三重大学教養教育院研究紀要　第 4 号　2019

α-method による $\mathrm{P}_1^{(2,1)}$ の非パンルヴェ性の証明

川向　洋之・川瀬　朋大・齋藤　千依

要　旨

[2] で、下村は複素領域で定義された常微分方程式

$$\frac{d^4y}{dx^4}+120\left(\frac{dy}{dx}\right)^3\frac{d^2y}{dx^2}-120\,x\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{200}{3}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-\frac{40}{3}y\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{200}{9}x=0 \qquad \mathrm{P}_1^{(2,1)}$$

を考えた。そして、この方程式の一般解は、次の形

$$y(x)=a_0-(x-b)^{1/3}+\mathcal{O}\left((t-b)^{5/3}\right)$$

をした 3 位の分岐点（ただし分岐点の位置 b は、解の選び方に依存する）を持つことを示した。この事実から、$\mathrm{P}_1^{(2,1)}$ はパンルヴェ性を持っていない事が分かる。この論文では、α-method を用いてこの事実を再確認する。

1　序　文

三角関数、指数関数、対数関数、べき関数、もしくは楕円関数など、我々がよく目にする関数の多くは、有理関数を係数とする線形常微分方程式、もしくは、独立変数 x と従属変数 y、およびこれらの導関数 $y', y'', .., y^{(n)}$ の有理式からなる常微分方程式の解として得られる。従って、「このような常微分方程式からどのような特殊関数が得られるのか」を考えるのは興味深い問題である。しかし、一般に、微分方程式が線形でない場合、解の特異点の位置が初期条件によって変化するため、「どのような特殊関数が得られるか」を考えるのは難しい。従って、「線形方程式だけを考える」か「特異点の位置が初期条件に依存しない非線形常微分方程式を考える」かの選択に迫られる。フランスのポール・パンルヴェは、ある意味後者の場合を選び、今日パンルヴェ方程式と呼ばれる 6 種類の方程式を発見した。より正確に言うと、次の方程式

$$y''=R(x,y,y') \quad ('=d/dx)$$

（ただし $R(x,y,y')$ は x の解析関数を係数とする y と y' の有理式）を考え、この方程式の解の特異点で、その位置が初期条件に依存するものは極しかない（この性質をパンルヴェ性と言う）ものを分類し、次の方程式を発見した。

$$
\begin{aligned}
y'' &= 6y^2 + x, \\
y'' &= 2y^3 + xy + \alpha, \\
y'' &= \frac{1}{y}(y')^2 - \frac{1}{x}y' + \frac{1}{x}(\alpha y^2 + \beta) + \gamma y^3 + \frac{\delta}{x}, \\
y'' &= \frac{1}{2y}(y')^2 + \frac{3}{2}y^3 + 4xy^2 + 2(x^2 - \alpha)y + \frac{\beta}{y}, \\
y'' &= \left(\frac{1}{2y} + \frac{1}{y-1}\right)(y')^2 - \frac{1}{x}y' + \frac{(y-1)^2}{x^2}\left(\alpha y + \frac{\beta}{y}\right) + \gamma\,\frac{y}{x} + \delta\,\frac{y(y+1)}{y-1}, \\
y'' &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y-1} + \frac{1}{y-x}\right)(y')^2 - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y-x}\right)y' \\
&\qquad + \frac{y(y-1)(y-x)}{x^2(x-1)^2}\left(\alpha + \beta\frac{x}{y^2} + \gamma\frac{x-1}{(y-1)^2} + \delta\frac{x(x-1)}{(y-x)^2}\right).
\end{aligned}
$$

その後、この方程式は、数理物理との関連性もあって、多くの人に注目され、さまざまな観点から研究がなさるようになった。最初にあげた方程式 $\mathrm{P}_1^{(2,1)}$ もその研究の中で得られたものである。

このノートでは、パンルヴェが、パンルヴェ方程式を導くときに使った道具「α -method」を用いて、方程式 $\mathrm{P}_1^{(2,1)}$ の非パンルヴェ性を再確認する。

2　$\mathrm{P}_1^{(2,1)}$ の非パンルヴェ性の証明

パンルヴェがパンルヴェ方程式を導くときに使った道具「α -method」とは、次のようなものである。

【定理 1】 $F(x,y,z;\alpha), G(x,y,z;\alpha)$ は x の解析関数を係数とする y , z の有理関数で α については $\alpha = 0$ で正則であるとする。十分小さい $\varepsilon > 0$ に対して $0 < |\,\alpha\,| < \varepsilon$ ならば、微分方程式系

$$y' = F(x,y,z;\alpha), \quad z' = G(x,y,z;\alpha) \tag{2.1}$$

は動く分岐点を持たないものとする。このとき

$$y' = F(x,y,z;0), \quad z' = G(x,y,z;0)$$

も動く分岐点を持たない。さらに (2.1) の解 $\big(y(x;\alpha), z(x;\alpha)\big)$ が x についてある領域 1 価ならば、これを α のべき級数展開したとき、その係数もまた $\big(y(x;0), z(x;0)\big)$ が正則である限り、その領域で 1 価となる。

この定理は 2 連立の場合で述べているが、簡単な考察により、4 階の単独高階方程式の場合に拡張できる。この定理を利用して、$\mathrm{P}_1^{(2,1)}$の非パンルヴェ性を示そう。まず次の補題から始める。

【補題 1】 定数 C_1, C_2 に対し、微分方程式

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = -12z^5 + 2C_1 z + 2C_2 \tag{2.2}$$

はパンルヴェ性を持たない。

証明. $z = \alpha^{-2}u$, $t = \alpha^3 s$ と置くと、(2.2) は次のようになる。

$$\left(\frac{du}{ds}\right)^2 = -12u^5 + 2C_1\alpha^8 u + 2C_2\alpha^{10}.$$

ここで $\alpha \to 0$ とすると

$$\left(\frac{du}{ds}\right)^2 = -12u^5 \tag{2.3}$$

が得られるが、この方程式の一般解は

$$u = \sqrt[3]{\frac{4}{9(2\sqrt{-3s}+\gamma)^2}}, \quad (\gamma \text{ は任意定数})$$

であるから (2.3) はパンルヴェ性を持たない。故に定理 1 より、(2.2) はパンルヴェ性を持たない。

$\mathrm{P}_1^{(2,1)}$の非パンルヴェ性の証明. $y=\alpha\varphi,\ x=\alpha^3 t$ と置くと、$\mathrm{P}_1^{(2,1)}$ は

$$\frac{d^4\varphi}{dt^4}+120\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^3\frac{d^2\varphi}{dt^2}-120\alpha^7 t\frac{d\varphi}{dt}\frac{d^2\varphi}{dt^2}-\frac{200}{3}\alpha^7\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2-\frac{40}{3}\alpha^7\varphi\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\frac{200}{9}\alpha^{14}t=0 \tag{2.4}$$

となる。ここで $\alpha\to 0$ とすると

$$\frac{d^4\varphi}{dt^4}+120\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^3\frac{d^2\varphi}{dt^2}=0 \tag{2.5}$$

が得られる。この方程式がパンルヴェ性を持たないことを示せばよい。

$z=d\varphi/dt$ と置くと (2.5) は

$$\frac{d^3z}{dt^3}=-120z^3\frac{dz}{dt}. \tag{2.6}$$

さらに $w=dz/dt$ と置くと

$$\frac{d^2z}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dz}{dt}\right)=\frac{dz}{dt}\frac{d}{dz}\left(\frac{dz}{dt}\right)=w\frac{dw}{dz},$$
$$\frac{d^3z}{dt^3}=\frac{d}{dt}\left(w\frac{dw}{dz}\right)=\frac{dz}{dt}\frac{d}{dz}\left(w\frac{dw}{dz}\right)=w\left\{\left(\frac{dw}{dz}\right)^2+w\frac{d^2w}{dz^2}\right\}$$

より、(2.6) は

$$w\left(\frac{dw}{dz}\right)^2+w^2\frac{d^2w}{dz^2}=-120z^3w.$$

故に $w=0$ または $\left(\frac{dw}{dz}\right)^2+w\frac{d^2w}{dz^2}=-120z^3$ が得られる。後者の両辺を z で積分すると

$$w\frac{dw}{dz}=-30z^4+C_1, \quad (C_1 \text{ は任意定数}).$$

さらに積分すると

$$\frac{1}{2}w^2=-6z^5+C_1z+C_2, \quad (C_2 \text{ は任意定数}) \tag{2.7}$$

となる。ここで $w=dz/dt$ に注意すると (2.7) は (2.2) と同じ方程式である。故に (2.7) はパンルヴェ性を持たない。従って (2.5) もパンルヴェ性を持たない。このことから $\mathrm{P}_1^{(2,1)}$ はパンルヴェ性を持たないことが分かる。

参考文献

[1] 岡本和夫『パンルヴェ方程式』（上智大学数学教室），1985 年

[2] Shimomura, S. Pole loci of solutions of a degenerate Garnier system. Nonlinearity 14, 193 -203, 2001.

On a Proof of non-Painlevé property of $\mathrm{P}_1^{(2,1)}$ by using of α-method

Hiroyuki KAWAMUKO, Tomohiro KAWASE and Chiyori SAITO

Abstract

In [2], S. Simomura considered the following complex differential equation:

$$\frac{d^4y}{dx^4} + 120\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 \frac{d^2y}{dx^2} - 120\,x\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{200}{3}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{40}{3}y\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{200}{9}x = 0. \qquad \mathrm{P}_1^{(2,1)}$$

He showed that the general solution of (1) has a third-order branch point in the form shown below in

$$y(x) = a_0 - (x-b)^{1/3} + \mathcal{O}\left((t-b)^{5/3}\right)$$

which the location of the branch point b depends on the choice of soluion. Hence we find that $\mathrm{P}_1^{(2,1)}$ does not satisfy the Painlevé Property. In this paper, we reconfirm this fact in the view of alpha-method.