法<sup>[18]</sup>を用いて提案手法との比較を行い、達成される評価値、設計された制御器の妥当性を確認する。また、2 つ目の実験では制御対象から取得した複数組の周波数応答データから制御器の設計を行い、モデルの変動などの不確かさをモデル化しなくてもロバストな制御器が簡単に設計できることを示す。

### 4.6.1 制御対象

この 2 種の実験では安定な対象である張力・速度制御装置を制御対象として使用する。張力・速度制御装置の模式図を図 4.7 に示す。この制御対象は、入力にモータ 1, 2 への入力トルク  $\tau_1$ ,  $\tau_2$ 、出力にプーリー速度  $v$  [rad/s] とアーム角  $\theta$  [deg] を持つ 2 入力 2 出力システムであり、弾性ベルトにより 2 つのモータとプーリーが連結されている。この 2 つのモータによりベルトの速度と張力を制御する。この制御対象に対して、振幅 0.8 で周波数が  $10^{-3}$ – $10^3$  [rad/s] で変化する正弦波掃引信号を入力し、周波数応答を推定する。

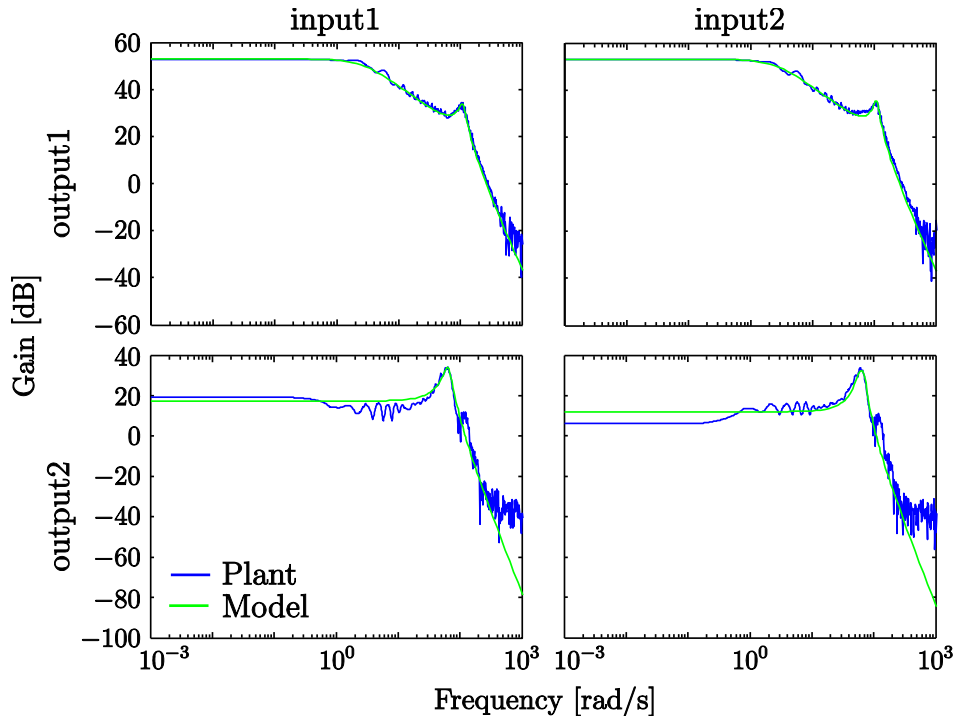


図 4.8: 実際の制御対象と同定モデルの周波数応答

#### 4.6.2 実験条件 1

設計周波数点は、 $10^{-3}$ – $10^3$  [rad/s] の区間で対数的に等間隔な 500 点とする。推定した制御対象の周波数応答を図 4.8 に示す。 $10^2$  [rad/s] より高い周波数帯域において、雑音の影響から周波数応答に乱れが生じている。ここでは、雑音の影響を含めた図 4.8 の周波数応答を用いて制御器の設計を行っているが、周波数応答の乱れが大きい場合には前処理として入出力データを適切なカットオフ周波数を持つローパスフィルタに通し、フィルタリングされた入出力データを用いて周波数応答を推定することで雑音の影響を低減することができる。また、今回比較に用いる手法である文献 [21] の手法、ハンケルノルム近似を用いる手法のために、周波数応答から制御対象の数式モデルを同定した。同定した数式モデルの周波数応答も図 4.8 に併せて示す。この数式モデルは、共振周波数付近において実機の周波数応答の特性を十分に再現するように構築した。また、設計で用いる重み関数は (4.44), (4.45) 式とした。

$$\mathbf{W}_1(s) = \begin{bmatrix} \frac{-0.2684s+4.438}{1000s} & \frac{-0.2731s+303.6}{1000s} \\ \frac{3.164s+258.6}{1000s} & \frac{3.036s+299.8}{1000s} \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

$$\mathbf{W}_2(s) = \mathbf{I}_2 \quad (4.45)$$

表 4.3: 実験 1 における初期パラメータ

Initial parameter	$\gamma_0$
$\boldsymbol{\rho}_0^{[1]} = \begin{bmatrix} 20 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 20 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$	4.509
$\boldsymbol{\eta}_0^{[1]} = \begin{bmatrix} 20 & 1 \end{bmatrix}^T$	
$\boldsymbol{\rho}_0^{[2]} = \begin{bmatrix} 3.91 & 2.85 & 2.66 & -2.60 \\ 4.71 & 5.41 & 1.13 & 0.624 \end{bmatrix}^T$	19.64
$\boldsymbol{\eta}_0^{[2]} = \begin{bmatrix} 7.36 & 1 \end{bmatrix}^T$	
$\boldsymbol{\rho}_0^{[3]} = \begin{bmatrix} 6.40 & 4.09 & 4.41 & -5.70 \\ 1.41 & 4.47 & -2.06 & 2.53 \end{bmatrix}^T$	34.96
$\boldsymbol{\eta}_0^{[3]} = \begin{bmatrix} 1.86 & 1 \end{bmatrix}^T$	

提案手法の制御器構造は (4.46) 式に示すように各要素の次数が 1 次である制御器構造とした。

$$\begin{aligned}
 \mathbf{C}_{\text{pro}}(s, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta}) &= \frac{1}{D(s, \boldsymbol{\eta})} \boldsymbol{\rho}^T \begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 \\ s\mathbf{I}_2 \end{bmatrix} \\
 D(s, \boldsymbol{\eta}) &= \boldsymbol{\eta}^T \begin{bmatrix} 1 \\ s \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.46}$$

繰返し終了判定は，制御器設計後に (4.30) 式で定義される相対誤差  $\delta(\gamma_k)$  が 3 回連続して  $\delta_e = 0.1\%$  を下回ることとする。そして，初期解  $\boldsymbol{\rho}_0, \boldsymbol{\eta}_0$  は閉ループシステムを安定化する安定な初期制御器とし，表 4.3 に示す 3 つの初期値  $\{\boldsymbol{\rho}_0^{[1]}, \boldsymbol{\eta}_0^{[1]}\}, \{\boldsymbol{\rho}_0^{[2]}, \boldsymbol{\eta}_0^{[2]}\}, \{\boldsymbol{\rho}_0^{[3]}, \boldsymbol{\eta}_0^{[3]}\}$  を与えた。なお，初期制御器を用いた際の評価値  $\gamma_0$  については特別な考慮はしていない。文献 [18] では提案手法と同じ周波数応答を用いて設計を行い，制御器

構造は (4.47) 式とする。

$$\mathbf{C}_{\text{fix}}(s, \boldsymbol{\rho}) = \boldsymbol{\rho}^T \begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 \\ \frac{s}{s+20} \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

なお、文献 [18] の初期パラメータとして、同じ分母多項式を持つ提案手法の  $\boldsymbol{\rho}_0^{[1]}$  を与えた。

### 4.6.3 実験結果 1

提案手法を用いて調整されたパラメータと達成された評価値を表 4.4 に示す。3 つの異なる初期値から設計を開始しても達成される評価値は等しくなっており、設計される制御器もほぼ一致した。また、この設計過程における評価値  $\gamma$  の遷移は図 4.9 のように初期値によって収束までの回数に違いはあるが、最終的に同値の評価値まで単調収束していることが確認できる。この結果から制御器構造が簡単な場合には、初期パラメータに対する達成される評価値の依存が確認されなかった。以上より、(4.18) 式における近似や三角不等式は最終的に達成できる性能には大きく影響を与えていないと考えられる。また、初期パラメータ  $\{\boldsymbol{\rho}_0^{[1]}, \boldsymbol{\eta}_0^{[1]}\}$  の設計結果に着目した時、初期制御器および調整後の制御器による固有値軌跡は図 4.10 のようになり、どちらの固有値軌跡も臨界点  $(-1, j0)$  に対する回転数は等しく、初期制御器で実現している閉ループシステムの安定性を維持することができている。さらに、設計される制御器が不安定極を持たない制約を課しているため、強安定化を実現する制御器を容易に設計できている。

次に、モデルベースの安定化制御器設計法、およびその設計法で得た制御器をハンケルノルム近似で低次化した制御器、周波数応答のみを用いた固定構造安定化制御器設計法を用いて、提案手法との比較を行う。なお、提案手法で扱う設計結果は初期値  $\{\boldsymbol{\rho}_0^{[1]}, \boldsymbol{\eta}_0^{[1]}\}$  に対する結果を扱う。また、提案手法と分子多項式のみを調整する固定構造安定化制御器設計法では制御器の各要素の分子多項式をそれぞれ調整した結果、制御器の次数が 2 次となった。各設計手法による制御器に対して、取得している周波数応答を用いて (4.6) 式から算出した評価値  $\gamma$  と制御器の次数を表 4.5 に示す。まず、提案手法と固定構造安定化制御器設計法の比較を行う。表 4.5 より、提案手法の方が評価値をより低減できており、より良好なロバスト安定余裕が確保されている。この結果、制御器の極を調整できるようになり、設計の自由度が増して一層評価値を下げる制御器



表 4.4: 実験 1 における調整後のパラメータ

Tuned parameter	$\gamma_d$
$\rho_d^{[1]} = \begin{bmatrix} 11.8 & 1.19 & 1.35 & 0.150 \\ -2.71 & 12.1 & -0.156 & 0.0278 \end{bmatrix}^T$	2.303
$\eta_d^{[1]} = \begin{bmatrix} 23.2 & 1 \end{bmatrix}^T$	
$\rho_d^{[2]} = \begin{bmatrix} 11.8 & 1.92 & 1.36 & 0.139 \\ -2.50 & 11.1 & -0.139 & -0.225 \end{bmatrix}^T$	2.302
$\eta_d^{[2]} = \begin{bmatrix} 23.2 & 1 \end{bmatrix}^T$	
$\rho_d^{[3]} = \begin{bmatrix} 11.8 & 2.16 & 1.36 & 0.137 \\ -2.40 & 11.1 & -0.138 & -0.267 \end{bmatrix}^T$	2.302
$\eta_d^{[3]} = \begin{bmatrix} 23.2 & 1 \end{bmatrix}^T$	

の特性が実現されたと考えられる。実際に、提案手法は初期制御器の極  $-20 \text{ rad/s}$  から  $-23.2 \text{ rad/s}$  へ極の調整が行われていることが確認できる。次に、提案手法とモデルベースの安定化制御器設計法、およびその設計法で得た制御器をハンケルノルム近似で低次化した制御器の比較を行う。ここで、モデルベースの安定化制御器設計法では、数式モデルを用いた際の評価値は  $\gamma_{\text{model}} = 2.240$  となったが、モデル化誤差などの影響より性能が変化し、取得した周波数応答から算出した評価値は  $\gamma = 2.417$  となり、評価値の劣化が確認される。なお、この制御器の次数は 18 次であり、他の手法の制御器の次数と大きく差があるため、モデルベースの安定化制御器設計法とは直接的な比較は行わず、ハンケルノルム近似を用いて次数を揃えた制御器との比較を行う。表 4.5 から低次元化法で導出された制御器による評価値は元の制御器の評価値から大きく劣化していることが確認できる。また、低次元化による評価値は提案手法の評価値よりも大きく、 $H_\infty$  ループ整形法の安定化制御器の観点からは望ましくない。以上より、提案手法は周波数応答から直接的に低次の制御器を設計できることから、モデル化誤差の影響が抑制可能であり、制御器の分子多項式だけでなく分母多項式も適切に調整される

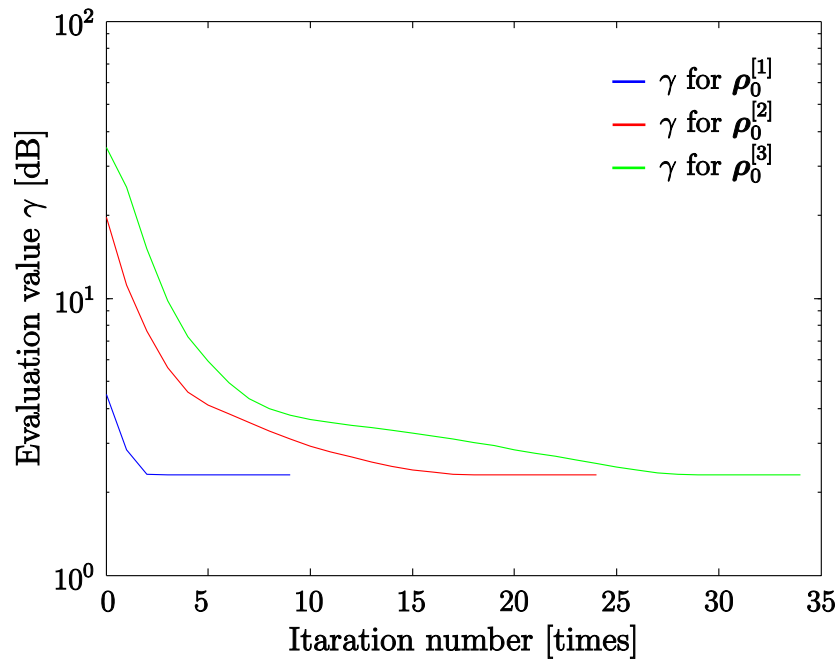


図 4.9: 性能レベル  $\gamma$  の軌跡

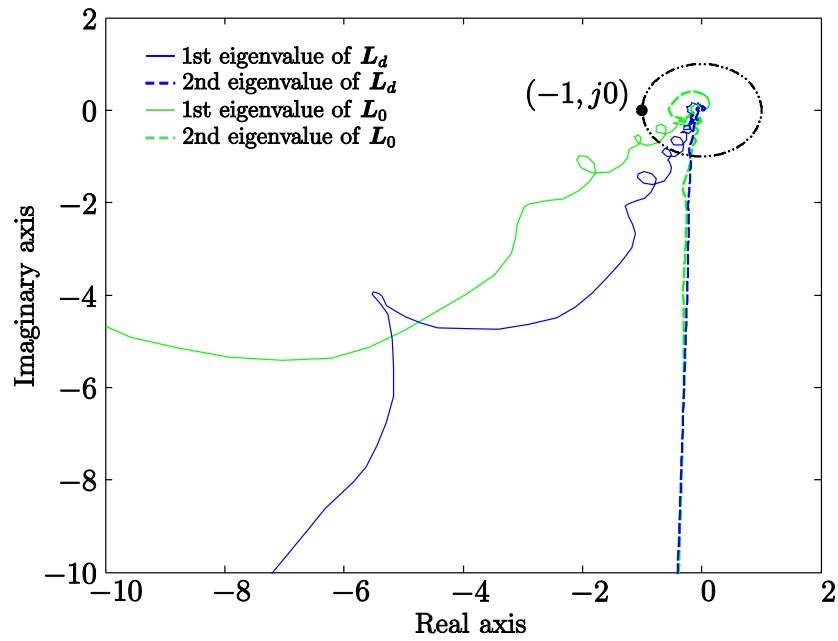


図 4.10: 開ループ関数  $L(s)$  の固有値軌跡

ことが確認できた。

表 4.5: 性能レベルの比較

	Performance level $\gamma$	Controller order
Proposed method	2.302	2
Fixed-controller design method	2.323	2
Model-based full order controller	2.417	18
Model-based reduced-order method	3.314	2

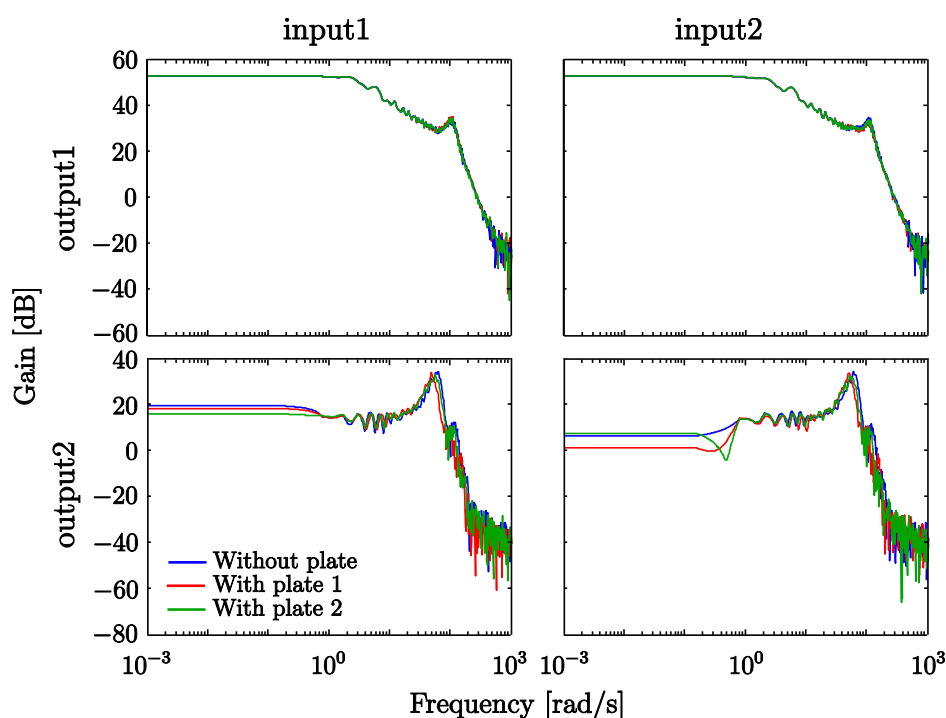


図 4.11: 変動時の制御対象の周波数応答

#### 4.6.4 実験条件 2

実機のアーム部に重さの異なる 2 種の金属板の重りを載せ、動作環境に変動を与える。金属板なし、金属板 1、金属板 2 の各状態の制御対象に対して 3 つの周波数応答を推定する。設計周波数点は  $10^{-3}$ – $10^3$  [rad/s] の区間で対数的に等間隔な 500 点とし、各状態の制御対象から取得した周波数応答は図 4.11 のようになった。図 4.11 より、アーム部に重りを載せることで角度  $\theta$  への伝達関数の共振点周波数が変化していることが読み取れ、制御対象の変動が確認できる。設計で用いる重み関数、制御器構造、繰り返し終了判定の条件は実験 1 と同じものを用いた。初期解  $\rho_0$ ,  $\eta_0$  は、閉ループシステ

表 4.6: 実験 2 における初期と調整後のパラメータ

Initial parameter	$\gamma_0$
$\rho_0 = \begin{bmatrix} 3.78 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3.78 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$	4.747
$\eta_0 = \begin{bmatrix} 3.78 & 1 \end{bmatrix}^T$	
Designed parameter	$\gamma_0$
$\rho_d = \begin{bmatrix} 11.381 & 0.406 & 1.364 & 0.119 \\ -2.560 & 13.407 & -0.098 & -0.001 \end{bmatrix}^T$	4.747
$\eta_d = \begin{bmatrix} 22.63 & 1 \end{bmatrix}^T$	

ムを安定化する安定な初期制御器とし、表 4.6 に示すものを与えた。なお、初期制御器を用いた際の評価値  $\gamma_0$  については特別な考慮はしていない。

#### 4.6.5 実験結果 2

10 回の繰り返し設計の後、評価値は  $\gamma = 2.312$  に収束し、安定な制御器が設計された。初期制御器に対する評価値は  $\gamma_0 = 4.747$  であったことから、複数の周波数応答を同時に考慮する場合においても評価値が低減されていることが確認できる。実際に、取得周波数における評価式の最大特異値と  $\gamma$  は図 4.12 のようになっており、 $\gamma$  がすべての周波数応答に対して計算した最大特異値の上界となっており、変動に対しても評価値が  $\gamma$  以下となることを保証している。次に、設計された開ループシステムの固有値軌跡は図 4.13 に示すものとなり、すべての固有値軌跡は臨界点を回っていない。この実験で用いたシステムは安定であり、拡大システムが不安定極を持たないことから、閉ループシステムの安定条件を満たしていることが確認される。以上のように、複数の入出力データから推定される周波数応答を用いることで、取得したデータにおける変動を考慮した設計ができることを確認した。この際、制御対象の変動をモデルとして表す必要はなく、複数の周波数応答に対して記述した設計問題を解くだけであり、簡易にロバストな制御器を設計することが可能である。

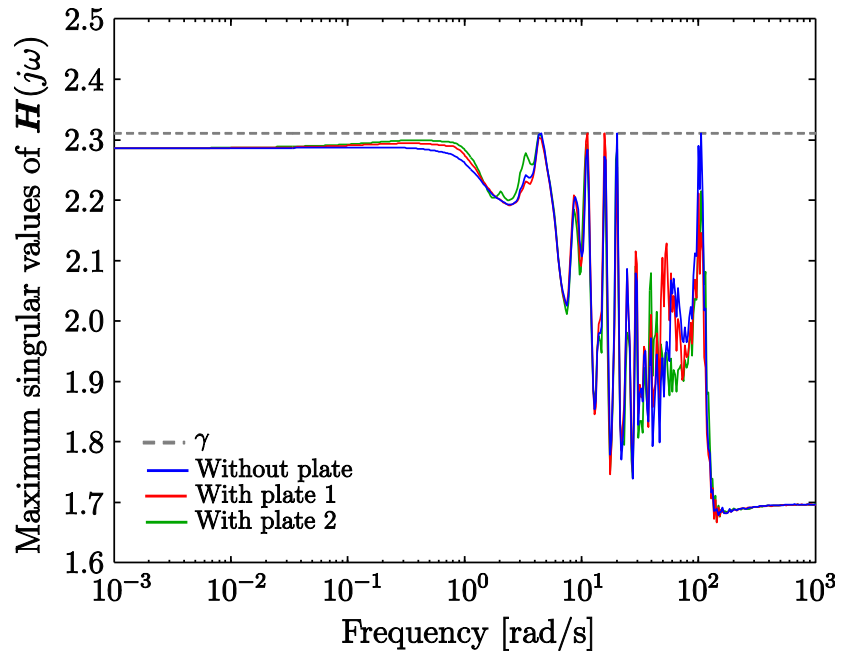


図 4.12:  $H(j\omega)$  の特異値軌跡

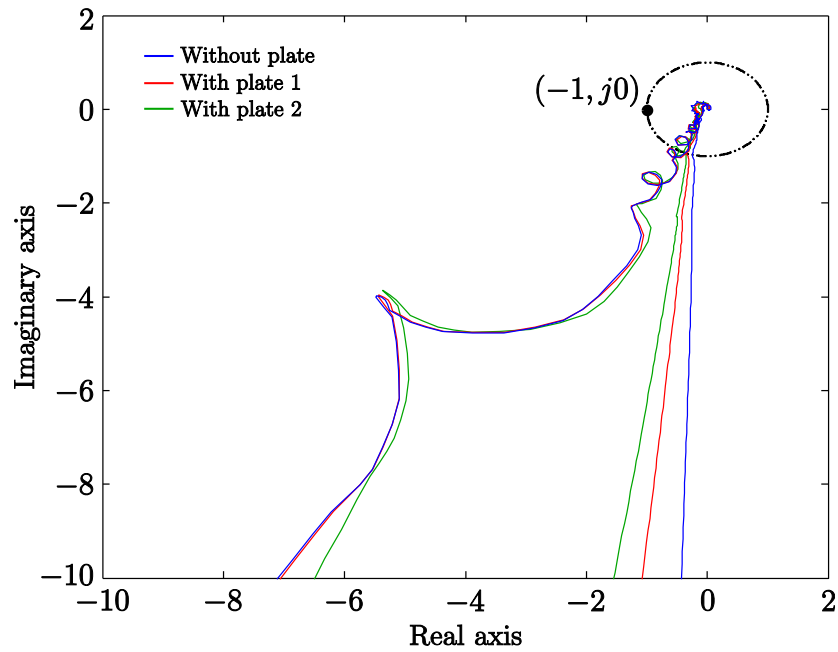


図 4.13: 変動有／無における開ループ関数  $L(s)$  の固有値軌跡

# 第5章 周波数応答のみを用いた $H_\infty$ ループ整形法の実機適用

この章では、提案した重み関数設計法と安定化制御器設計法により構成される周波数応答のみを用いた  $H_\infty$  ループ整形法の結果を確認する。この際、設計された制御器を実機に実装し、その特性を確認する。また、数式モデルから算出した重み関数、およびハンケルノルム近似<sup>[30]</sup>で低次化した重み関数を用いて比較を行い、提案手法の有効性を示す。ここで、数式モデルから算出した重み関数、ハンケルノルム近似<sup>[30]</sup>で低次化したものに対しては添え字  $\bullet_{\text{cal}}$ ,  $\bullet_{\text{red}}$  を付けて表示する。なお、安定化制御器の実機検証については第4章において詳しく述べたため、この章では重み関数と時間応答について着目する。

## 5.1 制御対象と設計周波数点

この設計では、4.6.1節で述べた2入力2出力システムである張力速度制御装置を制御対象とし、周波数点は実機の振幅0.8で周波数が  $10^{-3}$ – $10^3$  [rad/s] で変化する正弦波掃引信号から推定する。設計周波数点は  $10^{-3}$ – $10^3$  [rad/s] の区間で対数的に等間隔な500点とする。また、重み関数を算出するための制御対象の数式モデルは同定した(5.1)式を使用する。なお、この同定モデルは図5.1のように、共振周波数付近において実機の周波数応答の特性を十分に再現するように構築した。

$$\mathbf{P}(s) = \begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

$$P_{11}(s) = \frac{4.3 \times 10^{13}}{(s + 2.8 \times 10^6)(s + 2.8)(s^2 + 26s + 1.3 \times 10^4)}$$

$$P_{12}(s) = \frac{8.0 \times 10^{12}}{(s + 5.5 \times 10^5)(s + 2.7)(s^2 + 21s + 1.2 \times 10^4)}$$

$$P_{21}(s) = \frac{-1.3 \times 10^8}{(s^2 + 43s + 4214)(s^2 + 15s + 4158)}$$

$$P_{22}(s) = \frac{6.5 \times 10^7}{(s^2 + 18s + 3348)(s^2 + 14s + 4811)}$$

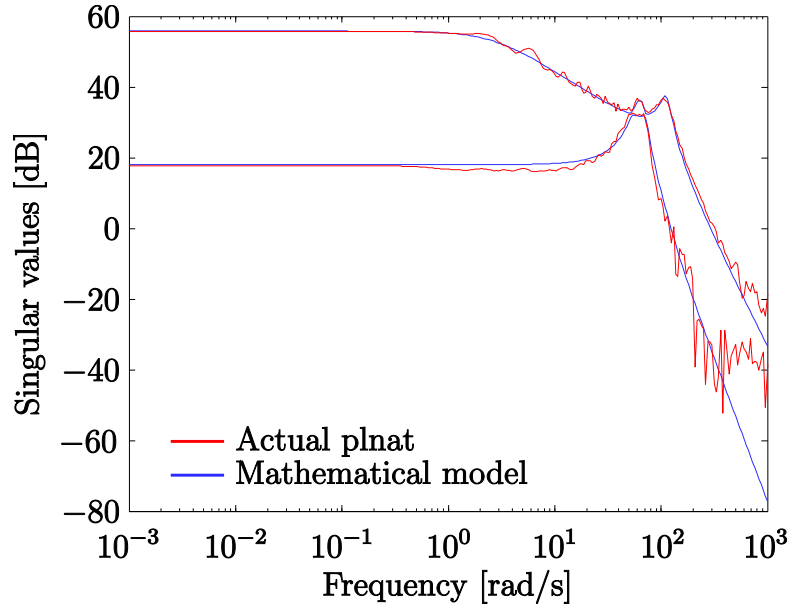


図 5.1: 実際の制御対象と同定モデルの特異値特性

## 5.2 重み関数の設計

### 5.2.1 設計条件

まず,  $H_\infty$  ループ整形法の 1 つ目の工程において (5.2) 式の所望の特性を持つ開ループ関数  $G_d$  となるように制御対象を整形する重み関数を設計する。

$$G_d(s) = \begin{bmatrix} G_{d,1}(s) & 0 \\ 0 & G_{d,2}(s) \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

$$G_{d,1}(s) = \frac{1.4 \times 10^{10} (s + 4.7 \times 10^6) (s + 88)}{(s + 2.8 \times 10^6) (s + 5.5 \times 10^5) (s + 2.7) (s + 0.05)} \cdot \frac{s^2 + 27s + 1.3 \times 10^4}{(s^2 + 21s + 1.2 \times 10^4) (s^2 + 26s + 1.3 \times 10^4)}$$

$$G_{d,2}(s) = \frac{5.5 \times 10^5 (s + 107.3) (s^2 + 23s + 3584)}{(s + 0.05) (s^2 + 18s + 3348) (s^2 + 43s + 4214)} \cdot \frac{s^2 + 17.45s + 4600}{(s^2 + 15s + 4158) (s^2 + 14s + 4811)}$$

ここで,  $G_d$  は性能レベル  $\gamma(G_d, C_d) = 2.236$  を達成した。提案手法では重み関数の構造を (5.3) 式とし, 初期パラメータとして (5.4) 式を与える。また, 求解アルゴリズムの収



束判定条件は、反復に対する  $\delta$  の相対誤差が 3 回連続して 0.1 % を下回ることとする。

$$\mathbf{W}_{1,\text{pro}}(s, \rho, \eta) = \frac{1}{D(s, \eta)} \rho^T \begin{bmatrix} s\mathbf{I} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad D(s, \eta) = \eta^T \begin{bmatrix} s \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

$$\rho_0^T = 0.001 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1.66 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1.66 \end{bmatrix}, \quad \eta_0^T = \begin{bmatrix} 1 & 1.66 \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

### 5.2.2 重み関数の設計結果

提案手法により設計された重み関数は (5.5) 式のような 2 次の関数となり、数式モデルから算出した重み関数は  $\mathbf{W}_m = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{G}_d$  から 19 次の関数として算出された。

$$\mathbf{W}_{\text{pro}}(s) = \begin{bmatrix} \frac{-0.000462s+0.1041}{s+0.0787} & \frac{-0.003123s-0.2964}{s+0.0787} \\ \frac{0.001099s+0.1528}{s+0.0787} & \frac{0.003255s+0.3251}{s+0.0787} \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

また、提案手法と算出された重み関数の間に次数に大きな差があるため、低次元により (5.6) 式の 2 次の重み関数を算出する。

$$\mathbf{W}_{\text{red}}(s) = \begin{bmatrix} \frac{0.0008635s^2+0.08937s+0.004466}{s^2+0.1s+0.0025} & \frac{-0.001341s^2-0.3009s-0.01504}{s^2+0.1s+0.0025} \\ \frac{0.0007063s^2+0.1636s+0.00818}{s^2+0.1s+0.0025} & \frac{0.005555s^2+0.3052s+0.01524}{s^2+0.1s+0.0025} \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

これらのゲイン特性は図 5.2 に示すようになり、どの手法も同様に整形されていることが確認できる。また、低次元化をしたことによるゲインの変化が小さいことも確認できる。以上の結果から各重み関数の妥当性が確認できたため、以降の  $H_\infty$  ループ整形法の工程においてそれぞれの重み関数を使用する。

## 5.3 安定化制御器の設計

### 5.3.1 設計条件

次に、 $H_\infty$  ループ整形法の 2 つ目の工程において前章の重み関数を用いる。ここで、提案手法を用いてそれぞれの重み関数に対して安定化制御器を設計する。設計する安定化制御器の構造を (5.7) 式とする。また、提案手法の重み関数に対しては初期パラメー

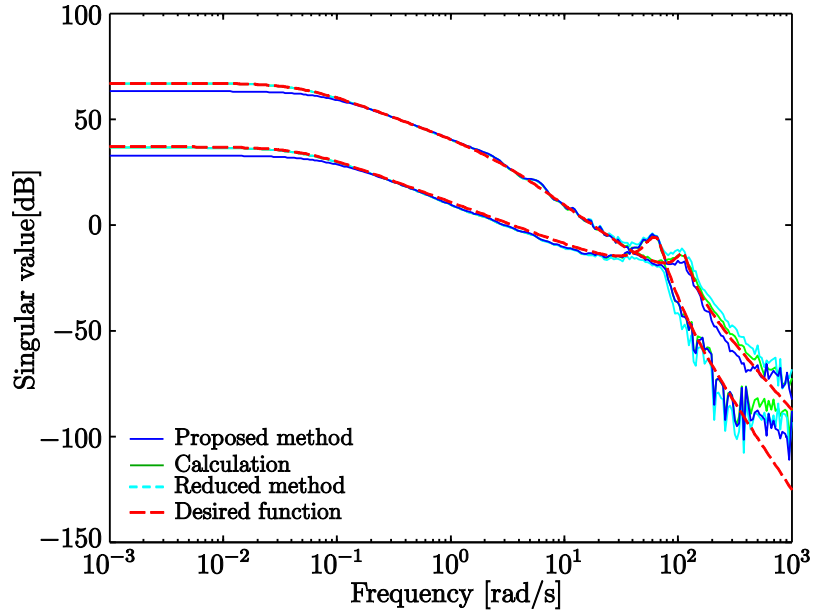


図 5.2: 拡大制御対象の特異値特性

タとして (5.8) 式を与える。そして、求解アルゴリズムの収束判定条件は、反復に対する性能レベルの相対誤差が 3 回連続して 0.1 % を下回ることとする。

$$C_{\infty(s,\rho,\eta)} = \frac{1}{D(s,\eta)} \rho^T \begin{bmatrix} sI \\ I \end{bmatrix}, \quad D(s,\eta) = \eta^T \begin{bmatrix} s \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

$$\rho_0^T = \begin{bmatrix} 0.244 & 0.0316 & 0.482 & -0.133 \\ -0.344 & 0.328 & -0.420 & 0.170 \end{bmatrix}, \quad \eta_0^T = \begin{bmatrix} 1 & 3.75 \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

表 5.1: 性能レベル

	order	$\gamma$
Proposed method	2	2.372
Calculated weighting func.	2	2.281
Reduced weighting func.	2	2.335

### 5.3.2 設計結果

設計された安定化制御器を (5.9)–(5.11) 式に示す。

$$C_{\infty, \text{pro}}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1.663s+14.53}{s+29.51} & \frac{0.05632s-0.9084}{s+29.51} \\ \frac{0.02116s-1.378}{s+29.51} & \frac{0.3838s+14.88}{s+29.51} \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

$$C_{\infty, \text{cal}}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1.343s+9.863}{s+20.36} & \frac{0.04495s+1.417}{s+20.36} \\ \frac{0.03986s-2.188}{s+20.36} & \frac{-0.06825s+11.34}{s+20.36} \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

$$C_{\infty, \text{red}}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1.535s+11.83}{s+24.34} & \frac{-0.1828s+3.733}{s+24.34} \\ \frac{-0.09848s-0.6099}{s+24.34} & \frac{0.4437s+18.16}{s+24.34} \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

それぞれの安定化制御器は第 4 章に述べたように位相特性を調整しており、性能レベルはそれぞれ表 5.1 になった。この表から、それぞれの性能レベルが 1 つ指標である 4 よりも十分小さいことが確認でき、良好な安定化制御器が設計されたといえる。

### 5.3.3 時間応答

実装する制御器は  $C = W_1 C_\infty$  から計算され、提案手法と低次元化を用いたものは 4 次、計算した重み関数を用いたものは 21 次となった。この制御器を実装し、時間応答を取得する。ここで、入力信号として 1 チャンネル目には 1[s] から振幅 50[rad/s] のステップ応答を与え、2 チャンネル目には 10[s] から振幅 1[deg] のステップ応答を与える。この際の応答は図 5.3, 5.4 に示すようになった。この図より、提案手法および算出した重み関数を用いた際の応答波形が近い特性を実現している。しかし、低次元化した重み関数を用いた際の速度応答は振動的な応答をしていることが確認できる。これは、低次元化した際に重み関数の位相特性が変化したため、大きく極配置が変化したためであると考えられる。一方で、提案手法と低次元化したものの応答において定常誤差

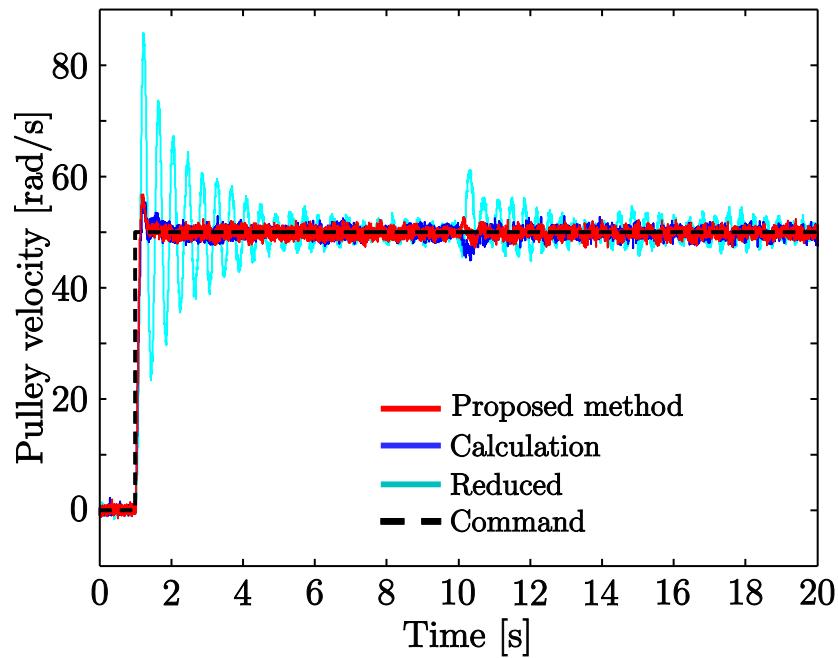


図 5.3: 速度の時間応答

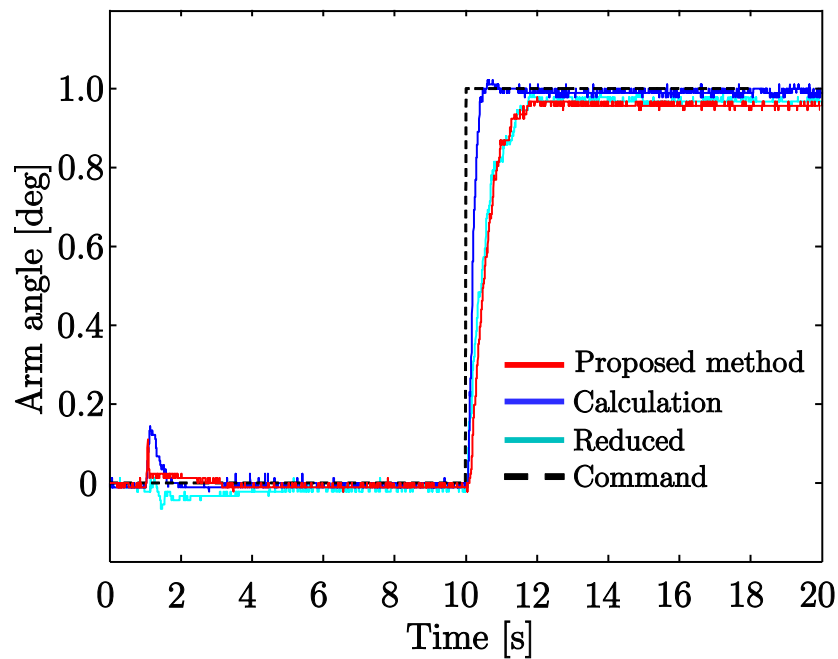


図 5.4: 角度の時間応答

が残っており，角度特性が速度や干渉に関する特性に比べて評価されていない。これは， $\nu$ -gap および性能レベルの評価において最大特異値が評価されており，角度特性にあたる図 5.2 の最小特異値が他の特性に比べ評価されていないことが原因であると考えられる。

表 5.2: 平均二乗誤差

	Mean-Square-Error	
	for velocity	for angle
Proposed method	7.64	0.021
Calculated weighting func.	7.86	0.008
Reduced weighting func.	33.34	0.016

また、この時間応答における指令値に対する平均二乗誤差をそれぞれ表 5.2 に示す。この表より、提案手法と算出した重み関数を用いた際の速度応答の平均二乗誤差が近い値を示した。一方で、角度応答に対しては算出した重み関数を用いた際に比べ劣化している。この表全体から、提案手法は低次元化したものよりは良いものの適切であるかは断言できない。しかしながら、提案手法では算出した重み関数を用いた際に比べ、2つの入力の影響が抑制されていることが確認できる。2入力2出力システムでは入力と出力の間に4つの伝達関数が存在しており、今回の設計において角度に対応する伝達関数の評価が軽くなっているものの、速度に対応する伝達関数および非対角要素の伝達関数の差が主に評価され、これらの性能が良好であることが確認できる。以上より、提案手法では簡易に低次の重み関数と安定化制御器を設計できるとともに、 $G_d$ などの設計条件によるところがあるが理想的な応答に近い性能を実現できる。

## 5.4 積分器を有する制御器の設計

前節の結果において、定常誤差が残るといった問題が生じている。定常誤差を解決するためには積分器を持たせる必要があり、一般に積分器特性は開ループ整形の際に持たせることが多い。しかし、重み関数の設計に関する提案手法では  $\nu$ -gap の前提条件として設計される重み関数が安定でないといけない。そこで、この節では積分器を有する安定化制御器の設計について述べる。なお、設計された重み関数は 5.2.2 節で示した提案手法の重み関数を使用する。

### 5.4.1 制御器構造の検討

$H_\infty$  ループ整形法において、性能レベルを最小化することはロバスト安定余裕を最大化するとともに、安定化制御器を付加する前と後でゲイン特性の変化が小さいことを意味する。つまり、安定化制御器のゲインが 1[dB] となり、安定化制御器の構造に積

分器を直接指定する場合には、積分器にかかるパラメータが非常に小さくなると考えられる。積分器にかかるパラメータが非常に小さいため、積分器特性が大きく現れる周波数域が設計周波数以下となり、閉ループシステムの安定性保証が困難になる場合がある。そこで、重み関数の極情報を使用し、安定化制御器の制御器構造を指定することを考える。まず、重み関数が (5.12) 式で与えられ、 $|p_1| < |p_2|$  であるとする。

$$W_1 = \frac{1}{(s + p_1)(s + p_2)} \quad (5.12)$$

次に、安定化制御器の構造として以下のように定義する。

$$C_\infty = \frac{1}{D(s, \eta)} \boldsymbol{\rho}^T \boldsymbol{\phi}_N(s) = \frac{1}{D(s, \eta)} \boldsymbol{\rho}^T \left\{ \begin{bmatrix} s^\alpha \mathbf{I} \\ \vdots \\ s \mathbf{I} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \frac{s + p_1}{s} \right\}$$

$$D(s, \eta) = \boldsymbol{\eta}^T \begin{bmatrix} s^\alpha & \vdots & s & 1 \end{bmatrix}^T$$

ここで、分子多項式行列の基底関数行列に対して  $s$  で割ることにより積分特性を持たせ、重み関数の一番小さい極を含む  $s + p_1$  で掛けることにより双プロパーな状態を実現する。設計される安定化制御器には  $(s + p_1)/s$  が含まれ、積分器を有する安定化制御器が設計可能となる。また、重み関数  $W_1$  の  $s + p_1$  と安定化制御器の  $s + p_1$  が極零相殺するため、積分器にかかるパラメータがこの極零相殺を補うようになり、この積分器にかかるパラメータが非常に小さくなる問題を解決できる。

### 5.4.2 設計条件

5.2.2 節で示した提案手法の重み関数に対して積分器を有する安定化制御器を設計する。設計する安定化制御器の構造を (5.13) 式とする。また、提案手法の重み関数に対しては初期パラメータとして (5.14) 式を与える。そして、求解アルゴリズムの収束判定条件は、反復に対する性能レベルの相対誤差が 3 回連続して 0.1 % を下回ることとする。

$$\mathbf{C}_{\infty(s, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta})} = \frac{1}{D(s, \eta)} \boldsymbol{\rho}^T \left\{ \begin{bmatrix} s \mathbf{I} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \frac{s + 0.2457}{s} \right\}, \quad D(s, \eta) = \boldsymbol{\eta}^T \begin{bmatrix} s \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

$$\boldsymbol{\rho}_0^T = \begin{bmatrix} 0.0918 & 0.3506 & 0.2970 & -0.2187 \\ -0.1238 & -0.2743 & 0.4969 & 0.2104 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\eta}_0^T = \begin{bmatrix} 1 & 5.505 \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

### 5.4.3 設計結果

設計された安定化制御器を (5.15) 式に示す。

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{\infty, \text{pro}}(s) &= \begin{bmatrix} \frac{1.371s^2+10.23s+2.431}{s^2+20.91s} & \frac{0.03229s^2+1.892s+0.4628}{s^2+20.91s} \\ \frac{-0.1054s^2-2.049s-0.4969}{s^2+20.91s} & \frac{0.3347s^2+10.37s+2.528}{s^2+20.91s} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1.3712(s+7.216)}{s+20.91} & \frac{0.032292(s+58.34)}{s+20.91} \\ \frac{-0.10539(s+19.19)}{s+20.91} & \frac{0.33471(s+30.74)}{s+20.91} \end{bmatrix} \frac{s+0.2457}{s} \end{aligned} \quad (5.15)$$

安定化制御器は第 4 章に述べたように位相特性を調整しており、性能レベルは  $\gamma = 2.292$  となり、積分器を有していても  $\nu$ -gap より算出される保証値 2.546 よりも小さい値を達成し、良好な安定化制御器が設計されたといえる。

### 5.4.4 積分器を有する制御器の時間応答

実装する制御器は  $\mathbf{C} = \mathbf{W}_1 \mathbf{C}_\infty$  から計算され、提案手法と低次元化を用いたものは 4 次となった。この制御器を実装し、時間応答を取得する。ここで、5.3.3 節と同様に、入力信号として 1 チャンネル目には 1[s] から振幅 50[rad/s] のステップ応答を与え、2 チャンネル目には 10[s] から振幅 1[deg] のステップ応答を与える。なお、算出した重み関数を用いた高次の制御器の応答も併せて示す。この際の応答は図 5.5, 5.6 に示ようになった。この図より、提案手法において定常特性が改善されていることが確認できる。

しかし、低次元化した重み関数を用いた際の速度応答は振動的な応答をしていることが確認できる。これは、低次元化した際に重み関数の位相特性が変化したため、大きく極配置が変化したためであると考えられる。一方で、提案手法と低次元化したものの応答において定常誤差が残っており、角度特性が速度や干渉に関する特性に比べて評価されていない。これは、 $\nu$ -gap および性能レベルの評価において最大特異値が評価されており、角度特性にあたる図 5.2 の最小特異値が他の特性に比べ評価されていないことが原因であると考えられる。

次に、この時間応答における指令値に対する平均二乗誤差をそれぞれ表 5.3 に示す。この表より、提案手法では積分器を有することから定常誤差が小さくなり、算出した



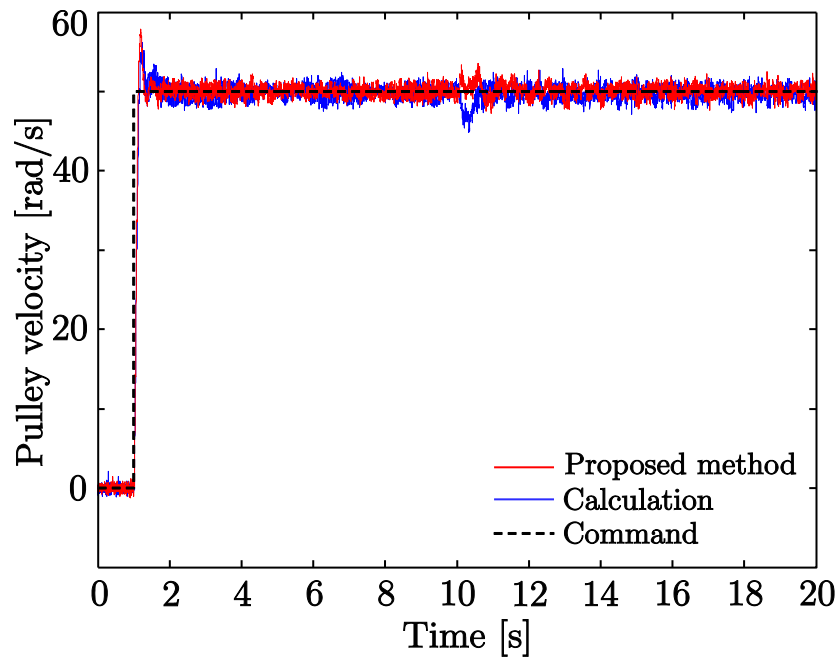


図 5.5: 速度の時間応答

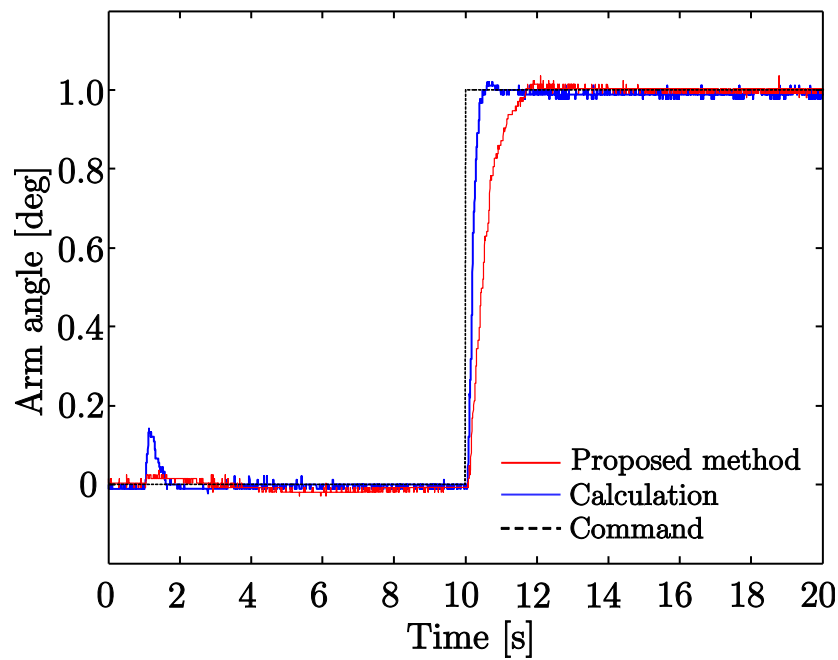


図 5.6: 角度の時間応答

ものよりも平均二乗誤差が改善されていることが確認できる。また、算出したものは所望の開ループ関数  $G_d$  が積分器を有しておらず定常誤差が存在し、この観点から平均二乗誤差が提案手法よりも悪い値を示している。

以上より、提案手法では積分器を有する制御器の設計が可能であり、定常誤差が改

表 5.3: 平均二乗誤差

	Mean-Square-Error	
	for velocity	for angle
Proposed method	3.93	0.009
Calculated weighting func.	7.86	0.008

善できた。提案手法では，所望の開ループ関数  $\mathbf{G}_d$  や収束条件といった設計条件により設計される制御器が左右されるが，理想的な応答に近い性能を実現できる。

## 第6章 結言

### 6.1 まとめ

産業界で広く用いられているモデルベース制御器設計法はモデル化誤差による性能の劣化などの問題が存在した。また、ロバストな制御器の設計にあたっては設計の複雑さや制御器の高次数化といった問題を抱えていた。このロバストな制御器設計法の中でも比較的容易にロバストな制御器を設計できる手法である  $H_\infty$  ループ整形法の抱えている重み関数の設計に伴う試行錯誤，制御器の高次数化などといった課題に対して研究が行われている。著者らは周波数応答のみを用いた制御器設計法<sup>[9, 10, 13, 14, 15, 16]</sup>に着目し，これらの課題の解決を試みてきた。この設計法には，制御対象の数式モデルが不要である，制御対象から推定した周波数応答のみからロバストな制御器を容易に設計できるなどといった利点があり，本研究ではこれらの利点を生かして従来の  $H_\infty$  ループ整形法の課題を解決し，優位性を高めた。また，提案した重み関数の設計法により，MIMO システムであっても容易に重み関数の設計が行えとともに，重み関数と安定化制御器の設計を独立し，かつ最終的な性能レベルをある程度保証可能とした。さらに，提案した安定化制御器設計法により低次でかつ適切な零点と極をもつ制御器が実現され，強安定なシステムの構築を容易に行うことができる。これらの優位性はシミュレーションだけでなく実機検証を通して確認でき。加えて周波数応答のみを用いて  $H_\infty$  ループ整形法による設計が実現された。

### 6.2 今後の課題と展望

最後に，本節では本研究の今後の課題について述べる。同時に本論文の主題である周波数応答を用いた制御器設計と  $H_\infty$  ループ整形法における今後の展望について言及する。

#### 6.2.1 本研究における課題

本研究における課題としては大きく，3つの点が挙げられる。

第一に、重み関数の持つ不安定零点に対する考慮である。本研究における重み関数の設計では不安定零点に対して考慮しておらず、不安定零点をもつ重み関数が設計されることもある。提案手法において結果的に良好な性能が得られているが、 $H_\infty$  ループ整形法の考えでは重み関数とその逆関数が安定であることが求められる。また、制御器が不安定零点を有することは応答の劣化にも繋がる。ゆえに、不安定零点に対して考慮していく必要が存在する。

第二に、 $\mathbf{W}_2$  の設計と非正方システム等における有効性検証がある。本来、MIMO システムでは行列の要素をそれぞれ調整するため  $\mathbf{W}_1$  と  $\mathbf{W}_2$  の 2 つを設計する。このため、本研究で実施できていない  $\mathbf{W}_2$  の設計について考慮する必要がある。実際、 $\mathbf{W}_1$  と  $\mathbf{W}_2$  を同時に設計することは非常に困難であるので、 $\mathbf{W}_1$  と  $\mathbf{W}_2$  を交互に設計して、準最適な 2 つの重み関数が設計可能であると考えられる。また、本研究では多くのシミュレーション検証と実機検証を行ってきたが、用いた制御対象はすべて正方システムであった。 $H_\infty$  ループ整形法は正方・非正方システム問わず制御器の設計が行え、本研究で扱っていない重み関数  $\mathbf{W}_2$  は非正方システムや対角化しづらいシステムにおいてその優位性を発揮すると考えられる。ゆえに、重み関数  $\mathbf{W}_2$  についても設計を行い、周波数応答のみを用いた  $H_\infty$  ループ整形法を検証すべきである。また、重み関数  $\mathbf{W}_2$  に際して重み関数  $\mathbf{W}_1$  の設計との相互の影響を抑えられることが望ましい。

第三に、所望の特性を持つ  $\mathbf{G}_d$  の決定法と  $\nu$ -gap の関連付けである。提案した重み関数の設計により、比較的小さい試行錯誤コストで設計を行うことができる。ここで、所望の特性を持つ  $\mathbf{G}_d$  の決定法と  $\nu$ -gap の関連付けが可能であれば、より制御器の設計コストを削減することが叶う。

### 6.2.2 今後の展望

近代まで、モデルベース設計法について多くの研究が行われている。これらの設計では、良好なシステムを得るために、数式モデルの構築と制御器の設計を複数回繰り返すといった試行錯誤が存在する。また、この試行錯誤は設計者や制御対象の熟練度に依存して増大する。ゆえに、モデルベース設計法が、周波数応答を用いた制御器設計法や出力データを直接用いた制御器設計法などの制御対象のモデル化を行わなくてよい手法に移行していくと考えられる。また、本研究の主題である  $H_\infty$  ループ整形法においても制御対象の入出力データを直接用いた手法<sup>[31]</sup>が研究されており、このような動きは  $H_\infty$  ループ整形法のみならず他の設計法においても見られる。著者はこのような制御対象のモデル化を行わなくてよい制御器設計法の発展と拡大に期待する。

## 参考文献

- [1] D. McFarlane, and K. Glover: “A Loop Shaping Design Procedure Using  $H_\infty$  Synthesis”, *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. 37, No. 6, pp. 759–769 (1992)
- [2] H. Ladjal, J. Hanus, and A. Ferreira: “ $H_\infty$  robustification control of existing piezoelectric-stack actuated nanomanipulators”, *Proc. of IEEE International Conf. on Robotics and Automation*, pp. 3353–3358, Kobe, Japan (2009)
- [3] N. Phurahong, S. Kaitwanidvilai, and A. Ngaopitakkul: “Fixed Structure Robust 2DOF H-infinity Loop Shaping Control for AC/DC Buck Converter using Genetic Algorithm”, *Proc. of The International MultiConf. of Engineers and Computer Scientists 2012*, pp. 1030–1035, Hong Kong, China (2012)
- [4] 外川一仁, 小野塚保, 川谷亮治: 「ループ整形制御器の集合における定数出力フィードバック制御器の存在性—柔軟ビームのロバスト振動制御問題への適用—」, 計測自動制御学会論文集, Vol. 34, No. 12, pp.1868–1873 (1998)
- [5] E. Prempain, and I. Postlethwaite: “Static  $H_\infty$  loop shaping control of a fly-by-wire helicopter”, *Automatica*, Vol. 41, No. 9, pp. 1517–1528 (2005)
- [6] R. Majumder, B. Chaudhuri, H. El-Zobaidi, B. C. Pal, and I. M. Jaimoukha: “LMI approach to normalised  $H_\infty$  loop-shaping design of power system damping controllers”, *IEE Proceedings-Generation, Transmission and Distribution*, Vol. 152, No. 6, pp. 952–960 (2005)
- [7] F. C. Wang, H. T. Chen, Y. P. Yang, and J. Y. Yen: “Multivariable robust control of a proton exchange membrane fuel cell system”, *Journal of Power Sources*, Vol. 177, No. 2, pp. 393–403 (2008)
- [8] A. Lanzon: “Weight Optimization in  $H_\infty$  Loop-shaping”, *Automatica*, Vol.41, No.7, pp.1201–1208 (2005)

- [9] S. Katayama, K. Yubai and J. Hirai: “Iterative Design of the Reduced-order Weight and Controller for the  $H_\infty$  Loop-shaping Method under Open-loop Magnitude Constraints for SISO Systems”, *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, Vol.56, No.10, pp.3854–3863 (2009)
- [10] 土井章弘, 弓場井一裕, 矢代大祐, 平井淳之:「周波数応答を用いた  $H_\infty$  ループ整形法の提案とその実機検証」, 電気学会産業計測制御／メカトロニクス制御合同研究会資料, Vol. IIC-14-138, No. 122-143, pp. 7–12, (2014)
- [11] 久保貴之, 弓場井一裕, 矢代大祐, 平井淳之:「周波数応答を用いた  $H_\infty$  ループ整形法における制御器の性能レベルを保証する準最適重みの設計」, 電気学会論文誌 C (電子・情報・システム部門誌), Vol. 135, No. 7, pp.856-864 (2015)
- [12] T. Kubo, K. Yubai, A. Karimi, D. Yashiro, and J. Hirai: “Fixed-order SISO Controller Design for  $H_\infty$  Loop Shaping Method Using Frequency Responses”, Proc. of 2015 IEEE International Conf. on Industrial Technology, pp. 252–257 (2015)
- [13] G. Galdos, A. Karimi, and R. Longchamp: “ $H_\infty$  Controller design for spectral MIMO models by convex optimization”, *Journal of Process Control*, Vol. 20, No. 10, pp. 1175–1182 (2010-12)
- [14] M. Hast, K. J. Åström, B. Bernhardsson, S. Boyd: “PID Design by Convex-Concave Optimization”, Proc. of 2013 European Control Conference, pp. 4460–4465 (2013)
- [15] S. Boyd, M. Hast, and K. J. Åström: “MIMO PID Tuning via Iterated LMI Restriction”, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Vol. 26, No. 8, pp. 1718–1731 (2016)
- [16] 篠田翔吾, 弓場井一裕, 矢代大祐, 平井淳之:「周波数応答を用いた対角優勢を実現する多変数制御器設計」, 電学論 C, Vol. 136, No. 5, pp. 650–658 (2016-5)
- [17] A. L. Yuille, A. Rangarajan: “The concave-convex procedure”, *Neural Computation*, Vol. 15, No. 4, pp. 915–936 (2003)

- [18] T. Usami, K. Yubai, D. Yashiro, and S. Komada: “Multivariable Fixed-Structural Controller Design for  $H_\infty$  Loop Shaping Method by Iterative LMI Optimization Using Frequency Response Data”, Proc. of 2016 International Conf. on Advanced Mechatronic Systems, pp. 218–223, Melbourne, VIC, Australia (2016-12)
- [19] G. Papageorgiou, and K. Glover: “A Systematic Procedure for Designing Non-Diagonal Weights to Facilitate  $H_\infty$  Loop Shaping”, Proc. of the 36th Conf. on Decision and Control, pp. 2127–2132, San Diego, CA, USA (1997-12)
- [20] K. Zhou, J. Doyle, K. Glover, 劉康志, 羅正華: ロバスト最適制御, コロナ社 (1997)
- [21] D. McFarlane, and K. Glover: “Robust Stabilization of Normalized Coprime Factor Plant Descriptions with  $H_\infty$  bounded Uncertainty”, *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. 34, No. 8, pp. 821–830 (1989-8)
- [22] G. Vinnicombe: “Uncertainty and Feedback -  $H_\infty$  Loop Shaping And The  $\nu$ -Gap Metric” , Imperial College Press (2001)
- [23] M. Kanno, S. Hara and M. Onishi: “Characterization of Easily Controllable Plants Based on the Finite Frequency Phase/Gain Property: A Magic Number  $\sqrt{(4 + 2\sqrt{2})}$  in  $H_\infty$  Loop Shaping Design”, *American Control Conference*, pp. 5816–821 (2007)
- [24] Y. LIU and S. Zhou: “Low Order Structured Weight Optimization for  $H_\infty$  loop shaping design procedure”, *Proc. of the 10th World Congress on Intelligent Control and Automation*, pp. 2257-2262 (2012)
- [25] 伊藤榮信, 中島五月, 原田良一, 川谷亮治: 「ループ整形設計手法の解集合における低次元制御器」, 計測自動制御学会論文集, Vol. 36, No. 1, pp. 116–118 (2000-1)
- [26] 宮元慎一: 「 $H_\infty$  ループシェイピング法と LMI 最適化に基づいた PID 制御器の設計」, 計測自動制御学会論文集, Vol. 34, No. 7, pp.653-65 (1998-7)
- [27] M. Chilali and P. Gahinet: “ $H_\infty$  Design with Pole Placement Constraints; An LMI Approach”, *IEEE Trans. ON AUTOMATIC CONTROL*, Vol. 41, No. 3, pp. 358–361 (1996)

- [28] J. M. Maciejowski: Multivariable feedback design, Addison-Wesley, Wokingham (1989)
- [29] 太田快人：システム制御のための数学（1）線形代数編，コロナ社（2000）
- [30] 大日方五郎，B. アンダーソン：制御システム設計 ―コントローラの低次元化―，株式会社朝倉書店（1999）
- [31] Y.C. Sung, S.V. Patil, M.G. Safonov: “Data-driven  $H_\infty$  loop-shaping controller design”, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, early view (2016)



## 謝辞

本研究の遂行ならびに修士論文作成にあたり、終始一貫して熱心なご指導を賜りました三重大学工学研究科準教授 弓場井 一裕 先生に心から深く感謝いたします。また、日頃より我々と向き合い、検討会や学会発表練習等で常に丁寧に指導して頂き、私自身の成長に大きく寄与してくださいました。先生の下で研究以外にも多くのことを学び、学生としての本望を遂げました。この場を借り、重ねて感謝いたします。

本研究ならびに修士論文作成にあたり、検討会で、そして副査としてご意見を頂きました同大学教授 駒田 諭 先生、同大学助教授 小山 昌人 先生に深く感謝いたします。

本研究の遂行にあたり、日々の検討会および学生生活において、貴重なご意見を頂きました同大学助教授 石田 宗秋先生、同大学准教授 山村 直紀 先生、同大学助教授 矢代 大祐 先生に心から感謝いたします。特に、日頃より交流があり、様々なご意見を賜りました矢代先生には重ねて感謝いたします。また、日頃から学生生活を通じてお世話になり、社会人として様々なご意見を頂きました同大学元教授 平井 淳之 先生、技術職員 中村 勝 氏に深く感謝いたします。

本研究の遂行にあたり、制御理論部門モデルベースグループの先輩として、制御の基礎・基本を教え、資料作成やプレゼンテーションの技術を鍛え上げてくださいました 篠田 翔吾 氏、中村 和樹 氏に深く感謝いたします。また、本研究の基となる研究を実施されました 久保 貴之 氏に心から深く感謝致します。そして、同部門の先輩として親身にご指導頂きました 磯部 良太 氏、松本 治樹 氏、青木 翔吾 氏、岩本 直也 氏、竹若 恵太 氏、同部門として苦楽をともにし切磋琢磨しあった 堀 智貴 氏、山本 直輝 氏に深く感謝いたします。同部門として共に研究した 岡村 雅行 君、堀田 敦 君、伊達 宗充 君、柳川 晃佑 君、前田 合喜 君、辻井 祥太郎 君に感謝し、今後のご活躍を心より期待しております。

研究室の生活を通じて、社会人としての貴重なご意見や機会をいただきました 稲玉 繁樹 氏に感謝し、今後のご発展をお祈り申し上げます。また、同期として、日々の研究生活を送り、鼓舞し合った 井垣 颯太 君、大橋 知也 君、河合 恭宏 君、平田 暁久 君、福森 穰 君、土屋 洋輔 君、稲葉 洋介 君、山本 優 君ならびに、充実した生活を送らせて頂いた電機システム研究室の皆様感謝いたします。

最後に、大学・大学院への進学を認め、不自由なく学生生活を送らせて頂いた両親をはじめとする家族に深く感謝致します。

# 論文目録

## 投稿論文

- (1) T. Usami, K. Yubai, D. Yashiro, S. Komada: “Frequency-Response-Based Multivariable Controller Tuning for Hinf Loop Shaping Method”, *International Journal of Advanced Mechatronic Systems* (掲載決定)
- (2) 宇佐美朋大, 弓場井一裕, 矢代大祐, 駒田諭: 「周波数応答を用いた  $H_\infty$  ループ整形法における固定次数制御器設計法の MIMO システムへの拡張」, 電気学会論文誌 電子・情報・システム部門誌, Vol. 138, No. 4 (2018.4 掲載決定)

## 国際会議

- (1) T. Usami, K. Yubai, D. Yashiro, S. Komada: “Multivariable Fixed-Structural Controller Design for  $H_\infty$  Loop Shaping Method by Iterative LMI Optimization Using Frequency Response Data”, *Proc. of 2016 International Conference on Advanced Mechatronic Systems*, pp. 218–223 (2016.11–12) (Best Paper Award 受賞)
- (2) T. Usami, K. Yubai, D. Yashiro, S. Komada: “Multivariable Fixed-Structural Controller Tuning Based on  $H_\infty$  Loop Shaping Method Using Frequency Responses”, *Proc. of International Symposium for Sustainability by Engineering at MIU*, No. 2P6, pp. 1–6 (2016.12)
- (3) T. Usami, K. Yubai, D. Yashiro, S. Komada: “Design of Low-Order Multivariable Weighting Function for  $H_\infty$  Loop Shaping Method Using Frequency Responses”, *Proc. of International Symposium for Sustainability by Engineering at MIU*, No. 1O-1, pp. 1–6 (2017.12)
- (4) T. Usami, K. Yubai, D. Yashiro, S. Komada: “Low-Order Multivariable Weighting Function Design for  $H_\infty$  Loop Shaping Method based on  $\nu$ -gap”, *Proc. of the 19<sup>TH</sup> International Conference on Industrial Technology (ICIT2018)*

- (5) T. Usami, K. Yubai, D. Yashiro, S. Komada: “Design of Weighting Function for  $H_\infty$  Loop Shaping Method Using Frequency Responses for stable MIMO plant”, *Proc. of the 4th IEEJ international workshop on Sensing, Actuation, Motion Control, and Optimization (SAMCON2018)* (2018.3 発表予定)

## 学会発表

- (1) 宇佐美朋大，弓場井一裕，矢代大祐，駒田諭：「 $H_\infty$  ループ整形法における周波数応答を用いた多変数固定構造制御器設計」，平成 28 年度電気・電子・情報関係学会東海支部連合大会講演論文集，A2-4 (2016.3)
- (2) 宇佐美朋大，弓場井一裕，矢代大祐，駒田諭：「 $H_\infty$  ループ整形法における周波数応答を用いた極調整可能な固定次数制御器設計」，電気学会メカトロニクス制御研究会資料，No. MEC-16-029，pp. 13–18 (2016.12)
- (3) 宇佐美朋大，弓場井一裕，矢代大祐，駒田諭：「周波数応答を用いた  $H_\infty$  ループ整形法における性能レベルを保証する低次重み関数の設計」，第 60 回自動制御連合講演会集，SaF2-2 (2017.11)