

平成30年度修士論文
回転面の全曲率に関する考察

三重大学大学院教育学研究科
教育科学専攻 理数・生活系教育領域
217M017 松田 雄斗

平成31年2月13日

序

本研究を進めるにあたり、小林昭七著『曲線と曲面の微分幾何(改訂版)』(裳華房)と梅原雅顕、山田光太郎著『曲線と曲面-微分幾何的アプローチ-』(裳華房)を用いて曲線論および曲面論を学習した。本論文では、回転軸と交わらない空間の曲線、回転軸と2点で接する空間の曲線をそれぞれ1回転してできる曲面の全曲率の計算について述べる。学部のときに学んだ Euler 標数の関連のもと、前者により得られた曲面は穴を構成するため、全曲率はすべて0になるのではないかと考えた。また後者により得られた曲面についても前者の考え方を用いて同様の計算を行えると考え、本研究に至った。

通常、全曲率は Gauss 曲率といわれる量の曲面上の面積分である。しかし研究を進める中で、弧長パラメータといわれる変数で表された平面曲線を1回転してできる曲面の全曲率は、通常のパラメータでの微分のみで、求められることを発見した。また広義の弧長パラメータを導入することにより、特異点が含まれる曲線を1回転して得られる曲面についても同様の計算を行えると考えた。

本論文では、それらについて述べ、この事実をもとにいくつかの回転面の全曲率の計算結果を報告する。

目次

第 1 章 準備	3
1.1 平面の曲線	3
1.2 空間の曲線と曲面	4
第 2 章 回転面の全曲率の計算	9
2.1 トーラス型曲面の全曲率	9
2.2 特異点つきトーラス型曲面の全曲率	13
2.3 更なる結果	21
2.4 リンゴ型曲面の全曲率	30

第1章 準備

1.1 平面の曲線

平面の曲線と閉曲線を次のように定義する.

定義 1.1 $a, b \in \mathbb{R}$ に対し, $I = [a, b]$ と定める. $t \in I$ の写像 $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ による像

$$\gamma(I) = \{\gamma(t) \mid t \in I\}$$

を曲線という.

定義 1.2 $I = [a, b]$ とする. 曲線 $\gamma(t)$ の始点と終点が一致する, すなわち

$$\gamma(a) = \gamma(b)$$

が成り立つとき, $\gamma(t)$ を閉曲線という.

以後, 曲線 $\gamma(t)$ は C^∞ 級の閉曲線を表すものとする. 曲線 $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ を t で1回微分したものを

$$\dot{\gamma}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$$

と表す. 以下断らない限り, $\dot{\gamma}(t) \neq \mathbf{0}$ とする. いま, 曲線 $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ の閉区間 $[a, b]$ における長さを計算すると

$$\int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt = \int_a^b \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} dt$$

となる. すなわちこれは動点 $\gamma(t)$ が時刻 $t = a$ から $t = b$ まで動いた距離である. 初めの時刻 $t = a$ を固定し, b の代わりに変数 t を用いて

$$s = \int_a^t |\dot{\gamma}(u)| du$$

と書くと, s は時刻 a から t の間に点が動いた距離で t の関数 $s = s(t)$ になる. そこで変数 s を次のように定義する.

定義 1.3 $a, b \in \mathbb{R}$ に対し, 曲線 $\gamma(t)$ の閉区間 $[a, t]$ における長さを $s = \int_a^t |\dot{\gamma}(t)| dt$ とすると, この曲線は

$$\gamma(s) = (x(s), y(s)) \quad (0 \leq s \leq l), \quad l = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt$$

と表される. このときの変数 s を弧長パラメータという.

弧長パラメータ s による微分を $\gamma'(s)$ と表し, 一般のパラメータ t での微分とは区別する. 以下, 断りのない場合は次のように書く.

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}, \quad \dot{y} = \frac{dy}{dt}, \quad \dot{\gamma}(t) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right),$$

$$x' = \frac{dx}{ds}, \quad y' = \frac{dy}{ds}, \quad \gamma'(s) = \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds} \right).$$

$\dot{\gamma}(t) \neq \mathbf{0}$ であるから, 弧長パラメータ s は t で微分すると, 微分積分学の基本定理より

$$\frac{ds}{dt} = |\dot{\gamma}(t)| > 0$$

である. s で表示された曲線 $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ を微分すると, 合成関数の微分法より

$$\gamma'(s) = \frac{d\gamma}{ds} = \frac{d\gamma}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{\dot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t)|}$$

となるから, $|\gamma'(s)| \equiv 1$, すなわち弧長パラメータ表示された曲線の速度ベクトルの大きさは常に 1 となる.

定義 1.4 曲線 $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ に対し,

$$\mathbf{e}(s) = \gamma'(s) = (x'(s), y'(s)) \quad \mathbf{n}(s) = (-y'(s), x'(s))$$

とする. $\mathbf{e}(s)$ を $\gamma(s)$ の単位接ベクトル, $\mathbf{n}(s)$ を $\gamma(s)$ の単位法線ベクトルという.

単位法線ベクトル $\mathbf{n}(s)$ は $\mathbf{e}(s)$ を, 原点を中心に 90° 回転して得られるベクトルである. ここで

$$\mathbf{e}'(s) = \gamma''(s)$$

を考えると, $\mathbf{e}'(s)$ は $\mathbf{e}(s)$ に直交するので, $\mathbf{e}'(s)$ は $\mathbf{n}(s)$ に平行となる. そこで次のような定数 $\kappa(s)$ を定義する.

定義 1.5 曲線 $\gamma(s)$ に対し,

$$\mathbf{e}'(s) = \kappa(s)\mathbf{n}(s)$$

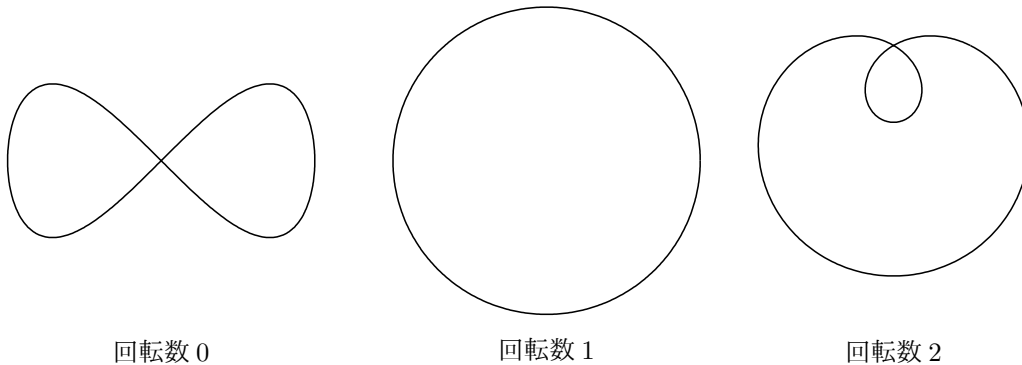
となるような定数 $\kappa(s)$ が存在する. この定数 $\kappa(s)$ を $\gamma(s)$ の曲率という.

定義 1.6 曲線 $\gamma(s)$ ($a \leq s \leq b$) に対し, 曲率を $\kappa(s)$ とする. $\kappa(s)$ を $s = a$ から $s = b$ まで積分して得られる定数

$$\mu = \int_a^b \kappa(s) ds$$

を $\gamma(s)$ の全曲率という. またこの両辺を 2π で割った値を $\gamma(s)$ の回転数という.

曲線の向きによって回転数の正負は変わるが, なめらかな閉曲線の回転数は整数となる.



1.2 空間の曲線と曲面

平面的な曲線と同様に, 空間の曲線の弧長パラメータを次のように定義する.

定義 1.7 パラメータ s を用いて, 空間の曲線を

$$\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s))$$

と表す. 曲線上の点 $\gamma(a)$ を固定し, 閉区間 $[a, s]$ における長さを $u = u(s)$ とすると

$$u = \int_a^s |\dot{\gamma}(\theta)| d\theta = \int_a^s \sqrt{\dot{x}(\theta)^2 + \dot{y}(\theta)^2 + \dot{z}(\theta)^2} d\theta$$

で与えられ, 弧長パラメータ表示できる.

$l = \int_a^b |\dot{\gamma}(s)| ds$ とする. 弧長パラメータ u で表された曲線 $\gamma(u) = (x(u), y(u), z(u))$ ($0 \leq u \leq l$) の速度ベクトル

$$\mathbf{e}_1(u) = \gamma'(u) = (x'(u), y'(u), z'(u))$$

の大きさは平面の曲線のときと同様に, 長さは常に 1 である. すなわち

$$\mathbf{e}_1(u) \cdot \mathbf{e}_1(u) = x'(u)^2 + y'(u)^2 + z'(u)^2 = 1$$

である. この式をさらに u で微分すると

$$\mathbf{e}'_1(u) \mathbf{e}_1(u) + \mathbf{e}_1(u) \mathbf{e}'_1(u) = 2\mathbf{e}_1(u) \mathbf{e}'_1(u) = 0$$

であるから, $\mathbf{e}'_1(u)$ は $\mathbf{e}_1(u)$ に垂直である.

定義 1.8 曲線 $\gamma(u) = (x(u), y(u), z(u))$ と速度ベクトル $\mathbf{e}_1(u) = \gamma'(u)$ に対し, $\mathbf{e}'_1(u)$ の大きさ

$$|\mathbf{e}'_1(u)| = \sqrt{\mathbf{e}'_1(u) \cdot \mathbf{e}'_1(u)} = \sqrt{x''(u)^2 + y''(u)^2 + z''(u)^2}$$

を曲線 $\gamma(u)$ の曲率といい, $\kappa(u)$ と書く.

定義 1.9 $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ は uv 平面上の領域 D で定義された 3 回微分可能な関数とする. Jacobi 行列

$$\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}$$

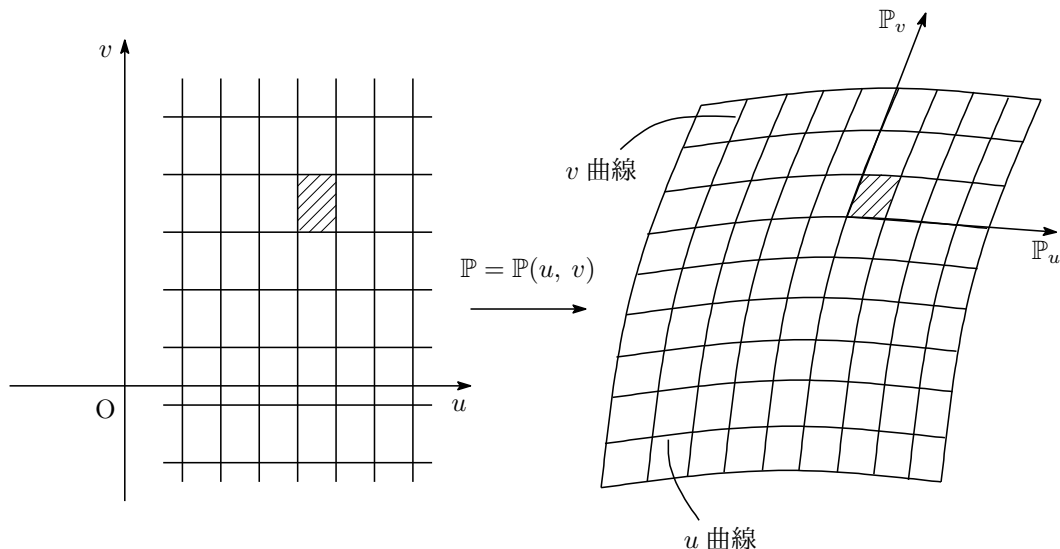
の階数が D 上で 2 であるとき, $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ は空間内に曲面片を定義するという.

定義 1.10 空間内の集合 S がいくつかの (無限の) 曲面片の和集合になっているとき, S を曲面という.

定義 1.11 S が境界をもたないコンパクトな曲面であるとき, これを閉曲面という.

以下断らない限り, 曲面 $\mathbb{P}(u, v)$ は閉曲面とする.

uv 平面上の領域 D で定義された $\mathbb{P}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ を曲面とする.



$\mathbb{P}(u, v)$ において, v を 1 つ固定したときの対応 $u \mapsto \mathbb{P}(u, v)$ によって決まる曲線を u 曲線といい, u を 1 つ固定したときの対応 $v \mapsto \mathbb{P}(u, v)$ によって決まる曲線を v 曲線という. これら 2 つの曲線の族は曲面を網のように覆う. ベクトル $\mathbb{P}_u = \mathbb{P}_u(u, v)$ は u 曲線の各点における速度ベクトルを, ベクトル $\mathbb{P}_v = \mathbb{P}_v(u, v)$ は v 曲線の各点における速度ベクトルを表す. また点 $\mathbb{P}(u, v)$ で曲面に接するベクトルは $\mathbb{P}_u, \mathbb{P}_v$ の 1 次結合で表される. したがって点 $\mathbb{P}(u, v)$ を通り, これらの接ベクトルに平行な平面

$$\{ \mathbb{P}(u, v) + \alpha \mathbb{P}_u(u, v) + \beta \mathbb{P}_v(u, v) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \}$$

が曲面の接平面となる. $\mathbb{P}_u, \mathbb{P}_v$ の両方に垂直な単位ベクトルは

$$\nu = \frac{\mathbb{P}_u \times \mathbb{P}_v}{|\mathbb{P}_u \times \mathbb{P}_v|}$$

と表される. この ν を曲面 $\mathbb{P}(u, v)$ の単位法線ベクトルという.

これらのもとで, 次のような関数を定義する.

定義 1.12 曲面 $S : \mathbb{P}(u, v)$ の接ベクトル $\mathbb{P}_u = \mathbb{P}_u(u, v)$, $\mathbb{P}_v = \mathbb{P}_v(u, v)$ の内積で与えられる 3 つの関数

$$E(u, v) = \mathbb{P}_u \cdot \mathbb{P}_u, \quad F(u, v) = \mathbb{P}_u \cdot \mathbb{P}_v, \quad G(u, v) = \mathbb{P}_v \cdot \mathbb{P}_v$$

を第 1 基本量という. また, $\mathbb{P}(u, v)$ の 2 回偏微分 $\mathbb{P}_{uu}, \mathbb{P}_{uv}, \mathbb{P}_{vv}$ と単位法線ベクトル ν の内積で与えられる 3 つの関数

$$L(u, v) = \mathbb{P}_{uu} \cdot \nu, \quad M(u, v) = \mathbb{P}_{uv} \cdot \nu, \quad N(u, v) = \mathbb{P}_{vv} \cdot \nu$$

を第 2 基本量という. 簡単のため, E, F, G などと略記する.

定義 1.13 曲面 $S : \mathbb{P}(u, v)$ に対し, 第 1 基本量 E, F, G と第 2 基本量 L, M, N を用いて表される関数

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

を S の Gauss 曲率という.

定義 1.14 閉曲面 $S : \mathbb{P}(u, v)$ ($u(s_1) \leq u \leq u(s_2)$, $0 \leq v \leq 2\pi$) に対し, Gauss 曲率を K とする. S 上における K の重積分の値

$$\iint_S K dA$$

を S の全曲率という. ここで dA は面積要素であり, $dA = \sqrt{EG - F^2} dudv$ と表される.

例 1.1 $r > 0$ とする. 半径 r の 2 次元球面 S^2 は

$$\mathbb{P}(u, v) = (r \cos u \cos v, r \cos u \sin v, r \sin u) \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq v \leq 2\pi\right)$$

と表される.

$$\mathbb{P}_u = (-r \sin u \cos v, -r \sin u \sin v, r \cos u),$$

$$\mathbb{P}_v = (-r \cos u \sin v, r \cos u \cos v, 0),$$

$$\mathbb{P}_u \times \mathbb{P}_v = -(r^2 \cos^2 u \cos v, r^2 \cos^2 u \sin v, r^2 \sin u \cos u), \quad |\mathbb{P}_u \times \mathbb{P}_v| = r^2 \cos u,$$

$$\nu = \frac{\mathbb{P}_u \times \mathbb{P}_v}{|\mathbb{P}_u \times \mathbb{P}_v|} = -(\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u),$$

$$\mathbb{P}_{uu} = -(r \cos u \cos v, r \cos u \sin v, r \sin u),$$

$$\mathbb{P}_{uv} = (r \sin u \sin v, -r \sin u \cos v, 0),$$

$$\mathbb{P}_{vv} = -(r \cos u \cos v, r \cos u \sin v, 0)$$

より, 第 1 基本量 E, F, G と第 2 基本量 L, M, N は

$$E = \mathbb{P}_u \cdot \mathbb{P}_u = r^2, \quad F = \mathbb{P}_u \cdot \mathbb{P}_v = 0, \quad G = \mathbb{P}_v \cdot \mathbb{P}_v = r^2 \cos^2 u,$$

$$L = \mathbb{P}_{uu} \cdot \nu = r, \quad M = \mathbb{P}_{uv} \cdot \nu = 0, \quad N = \mathbb{P}_{vv} \cdot \nu = r \cos^2 u.$$

これより S^2 の Gauss 曲率は

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{1}{r^2}.$$

また面積要素は $dA = \sqrt{EG - F^2} dudv = r^2 \cos u dudv$. したがって S^2 の全曲率は

$$\iint_{S^2} K dA = \iint_{S^2} \frac{1}{r^2} \cdot r^2 \cos u dudv = \iint_{S^2} \cos u dudv = \left[\sin u \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[v \right]_0^{2\pi} = 4\pi$$

となる. □

定義 1.15 xz 平面上の曲線

$$\gamma(u) = (f(u), g(u)) \quad (f(u) \geq 0)$$

を, z 軸のまわりに 1 回転してできる曲面 S は

$$\mathbb{P}(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u))$$

で与えられる. この曲面 S を回転面という.

回転面の全曲率の計算は, 平面上の曲線における通常のパラメータを弧長パラメータに変換してから定義通りに行うことによっても計算することができる.

例 1.2 $R > r > 0$ とする. xz 平面上の円

$$\gamma(s) = (R + r \cos s, r \sin s) \quad (0 \leq s \leq 2\pi)$$

に対し, $\dot{\gamma}(s) = (-r \sin s, r \cos s)$. 閉区間 $[0, s]$ に対応する弧長 $u = u(s)$ は

$$u = \int_0^s |\dot{\gamma}(t)| dt = \int_0^s r dt = \left[rt \right]_0^s = rs \iff s = \frac{u}{r}$$

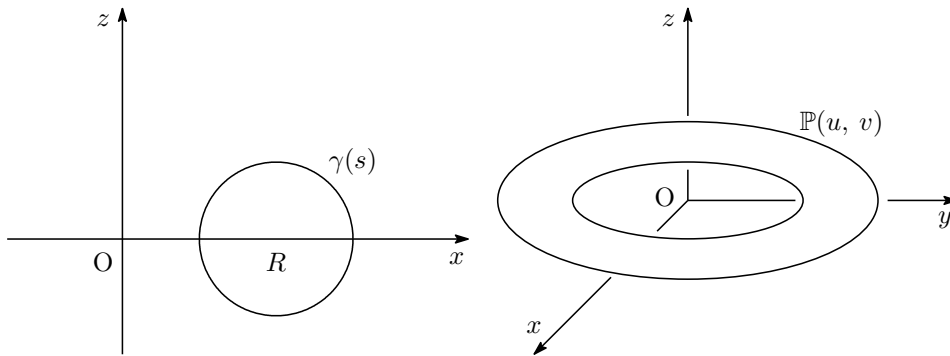
であるから, この円の弧長パラメータ表示は

$$\gamma(u) = \left(R + r \cos \frac{u}{r}, r \sin \frac{u}{r} \right) \quad (0 \leq u \leq 2\pi r)$$

である. この円を z 軸のまわりに 1 回転してできる曲面 T は

$$\mathbb{P}(u, v) = \left(\left(R + r \cos \frac{u}{r} \right) \cos v, \left(R + r \cos \frac{u}{r} \right) \sin v, r \sin \frac{u}{r} \right) \quad (0 \leq u \leq 2\pi r, 0 \leq v \leq 2\pi)$$

で与えられる. この曲面 T をトーラスという.



$$\mathbb{P}_u = \left(-\sin \frac{u}{r} \cos v, -\sin \frac{u}{r} \sin v, \cos \frac{u}{r} \right),$$

$$\mathbb{P}_v = \left(-\left(R + r \cos \frac{u}{r} \right) \sin v, \left(R + r \cos \frac{u}{r} \right) \cos v, 0 \right),$$

$$\mathbb{P}_u \times \mathbb{P}_v = - \left(\left(R + r \cos \frac{u}{r} \right) \cos \frac{u}{r} \cos v, \left(R + r \cos \frac{u}{r} \right) \cos \frac{u}{r} \sin v, \left(R + r \cos \frac{u}{r} \right) \sin \frac{u}{r} \right),$$

$$|\mathbb{P}_u \times \mathbb{P}_v| = R + r \cos \frac{u}{r},$$

$$\nu = \frac{\mathbb{P}_u \times \mathbb{P}_v}{|\mathbb{P}_u \times \mathbb{P}_v|} = - \left(\cos \frac{u}{r} \cos v, \cos \frac{u}{r} \sin v, \sin \frac{u}{r} \right),$$

$$\mathbb{P}_{uu} = - \left(\frac{1}{r} \cos \frac{u}{r} \cos v, \frac{1}{r} \cos \frac{u}{r} \sin v, \frac{1}{r} \sin \frac{u}{r} \right),$$

$$\mathbb{P}_{uv} = \left(\sin \frac{u}{r} \sin v, -\sin \frac{u}{r} \cos v, 0 \right),$$

$$\mathbb{P}_{vv} = - \left(\left(R + r \cos \frac{u}{r} \right) \cos v, \left(R + r \cos \frac{u}{r} \right) \sin v, 0 \right)$$

より, 第1基本量 E, F, G と第2基本量 L, M, N は

$$E = \mathbb{P}_u \cdot \mathbb{P}_u = 1, \quad F = \mathbb{P}_u \cdot \mathbb{P}_v = 0, \quad G = \mathbb{P}_v \cdot \mathbb{P}_v = \left(R + r \cos \frac{u}{r} \right)^2,$$

$$L = \mathbb{P}_{uu} \cdot \nu = \frac{1}{r}, \quad M = \mathbb{P}_{uv} \cdot \nu = 0, \quad N = \mathbb{P}_{vv} \cdot \nu = \left(R + r \cos \frac{u}{r} \right) \cos \frac{u}{r}.$$

これより T の Gauss 曲率は

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{\cos \frac{u}{r}}{r \left(R + r \cos \frac{u}{r} \right)}.$$

また面積要素は $dA = \sqrt{EG - F^2} dudv = \left(R + r \cos \frac{u}{r} \right) dudv$. したがって T の全曲率は

$$\begin{aligned} \iint_T K dA &= \iint_T \frac{\cos \frac{u}{r}}{r \left(R + r \cos \frac{u}{r} \right)} \cdot \left(R + r \cos \frac{u}{r} \right) dudv = \iint_T \frac{1}{r} \cos \frac{u}{r} dudv \\ &= \left[\sin \frac{u}{r} \right]_0^{2\pi r} \left[v \right]_0^{2\pi} = 0 \end{aligned}$$

となる. □

定義 1.16 閉曲面 S を有限個の三角形に分割したとき, その分割に対し, 頂点, 辺, 面の数をそれぞれ v, e, f とする. 整数 $v - e + f$ を S の **Euler 標数** といい, $\chi(S)$ と書く.

2次元球面 S^2 とトーラス T の Euler 標数はそれぞれ $\chi(S^2) = 2, \chi(T) = 0$. 一般に g を閉曲面 S の種数とすると, $\chi(S) = 2 - 2g$ となることが知られている. この Euler 標数と全曲率に関して, 次の定理が成り立つ.

定理 1.1 (Gauss-Bonnet)

閉曲面 S を有限個の三角形に分割したとき, その分割に対し, 頂点, 辺, 面の数をそれぞれ v, e, f とし, Euler 標数を $\chi(S) = v - e + f$ とする. このとき

$$\iint_S K dA = 2\pi\chi(S)$$

が成り立つ.

実際, 例 1.1 より 2次元球面 S^2 の全曲率は 4π , 例 1.2 よりトーラス T の全曲率は 0 であり,

$$4\pi = 2\pi \cdot 2 = 2\pi\chi(S^2), \quad 0 = 2\pi \cdot 0 = 2\pi \cdot \chi(T).$$

これより S^2 と T について, 定理 1.1 は成り立っている.

第2章 回転面の全曲率の計算

2.1 トーラス型曲面の全曲率

回転軸と交わらないようにして得られる曲面をトーラス型曲面とでもいうことにする. 前章のトーラス T の例に倣い, いろいろなトーラス型曲面の全曲率を計算することを考える. 回転面の全曲率は, 平面上の曲線を弧長パラメータ表示して回転面を構成し, 定義に従って積分を行うことで得られる量であった. しかし, 弧長パラメータに変換することは理論上便利でも実際には不可能な程難しいこともある. ところが, 実は計算上必要なのは弧長パラメータ u そのものではなく, その s による微分

$$\frac{du}{ds}$$

である. 回転面の全曲率は, 次の定理により, 弧長パラメータを求めることなく, しかも微分のみで計算ができる.

定理 2.1 xz 平面上の曲線

$$\gamma(s) = (f(s), g(s)) \quad (f(s) > 0)$$

は閉区間 $[s_1, s_2]$ において $\dot{\gamma}(s) \neq \mathbf{0}$ であるとする. 区間 $[s_1, s_2]$ に対応する弧長 $u = u(s)$ により, この曲線の弧長パラメータ表示が

$$\gamma(u) = (f(u), g(u)) \quad (u(s_1) \leq u \leq u(s_2))$$

であるとする. この曲線を z 軸の周りに 1 回転してできる曲面は

$$\mathbb{P}(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u)) \quad (u(s_1) \leq u \leq u(s_2), 0 \leq v \leq 2\pi)$$

で与えられる. この回転面を S とすると, S の全曲率は

$$\iint_S K dA = -2\pi \dot{f}(s_2) \frac{1}{\left. \frac{du}{ds} \right|_{s=s_2}} + 2\pi \dot{f}(s_1) \frac{1}{\left. \frac{du}{ds} \right|_{s=s_1}}$$

となる.

(証明)

曲線 $\gamma(u)$ ($(u(s_1) \leq u \leq u(s_2))$) の速度ベクトルの大きさは常に 1 であるから

$$f'(u)^2 + g'(u)^2 = 1.$$

この式の両辺を u で微分して整理すると

$$f(u)f'(u) + g(u)g'(u) = 0.$$

を得る. また

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_u &= (f'(u) \cos v, f'(u) \sin v, g'(u)), \\ \mathbb{P}_v &= (-f(u) \sin v, f(u) \cos v, 0), \\ \mathbb{P}_u \times \mathbb{P}_v &= (-f(u)g'(u) \cos v, -f(u)g'(u) \sin v, f(u)f'(u)), \quad |\mathbb{P}_u \times \mathbb{P}_v| = f(u), \\ \nu &= \frac{\mathbb{P}_u \times \mathbb{P}_v}{|\mathbb{P}_u \times \mathbb{P}_v|} = (-g'(u) \cos v, -g'(u) \sin v, f'(u)), \\ \mathbb{P}_{uu} &= (f''(u) \cos v, f''(u) \sin v, g''(u)), \\ \mathbb{P}_{uv} &= (-f'(u) \sin v, f'(u) \cos v, 0), \\ \mathbb{P}_{vv} &= -(f(u) \cos v, f(u) \sin v, 0) \end{aligned}$$

より, 第1基本量 E, F, G と第2基本量 L, M, N は

$$\begin{aligned} E &= \mathbb{P}_u \cdot \mathbb{P}_u = f'(u)^2 + g'(u)^2 = 1, \\ F &= \mathbb{P}_u \cdot \mathbb{P}_v = -f(u)f'(u) \sin v \cos v + f(u)f'(u) \sin v \cos v = 0, \\ G &= \mathbb{P}_v \cdot \mathbb{P}_v = f(u)^2 \sin^2 v + f(u)^2 \cos^2 v = f(u)^2, \\ L &= \mathbb{P}_{uu} \cdot \nu = -f''(u)g'(u) \cos^2 v - f''(u)g'(u) \sin^2 v + f'(u)g''(u) = f'(u)g''(u) - f''(u)g'(u), \\ M &= \mathbb{P}_{uv} \cdot \nu = f'(u)g'(u) \sin v \cos v - f'(u)g'(u) \sin v \cos v = 0, \\ N &= \mathbb{P}_{vv} \cdot \nu = f(u)g'(u) \sin^2 v + f(u)g'(u) \cos^2 v = f(u)g'(u) \end{aligned}$$

となる. ここで $L = f'(u)g''(u) - f''(u)g'(u)$ の両辺に $g'(u)$ をかけると

$$L \cdot g'(u) = f'(u)g'(u)g''(u) - f''(u)g'(u)^2$$

であるから, $g'(u)^2 = 1 - f'(u)^2$ と $g'(u)g''(u) = -f'(u)f''(u)$ より

$$L \cdot g'(u) = -f'(u)^2 f''(u) - f''(u)\{1 - f'(u)^2\} = -f''(u).$$

よって

$$L = -\frac{f''(u)}{g'(u)}$$

となり,

$$EG - F^2 = 1 \cdot f(u)^2 - 0 = f(u)^2, \quad LN - M^2 = -\frac{f''(u)}{g'(u)} \cdot f(u)g'(u) - 0 = -f(u)f''(u).$$

これより S の Gauss 曲率は

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = -\frac{f''(u)}{f(u)}.$$

また面積要素は $dA = \sqrt{EG - F^2} dudv = f(u) dudv$. したがって S の全曲率は

$$\begin{aligned} \iint_S K dA &= \iint_S \left\{ -\frac{f''(u)}{f(u)} \right\} f(u) dudv \\ &= -\iint_S f''(u) dudv = -\int_{u(s_1)}^{u(s_2)} f''(u) du \int_0^{2\pi} dv = -2\pi \left[f'(u) \right]_{u(s_1)}^{u(s_2)} \end{aligned}$$

となる. ここで, 合成関数の微分法と逆関数の微分法により

$$f'(u) = \frac{df}{du} = \frac{df}{ds} \cdot \frac{ds}{du} = \dot{f}(s) \frac{1}{\frac{du}{ds}}$$

よって

$$\iint_S K dA = -2\pi \left[f'(u) \right]_{u(s_1)}^{u(s_2)} = -2\pi \left[\dot{f}(s) \frac{1}{\frac{du}{ds}} \right]_{s_1}^{s_2}$$

となり, 定理の式を得る. □

例 1.2 のトーラス T の全曲率を, この定理を用いて再度計算してみる.

例 2.1 $R > r > 0$ とする. xz 平面上の円

$$\gamma(s) = (f(s), g(s)) = (R + r \cos s, r \sin s) \quad (0 \leq s \leq 2\pi)$$

に対し, $\dot{\gamma}(s) = (-r \sin s, r \cos s)$. 閉区間 $[0, s]$ に対応する弧長 $u = u(s)$ により, この円の弧長パラメータ表示が

$$\gamma(u) = (f(u), g(u))$$

であるとする. この円を z 軸の周りに 1 回転してできるトーラス T は

$$\mathbb{P}(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u))$$

で与えられる. ここで

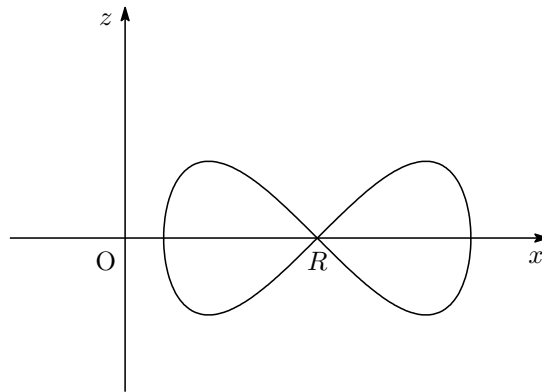
$$\dot{f}(s) = -r \sin s, \quad \frac{du}{ds} = \sqrt{(-r \sin s)^2 + (r \cos s)^2} = r$$

と定理 2.1 より T の全曲率は

$$\iint_T K dA = -2\pi \dot{f}(2\pi) \frac{1}{\left. \frac{du}{ds} \right|_{s=2\pi}} + 2\pi \dot{f}(0) \frac{1}{\left. \frac{du}{ds} \right|_{s=0}} = -2\pi \cdot 0 \cdot \frac{1}{r} + 2\pi \cdot 0 \cdot \frac{1}{r} = 0$$

となる. □

例 2.2 s でパラメータ表示された平面上の曲線 $\left(\frac{\sin s}{1 + \sin^2 s}, \frac{\sin s \cos s}{1 + \sin^2 s} \right)$ をレムニスケートという.



R は十分大きい実数とする. xz 平面上のレムニスケート

$$\gamma(s) = (f(s), g(s)) = \left(R + \frac{\sin s}{1 + \sin^2 s}, \frac{\sin s \cos s}{1 + \sin^2 s} \right) \quad (0 \leq s \leq 2\pi)$$

に対し, $\dot{\gamma}(s) = \left(-\frac{\sin s(3 - \sin^2 s)}{(1 + \sin^2 s)^2}, \frac{1 - 3\sin^2 s}{(1 + \sin^2 s)^2} \right)$. 閉区間 $[0, s]$ に対応する弧長 $u = u(s)$ により, この円の弧長パラメータ表示が

$$\gamma(u) = (f(u), g(u))$$

であるとする. この曲線を z 軸の周りに 1 回転してできる曲面 S は

$$\mathbb{P}(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u))$$

で与えられる. ここで

$$\dot{f}(s) = -\frac{\sin s(3 - \sin^2 s)}{(1 + \sin^2 s)^2}, \quad \frac{du}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sin^2 s}}$$

と定理 2.1 より S の全曲率は

$$\iint_S K dA = -2\pi \dot{f}(2\pi) \frac{1}{\left. \frac{du}{ds} \right|_{s=2\pi}} + 2\pi \dot{f}(0) \frac{1}{\left. \frac{du}{ds} \right|_{s=0}} = -2\pi \cdot 0 \cdot 1 + 2\pi \cdot 0 \cdot 1 = 0$$

となる. □

次の曲面を構成する平面曲線については後述するが, 特異点をもたない曲線である. これを回転してできる曲面の全曲率は次のようになる.

例 2.3 $0 \leq t < \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} < t \leq 1$ を満たす実数 t に対し, xz 平面上の曲線 $\gamma(s)$ を

$$\gamma(s) = (f(s), g(s)) = (R + (1 - 2t \sin s) \cos s, (1 - 2t \sin s) \sin s) \quad \left(-\frac{3}{2}\pi \leq s \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

と定める. ここで R は $\gamma(s)$ が回転軸と交わらないように十分大きくとってあるとする. $\gamma(s)$ を s で微分すると

$$\dot{\gamma}(s) = (-\sin s - 2t \cos 2s, \cos s - 2t \sin 2s).$$

閉区間 $\left[-\frac{3}{2}\pi, s\right]$ に対応する弧長 $u = u(s)$ により, この曲線の弧長パラメータ表示が

$$\gamma(u) = (f(u), g(u))$$

であるとする. この曲線を z 軸のまわりに 1 回転してできる曲面 $T(t)$ は

$$\mathbb{P}(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u))$$

で与えられる. ここで

$$\dot{f}(s) = -\sin s - 2t \cos 2s, \quad \frac{du}{ds} = \sqrt{1 + 4t^2 - 4t \sin s}$$

と定理 2.1 より $T(t)$ の全曲率は

$$\begin{aligned} \iint_{T(t)} K dA &= -2\pi \dot{f}\left(\frac{\pi}{2}\right) \frac{1}{\frac{du}{ds}\Big|_{s=\frac{\pi}{2}}} + 2\pi \dot{f}\left(-\frac{3}{2}\pi\right) \frac{1}{\frac{du}{ds}\Big|_{s=-\frac{3}{2}\pi}} \\ &= -\frac{2\pi(2t-1)}{|2t-1|} + \frac{2\pi(2t-1)}{|2t-1|} \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる. □

本章 3 節との関連のため, 原点を中心に平面曲線を回転してから, 回転軸のまわりに 1 回転して得られる曲面の全曲率を計算しておく.

定義 2.1 2 次の正方行列

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

を, 平面上の原点を中心に角 θ だけ回転させる回転行列という.

例 2.4 xz 平面上の点 $((1 - 2t \sin s) \cos s, (1 - 2t \sin s) \sin s)$ を, 原点を中心に θ 回転してうつる点は

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1 - 2t \sin s) \cos s \\ (1 - 2t \sin s) \sin s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 - 2t \sin s) \cos(s + \theta) \\ (1 - 2t \sin s) \sin(s + \theta) \end{pmatrix}$$

である. $0 \leq t < \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} < t \leq 1$ を満たす実数 t に対し, xz 平面上の曲線 $\gamma(s)$ を

$$\gamma(s) = (f(s), g(s)) = (R + (1 - 2t \sin s) \cos(s + \theta), (1 - 2t \sin s) \sin(s + \theta)) \quad \left(-\frac{3}{2}\pi \leq s \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

と定める. ここで R は $\gamma(s)$ が回転軸と交わらないように十分大きくとってあるとする. $\gamma(s)$ を s で微分すると

$$\dot{\gamma}(s) = (-\sin(s + \theta) - 2t \cos(2s + \theta), \cos(s + \theta) - 2t \sin(2s + \theta)).$$

閉区間 $\left[-\frac{3}{2}\pi, s\right]$ に対応する弧長 $u = u(s)$ により, この曲線の弧長パラメータ表示が

$$\gamma(u) = (f(u), g(u))$$

であるとする. この曲線を z 軸のまわりに 1 回転してできる曲面 $T(t)$ は

$$\mathbb{P}(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u))$$

で与えられる. ここで

$$\dot{f}(s) = -\sin(s + \theta) - 2t \cos(2s + \theta), \quad \frac{du}{ds} = \sqrt{1 + 4t^2 - 4t \sin s}$$

と定理 2.1 より $T(t)$ の全曲率は

$$\begin{aligned} \iint_{T(t)} K dA &= -2\pi \dot{f}\left(\frac{\pi}{2}\right) \frac{1}{\left.\frac{du}{ds}\right|_{s=\frac{\pi}{2}}} + 2\pi \dot{f}\left(-\frac{3}{2}\pi\right) \frac{1}{\left.\frac{du}{ds}\right|_{s=-\frac{3}{2}\pi}} \\ &= -\frac{2\pi(2t-1)\cos\theta}{|2t-1|} + \frac{2\pi(2t-1)\cos\theta}{|2t-1|} \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる. □

2.2 特異点つきトーラス型曲面の全曲率

曲線の中には速度ベクトルが $\mathbf{0}$ となるようなものも一般には存在する. ここではそのような点を特異点ということにする. 特異点を含む曲線を回転して得られる曲面の全曲率は, 定理 2.1 を用いて計算することができない. しかしその他の点では定理が成り立つことから, 次のような広義の弧長パラメータを導入し, 特異点を含む曲線を回転してできる曲面の全曲率の計算を考える.

定義 2.2 曲線 $\gamma(s)$ に対し, $\dot{\gamma}(s_1) = \mathbf{0}$ とする. $s_1 < \alpha$ に対し, $\lim_{\alpha \rightarrow s_1+0} \int_{\alpha}^s |\dot{\gamma}(s)| ds$ が収束するとき, $\gamma(s)$ は区間 $(s_1, s]$ で弧長パラメータ表示可能といい, その値を

$$u = \int_{s_1}^s |\dot{\gamma}(s)| ds = \lim_{\alpha \rightarrow s_1+0} \int_{\alpha}^s |\dot{\gamma}(s)| ds$$

と定義する. 区間 $[s_1, s)$ においても同様に極限を用いて定義される. このように閉区間以外に拡張された $u = u(s)$ を広義の弧長パラメータという.

次に开区間における広義の弧長パラメータを定義する.

定義 2.3 曲線 $\gamma(s)$ に対し, $\dot{\gamma}(s_1) = \dot{\gamma}(s_2) = \mathbf{0}$ とする. s_1 と s_2 の間に適当な点 c をとったとき, $\gamma(s)$ が区間 $(s_1, c]$ および $[c, s_2)$ のいずれにおいても弧長パラメータ表示可能であるならば, $\gamma(s)$ は开区間 (s_1, s_2) で弧長パラメータ表示可能といい, 弧長パラメータ $u = u(s)$ を

$$u = \int_{s_1}^c |\dot{\gamma}(s)| ds + \int_c^{s_2} |\dot{\gamma}(s)| ds$$

と定義する.

定理 2.2 xz 平面上の曲線

$$\gamma(s) = (f(s), g(s)) \quad (f(s) > 0)$$

は点 $s = s_1, s_2$ において $\dot{\gamma}(s) = \mathbf{0}$ であるとする. 开区間 (s_1, s) に対応する広義の弧長 $u = u(s)$ により, この曲線の弧長パラメータ表示が

$$\gamma(u) = (f(u), g(u)) \quad (u(s_1) \leq u \leq u(s_2))$$

であるとする. この曲線を z 軸の周りに 1 回転してできる曲面は

$$\mathbb{P}(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u)) \quad (u(s_1) \leq u \leq u(s_2), 0 \leq v \leq 2\pi)$$

で与えられる. この回転面を S とすると, S の全曲率は

$$\iint_S K dA = -2\pi \lim_{s \rightarrow s_2-0} \dot{f}(s) \frac{1}{\frac{du}{ds}} + 2\pi \lim_{s \rightarrow s_1+0} \dot{f}(s) \frac{1}{\frac{du}{ds}}$$

となる.

特異点を複数もつ曲線を回転して得られる曲面については, 各开区間に対応する広義の弧長を定義し, 定理 2.2 を適用してすべての和をとることで計算する. すなわち次の定理のようにする.

定理 2.3 xz 平面上の曲線

$$\gamma(s) = (f(s), g(s)) \quad (f(s) > 0)$$

は点 $s = s_1, c_1, c_2, \dots, c_{n-1}, c_n, s_2$ において $\dot{\gamma}(s) = \mathbf{0}$ であるとする. 开区間 $(s_1, c_1), (c_1, c_2), \dots, (c_n, s_2)$ に対応する広義の弧長 $u_i = u_i(s)$ により, この曲線の弧長パラメータ表示が

$$\gamma(u_i) = (f(u_i), g(u_i))$$

であるとする. この曲線を z 軸の周りに 1 回転してできる曲面は

$$\mathbb{P}(u_i, v) = (f(u_i) \cos v, f(u_i) \sin v, g(u_i))$$

で与えられる. この回転面を S とすると, S の全曲率は

$$\begin{aligned} \iint_S K dA = & -2\pi \lim_{s \rightarrow s_2-0} \dot{f}(s) \frac{1}{\frac{du_{n+1}}{ds}} + 2\pi \lim_{s \rightarrow c_n+0} \dot{f}(s) \frac{1}{\frac{du_{n+1}}{ds}} \\ & - 2\pi \lim_{s \rightarrow c_n-0} \dot{f}(s) \frac{1}{\frac{du_n}{ds}} + 2\pi \lim_{s \rightarrow c_{n-1}+0} \dot{f}(s) \frac{1}{\frac{du_n}{ds}} - \dots \\ & - 2\pi \lim_{s \rightarrow c_1-0} \dot{f}(s) \frac{1}{\frac{du_1}{ds}} + 2\pi \lim_{s \rightarrow s_1+0} \dot{f}(s) \frac{1}{\frac{du_1}{ds}} \end{aligned}$$

となる.

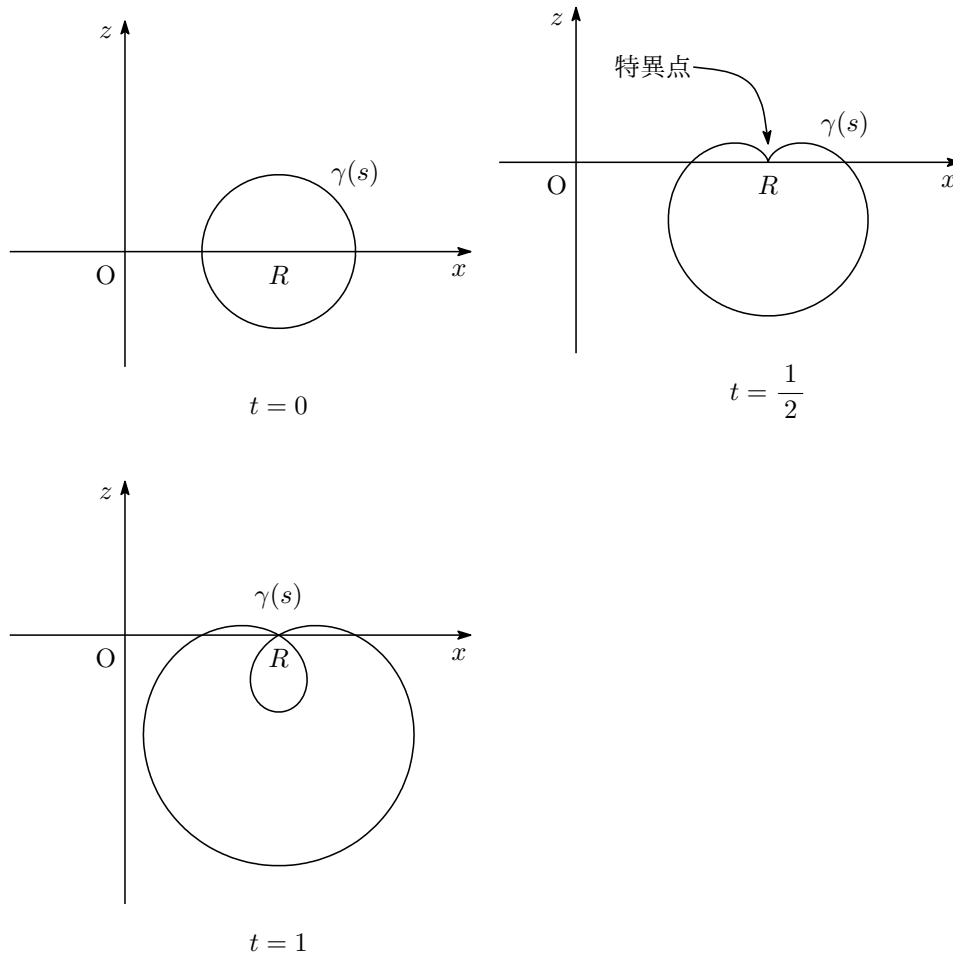
定理 2.3 の各开区間における弧長 u_i は s の式で表されるため, 本来は (s_1, s) などとそれぞれ書くべきである. しかしこの記法を採用すると記号が増えて紛らわしくなるから, 今後定理のように書くことにする.

以下では, 定理 2.2 と定理 2.3 を用いて具体的にいくつかの曲面の全曲率を計算する.

$0 \leq t \leq 1$ とする. xz 平面上の曲線 $\gamma(s)$ を

$$\gamma(s) = ((1 - 2t \sin s) \cos s + R, (1 - 2t \sin s) \sin s) \quad \left(-\frac{3}{2}\pi \leq s \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

と定める. この曲線は t が変化することによって次のように形が変化していき, $t = \frac{1}{2}$ のときは $s = -\frac{3}{2}\pi, \frac{\pi}{2}$ に対応する点が特異点である.



なお $t \neq \frac{1}{2}$ のときに得られる回転面 $T(t)$ の全曲率は、例 2.3 で見た通りである。そこで、 $t = \frac{1}{2}$ のときの回転面 $T\left(\frac{1}{2}\right)$ を構成し、全曲率を計算する。

例 2.5 xz 平面上の曲線 $\gamma(s)$ を

$$\gamma(s) = (f(s), g(s)) = (R + (1 - \sin s) \cos s, (1 - \sin s) \sin s) \quad \left(-\frac{3}{2}\pi \leq s \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

と定める。ここで R は $\gamma(s)$ が回転軸と交わらないように十分大きくとる。 $\gamma(s)$ を s で微分すると

$$\dot{\gamma}(s) = (-\sin s - \cos 2s, \cos s - \sin 2s).$$

$\dot{\gamma}(s) = \mathbf{0}$ となるのは $s = -\frac{3}{2}\pi, \frac{\pi}{2}$ のときである。开区間 $\left(-\frac{3}{2}\pi, s\right)$ に対応する弧長 $u = u(s)$ により、この曲線の弧長パラメータ表示が

$$\gamma(u) = (f(u), g(u))$$

であるとする。この曲線を z 軸のまわりに 1 回転してできる曲面 $T\left(\frac{1}{2}\right)$ は

$$\mathbb{P}(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u))$$

で与えられる. $-\frac{3}{2}\pi \leq s \leq \frac{\pi}{2}$ のとき, $0 \leq \frac{s}{2} + \frac{3}{4}\pi \leq \pi$ に注意すると

$$\begin{aligned} \frac{du}{ds} &= \sqrt{2 - 2\sin s} = \sqrt{2 \left(\cos \frac{s}{2} - \sin \frac{s}{2} \right)^2} \\ &= \sqrt{2} \left| \cos \frac{s}{2} - \sin \frac{s}{2} \right| \\ &= 2 \left| \sin \left(\frac{s}{2} + \frac{3}{4}\pi \right) \right| = 2 \sin \left(\frac{s}{2} + \frac{3}{4}\pi \right) \end{aligned}$$

であるから, 定理 2.2 より $T\left(\frac{1}{2}\right)$ の全曲率は

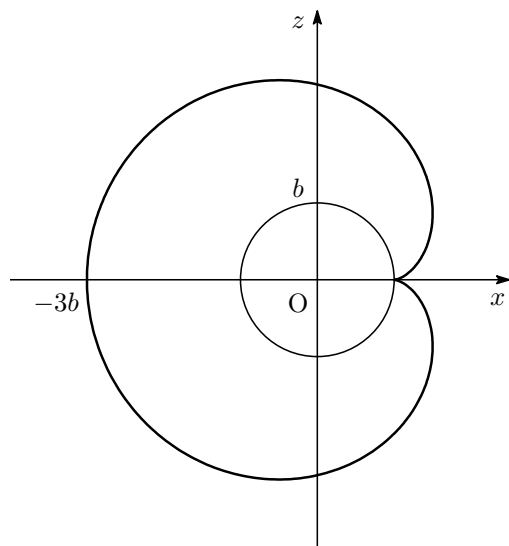
$$\begin{aligned} \iint_{T(\frac{1}{2})} K dA &= -2\pi \lim_{s \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0} \frac{-\sin s - \cos 2s}{2 \sin \left(\frac{s}{2} + \frac{3}{4}\pi \right)} + 2\pi \lim_{s \rightarrow -\frac{3}{2}\pi + 0} \frac{-\sin s - \cos 2s}{2 \sin \left(\frac{s}{2} + \frac{3}{4}\pi \right)} \\ &= -2\pi \lim_{s \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0} \frac{-\cos s + 2 \sin 2s}{\cos \left(\frac{s}{2} + \frac{3}{4}\pi \right)} + 2\pi \lim_{s \rightarrow -\frac{3}{2}\pi + 0} \frac{-\cos s + 2 \sin 2s}{\cos \left(\frac{s}{2} + \frac{3}{4}\pi \right)} \\ &= -2\pi \cdot 0 + 2\pi \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる. □

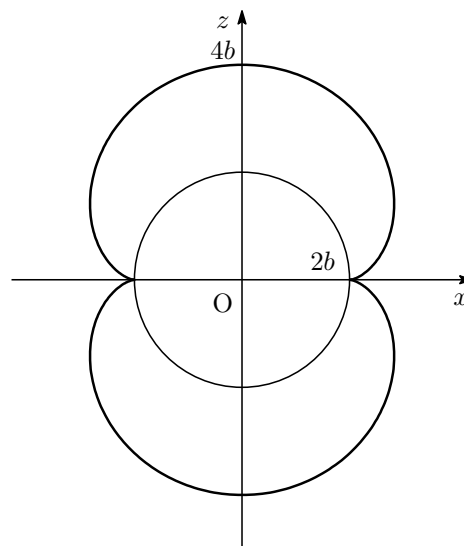
定義 2.4 原点を中心とする半径 a の定円に, 半径 b の円 C が外接しながら滑ることなく回転するとき, 円 C 上の定点がえがく曲線をエピサイクロイドといい, パラメータ表示は次で与えられる.

$$(x, z) = \left((a+b) \cos s - b \cos \frac{a+b}{b}s, (a+b) \sin s - b \sin \frac{a+b}{b}s \right).$$

とくに $a = b$ のときカージオイド, $a = 2b$ のときネフロイドという.



$a = b$ (カージオイド)



$a = 2b$ (ネフロイド)

次にエピサイクロイドを回転して得られる曲面の全曲率について考える. 簡単のため

$$(a, b) = (1, 1), (2, 1), (3, 1)$$

のときを計算する.

例 2.6 R は回転軸と交わらないように十分大きくとる. xz 平面上のカージオイド

$$\gamma(s) = (f(s), g(s)) = (R + 2 \cos s - \cos 2s, 2 \sin s - \sin 2s) \quad (0 \leq s \leq 2\pi)$$

に対し, $\dot{\gamma}(s) = (-2 \sin s + 2 \sin 2s, 2 \cos s - 2 \cos 2s)$. $\dot{\gamma}(s) = \mathbf{0}$ となるのは $s = 0, 2\pi$ のときである. 開区間 $(0, s)$ に対応する弧長 $u = u(s)$ により, この曲線の弧長パラメータ表示が

$$\gamma(u) = (f(u), g(u))$$

であるとする. この曲線を z 軸のまわりに 1 回転してできる曲面 S は

$$\mathbb{P}(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u))$$

で与えられる. $0 \leq s \leq 2\pi$ のとき, $0 \leq \frac{s}{2} \leq \pi$ に注意すると

$$\frac{du}{ds} = 2\sqrt{2(1 - \cos s)} = 4 \sin \frac{s}{2}$$

であるから, 定理 2.2 より S の全曲率は

$$\begin{aligned} \iint_S K \, dA &= -2\pi \lim_{s \rightarrow 2\pi-0} \frac{-2 \sin s + 2 \sin 2s}{4 \sin \frac{s}{2}} + 2\pi \lim_{s \rightarrow +0} \frac{-2 \sin s + 2 \sin 2s}{4 \sin \frac{s}{2}} \\ &= -2\pi \lim_{s \rightarrow 2\pi-0} \frac{-2 \cos s + 4 \cos 2s}{2 \cos \frac{s}{2}} + 2\pi \lim_{s \rightarrow +0} \frac{-2 \cos s + 4 \cos 2s}{2 \cos \frac{s}{2}} \\ &= -2\pi(-1) + 2\pi \cdot 1 \\ &= 4\pi \end{aligned}$$

となる. □

例 2.7 R は回転軸と交わらないように十分大きくとる. xz 平面上のネフロイド

$$\gamma(s) = (f(s), g(s)) = (R + 3 \cos s - \cos 3s, 3 \sin s - \sin 3s) \quad (0 \leq s \leq 2\pi)$$

に対し, $\dot{\gamma}(s) = (-3 \sin s + 3 \sin 3s, 3 \cos s - 3 \cos 3s)$. $\dot{\gamma}(s) = \mathbf{0}$ となるのは $s = 0, \pi, 2\pi$ のときである. 開区間 $(0, \pi)$, $(\pi, 2\pi)$ にそれぞれ対応する弧長 $u_i = u_i(s)$ により, この曲線の弧長パラメータ表示が

$$\gamma(u_i) = (f(u_i), g(u_i)) \quad (i = 1, 2)$$

であるとする. この曲線を z 軸のまわりに 1 回転してできる曲面 S は

$$\mathbb{P}(u_i, v) = (f(u_i) \cos v, f(u_i) \sin v, g(u_i))$$

で与えられる.

$$\frac{du_i}{ds} = 3\sqrt{2(1 - \cos 2s)} = \begin{cases} 6 \sin s & (i = 1) \\ -6 \sin s & (i = 2) \end{cases}$$

であるから, 定理 2.3 より S の全曲率は

$$\begin{aligned} \iint_S K \, dA &= -2\pi \lim_{s \rightarrow \pi-0} \frac{-3 \sin s + 3 \sin 3s}{6 \sin s} + 2\pi \lim_{s \rightarrow +0} \frac{-3 \sin s + 3 \sin 3s}{6 \sin s} \\ &\quad - 2\pi \lim_{s \rightarrow 2\pi-0} \frac{-3 \sin s + 3 \sin 3s}{-6 \sin s} + 2\pi \lim_{s \rightarrow \pi+0} \frac{-3 \sin s + 3 \sin 3s}{-6 \sin s} \\ &= -2\pi \lim_{s \rightarrow \pi-0} \frac{-3 \cos s + 9 \cos 3s}{6 \cos s} + 2\pi \lim_{s \rightarrow +0} \frac{-3 \cos s + 9 \cos 3s}{6 \cos s} \\ &\quad + 2\pi \lim_{s \rightarrow 2\pi-0} \frac{-3 \cos s + 9 \cos 3s}{6 \cos s} - 2\pi \lim_{s \rightarrow \pi+0} \frac{-3 \cos s + 9 \cos 3s}{6 \cos s} \\ &= -2\pi \cdot 1 + 2\pi \cdot 1 + 2\pi \cdot 1 - 2\pi \cdot 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる. □

例 2.8 R は回転軸と交わらないように十分大きくとる. xz 平面上のエピサイクロイド

$$\gamma(s) = (f(s), g(s)) = (R + 4 \cos s - \cos 4s, 4 \sin s - \sin 4s) \quad (0 \leq s \leq 2\pi)$$

に対し, $\dot{\gamma}(s) = (-4 \sin s + 4 \sin 4s, 4 \cos s - 4 \cos 4s)$. $\dot{\gamma}(s) = \mathbf{0}$ となるのは $s = 0, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi, 2\pi$ のときである. 開区間 $(0, \frac{2}{3}\pi), (\frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi), (\frac{4}{3}\pi, 2\pi)$ にそれぞれ対応する弧長 $u_i = u_i(s)$ により, この曲線の弧長パラメータ表示が

$$\gamma(u_i) = (f(u_i), g(u_i)) \quad (i = 1, 2, 3)$$

であるとする. この曲線を z 軸のまわりに 1 回転してできる曲面 S は

$$\mathbb{P}(u_i, v) = (f(u_i) \cos v, f(u_i) \sin v, g(u_i))$$

で与えられる.

$$\frac{du_i}{ds} = 4\sqrt{2(1 - \cos 3s)} = \begin{cases} 8 \sin \frac{3}{2}s & (i = 1, 3) \\ -8 \sin \frac{3}{2}s & (i = 2) \end{cases}$$

であるから, 定理 2.3 より S の全曲率は

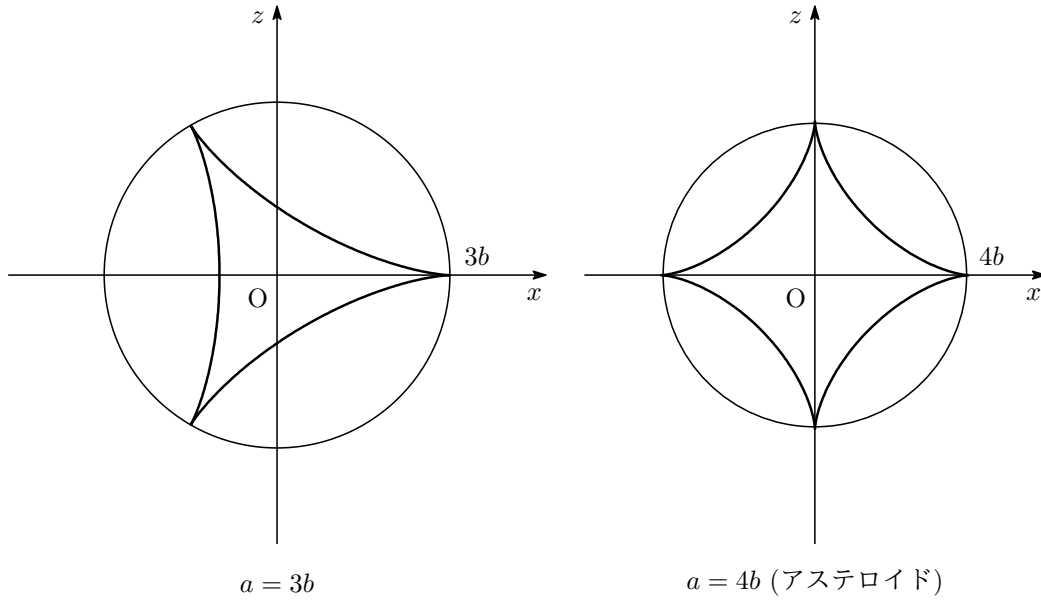
$$\begin{aligned} \iint_S K dA &= -2\pi \lim_{s \rightarrow \frac{2}{3}\pi - 0} \frac{-4 \sin s + 4 \sin 4s}{8 \sin \frac{3}{2}s} + 2\pi \lim_{s \rightarrow +0} \frac{-4 \sin s + 4 \sin 4s}{8 \sin \frac{3}{2}s} \\ &\quad - 2\pi \lim_{s \rightarrow \frac{4}{3}\pi - 0} \frac{-4 \sin s + 4 \sin 4s}{-8 \sin \frac{3}{2}s} + 2\pi \lim_{s \rightarrow \frac{2}{3}\pi + 0} \frac{-4 \sin s + 4 \sin 4s}{-8 \sin \frac{3}{2}s} \\ &\quad - 2\pi \lim_{s \rightarrow 2\pi - 0} \frac{-4 \sin s + 4 \sin 4s}{8 \sin \frac{3}{2}s} + 2\pi \lim_{s \rightarrow \frac{4}{3}\pi + 0} \frac{-4 \sin s + 4 \sin 4s}{8 \sin \frac{3}{2}s} \\ &= -2\pi \lim_{s \rightarrow \frac{2}{3}\pi - 0} \frac{-4 \cos s + 16 \cos 4s}{12 \cos \frac{3}{2}s} + 2\pi \lim_{s \rightarrow +0} \frac{-4 \cos s + 16 \cos 4s}{12 \cos \frac{3}{2}s} \\ &\quad + 2\pi \lim_{s \rightarrow \frac{4}{3}\pi - 0} \frac{-4 \cos s + 16 \cos 4s}{12 \cos \frac{3}{2}s} - 2\pi \lim_{s \rightarrow \frac{2}{3}\pi + 0} \frac{-4 \cos s + 16 \cos 4s}{12 \cos \frac{3}{2}s} \\ &\quad - 2\pi \lim_{s \rightarrow 2\pi - 0} \frac{-4 \cos s + 16 \cos 4s}{12 \cos \frac{3}{2}s} + 2\pi \lim_{s \rightarrow \frac{4}{3}\pi + 0} \frac{-4 \cos s + 16 \cos 4s}{12 \cos \frac{3}{2}s} \\ &= -2\pi \cdot \frac{1}{2} + 2\pi \cdot 1 + 2\pi \left(-\frac{1}{2}\right) - 2\pi \cdot \frac{1}{2} - 2\pi(-1) + 2\pi \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる. □

定義 2.5 原点を中心とする半径 a の定円に, 半径 b の円 C が内接しながら滑ることなく回転するとき, 円 C 上の定点がえがく曲線をハイポサイクロイドといい, パラメータ表示は次で与えられる.

$$(x, z) = \left((a - b) \cos s + b \cos \frac{a - b}{b}s, (a - b) \sin s - b \sin \frac{a - b}{b}s \right).$$

とくに $a = 4b$ のときアステロイドという. n を 3 以上の自然数として $a = nb$ のとき, ハイポサイクロイドは等円方程式の解を特異点にもつ.



最後にハイポサイクロイドを回転して得られる曲面の全曲率について考える. 簡単のため

$$(a, b) = (3, 1), (4, 1)$$

のときを計算する.

例 2.9 R は回転軸と交わらないように十分大きくとる. xz 平面上のハイポサイクロイド

$$\gamma(s) = (f(s), g(s)) = (R + 2 \cos s + \cos 2s, 2 \sin s - \sin 2s) \quad (0 \leq s \leq 2\pi)$$

に対し, $\dot{\gamma}(s) = (-2 \sin s - 2 \sin 2s, 2 \cos s - 2 \cos 2s)$. $\dot{\gamma}(s) = \mathbf{0}$ となるのは $s = 0, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi, 2\pi$ のときである. 开区間 $(0, \frac{2}{3}\pi)$, $(\frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi)$, $(\frac{4}{3}\pi, 2\pi)$ にそれぞれ対応する弧長 $u_i = u_i(s)$ により, この曲線の弧長パラメータ表示が

$$\gamma(u_i) = (f(u_i), g(u_i)) \quad (i = 1, 2, 3)$$

であるとする. この曲線を z 軸のまわりに 1 回転してできる曲面 S は

$$\mathbb{P}(u_i, v) = (f(u_i) \cos v, f(u_i) \sin v, g(u_i))$$

で与えられる.

$$\frac{du_i}{ds} = 2\sqrt{2(1 - \cos 3s)} = \begin{cases} 4 \sin \frac{3}{2}s & (i = 1, 3) \\ -4 \sin \frac{3}{2}s & (i = 2) \end{cases}$$

であるから, 定理 2.3 より S の全曲率は

$$\begin{aligned} \iint_S K dA &= -2\pi \lim_{s \rightarrow \frac{2}{3}\pi - 0} \frac{-2 \sin s - 2 \sin 2s}{4 \sin \frac{3}{2}s} + 2\pi \lim_{s \rightarrow +0} \frac{-2 \sin s - 2 \sin 2s}{4 \sin \frac{3}{2}s} \\ &\quad - 2\pi \lim_{s \rightarrow \frac{4}{3}\pi - 0} \frac{-2 \sin s - 2 \sin 2s}{-4 \sin \frac{3}{2}s} + 2\pi \lim_{s \rightarrow \frac{2}{3}\pi + 0} \frac{-2 \sin s - 2 \sin 2s}{-4 \sin \frac{3}{2}s} \\ &\quad - 2\pi \lim_{s \rightarrow 2\pi - 0} \frac{-2 \sin s - 2 \sin 2s}{4 \sin \frac{3}{2}s} + 2\pi \lim_{s \rightarrow \frac{4}{3}\pi + 0} \frac{-2 \sin s - 2 \sin 2s}{4 \sin \frac{3}{2}s} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -2\pi \lim_{s \rightarrow \frac{2}{3}\pi - 0} \frac{-2 \cos s - 4 \cos 2s}{6 \cos \frac{3}{2}s} + 2\pi \lim_{s \rightarrow +0} \frac{-2 \cos s - 4 \cos 2s}{6 \cos \frac{3}{2}s} \\
&\quad + 2\pi \lim_{s \rightarrow \frac{4}{3}\pi - 0} \frac{-2 \cos s - 4 \cos 2s}{6 \cos \frac{3}{2}s} - 2\pi \lim_{s \rightarrow \frac{2}{3}\pi + 0} \frac{-2 \cos s - 4 \cos 2s}{6 \cos \frac{3}{2}s} \\
&\quad - 2\pi \lim_{s \rightarrow 2\pi - 0} \frac{-2 \cos s - 4 \cos 2s}{6 \cos \frac{3}{2}s} + 2\pi \lim_{s \rightarrow \frac{4}{3}\pi + 0} \frac{-2 \cos s - 4 \cos 2s}{6 \cos \frac{3}{2}s} \\
&= -2\pi \cdot \frac{1}{2} + 2\pi \cdot 1 + 2\pi \left(-\frac{1}{2}\right) - 2\pi \cdot \frac{1}{2} - 2\pi(-1) + 2\pi \left(-\frac{1}{2}\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

となる.

□

例 2.10 R は回転軸と交わらないように十分大きくとる. xz 平面上のアステロイド

$$\gamma(s) = (f(s), g(s)) = (R + 3 \cos s + \cos 3s, 3 \sin s - \sin 3s) \quad (0 \leq s \leq 2\pi)$$

に対し, $\dot{\gamma}(s) = (-3 \sin s - 3 \sin 3s, 3 \cos s - 3 \cos 3s)$. $\dot{\gamma}(s) = \mathbf{0}$ となるのは $s = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi, 2\pi$ のときである. 開区間 $(0, \frac{\pi}{2})$, $(\frac{\pi}{2}, \pi)$, $(\pi, \frac{3}{2}\pi)$, $(\frac{3}{2}\pi, 2\pi)$ にそれぞれ対応する弧長 $u_i = u_i(s)$ により, この曲線の弧長パラメータ表示が

$$\gamma(u_i) = (f(u_i), g(u_i)) \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

であるとする. この曲線を z 軸のまわりに 1 回転してできる曲面 S は

$$\mathbb{P}(u_i, v) = (f(u_i) \cos v, f(u_i) \sin v, g(u_i))$$

で与えられる.

$$\frac{du_i}{ds} = 3\sqrt{2(1 - \cos 4s)} = \begin{cases} 6 \sin 2s & (i = 1, 3) \\ -6 \sin 2s & (i = 2, 4) \end{cases}$$

であるから, 定理 2.3 より S の全曲率は

$$\begin{aligned}
\iint_S K \, dA &= -2\pi \lim_{s \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0} \frac{-3 \sin s - 3 \sin 3s}{6 \sin 2s} + 2\pi \lim_{s \rightarrow +0} \frac{-3 \sin s - 3 \sin 3s}{6 \sin 2s} \\
&\quad - 2\pi \lim_{s \rightarrow \pi - 0} \frac{-3 \sin s - 3 \sin 3s}{-6 \sin 2s} + 2\pi \lim_{s \rightarrow \frac{\pi}{2} + 0} \frac{-3 \sin s - 3 \sin 3s}{-6 \sin 2s} \\
&\quad - 2\pi \lim_{s \rightarrow \frac{3}{2}\pi - 0} \frac{-3 \sin s - 3 \sin 3s}{6 \sin 2s} + 2\pi \lim_{s \rightarrow \pi + 0} \frac{-3 \sin s - 3 \sin 3s}{6 \sin 2s} \\
&\quad - 2\pi \lim_{s \rightarrow 2\pi - 0} \frac{-3 \sin s - 3 \sin 3s}{-6 \sin 2s} + 2\pi \lim_{s \rightarrow \frac{3}{2}\pi + 0} \frac{-3 \sin s - 3 \sin 3s}{-6 \sin 2s} \\
&= -2\pi \lim_{s \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0} \frac{-3 \cos s - 9 \cos 3s}{12 \cos 2s} + 2\pi \lim_{s \rightarrow +0} \frac{-3 \cos s - 9 \cos 3s}{12 \cos 2s} \\
&\quad + 2\pi \lim_{s \rightarrow \pi - 0} \frac{-3 \cos s - 9 \cos 3s}{12 \cos 2s} - 2\pi \lim_{s \rightarrow \frac{\pi}{2} + 0} \frac{-3 \cos s - 9 \cos 3s}{12 \cos 2s} \\
&\quad - 2\pi \lim_{s \rightarrow \frac{3}{2}\pi - 0} \frac{-3 \cos s - 9 \cos 3s}{12 \cos 2s} + 2\pi \lim_{s \rightarrow \pi + 0} \frac{-3 \cos s - 9 \cos 3s}{12 \cos 2s} \\
&\quad + 2\pi \lim_{s \rightarrow 2\pi - 0} \frac{-3 \cos s - 9 \cos 3s}{12 \cos 2s} - 2\pi \lim_{s \rightarrow \frac{3}{2}\pi + 0} \frac{-3 \cos s - 9 \cos 3s}{12 \cos 2s} \\
&= -2\pi \cdot 0 + 2\pi(-1) + 2\pi \cdot 1 - 2\pi \cdot 0 - 2\pi \cdot 0 + 2\pi \cdot 1 + 2\pi(-1) - 2\pi \cdot 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

となる.

□

2.3 更なる結果

トーラス型曲面を得てきたが、例 2.6 のカージオイドに見るように、全曲率が 0 とならないものの存在がわかった。そこから特異点を含む曲線から得られた回転面の全曲率は、平面曲線の特異点の位置が関係しているという考えに至った。そこで前節の曲線について、定義 2.1 の回転を施した曲線から回転面を構成したとき、全曲率に変化があるかどうか調べる。

例 2.11 xz 平面上の点 $((1 - \sin s) \cos s, (1 - \sin s) \sin s)$ を、原点を中心に θ 回転してうつる点は

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1 - \sin s) \cos s \\ (1 - \sin s) \sin s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 - \sin s) \cos(s + \theta) \\ (1 - \sin s) \sin(s + \theta) \end{pmatrix}$$

である。 xz 平面上の曲線 $\gamma(s)$ を

$$\gamma(s) = (f(s), g(s)) = (R + (1 - \sin s) \cos(s + \theta), (1 - \sin s) \sin(s + \theta)) \quad \left(-\frac{3}{2}\pi \leq s \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

と定める。ここで R は $\gamma(s)$ が回転軸と交わらないように十分大きくとる。 $\gamma(s)$ を s で微分すると

$$\dot{\gamma}(s) = (-\sin(s + \theta) - \cos(2s + \theta), \cos(s + \theta) - \sin(2s + \theta)).$$

$\dot{\gamma}(s) = \mathbf{0}$ となるのは $s = -\frac{3}{2}\pi, \frac{\pi}{2}$ のときである。开区間 $\left(-\frac{3}{2}\pi, s\right)$ に対応する弧長 $u = u(s)$ により、この曲線の弧長パラメータ表示が

$$\gamma(u) = (f(u), g(u))$$

であるとする。この曲線を z 軸のまわりに 1 回転してできる曲面 $T\left(\frac{1}{2}\right)$ は

$$\mathbb{P}(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u))$$

で与えられる。 $-\frac{3}{2}\pi \leq s \leq \frac{\pi}{2}$ のとき、 $0 \leq \frac{s}{2} + \frac{3}{4}\pi \leq \pi$ に注意すると

$$\begin{aligned} \frac{du}{ds} &= \sqrt{2 - 2 \sin s} = \sqrt{2 \left(\cos \frac{s}{2} - \sin \frac{s}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{2} \left| \cos \frac{s}{2} - \sin \frac{s}{2} \right| \\ &= 2 \left| \sin \left(\frac{s}{2} + \frac{3}{4}\pi\right) \right| = 2 \sin \left(\frac{s}{2} + \frac{3}{4}\pi\right) \end{aligned}$$

であるから、定理 2.2 より $T\left(\frac{1}{2}\right)$ の全曲率は

$$\begin{aligned} \iint_{T(\frac{1}{2})} K \, dA &= -2\pi \lim_{s \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \frac{-\sin(s + \theta) - \cos(2s + \theta)}{2 \sin \left(\frac{s}{2} + \frac{3}{4}\pi\right)} + 2\pi \lim_{s \rightarrow -\frac{3}{2}\pi+0} \frac{-\sin(s + \theta) - \cos(2s + \theta)}{2 \sin \left(\frac{s}{2} + \frac{3}{4}\pi\right)} \\ &= -2\pi \lim_{s \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \frac{-\cos(s + \theta) + 2 \sin(2s + \theta)}{\cos \left(\frac{s}{2} + \frac{3}{4}\pi\right)} + 2\pi \lim_{s \rightarrow -\frac{3}{2}\pi+0} \frac{-\cos(s + \theta) + 2 \sin(2s + \theta)}{\cos \left(\frac{s}{2} + \frac{3}{4}\pi\right)} \\ &= -2\pi \cdot \sin \theta + 2\pi(-\sin \theta) \\ &= -4\pi \sin \theta \end{aligned}$$

となる。 □

例 2.12 xz 平面上の点 $(2 \cos s - \cos 2s, 2 \sin s - \sin 2s)$ を、原点を中心に θ 回転してうつる点は

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \cos s - \cos 2s \\ 2 \sin s - \sin 2s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cos(s + \theta) - \cos(2s + \theta) \\ 2 \sin(s + \theta) - \sin(2s + \theta) \end{pmatrix}$$

である。 R は $\gamma(s)$ が回転軸と交わらないように十分大きくとる。 xz 平面上のカージオイド

$$\gamma(s) = (f(s), g(s)) = (R + 2 \cos(s + \theta) - \cos(2s + \theta), 2 \sin(s + \theta) - \sin(2s + \theta)) \quad (0 \leq s \leq 2\pi)$$

に対し,

$$\dot{\gamma}(s) = (-2 \sin(s + \theta) + 2 \sin(2s + \theta), 2 \cos(s + \theta) - 2 \cos(2s + \theta)).$$

$\dot{\gamma}(s) = \mathbf{0}$ となるのは $s = 0, 2\pi$ のときである。 开区間 $(0, s)$ に対応する弧長 $u = u(s)$ により, この曲線の弧長パラメータ表示が

$$\gamma(u) = (f(u), g(u))$$

であるとする。 この曲線を z 軸のまわりに 1 回転してできる曲面 S は

$$\mathbb{P}(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u))$$

で与えられる。 $0 \leq s \leq 2\pi$ のとき, $0 \leq \frac{s}{2} \leq \pi$ に注意すると

$$\frac{du}{ds} = 2\sqrt{2(1 - \cos s)} = 4 \sin \frac{s}{2}$$

であるから, 定理 2.2 より S の全曲率は

$$\begin{aligned} \iint_S K \, dA &= -2\pi \lim_{s \rightarrow 2\pi-0} \frac{-2 \sin(s + \theta) + 2 \sin(2s + \theta)}{4 \sin \frac{s}{2}} + 2\pi \lim_{s \rightarrow +0} \frac{-2 \sin(s + \theta) + 2 \sin(2s + \theta)}{4 \sin \frac{s}{2}} \\ &= -2\pi \lim_{s \rightarrow 2\pi-0} \frac{-2 \cos(s + \theta) + 4 \cos(2s + \theta)}{2 \cos \frac{s}{2}} + 2\pi \lim_{s \rightarrow +0} \frac{-2 \cos(s + \theta) + 4 \cos(2s + \theta)}{2 \cos \frac{s}{2}} \\ &= -2\pi(-\cos \theta) + 2\pi \cdot \cos \theta \\ &= 4\pi \cos \theta \end{aligned}$$

となる。 □

例 2.13 xz 平面上の点 $(3 \cos s - \cos 3s, 3 \sin s - \sin 3s)$ を, 原点を中心に θ 回転してうつる点は

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \cos s - \cos 3s \\ 3 \sin s - \sin 3s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cos(s + \theta) - \cos(3s + \theta) \\ 3 \sin(s + \theta) - \sin(3s + \theta) \end{pmatrix}$$

である。 R は $\gamma(s)$ が回転軸と交わらないように十分大きくとる。 xz 平面上のネフロイド

$$\gamma(s) = (f(s), g(s)) = (R + 3 \cos(s + \theta) - \cos(3s + \theta), 3 \sin(s + \theta) - \sin(3s + \theta)) \quad (0 \leq s \leq 2\pi)$$

に対し,

$$\dot{\gamma}(s) = (-3 \sin(s + \theta) + 3 \sin(3s + \theta), 3 \cos(s + \theta) - 3 \cos(3s + \theta)).$$

$\dot{\gamma}(s) = \mathbf{0}$ となるのは $s = 0, \pi, 2\pi$ のときである。 开区間 $(0, \pi), (\pi, 2\pi)$ にそれぞれ対応する弧長 $u_i = u_i(s)$ により, この曲線の弧長パラメータ表示が

$$\gamma(u_i) = (f(u_i), g(u_i))$$

であるとする。 この曲線を z 軸のまわりに 1 回転してできる曲面 S は

$$\mathbb{P}(u_i, v) = (f(u_i) \cos v, f(u_i) \sin v, g(u_i))$$

で与えられる。

$$\frac{du_i}{ds} = 3\sqrt{2(1 - \cos 2s)} = \begin{cases} 6 \sin s & (i = 1) \\ -6 \sin s & (i = 2) \end{cases}$$

であるから、定理 2.3 より S の全曲率は

$$\begin{aligned}
\iint_S K dA &= -2\pi \lim_{s \rightarrow \pi-0} \frac{-3 \sin(s+\theta) + 3 \sin(3s+\theta)}{6 \sin s} + 2\pi \lim_{s \rightarrow +0} \frac{-3 \sin(s+\theta) + 3 \sin(3s+\theta)}{6 \sin s} \\
&\quad - 2\pi \lim_{s \rightarrow 2\pi-0} \frac{-3 \sin(s+\theta) + 3 \sin(3s+\theta)}{-6 \sin s} + 2\pi \lim_{s \rightarrow \pi+0} \frac{-3 \sin(s+\theta) + 3 \sin(3s+\theta)}{-6 \sin s} \\
&= -2\pi \lim_{s \rightarrow \pi-0} \frac{-3 \cos(s+\theta) + 9 \cos(3s+\theta)}{6 \cos s} + 2\pi \lim_{s \rightarrow +0} \frac{-3 \cos(s+\theta) + 9 \cos(3s+\theta)}{6 \cos s} \\
&\quad + 2\pi \lim_{s \rightarrow 2\pi-0} \frac{-3 \cos(s+\theta) + 9 \cos(3s+\theta)}{6 \cos s} - 2\pi \lim_{s \rightarrow \pi+0} \frac{-3 \cos(s+\theta) + 9 \cos(3s+\theta)}{6 \cos s} \\
&= -2\pi \cdot \cos \theta + 2\pi \cdot \cos \theta + 2\pi \cdot \cos \theta - 2\pi \cdot \cos \theta \\
&= 0
\end{aligned}$$

となる. □

例 2.14 xz 平面上の点 $(4 \cos s - \cos 4s, 4 \sin s - \sin 4s)$ を、原点を中心に θ 回転してうつる点は

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \cos s - \cos 4s \\ 4 \sin s - \sin 4s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cos(s+\theta) - \cos(4s+\theta) \\ 4 \sin(s+\theta) - \sin(4s+\theta) \end{pmatrix}$$

である. R は $\gamma(s)$ が回転軸と交わらないように十分大きくとる. xz 平面上のエピサイクロイド

$$\gamma(s) = (f(s), g(s)) = (R + 4 \cos(s+\theta) - \cos(4s+\theta), 4 \sin(s+\theta) - \sin(4s+\theta)) \quad (0 \leq s \leq 2\pi)$$

に対し、

$$\dot{\gamma}(s) = (-4 \sin(s+\theta) + 4 \sin(4s+\theta), 4 \cos(s+\theta) - 4 \cos(4s+\theta)).$$

$\dot{\gamma}(s) = \mathbf{0}$ となるのは $s = 0, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi, 2\pi$ のときである. 開区間 $(0, \frac{2}{3}\pi), (\frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi), (\frac{4}{3}\pi, 2\pi)$ にそれぞれ対応する弧長 $u_i = u_i(s)$ により、この曲線の弧長パラメータ表示が

$$\gamma(u_i) = (f(u_i), g(u_i))$$

であるとする. この曲線を z 軸のまわりに 1 回転してできる曲面 S は

$$\mathbb{P}(u_i, v) = (f(u_i) \cos v, f(u_i) \sin v, g(u_i))$$

で与えられる.

$$\frac{du_i}{ds} = 4\sqrt{2(1 - \cos 3s)} = \begin{cases} 8 \sin \frac{3}{2}s & (i = 1, 3) \\ -8 \sin \frac{3}{2}s & (i = 2) \end{cases}$$

であるから、定理 2.3 より S の全曲率は

$$\begin{aligned}
\iint_S K dA &= -2\pi \lim_{s \rightarrow \frac{2}{3}\pi-0} \frac{-4 \sin(s+\theta) + 4 \sin(4s+\theta)}{8 \sin \frac{3}{2}s} + 2\pi \lim_{s \rightarrow +0} \frac{-4 \sin(s+\theta) + 4 \sin(4s+\theta)}{8 \sin \frac{3}{2}s} \\
&\quad - 2\pi \lim_{s \rightarrow \frac{4}{3}\pi-0} \frac{-4 \sin(s+\theta) + 4 \sin(4s+\theta)}{-8 \sin \frac{3}{2}s} + 2\pi \lim_{s \rightarrow \frac{2}{3}\pi+0} \frac{-4 \sin(s+\theta) + 4 \sin(4s+\theta)}{-8 \sin \frac{3}{2}s} \\
&\quad - 2\pi \lim_{s \rightarrow 2\pi-0} \frac{-4 \sin(s+\theta) + 4 \sin(4s+\theta)}{8 \sin \frac{3}{2}s} + 2\pi \lim_{s \rightarrow \frac{4}{3}\pi+0} \frac{-4 \sin(s+\theta) + 4 \sin(4s+\theta)}{8 \sin \frac{3}{2}s}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -2\pi \lim_{s \rightarrow \frac{2}{3}\pi - 0} \frac{-4 \cos(s + \theta) + 16 \cos(4s + \theta)}{12 \cos \frac{3}{2}s} + 2\pi \lim_{s \rightarrow +0} \frac{-4 \cos(s + \theta) + 16 \cos(4s + \theta)}{12 \cos \frac{3}{2}s} \\
&\quad + 2\pi \lim_{s \rightarrow \frac{4}{3}\pi - 0} \frac{-4 \cos(s + \theta) + 16 \cos(4s + \theta)}{12 \cos \frac{3}{2}s} - 2\pi \lim_{s \rightarrow \frac{2}{3}\pi + 0} \frac{-4 \cos(s + \theta) + 16 \cos(4s + \theta)}{12 \cos \frac{3}{2}s} \\
&\quad - 2\pi \lim_{s \rightarrow 2\pi - 0} \frac{-4 \cos(s + \theta) + 16 \cos(4s + \theta)}{12 \cos \frac{3}{2}s} + 2\pi \lim_{s \rightarrow \frac{4}{3}\pi + 0} \frac{-4 \cos(s + \theta) + 16 \cos(4s + \theta)}{12 \cos \frac{3}{2}s} \\
&= -2\pi(-\cos \theta) + 2\pi \cdot \cos\left(\frac{4}{3}\pi + \theta\right) + 2\pi \cdot \cos\left(\frac{4}{3}\pi + \theta\right) \\
&\quad - 2\pi \left\{ -\cos\left(\frac{2}{3}\pi + \theta\right) \right\} - 2\pi \left\{ -\cos\left(\frac{2}{3}\pi + \theta\right) \right\} + 2\pi \cdot \cos \theta \\
&= 0
\end{aligned}$$

となる。 □

例 2.15 xz 平面上の点 $(2 \cos s + \cos 2s, 2 \sin s - \sin 2s)$ を, 原点を中心に θ 回転してうつる点は

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \cos s + \cos 2s \\ 2 \sin s - \sin 2s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cos(s + \theta) + \cos(2s - \theta) \\ 2 \sin(s + \theta) - \sin(2s - \theta) \end{pmatrix}$$

である. R は $\gamma(s)$ が回転軸と交わらないように十分大きくとる. xz 平面上のハイポサイクロイド

$$\gamma(s) = (f(s), g(s)) = (R + 2 \cos(s + \theta) + \cos(2s - \theta), 2 \sin(s + \theta) - \sin(2s - \theta)) \quad (0 \leq s \leq 2\pi)$$

に対し,

$$\dot{\gamma}(s) = (-2 \sin(s + \theta) - 2 \sin(2s - \theta), 2 \cos(s + \theta) - 2 \cos(2s - \theta)).$$

$\dot{\gamma}(s) = \mathbf{0}$ となるのは $s = 0, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi, 2\pi$ のときである. 開区間 $\left(0, \frac{2}{3}\pi\right), \left(\frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi\right), \left(\frac{4}{3}\pi, 2\pi\right)$ にそれぞれ対応する弧長 $u_i = u_i(s)$ により, この曲線の弧長パラメータ表示が

$$\gamma(u_i) = (f(u_i), g(u_i))$$

であるとする. この曲線を z 軸のまわりに 1 回転してできる曲面 S は

$$\mathbb{P}(u_i, v) = (f(u_i) \cos v, f(u_i) \sin v, g(u_i))$$

で与えられる.

$$\frac{du_i}{ds} = 2\sqrt{2(1 - \cos 3s)} = \begin{cases} 4 \sin \frac{3}{2}s & (i = 1, 3) \\ -4 \sin \frac{3}{2}s & (i = 2) \end{cases}$$

であるから, 定理 2.3 より S の全曲率は

$$\begin{aligned}
\iint_S K \, dA &= -2\pi \lim_{s \rightarrow \frac{2}{3}\pi - 0} \frac{-2 \sin(s + \theta) - 2 \sin(2s - \theta)}{4 \sin \frac{3}{2}s} + 2\pi \lim_{s \rightarrow +0} \frac{-2 \sin(s + \theta) - 2 \sin(2s - \theta)}{4 \sin \frac{3}{2}s} \\
&\quad - 2\pi \lim_{s \rightarrow \frac{4}{3}\pi - 0} \frac{-2 \sin(s + \theta) - 2 \sin(2s - \theta)}{-4 \sin \frac{3}{2}s} + 2\pi \lim_{s \rightarrow \frac{2}{3}\pi + 0} \frac{-2 \sin(s + \theta) - 2 \sin(2s - \theta)}{-4 \sin \frac{3}{2}s} \\
&\quad - 2\pi \lim_{s \rightarrow 2\pi - 0} \frac{-2 \sin(s + \theta) - 2 \sin(2s - \theta)}{4 \sin \frac{3}{2}s} + 2\pi \lim_{s \rightarrow \frac{4}{3}\pi + 0} \frac{-2 \sin(s + \theta) - 2 \sin(2s - \theta)}{4 \sin \frac{3}{2}s}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -2\pi \lim_{s \rightarrow \frac{2}{3}\pi - 0} \frac{-2 \cos(s + \theta) - 4 \cos(2s - \theta)}{6 \cos \frac{3}{2}s} + 2\pi \lim_{s \rightarrow +0} \frac{-2 \cos(s + \theta) - 4 \cos(2s - \theta)}{6 \cos \frac{3}{2}s} \\
&+ 2\pi \lim_{s \rightarrow \frac{2}{3}\pi - 0} \frac{-2 \cos(s + \theta) - 4 \cos(2s - \theta)}{6 \cos \frac{3}{2}s} - 2\pi \lim_{s \rightarrow \frac{2}{3}\pi + 0} \frac{-2 \cos(s + \theta) - 4 \cos(2s - \theta)}{6 \cos \frac{3}{2}s} \\
&- 2\pi \lim_{s \rightarrow 2\pi - 0} \frac{-2 \cos(s + \theta) - 4 \cos(2s - \theta)}{6 \cos \frac{3}{2}s} + 2\pi \lim_{s \rightarrow \frac{4}{3}\pi + 0} \frac{-2 \cos(s + \theta) - 4 \cos(2s - \theta)}{6 \cos \frac{3}{2}s} \\
&= -2\pi \left(-\frac{1}{2} \cos \theta - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta \right) + 2\pi(-\cos \theta) + 2\pi \left(\frac{1}{2} \cos \theta - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta \right) \\
&\quad - 2\pi \left(-\frac{1}{2} \cos \theta - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta \right) - 2\pi \cdot \cos \theta + 2\pi \left(\frac{1}{2} \cos \theta - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

となる. □

例 2.16 xz 平面上の点 $(3 \cos s + \cos 3s, 3 \sin s - \sin 3s)$ を, 原点を中心に θ 回転してうつる点は

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \cos s + \cos 3s \\ 3 \sin s - \sin 3s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cos(s + \theta) + \cos(3s - \theta) \\ 3 \sin(s + \theta) - \sin(3s - \theta) \end{pmatrix}$$

である. R は $\gamma(s)$ が回転軸と交わらないように十分大きくとる. xz 平面上のアステロイド

$$\gamma(s) = (f(s), g(s)) = (R + 3 \cos(s + \theta) + \cos(3s - \theta), 3 \sin(s + \theta) - \sin(3s - \theta)) \quad (0 \leq s \leq 2\pi)$$

に対し,

$$\dot{\gamma}(s) = (-3 \sin(s + \theta) - 3 \sin(3s - \theta), 3 \cos(s + \theta) - 3 \cos(3s - \theta)).$$

$\dot{\gamma}(s) = \mathbf{0}$ となるのは $s = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi, 2\pi$ のときである. 开区間 $(0, \frac{\pi}{2}), (\frac{\pi}{2}, \pi), (\pi, \frac{3}{2}\pi), (\frac{3}{2}\pi, 2\pi)$ にそれぞれ対応する弧長 $u_i = u_i(s)$ により, この曲線の弧長パラメータ表示が

$$\gamma(u_i) = (f(u_i), g(u_i))$$

であるとする. この曲線を z 軸のまわりに 1 回転してできる曲面 S は

$$\mathbb{P}(u_i, v) = (f(u_i) \cos v, f(u_i) \sin v, g(u_i))$$

で与えられる.

$$\frac{du_i}{ds} = 3\sqrt{2(1 - \cos 4s)} = \begin{cases} 6 \sin 2s & (i = 1, 3) \\ -6 \sin 2s & (i = 2, 4) \end{cases}$$

であるから, 定理 2.3 より S の全曲率は

$$\begin{aligned}
\iint_S K dA &= -2\pi \lim_{s \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0} \frac{-3 \sin(s + \theta) - 3 \sin(3s - \theta)}{6 \sin 2s} + 2\pi \lim_{s \rightarrow +0} \frac{-3 \sin(s + \theta) - 3 \sin(3s - \theta)}{6 \sin 2s} \\
&- 2\pi \lim_{s \rightarrow \pi - 0} \frac{-3 \sin(s + \theta) - 3 \sin(3s - \theta)}{-6 \sin 2s} + 2\pi \lim_{s \rightarrow \frac{\pi}{2} + 0} \frac{-3 \sin(s + \theta) - 3 \sin(3s - \theta)}{-6 \sin 2s} \\
&- 2\pi \lim_{s \rightarrow \frac{3}{2}\pi - 0} \frac{-3 \sin(s + \theta) - 3 \sin(3s - \theta)}{6 \sin 2s} + 2\pi \lim_{s \rightarrow \pi + 0} \frac{-3 \sin(s + \theta) - 3 \sin(3s - \theta)}{6 \sin 2s} \\
&- 2\pi \lim_{s \rightarrow 2\pi - 0} \frac{-3 \sin(s + \theta) - 3 \sin(3s - \theta)}{-6 \sin 2s} + 2\pi \lim_{s \rightarrow \frac{3}{2}\pi + 0} \frac{-3 \sin(s + \theta) - 3 \sin(3s - \theta)}{-6 \sin 2s}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -2\pi \lim_{s \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \frac{-3 \cos(s+\theta) - 9 \cos(3s-\theta)}{12 \cos 2s} + 2\pi \lim_{s \rightarrow +0} \frac{-3 \cos(s+\theta) - 9 \cos(3s-\theta)}{12 \cos 2s} \\
&+ 2\pi \lim_{s \rightarrow \pi-0} \frac{-3 \cos(s+\theta) - 9 \cos(3s-\theta)}{12 \cos 2s} - 2\pi \lim_{s \rightarrow \frac{\pi}{2}+0} \frac{-3 \cos(s+\theta) - 9 \cos(3s-\theta)}{12 \cos 2s} \\
&- 2\pi \lim_{s \rightarrow \frac{3}{2}\pi-0} \frac{-3 \cos(s+\theta) - 9 \cos(3s-\theta)}{12 \cos 2s} + 2\pi \lim_{s \rightarrow \pi+0} \frac{-3 \cos(s+\theta) - 9 \cos(3s-\theta)}{12 \cos 2s} \\
&+ 2\pi \lim_{s \rightarrow 2\pi-0} \frac{-3 \cos(s+\theta) - 9 \cos(3s-\theta)}{12 \cos 2s} - 2\pi \lim_{s \rightarrow \frac{3}{2}\pi+0} \frac{-3 \cos(s+\theta) - 9 \cos(3s-\theta)}{12 \cos 2s} \\
&= -2\pi(-\sin \theta) - 2\pi \cdot \cos \theta + 2\pi \cdot \cos \theta - 2\pi(-\sin \theta) \\
&\quad - 2\pi \cdot \sin \theta + 2\pi \cdot \cos \theta + 2\pi(-\cos \theta) - 2\pi \cdot \sin \theta \\
&= 0
\end{aligned}$$

となる. □

次に, 以上の6つの閉曲線を θ 回転させたうえで回転軸に関して対称移動する. そして回転面を構成したときの全曲率を計算する. xz 平面上の点 (x, z) は z 軸に関して対称な点は $(-x, z)$ である.

例 2.17 xz 平面上の曲線 $\gamma(s)$ を

$$\gamma(s) = (-R - (1 - \sin s) \cos(s + \theta), (1 - \sin s) \sin(s + \theta)) \quad \left(-\frac{3}{2}\pi \leq s \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

と定める. ここで R は例 2.11 と同じ値とする. $\gamma(s)$ を s で微分すると

$$\dot{\gamma}(s) = (\sin(s + \theta) \cos(2s + \theta), \cos(s + \theta) - \sin(2s + \theta)).$$

$\dot{\gamma}(s) = \mathbf{0}$ となるのは $s = -\frac{3}{2}\pi, \frac{\pi}{2}$ のときである. 開区間 $\left(-\frac{3}{2}\pi, s\right)$ に対応する弧長 $u = u(s)$ により, この曲線の弧長パラメータ表示が

$$\gamma(u) = (f(u), g(u))$$

であるとする. この曲線を z 軸のまわりに1回転してできる曲面 $T\left(\frac{1}{2}\right)$ は

$$\mathbb{P}(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u))$$

で与えられる. 例 2.11 と同様に

$$\frac{du}{ds} = \sqrt{2(1 - \sin s)} = 2 \sin\left(\frac{s}{2} + \frac{3}{4}\pi\right)$$

であるから, 定理 2.2 より $T\left(\frac{1}{2}\right)$ の全曲率は

$$\begin{aligned}
\iint_{T(\frac{1}{2})} K dA &= -2\pi \lim_{s \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \frac{\sin(s+\theta) + \cos(2s+\theta)}{2 \sin\left(\frac{s}{2} + \frac{3}{4}\pi\right)} + 2\pi \lim_{s \rightarrow -\frac{3}{2}\pi+0} \frac{\sin(s+\theta) + \cos(2s+\theta)}{2 \sin\left(\frac{s}{2} + \frac{3}{4}\pi\right)} \\
&= -2\pi \lim_{s \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \frac{\cos(s+\theta) - 2 \sin(2s+\theta)}{\cos\left(\frac{s}{2} + \frac{3}{4}\pi\right)} + 2\pi \lim_{s \rightarrow -\frac{3}{2}\pi+0} \frac{\cos(s+\theta) - 2 \sin(2s+\theta)}{\cos\left(\frac{s}{2} + \frac{3}{4}\pi\right)} \\
&= -2\pi(-\sin \theta) + 2\pi \cdot \sin \theta \\
&= 4\pi \sin \theta
\end{aligned}$$

となる. □

例 2.18 R は例 2.12 と同じ値とする. xz 平面上のカージオイド

$$\gamma(s) = (-R - 2 \cos(s + \theta) + \cos(2s + \theta), 2 \sin(s + \theta) - \sin(2s + \theta)) \quad (0 \leq s \leq 2\pi)$$

に対し,

$$\dot{\gamma}(s) = (2 \sin(s + \theta) - 2 \sin(2s + \theta), 2 \cos(s + \theta) - 2 \cos(2s + \theta)).$$

$\dot{\gamma}(s) = \mathbf{0}$ となるのは $s = 0, 2\pi$ のときである. 開区間 $(0, s)$ に対応する弧長 $u = u(s)$ により, この曲線の弧長パラメータ表示が

$$\gamma(u) = (f(u), g(u))$$

であるとする. この曲線を z 軸のまわりに 1 回転してできる曲面 S は

$$\mathbb{P}(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u))$$

で与えられる. 例 2.12 と同様に

$$\frac{du}{ds} = 2\sqrt{2(1 - \cos s)} = 4 \sin \frac{s}{2}$$

であるから, 定理 2.2 より S の全曲率は

$$\begin{aligned} \iint_S K dA &= -2\pi \lim_{s \rightarrow 2\pi-0} \frac{2 \sin(s + \theta) - 2 \sin(2s + \theta)}{4 \sin \frac{s}{2}} + 2\pi \lim_{s \rightarrow +0} \frac{2 \sin(s + \theta) - 2 \sin(2s + \theta)}{4 \sin \frac{s}{2}} \\ &= -2\pi \lim_{s \rightarrow 2\pi-0} \frac{2 \cos(s + \theta) - 4 \cos(2s + \theta)}{2 \cos \frac{s}{2}} + 2\pi \lim_{s \rightarrow +0} \frac{2 \cos(s + \theta) - 4 \cos(2s + \theta)}{2 \cos \frac{s}{2}} \\ &= -2\pi \cdot \cos \theta + 2\pi(-\cos \theta) \\ &= -4\pi \cos \theta \end{aligned}$$

となる. □

例 2.19 R は例 2.13 と同じ値とする. xz 平面上のネフロイド

$$\gamma(s) = (-R - 3 \cos(s + \theta) + \cos(3s + \theta), 3 \sin(s + \theta) - \sin(3s + \theta)) \quad (0 \leq s \leq 2\pi)$$

に対し,

$$\dot{\gamma}(s) = (3 \sin(s + \theta) - 3 \sin(3s + \theta), 3 \cos(s + \theta) - 3 \cos(3s + \theta)).$$

$\dot{\gamma}(s) = \mathbf{0}$ となるのは $s = 0, \pi, 2\pi$ のときである. 開区間 $(0, \pi), (\pi, 2\pi)$ にそれぞれ対応する弧長 $u_i = u_i(s)$ により, この曲線の弧長パラメータ表示が

$$\gamma(u_i) = (f(u_i), g(u_i))$$

であるとする. この曲線を z 軸のまわりに 1 回転してできる曲面 S は

$$\mathbb{P}(u_i, v) = (f(u_i) \cos v, f(u_i) \sin v, g(u_i))$$

で与えられる.

$$\frac{du_i}{ds} = 3\sqrt{2(1 - \cos 2s)} = \begin{cases} 6 \sin s & (i = 1) \\ -6 \sin s & (i = 2) \end{cases}$$

であるから, 定理 2.3 より S の全曲率は

$$\begin{aligned} \iint_S K dA &= -2\pi \lim_{s \rightarrow \pi-0} \frac{3 \sin(s + \theta) - 3 \sin(3s + \theta)}{6 \sin s} + 2\pi \lim_{s \rightarrow +0} \frac{3 \sin(s + \theta) - 3 \sin(3s + \theta)}{6 \sin s} \\ &\quad - 2\pi \lim_{s \rightarrow 2\pi-0} \frac{3 \sin(s + \theta) - 3 \sin(3s + \theta)}{-6 \sin s} + 2\pi \lim_{s \rightarrow \pi+0} \frac{3 \sin(s + \theta) - 3 \sin(3s + \theta)}{-6 \sin s} \\ &= -2\pi \lim_{s \rightarrow \pi-0} \frac{3 \cos(s + \theta) - 9 \cos(3s + \theta)}{6 \cos s} + 2\pi \lim_{s \rightarrow +0} \frac{3 \cos(s + \theta) - 9 \cos(3s + \theta)}{6 \cos s} \\ &\quad + 2\pi \lim_{s \rightarrow 2\pi-0} \frac{3 \cos(s + \theta) - 9 \cos(3s + \theta)}{6 \cos s} - 2\pi \lim_{s \rightarrow \pi+0} \frac{3 \cos(s + \theta) - 9 \cos(3s + \theta)}{6 \cos s} \\ &= -2\pi(-\cos \theta) + 2\pi(-\cos \theta) + 2\pi(-\cos \theta) - 2\pi(-\cos \theta) \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる.

□

例 2.20 R は例 2.14 と同じ値とする. xz 平面上のエピサイクロイド

$$\gamma(s) = (-R - 4 \cos(s + \theta) + \cos(4s + \theta), 4 \sin(s + \theta) - \sin(4s + \theta)) \quad (0 \leq s \leq 2\pi)$$

に対し,

$$\dot{\gamma}(s) = (4 \sin(s + \theta) - 4 \sin(4s + \theta), 4 \cos(s + \theta) - 4 \cos(4s + \theta)).$$

$\dot{\gamma}(s) = \mathbf{0}$ となるのは $s = 0, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi, 2\pi$ のときである. 開区間 $\left(0, \frac{2}{3}\pi\right), \left(\frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi\right), \left(\frac{4}{3}\pi, 2\pi\right)$ にそれぞれ対応する弧長 $u_i = u_i(s)$ により, この曲線の弧長パラメータ表示が

$$\gamma(u_i) = (f(u_i), g(u_i))$$

であるとする. この曲線を z 軸のまわりに 1 回転してできる曲面 S は

$$\mathbb{P}(u_i, v) = (f(u_i) \cos v, f(u_i) \sin v, g(u_i))$$

で与えられる.

$$\frac{du_i}{ds} = 4\sqrt{2(1 - \cos 3s)} = \begin{cases} 8 \sin \frac{3}{2}s & (i = 1, 3) \\ -8 \sin \frac{3}{2}s & (i = 2) \end{cases}$$

であるから, 定理 2.3 より S の全曲率は

$$\begin{aligned} \iint_S K dA &= -2\pi \lim_{s \rightarrow \frac{2}{3}\pi - 0} \frac{4 \sin(s + \theta) - 4 \sin(4s + \theta)}{8 \sin \frac{3}{2}s} + 2\pi \lim_{s \rightarrow +0} \frac{4 \sin(s + \theta) - 4 \sin(4s + \theta)}{8 \sin \frac{3}{2}s} \\ &\quad - 2\pi \lim_{s \rightarrow \frac{4}{3}\pi - 0} \frac{4 \sin(s + \theta) - 4 \sin(4s + \theta)}{-8 \sin \frac{3}{2}s} + 2\pi \lim_{s \rightarrow \frac{2}{3}\pi + 0} \frac{4 \sin(s + \theta) - 4 \sin(4s + \theta)}{-8 \sin \frac{3}{2}s} \\ &\quad - 2\pi \lim_{s \rightarrow 2\pi - 0} \frac{4 \sin(s + \theta) - 4 \sin(4s + \theta)}{8 \sin \frac{3}{2}s} + 2\pi \lim_{s \rightarrow \frac{4}{3}\pi + 0} \frac{4 \sin(s + \theta) - 4 \sin(4s + \theta)}{8 \sin \frac{3}{2}s} \\ &= -2\pi \lim_{s \rightarrow \frac{2}{3}\pi - 0} \frac{4 \cos(s + \theta) - 16 \cos(4s + \theta)}{12 \cos \frac{3}{2}s} + 2\pi \lim_{s \rightarrow +0} \frac{4 \cos(s + \theta) - 16 \cos(4s + \theta)}{12 \cos \frac{3}{2}s} \\ &\quad + 2\pi \lim_{s \rightarrow \frac{4}{3}\pi - 0} \frac{4 \cos(s + \theta) - 16 \cos(4s + \theta)}{12 \cos \frac{3}{2}s} - 2\pi \lim_{s \rightarrow \frac{2}{3}\pi + 0} \frac{4 \cos(s + \theta) - 16 \cos(4s + \theta)}{12 \cos \frac{3}{2}s} \\ &\quad - 2\pi \lim_{s \rightarrow 2\pi - 0} \frac{4 \cos(s + \theta) - 16 \cos(4s + \theta)}{12 \cos \frac{3}{2}s} + 2\pi \lim_{s \rightarrow \frac{4}{3}\pi + 0} \frac{4 \cos(s + \theta) - 16 \cos(4s + \theta)}{12 \cos \frac{3}{2}s} \\ &= -2\pi \cdot \cos \theta + 2\pi \left\{ -\cos \left(\frac{4}{3}\pi + \theta \right) \right\} + 2\pi \left\{ -\cos \left(\frac{4}{3}\pi + \theta \right) \right\} \\ &\quad - 2\pi \cdot \cos \left(\frac{2}{3}\pi + \theta \right) - 2\pi \cdot \cos \left(\frac{2}{3}\pi + \theta \right) + 2\pi(-\cos \theta) \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる.

□

例 2.21 R は例 2.15 と同じ値とする. xz 平面上のハイポサイクロイド

$$\gamma(s) = (-R - 2 \cos(s + \theta) - \cos(2s - \theta), 2 \sin(s + \theta) - \sin(2s - \theta)) \quad (0 \leq s \leq 2\pi)$$

に対し,

$$\dot{\gamma}(s) = (2 \sin(s + \theta) + 2 \sin(2s - \theta), 2 \cos(s + \theta) - 2 \cos(2s - \theta)).$$

$\dot{\gamma}(s) = \mathbf{0}$ となるのは $s = 0, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi, 2\pi$ のときである. 開区間 $\left(0, \frac{2}{3}\pi\right), \left(\frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi\right), \left(\frac{4}{3}\pi, 2\pi\right)$ にそれぞれ対応する弧長 $u_i = u_i(s)$ により, この曲線の弧長パラメータ表示が

$$\gamma(u_i) = (f(u_i), g(u_i))$$

であるとする. この曲線を z 軸のまわりに 1 回転してできる曲面 S は

$$\mathbb{P}(u_i, v) = (f(u_i) \cos v, f(u_i) \sin v, g(u_i))$$

で与えられる.

$$\frac{du_i}{ds} = 2\sqrt{2(1 - \cos 3s)} = \begin{cases} 4 \sin \frac{3}{2}s & (i = 1, 3) \\ -4 \sin \frac{3}{2}s & (i = 2) \end{cases}$$

であるから, 定理 2.3 より S の全曲率は

$$\begin{aligned} \iint_S K dA &= -2\pi \lim_{s \rightarrow \frac{2}{3}\pi - 0} \frac{2 \sin(s + \theta) + 2 \sin(2s - \theta)}{4 \sin \frac{3}{2}s} + 2\pi \lim_{s \rightarrow +0} \frac{2 \sin(s + \theta) + 2 \sin(2s - \theta)}{4 \sin \frac{3}{2}s} \\ &\quad - 2\pi \lim_{s \rightarrow \frac{4}{3}\pi - 0} \frac{2 \sin(s + \theta) + 2 \sin(2s - \theta)}{-4 \sin \frac{3}{2}s} + 2\pi \lim_{s \rightarrow \frac{2}{3}\pi + 0} \frac{2 \sin(s + \theta) + 2 \sin(2s - \theta)}{-4 \sin \frac{3}{2}s} \\ &\quad - 2\pi \lim_{s \rightarrow 2\pi - 0} \frac{2 \sin(s + \theta) + 2 \sin(2s - \theta)}{4 \sin \frac{3}{2}s} + 2\pi \lim_{s \rightarrow \frac{4}{3}\pi + 0} \frac{2 \sin(s + \theta) + 2 \sin(2s - \theta)}{4 \sin \frac{3}{2}s} \\ &= -2\pi \lim_{s \rightarrow \frac{2}{3}\pi - 0} \frac{2 \cos(s + \theta) + 4 \cos(2s - \theta)}{6 \cos \frac{3}{2}s} + 2\pi \lim_{s \rightarrow +0} \frac{2 \cos(s + \theta) + 4 \cos(2s - \theta)}{6 \cos \frac{3}{2}s} \\ &\quad + 2\pi \lim_{s \rightarrow \frac{4}{3}\pi - 0} \frac{2 \cos(s + \theta) + 4 \cos(2s - \theta)}{6 \cos \frac{3}{2}s} - 2\pi \lim_{s \rightarrow \frac{2}{3}\pi + 0} \frac{2 \cos(s + \theta) + 4 \cos(2s - \theta)}{6 \cos \frac{3}{2}s} \\ &\quad - 2\pi \lim_{s \rightarrow 2\pi - 0} \frac{2 \cos(s + \theta) + 4 \cos(2s - \theta)}{6 \cos \frac{3}{2}s} + 2\pi \lim_{s \rightarrow \frac{4}{3}\pi + 0} \frac{2 \cos(s + \theta) + 4 \cos(2s - \theta)}{6 \cos \frac{3}{2}s} \\ &= -2\pi \left(\frac{1}{2} \cos \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta \right) + 2\pi \cdot \cos \theta + 2\pi \left(-\frac{1}{2} \cos \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta \right) \\ &\quad - 2\pi \left(\frac{1}{2} \cos \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta \right) - 2\pi(-\cos \theta) + 2\pi \left(-\frac{1}{2} \cos \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる. □

例 2.22 R は例 2.16 と同じ値とする. xz 平面上のアステロイド

$$\gamma(s) = (-R - 3 \cos(s + \theta) - \cos(3s - \theta), 3 \sin(s + \theta) - \sin(3s - \theta)) \quad (0 \leq s \leq 2\pi)$$

に対し,

$$\dot{\gamma}(s) = (3 \sin(s + \theta) + 3 \sin(3s - \theta), 3 \cos(s + \theta) - 3 \cos(3s - \theta)).$$

$\dot{\gamma}(s) = \mathbf{0}$ となるのは $s = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi, 2\pi$ のときである. 開区間 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), \left(\pi, \frac{3}{2}\pi\right), \left(\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right)$ にそれぞれ対応する弧長 $u_i = u_i(s)$ により, この曲線の弧長パラメータ表示が

$$\gamma(u_i) = (f(u_i), g(u_i))$$

であるとする. この曲線を z 軸のまわりに 1 回転してできる曲面 S は

$$\mathbb{P}(u_i, v) = (f(u_i) \cos v, f(u_i) \sin v, g(u_i))$$

で与えられる.

$$\frac{du_i}{ds} = 3\sqrt{2(1 - \cos 4s)} = \begin{cases} 6 \sin 2s & (i = 1, 3) \\ -6 \sin 2s & (i = 2, 4) \end{cases}$$

であるから, 定理 2.3 より S の全曲率は

$$\begin{aligned} \iint_S K dA &= -2\pi \lim_{s \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \frac{3 \sin(s + \theta) + 3 \sin(3s - \theta)}{6 \sin 2s} + 2\pi \lim_{s \rightarrow +0} \frac{3 \sin(s + \theta) + 3 \sin(3s - \theta)}{6 \sin 2s} \\ &\quad - 2\pi \lim_{s \rightarrow \pi-0} \frac{3 \sin(s + \theta) + 3 \sin(3s - \theta)}{-6 \sin 2s} + 2\pi \lim_{s \rightarrow \frac{\pi}{2}+0} \frac{3 \sin(s + \theta) + 3 \sin(3s - \theta)}{-6 \sin 2s} \\ &\quad - 2\pi \lim_{s \rightarrow \frac{3}{2}\pi-0} \frac{3 \sin(s + \theta) + 3 \sin(3s - \theta)}{6 \sin 2s} + 2\pi \lim_{s \rightarrow \pi+0} \frac{3 \sin(s + \theta) + 3 \sin(3s - \theta)}{6 \sin 2s} \\ &\quad - 2\pi \lim_{s \rightarrow 2\pi-0} \frac{3 \sin(s + \theta) + 3 \sin(3s - \theta)}{-6 \sin 2s} + 2\pi \lim_{s \rightarrow \frac{3}{2}\pi+0} \frac{3 \sin(s + \theta) + 3 \sin(3s - \theta)}{-6 \sin 2s} \\ &= -2\pi \lim_{s \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \frac{3 \cos(s + \theta) + 9 \cos(3s - \theta)}{12 \cos 2s} + 2\pi \lim_{s \rightarrow +0} \frac{3 \cos(s + \theta) + 9 \cos(3s - \theta)}{12 \cos 2s} \\ &\quad + 2\pi \lim_{s \rightarrow \pi-0} \frac{3 \cos(s + \theta) + 9 \cos(3s - \theta)}{12 \cos 2s} - 2\pi \lim_{s \rightarrow \frac{\pi}{2}+0} \frac{3 \cos(s + \theta) + 9 \cos(3s - \theta)}{12 \cos 2s} \\ &\quad - 2\pi \lim_{s \rightarrow \frac{3}{2}\pi-0} \frac{3 \cos(s + \theta) + 9 \cos(3s - \theta)}{12 \cos 2s} + 2\pi \lim_{s \rightarrow \pi+0} \frac{3 \cos(s + \theta) + 9 \cos(3s - \theta)}{12 \cos 2s} \\ &\quad + 2\pi \lim_{s \rightarrow 2\pi-0} \frac{3 \cos(s + \theta) + 9 \cos(3s - \theta)}{12 \cos 2s} - 2\pi \lim_{s \rightarrow \frac{3}{2}\pi+0} \frac{3 \cos(s + \theta) + 9 \cos(3s - \theta)}{12 \cos 2s} \\ &= -2\pi \cdot \sin \theta + 2\pi \cdot \cos \theta + 2\pi(-\cos \theta) - 2\pi \cdot \sin \theta \\ &\quad - 2\pi(-\sin \theta) + 2\pi(-\cos \theta) + 2\pi \cdot \cos \theta - 2\pi(-\sin \theta) \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる. □

2.4 リンゴ型曲面の全曲率

これまでに見た曲面は, 回転軸と交わらないように構成したため, トーラス型曲面となった. さらに特異点を含む平面曲線の場合は回転によって, 特異点集合が曲面上に筋となって現れてきた.

次に回転面上に特異点が点として存在しているような曲面 (リンゴ型曲面) を考えたい. それには端点のみが z 軸と接するような xz 平面上の曲線を考え, それを回転して得ればよい. このようにして得られる曲面の全曲率を計算する.

平面曲線が特異点をもたないときは, 次の定理が成り立つ.

定理 2.4 xz 平面上の曲線

$$\gamma(s) = (f(s), g(s)) \quad (s_1 \leq s \leq s_2)$$

に対し, $f(s_1) = f(s_2) = 0$, 他の s では $f(s) > 0$ とする. 閉区間 $[s_1, s_2]$ に対応する弧長 $u = u(s)$ により, この曲線の弧長パラメータ表示が

$$\gamma(u) = (f(u), g(u))$$

であるとする. この曲線を z 軸の周りに 1 回転してできる曲面は

$$\mathbb{P}(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u))$$

で与えられる. この回転面を S とすると, S の全曲率は

$$\iint_S K dA = -2\pi \dot{f}(s_2) \frac{1}{\left. \frac{du}{ds} \right|_{s=s_2}} + 2\pi \dot{f}(s_1) \frac{1}{\left. \frac{du}{ds} \right|_{s=s_1}}$$

となる.

平面曲線が特異点をもつときは、次の定理が成り立つ。

定理 2.5 xz 平面上の曲線

$$\gamma(s) = (f(s), g(s)) \quad (s_1 \leq s \leq s_2)$$

に対し、 $f(s_1) = f(s_2) = 0$ 、他の s では $f(s) > 0$ とし、 $\dot{\gamma}(s_2) = \mathbf{0}$ とする。区間 $[s_1, s_2]$ に対応する弧長 $u = u(s)$ により、この曲線の弧長パラメータ表示が

$$\gamma(u) = (f(u), g(u))$$

であるとする。この曲線を z 軸の周りに 1 回転してできる曲面は

$$\mathbb{P}(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u))$$

で与えられる。この回転面を S とすると、 S の全曲率は

$$\iint_S K dA = -2\pi \lim_{s \rightarrow s_2-0} \dot{f}(s) \frac{1}{\frac{du}{ds}} + 2\pi \dot{f}(s_1) \frac{1}{\frac{du}{ds} \Big|_{s=s_1}}$$

となる。また上の条件において、曲線 $\gamma(s)$ が $\dot{\gamma}(s_1) = \mathbf{0}$ も満たしているならば、开区間 (s_1, s_2) に対応する弧長 $u = u(s)$ により、全曲率は

$$\iint_S K dA = -2\pi \lim_{s \rightarrow s_2-0} \dot{f}(s) \frac{1}{\frac{du}{ds}} + 2\pi \lim_{s \rightarrow s_1+0} \dot{f}(s) \frac{1}{\frac{du}{ds}}$$

となる。

例 2.23 例 2.2 のレムニスケートを直線 $z = x$ に関して対称移動し、制限した xz 平面上の曲線

$$\gamma(s) = (f(s), g(s)) = \left(\frac{\sin s \cos s}{1 + \sin^2 s}, \frac{\cos s}{1 + \sin^2 s} \right) \quad \left(\pi \leq s \leq \frac{3}{2}\pi \right)$$

に対し、

$$\dot{\gamma}(s) = \left(\frac{1 - 3\sin^2 s}{(1 + \sin^2 s)^2}, -\frac{\sin s(3 - \sin^2 s)}{(1 + \sin^2 s)^2} \right).$$

閉区間 $[\pi, \frac{3}{2}\pi]$ に対応する弧長 $u = u(s)$ により、この円の弧長パラメータ表示が

$$\gamma(u) = (f(u), g(u))$$

であるとする。この曲線を z 軸の周りに 1 回転してできる曲面 S は

$$\mathbb{P}(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u))$$

で与えられる。

$$\frac{du}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sin^2 s}}$$

と定理 2.4 より S の全曲率は

$$\begin{aligned} \iint_S K dA &= -2\pi \dot{f} \left(\frac{3}{2}\pi \right) \frac{1}{\frac{du}{ds} \Big|_{s=\frac{3}{2}\pi}} + 2\pi \dot{f}(\pi) \frac{1}{\frac{du}{ds} \Big|_{s=\pi}} \\ &= -2\pi \left(-\frac{1}{2} \right) \cdot \sqrt{2} + 2\pi \cdot 1 \cdot 1 = (2 + \sqrt{2})\pi \end{aligned}$$

となる。 □

例 2.24 xz 平面上の曲線

$$\gamma(s) = (f(s), g(s)) = ((1 - \sin s) \cos s, (1 - \sin s) \sin s) \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq s \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

に対し,

$$\dot{\gamma}(s) = (-\sin s - \cos 2s, \cos s - \sin 2s), \quad \dot{\gamma}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \mathbf{0}.$$

区間 $\left[-\frac{\pi}{2}, s\right)$ に対応する弧長 $u = u(s)$ により, この曲線の弧長パラメータ表示が

$$\gamma(u) = (f(u), g(u))$$

であるとする. この曲線を z 軸のまわりに 1 回転してできる曲面 $T\left(\frac{1}{2}\right)$ は

$$\mathbb{P}(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u))$$

で与えられる.

$$\frac{du}{ds} = 2 \sin\left(\frac{s}{2} + \frac{3}{4}\pi\right)$$

であるから, 定理 2.5 より $T\left(\frac{1}{2}\right)$ の全曲率は

$$\begin{aligned} \iint_{T(\frac{1}{2})} K dA &= -2\pi \lim_{s \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \dot{f}(s) \frac{1}{\frac{du}{ds}} + 2\pi \dot{f}\left(-\frac{\pi}{2}\right) \frac{1}{\frac{du}{ds}\Big|_{s=-\frac{\pi}{2}}} \\ &= -2\pi \lim_{s \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \frac{-\cos s + 2 \sin 2s}{\cos\left(\frac{s}{2} + \frac{3}{4}\pi\right)} + 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \\ &= 2\pi \end{aligned}$$

となる. □

例 2.25 xz 平面上の曲線

$$\gamma(s) = (f(s), g(s)) = (16 \sin^3 s, 13 \cos s - 5 \cos 2s - 2 \cos 3s - \cos 4s) \quad (0 \leq s \leq \pi)$$

に対し,

$$\dot{\gamma}(s) = (48 \sin^2 s \cos s, -13 \sin s + 10 \sin 2s + 6 \sin 3s + 4 \sin 4s), \quad \dot{\gamma}(0) = \dot{\gamma}(\pi) = \mathbf{0}.$$

開区間 $(0, s)$ に対応する弧長 $u = u(s)$ により, この曲線の弧長パラメータ表示が

$$\gamma(u) = (f(u), g(u))$$

であるとする. この曲線を z 軸のまわりに 1 回転してできる曲面 H は

$$\mathbb{P}(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u))$$

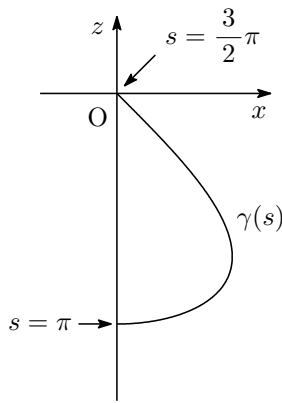
で与えられる.

$$\frac{du}{ds} = \sin s \sqrt{576 \sin^2 2s + (32 \cos^3 s + 24 \cos^2 s + 4 \cos s - 19)^2}$$

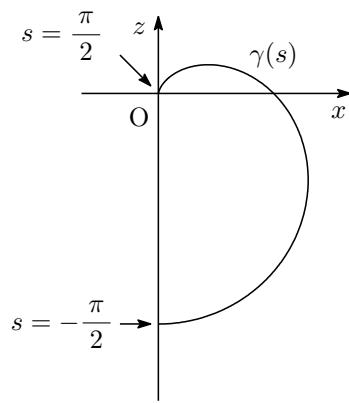
であるから, 定理 2.5 より H の全曲率は

$$\begin{aligned} \iint_H K dA &= -2\pi \lim_{s \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \dot{f}(s) \frac{1}{\frac{du}{ds}} + 2\pi \lim_{s \rightarrow +0} \dot{f}(s) \frac{1}{\frac{du}{ds}} \\ &= -2\pi \lim_{s \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \frac{48 \sin s \cos s}{\sqrt{576 \sin^2 2s + (32 \cos^3 s + 24 \cos^2 s + 4 \cos s - 19)^2}} \\ &\quad + 2\pi \lim_{s \rightarrow +0} \frac{48 \sin s \cos s}{\sqrt{576 \sin^2 2s + (32 \cos^3 s + 24 \cos^2 s + 4 \cos s - 19)^2}} = 0 \end{aligned}$$

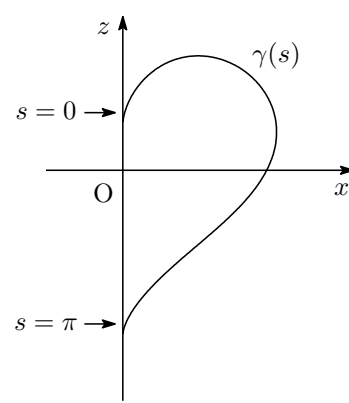
となる. □



例 2.23



例 2.24



例 2.25

参考文献

- [1] 瀬山士郎, (1988), 『トポロジー:柔らかい幾何学』, 日本評論社.
- [2] 梅原雅頭, 山田光太郎, (2002), 『曲線と曲面-微分幾何的アプローチ-』, 裳華房.
- [3] 小林昭七, (2015), 『曲線と曲面の微分幾何 (改訂版)』, 裳華房.
- [4] 竹内洋介, (2017), 『複素数を用いた平面曲線の全曲率の考察』, 三重大学大学院教育学研究科修士論文.
- [5] 田中健雄, (2017), 『曲線の変形における全曲率の変化』, 三重大学大学院教育学研究科修士論文.
- [6] 竹内洋介, 田中健雄, 新田貴士, (2017), 『特異点が存在する曲線と曲面の全曲率について』, 三重大学教育学部紀要第 69 巻.
- [7] 梅原雅頭, 佐治健太郎, 山田光太郎, (2017), 『特異点をもつ曲線と曲面の微分幾何学』, 丸善出版.

謝辞

本研究を行うにあたり, 三重大学教育学部数学教育コースの先生方に多くの激励を頂戴しました. また本論文の作成のため, 機器室の使用の準備をして頂きました事務員の鈴木さんには心よりお礼申し上げます. とりわけ, 指導教員の新田貴士先生には, 課題研究の授業時間外にも細部に渡った丁寧なご指導等多くの支援を賜りました. 末筆ながら, ここに感謝申し上げます.