

—修士学位論文—

ノミナル性能の実現を目的とした
周波数応答を用いた Youla パラメータの設計に
関する研究

A Study on Youla Parameter Design Method for
Achieving Nominal Performance
Using Frequency Responses

平成 30 年度

三重大学大学院工学研究科
博士前期課程 電気電子工学専攻
岡村雅行

目次

第 1 章	緒言	1
1.1	研究背景と目的	1
1.2	論文の構成	3
1.3	表記	4
第 2 章	既約分解表現に基づいたフィードバック制御系の性能解析	4
2.1	既約分解を用いた安定化制御器のクラス	4
2.1.1	安定化制御器の一般形を用いたフィードバック制御系	6
2.2	双対 Youla パラメトリゼーションの導入	7
2.2.1	双対 Youla パラメータを用いた制御対象の変動表現	7
2.2.2	Hansen 法による双対 Youla パラメータの同定	8
2.3	既約分解表現を用いたフィードバック制御系の性能解析	9
2.4	双対 Youla パラメータの数式モデルに基づいた Youla パラメータの設計	11
2.4.1	双対 Youla パラメータの数式モデルに基づいた Youla パラメータ設計法の課題	11
第 3 章	周波数応答を用いた固定次数 Youla パラメータの設計	13
3.1	閉ループ特性の変動を補償する Youla パラメータの設計問題	13
3.1.1	Youla パラメータの構造	14
3.1.2	設計問題の定式化	14
3.1.3	反復 LMI 制約による解法	15
3.2	Youla パラメータの安定性	17
3.3	閉ループシステムの安定性	18
3.4	最終的な設計問題	21
3.5	数値例	22
3.5.1	制御対象	22
3.5.2	設計条件	22

3.5.3	シミュレーション結果と考察	25
3.6	実機検証	31
3.6.1	制御対象	31
3.6.2	設計条件	31
3.6.3	設計結果と考察	34
3.7	周波数応答を用いた固定次数 Youla パラメータの設計法の問題点	39
第 4 章	周波数応答を用いた ν-gap に基づく固定次数 Youla パラメータの設計	41
4.1	ν -gap	41
4.2	設計問題の再設定	43
4.2.1	設計問題の定式化	43
4.2.2	反復 LMI 制約による解法	45
4.3	最終的な設計問題	47
4.4	実機検証	48
4.4.1	設計条件	48
4.4.2	設計結果と考察	48
第 5 章	結言	54
5.1	まとめ	54
5.2	本研究における課題	54
	参考文献	58
	謝辞	60
	論文目録	61

第1章 緒言

1.1 研究背景と目的

制御対象を伝達関数や状態関数として数式モデル化し、モデルに基づいて制御器を設計するモデルベース制御器設計法が近年広く用いられている。しかし、一般に制御対象はノミナルな数式モデルに対しモデル化誤差や不確かさを持つため、正確にモデル化を行うことが困難であり、設計時に達成できるノミナル性能と実際の制御性能は一致しない。モデル化誤差や不確かさが大きい場合には、実際の制御系においては不安定化する恐れさえある。また、制御対象に対し、良好な制御性能を示す制御器が設計できていたとしても、経年劣化や動作環境の変化により制御性能が低下することも考えられる。ゆえに、モデル化誤差や不確かさをあらかじめ見積もり、その範囲に対して制御性能や安定性を保証する制御系を設計することが望ましい。

この問題に対し Tay らはフィードバック制御系を、Youla らによって提案された安定化制御器の一般形^[1]と、その双対の考え方に基づいたノミナルな制御器により安定化可能な制御対象のクラス^[2]を用いて表現した^[3]。これにより、安定化制御器は Youla パラメータにより、制御対象は双対 Youla パラメータにより特徴づけられ、制御対象の変動を表す双対 Youla パラメータに対して適切な Youla パラメータを設計することを提案した。松本らはこの考えに基づき二自由度制御系の内部構造を明らかにし、Youla パラメータと双対 Youla パラメータからなる閉ループシステムの安定条件を示し、同定された双対 Youla パラメータに基づいた Youla パラメータの設計法を提案した^[4]。また、Youla パラメータを適切に設計することにより閉ループ特性を設計者が望む形に整形することができることから、弓場井らは実際の制御対象が数式モデルに対してモデル化誤差や不確かさを持っている場合にも、双対 Youla パラメータの同定を行い、推定されたモデルに基づきノミナル性能と実際の制御性能を近づけるような Youla パラメータの設計法を提案した^[5]。しかし、文献 [4], [5] の手法において双対 Youla パラメータを同定する際に、低次のモデルとして設計する場合、同定精度が犠牲となり、性能の改善が十分得られない場合もあった。逆に、同定精度を高くするため双対 Youla パラメータの同定モデルを高次数とした場合、設計される Youla パラメータが高次数とな

り、実装面におけるコストの増大の問題も生じる。

この問題に対し、制御対象の数式モデルを用いることなく、制御対象の周波数応答から制御器を設計する手法^[6, 7, 8]が近年注目を集めている。これらの手法では、制御対象から取得した入出力データから周波数応答を推定し、周波数応答から固定次数の制御器を設計している。周波数応答から制御器を設計することで制御対象の数式モデルが不要となり、制御対象から得られる情報を直接制御器設計に用いることでモデルベースの設計法と同等以上の性能を持つ制御器の設計が期待できる。さらに、制御対象の複雑さに関わらず、直接低次数の制御器の設計が可能となる。これらの設計では周波数応答を用いた設計問題を凸最適化問題として記述することで、容易に制御器調整が可能となる。

以上の背景の下、ノミナル性能と実際の制御性能を近づけることを制御目的として、制御対象の周波数応答から推定した双対 Youla パラメータの周波数応答を用いた Youla パラメータの設計法を提案した^[9]。この手法によって、従来の問題であった、双対 Youla パラメータのモデル化誤差の影響を低減し、設計する Youla パラメータの高次数化の問題を軽減した。これにより、上述のモデルベースの設計法での問題点を解決でき、それと同等の性能を持つ Youla パラメータの設計が可能である。しかし、この手法ではフィードバックシステムの 1 つの閉ループ特性のみをノミナル性能に近づけることを Youla パラメータの設計目的としている。そのため、ノミナル性能に近づけた閉ループ特性以外の閉ループ特性が考慮されていないため、取り扱う制御対象によっては所望の閉ループ特性を実現するためにその他の閉ループ特性が劣化し、制御性能が劣化する恐れがある。そこで、本論文ではフィードバックシステムの 4 つの閉ループ特性においてノミナル性能と実際の制御性能を近づけることを設計目的とした周波数応答を用いた任意の構造を持つ Youla パラメータの設計を実現することを目的とする。同様な設計目的としている文献 [5] では双対 Youla パラメータの数式モデルに基づいて Youla パラメータを設計する \mathcal{H}_∞ 制御を扱っている。しかし、モデルベースでの設計は上述した問題があるため、提案された \mathcal{H}_∞ 制御問題を双対 Youla パラメータの周波数応答を用いて \mathcal{H}_∞ ノルムを最小化する Youla パラメータの設計問題を反復 LMI (Linear Matrix Inequality) 最適化問題として定式化する。また、従来の周波数応答に基づいた制御器設計法のほとんどが制御器の分子多項式の係数パラメータを調整するものであったのに対し、この手法では Youla パラメータの分子多項式だけではなく、分母多項式の調整も可能にした。提案手法の最適化問題の求解は反復 LMI 制約のアルゴリズムに基づき行う。このアルゴリズムでは、大域的最適解が導出される保証はないが、評価値は

少なくとも局所最適値に単調収束する。また, Youla パラメータは安定である必要があるため, Youla パラメータ自身の安定性を保証する制約の導出もされている。さらに, 閉ループシステムの安定性を Nyquist の Aoki らにより提案された安定判別に基づく安定制約^[10]を導入することで保証した。Aoki らによって提案された安定制約は, 制御器の分子多項式のみを調整する場合についてのみ適用可能であったため, この手法では分母多項式の調整も行う場合についても適用可能になるよう拡張した。ゆえに, 双対 Youla パラメータのモデル化を不要とし, 閉ループシステムの安定性を保証しつつノミナル時に近い閉ループ特性を整形可能な固定次数 Youla パラメータが設計可能であることから, モデル化誤差の影響の抑制が期待できる。

1.2 論文の構成

本研究では, 周波数応答を用いた固定次数 Youla パラメータの設計法の提案を行う。なお, 本論文は全 5 章で構成されており, 各章の構成は以下の通りである。

第 2 章 既約分解表現に基づいたフィードバック制御系の性能解析

2 章では, 本研究の基盤である Youla パラメトリゼーションについて述べる。また, 双対 Youla パラメトリゼーションについて述べ, 双対 Youla パラメータの数式モデルに基づいた Youla パラメータの設計法^[5]の概要と課題について述べる。

第 3 章 周波数応答を用いた固定次数 Youla パラメータの設計

従来の Youla パラメータ設計法の課題であった高精度なモデル化やモデル化誤差による影響を解決する手法として周波数応答を用いた Youla パラメータの設計法を提案する。

第 4 章 周波数応答を用いた ν -gap に基づく固定次数 Youla パラメータの設計

3 章で述べた手法の課題を考慮した周波数応答を用いた ν -gap に基づく Youla パラメータの設計法を提案する。

第 5 章 まとめと今後の課題

本研究のまとめと今後の課題について述べる

1.3 表記

本論文で用いられる表記を以下に示す.

$\ G(s)\ _\infty$	伝達関数 $G(s)$ の H_∞ ノルム
\mathcal{RH}_∞	プロパーで安定な実有理関数の集合
$\det \mathbf{A}$	行列 \mathbf{A} の行列式
$\sigma(\mathbf{A})$	行列 \mathbf{A} の特異値
$\bar{\sigma}(\mathbf{A})$	行列 \mathbf{A} の最大特異値
\mathbf{A}^T	行列 \mathbf{A} の転置
\mathbf{A}^*	行列 \mathbf{A} の複素共役転置
\mathbf{A}^{-*}	行列 \mathbf{A} の逆行列の複素共役転置 ($(\mathbf{A}^{-1})^*$)
A_{pq}	行列 \mathbf{A} の (p, q) 要素
$\operatorname{Re}\{A\}, \operatorname{Im}\{A\}$	複素数 A の実部および虚部
\mathbf{I}	単位行列 ($\mathbf{I}_n : n$ 次の単位行列)
$\mathcal{R}^{p \times q}$	q 入力 p 出力の実有理伝達関数行列の集合
$\left[\begin{array}{c c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{array} \right]$	伝達関数 $G(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$ の状態空間表現

第2章 既約分解表現に基づいたフィードバック制御系の性能解析

本章では、本研究の基礎となる制御対象の既約分解表現に基づいたフィードバック制御系の性能解析について概説する。はじめに、既約分解表現に基づいた Youla パラメトリゼーションを用いた安定化制御器の一般形を用いたフィードバック制御系について述べ、Youla パラメトリゼーションの双対である双対 Youla パラメトリゼーションを用いた Youla パラメータの設計法について述べる。

2.1 既約分解を用いた安定化制御器のクラス

本節では伝達関数の既約分解表現を用いた制御系について概説する。既約分解表現を用いることで線形制御における安定化制御器の一般形を体系的に導くことができる。

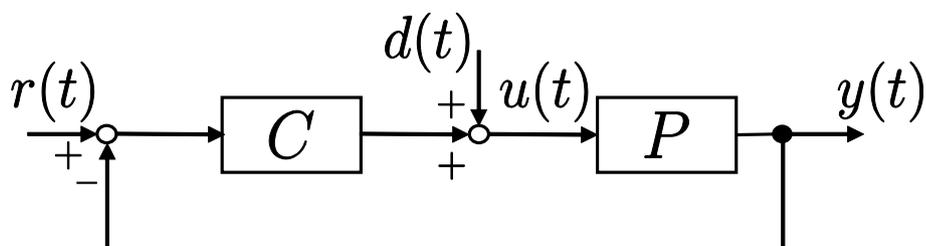


図 2.1: フィードバック制御系 (1)

まず、図 2.1 に示す一般的な閉ループ制御系を考える。ただし、 $r(t)$ 、 $u(t)$ 、 $y(t)$ 、 $d(t)$ はそれぞれ参照入力、制御入力、観測出力、外部外乱を表す。制御対象 P のノミナルモデルを P_0 とし、 P_0 は \mathcal{RH}_∞ において (2.1) 式に示す右および左既約分解を持つとする。

$$\begin{aligned} P_0 &= N_P D_P^{-1} = \tilde{D}_P^{-1} \tilde{N}_P \\ N_P, D_P, \tilde{N}_P, \tilde{D}_P &\in \mathcal{RH}_\infty \end{aligned} \quad (2.1)$$

ここで, D_P, \tilde{D}_P は (2.2) 式を満たすものとする。

$$\det D_P(\infty) \neq 0, \quad \det \tilde{D}_P(\infty) \neq 0 \quad (2.2)$$

つまり, D_P, \tilde{D}_P のプロパー性と $s = \infty$ における正則性が要求される。また, 右および左既約分解を持つ安定化制御器 C_0 は (2.3) 式で表され, P_0 を安定化するものとする。

$$C_0 = \tilde{N}_C \tilde{D}_C^{-1} = D_C^{-1} N_C \quad (2.3)$$

$$N_C, D_C, \tilde{N}_C, \tilde{D}_C \in \mathcal{RH}_\infty$$

ただし, $N_C, D_C, \tilde{N}_C, \tilde{D}_C \in \mathcal{RH}_\infty$ は (2.4) 式, (2.5) 式の 2 重既約分解を満たすとする。

$$\begin{bmatrix} D_C & N_C \\ -\tilde{N}_P & \tilde{D}_P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_P & -\tilde{N}_C \\ N_P & \tilde{D}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

$$\begin{bmatrix} D_P & -\tilde{N}_C \\ N_P & \tilde{D}_C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_C & N_C \\ -\tilde{N}_P & \tilde{D}_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

このとき, P_0 を安定化する安定化制御器の一般形は Youla パラメータ $Q \in \mathcal{RH}_\infty$ を用いて (2.6) 式のように表現することができる。

$$\begin{aligned} C &= (D_C - Q\tilde{N}_P)^{-1}(N_C + Q\tilde{D}_P) \\ &= (\tilde{N}_C + QD_P)(\tilde{D}_C - QN_P)^{-1} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Q は (2.7) 式, (2.8) 式を満たす範囲で設計者が任意に選ぶことができる。

$$\det(D_C(\infty) - Q(\infty)\tilde{N}_P(\infty)) \neq 0 \quad (2.7)$$

$$\det(\tilde{D}_C(\infty) - Q(\infty)N_P(\infty)) \neq 0 \quad (2.8)$$

2.1.1 安定化制御器の一般形を用いたフィードバック制御系

一般的なフィードバック制御の目的は、外乱やモデル化誤差，制御対象の変動が存在する環境においても，所望の制御性能であるノミナル性能を達成することである。(2.6) 式の安定化制御器は一般的に図 2.2 のように適用される。 $P = P_0$ のとき C は P_0 を安

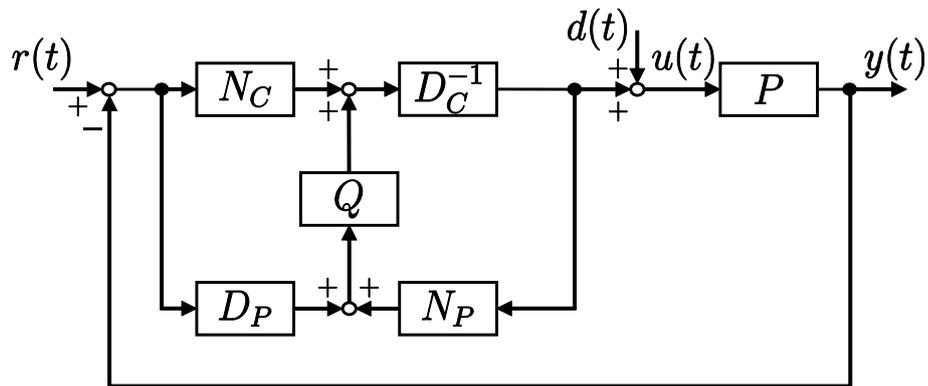


図 2.2: フィードバック制御系 (2)

定化し，Youla パラメータ Q によって感度関数や相補感度関数などの閉ループ特性を整形することができる。

2.2 双対 Youla パラメトリゼーションの導入

本節では、2.1 節で述べた Youla パラメータ Q による安定化制御器のパラメトリゼーションの双対性を利用した制御対象の変動を表現する双対 Youla パラメータについて説明する。また、Hansen 法による双対 Youla パラメータの同定法についても述べる。

2.2.1 双対 Youla パラメータを用いた制御対象の変動表現

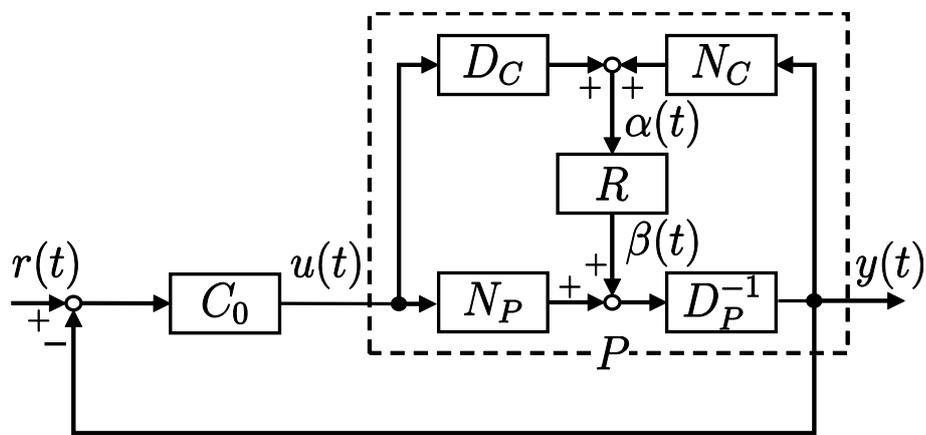


図 2.3: 双対 Youla パラメータを用いた制御対象変動の表現

まず、変動を含んだ制御対象 P がノミナル制御器 C_0 によって安定化されるものとする。この仮定は、 C_0 が変動に対して不安定化しない程度のロバスト性を持つ必要があることを意味している。この仮定を満たすとき図 2.3 に示すように P は Youla パラメトリゼーションの双対性より (2.9) 式で表現できる。

$$P = (N_P + D_C R)(D_P - N_C R)^{-1} \quad (2.9)$$

ここで、 $R \in \mathcal{RH}_\infty$ は双対 Youla パラメータであり、2.1 節で述べた Youla パラメータ Q による安定化制御器のパラメトリゼーションの双対であり、制御対象の変動を表現する未知パラメータである。また、(2.10), (2.11) 式と記述できることから R は C_0 によるフィードバックループを考慮した制御対象の変動と捉えることができる。本研究では、制御対象の変動を閉ループ特性の劣化と捉えて補償を行うため、制御対象の変動は C_0 によるフィードバックループの下で考える必要があるため、このパラメトリゼー

ションは制御対象の変動を表現するのに都合がよい。

$$R = D_P(P - P_0)(D_C + N_C P)^{-1} \quad (2.10)$$

$$= D_P(P - P_0)(I + C_0 P)^{-1} D_C^{-1} \quad (2.11)$$

2.2.2 Hansen 法による双対 Youla パラメータの同定

双対 Youla パラメータは未知パラメータであるが、以下に示す Hansen 法によって同定が可能である。図 2.3 のように表現された変動を含む制御対象に対して C_0 によるフィードバックを付加したブロック線図を考える。このとき、双対 Youla パラメータ R の入出力信号 $\{\alpha(t), \beta(t)\}$ は制御時に得られる信号 $\{r(t), u(t), y(t)\}$ から (2.12), (2.13) 式によって計算でき、これらの信号を用いて R を同定する。

$$\begin{aligned} \alpha &= D_C u(t) + N_C y(t) \\ &= D_C C_0 (r(t) - y(t)) + N_C y(t) \\ &= N_C r(t) \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\beta = D_P y(t) - N_P u(t) \quad (2.13)$$

ここで、パラメトリゼーションの性質上、 P が不安定な制御対象であっても C_0 によって安定化されることが前提であり、 R が常に安定な伝達関数として表現されるため $\{\alpha(t), \beta(t)\}$ の取得が容易となる。また、 $\alpha(t)$ はフィードバック制御系の内部信号であるにも関わらず、同定入力である $\alpha(t)$ が外部入力である $r(t)$ の関数となることから、 $\beta(t)$ から $\alpha(t)$ までのループゲインは 0 となり、双対 Youla パラメータの同定問題は開ループ同定問題として扱うことができる。これによって、閉ループ同定において問題となるバイアス誤差を回避することができ、高い同定精度が期待できる。ただし、 $\alpha(t)$ は PE 性を満たすために R の特性を十分励起する同定入力が必要である。

2.3 既約分解表現を用いたフィードバック制御系の性能解析

本節では、図 2.1 のフィードバック制御系の性能解析を行う。評価する閉ループ特性として、 $[r(t), d(t)]^T$ から $[y(t), u(t)]^T$ までの 4 つの閉ループ特性 $\mathcal{T}(P, C)$ を考える。この中には制御器設計において重要な評価指標である感度特性や相補感度特性も含まれている。まず、 P_0 と C_0 で構成されるノミナル時の閉ループ特性 $\mathcal{T}(P_0, C_0)$ は (2.1) 式, (2.3) 式を代入し, (2.4) 式, (2.5) 式を用いて整理することで (2.14) 式のように表現できる。

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(P_0, C_0) &= \begin{bmatrix} T_{yr} & T_{yd} \\ T_{ur} & T_{ud} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{P_0 C_0}{1+P_0 C_0} & \frac{P_0}{1+P_0 C_0} \\ \frac{C_0}{1+P_0 C_0} & \frac{1}{1+P_0 C_0} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} N_P \\ D_P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_C & D_C \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.14)$$

次に、制御対象に変動やモデル化誤差が発生し、制御対象が P_0 から P に変化したとする。このとき、変動後の閉ループ特性 $\mathcal{T}(P, C_0)$ は (2.3) 式, (2.9) 式を代入し, (2.4) 式, (2.5) 式を用いて整理することで (2.15) 式のように $\mathcal{T}(P_0, C_0)$ と R による性能劣化項 Δ_R を用いて表現できる。

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(P, C_0) &= \begin{bmatrix} \frac{PC_0}{1+PC_0} & \frac{P}{1+PC_0} \\ \frac{C_0}{1+PC_0} & \frac{1}{1+PC_0} \end{bmatrix} \\ &= \mathcal{T}(P_0, C_0) + \Delta_R \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\Delta_R = \begin{bmatrix} D_C \\ -N_C \end{bmatrix} R \begin{bmatrix} N_C & D_C \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

さらに，制御対象 P を (2.6) 式の C により制御すると Q による補償が加わり，閉ループ特性 $\mathcal{T}(P, C)$ は (2.4)，(2.5)，(2.6)，(2.9) 式より (2.17) 式のように表現できる。

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(P, C) &= \begin{bmatrix} \frac{PC}{1+PC} & \frac{P}{1+PC} \\ \frac{C}{1+PC} & \frac{1}{1+PC} \end{bmatrix} \\ &= \mathcal{T}(P_0, C_0) + \Delta_R + \Delta_{RQ} \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\Delta_{RQ} = \begin{bmatrix} N_R \\ D_R \end{bmatrix} \frac{Q}{1+RQ} \begin{bmatrix} D_R & -N_R \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

$$N_R = N_P + RD_C, \quad D_R = D_P - RN_C \quad (2.19)$$

Δ_{RQ} は Q による性能補償項であると解釈できる。よって， Δ_{RQ} によって Δ_R を相殺することができれば，制御対象に変動が生じた場合でもノミナル時の閉ループ特性を実現できる。つまり，制御対象の変動である R を同定すれば， Δ_R と Δ_{RQ} を相殺する Q を設計する問題を考えることができる。

2.4 双対 Youla パラメータの数式モデルに基づいた Youla パラメータの設計

2.2.2 節で述べた Hansen 法により同定された双対 Youla パラメータの数式モデルを利用して、制御対象の変動時に発生する閉ループ特性の性能劣化を適切に補償する Youla パラメータの設計法が文献 [5] で提案された。性能補償項 Δ_{RQ} によって性能劣化項 Δ_R を抑制するために (2.20) 式のような \mathcal{H}_∞ 制御問題として定式化する。ここで、一般化制御対象 \mathbf{G}_d は (2.21) 式のように構成される。

$$\begin{aligned} Q &= \arg \min_Q \| \mathcal{T}(P, C) - \mathcal{T}(P_0, C_0) \|_\infty \\ &= \arg \min_Q \| \mathcal{F}_l(\mathbf{G}_d, Q) \|_\infty \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\mathbf{G}_d = \begin{bmatrix} \Delta_R & \begin{bmatrix} N_R \\ D_R \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \tilde{D}_R & \tilde{N}_R \end{bmatrix} & -R \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

同定された実際の制御対象の変動 R に基づいて Q が設計されるため、 R で表された変動は Q により補償される。また、 Q は R に基づいた適切な補償信号を生成するため、変動後の制御性能は適切に補償される。さらに、(2.21) 式の一般化制御対象 \mathbf{G}_d に対して以下に示す周波数重み \mathbf{W}_d を付加して Youla パラメータを設計する。

$$\mathbf{W}_d = \begin{bmatrix} W_1 & 0 & 0 \\ 0 & W_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

この周波数重みのゲイン特性が大きい帯域ほど変動時とノミナル時の閉ループ特性が近づくことになる。

2.4.1 双対 Youla パラメータの数式モデルに基づいた Youla パラメータ設計法の課題

双対 Youla パラメータの数式モデルに基づいた設計法では双対 Youla パラメータが高精度に同定されなければ、設計される Youla パラメータは望みの制御性能が得られないことは明らかである。双対 Youla パラメータの同定は閉ループ実験データを用い

た同定が必要になるが Hansen 法を用いることによって開ループ同定問題となるため、高い同定精度が期待できる。一般的なシステム同定では、同定する対象の物理的な解釈を与えにくく、同定入力などを決定する際に試行錯誤が伴うことが問題となる。以上のような理由により、十分な同定精度が得られない場合、双対 Youla パラメータの数式モデルに基づいた設計において低次のモデルとして設計する場合、同定精度が犠牲となり、性能の改善が十分得られない場合がある。逆に、同定精度を高くするため双対 Youla パラメータの同定モデルを高次数とした場合、設計される Youla パラメータが高次数となり、実装面におけるコストの増大の問題も生じる。

第3章 周波数応答を用いた固定次数 Youlaパラメータの設計

本章では、Hasen法を用いて制御対象の周波数応答から推定した双対 Youla パラメータの周波数応答から Youla パラメータを設計する手法を提案する。この提案において、双対 Youla パラメータの周波数応答を用いて制御対象の変動による性能劣化項 Δ_R を性能補償項 Δ_{RQ} により抑制可能な Youla パラメータを設計する手法について述べる。本章では、2章で述べた従来手法^[5]の問題点を解決すべく、以下の利点を有する。

- 双対 Youla パラメータの数式モデルを必要としない
- 設計者が Youla パラメータの設計構造を指定可能である
- Youla パラメータの分子多項式、分母多項式を同時に調整可能である
- 設計問題は周波数応答のみを用いた凸最適化問題として定式化される

なお、本章では SISO (Single-Input-Single-Output) システムを対象とする。

3.1 閉ループ特性の変動を補償する Youla パラメータの設計問題

本節では、2.3節で述べた閉ループ特性の変動を補償する周波数応答を用いた Youla パラメータの設計法について説明する。制御対象 P は未知であるが、そのノミナルモデル P_0 は既知であるとする。また、 P_0 を安定化し、 P_0 に対し良好な制御性能を示すノミナルコントローラ C_0 は何らかの設計手法により既に得られており、 C_0 により P も少なくとも安定化されるものとする。このとき、 P は P_0 に対してモデル化誤差や不確かさを持っているため、 P_0 と C_0 により達成される性能である $T(P_0, C_0)$ を実現することはできない。そこで、Youla パラメータ Q を適切に設計することにより、実際に達成される性能である $T(P, C)$ を $T(P_0, C_0)$ に近づける問題を考える。

3.1.1 Youla パラメータの構造

設計すべき Q の構造を (3.1) 式のようにパラメータベクトル $\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta}$ に対して線形な多項式 $N_Q(s, \boldsymbol{\rho})$ と $D_Q(s, \boldsymbol{\eta})$ の比として定義する。

$$Q(s, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta}) = \frac{N_Q(s, \boldsymbol{\rho})}{D_Q(s, \boldsymbol{\eta})} = \frac{\boldsymbol{\rho}^T \boldsymbol{\phi}(s)}{\boldsymbol{\eta}^T \boldsymbol{\varphi}(s)} \quad (3.1)$$

ここで $\boldsymbol{\rho}^T = [\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_n]$ と $\boldsymbol{\eta}^T = [\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_m]$ はそれぞれ $(n+1)$, $(m+1)$ 次元の設計パラメータベクトルであり, $\boldsymbol{\phi}(s) = [1, s, \dots, s^n]^T$ と $\boldsymbol{\varphi}(s) = [1, s, \dots, s^m]^T$ はそれぞれ $(n+1)$, $(m+1)$ 次元基底ベクトルである。ただし, Q の次数を m に固定するため, $\eta_m = 1$ とした。この定義により, 設計者は $N_Q(s)$, $D_Q(s)$ の次数を指定するだけで任意の構造を持つ Q の設計が可能となる。また, 図 2.2 の制御系は $C_0 = N_C/D_C$ に積分器を持たせることで $Q = 0$ の場合において 1 型サーボ系となるが, $Q \neq 0$ の場合, C の積分特性が失われる可能性がある。 $Q \neq 0$ の場合にも 1 型サーボ系を維持するためには $Q(0) = 0$ を満たせばよい^[2], $\rho_0 = 0$ としている。

3.1.2 設計問題の定式化

Q の設計問題は \mathcal{H}_∞ 制御問題として, 変数 Γ を $\|\mathbf{G}(s, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta})\|_\infty$ の上界として導入し, Γ の最小化を行うことで実現できる。(3.2) 式のように定式化する。

$$\min_{\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta}} \Gamma$$

subject to

$$\|\mathbf{G}(s, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta})\|_\infty < \Gamma \quad (3.2)$$

ここで, $\mathbf{G}(s, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta}) = \Delta_R + \Delta_{RQ}$ である。(3.2) 式は (3.3) 式のように周波数応答を用いて表現できる。

$$\begin{aligned} \Gamma^2 \mathbf{I} - \mathbf{G}(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta})^* \mathbf{G}(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta}) &> 0 \\ \text{for } i &= 1, \dots, N \end{aligned} \quad (3.3)$$

本来, (3.3) 式はすべての周波数点で評価しなければならないが, 計算機上で可解な問題とするため N 個の周波数点 $\omega_i (i = 1, \dots, N)$ について評価を行う。よって, 得られ

る解は厳密には (3.2) 式を評価できていないが、周波数刻みを十分小さく取れば実用上問題ない^[6]。さらに、(3.1) 式を用いると $\mathbf{G}(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta})$ は (3.4) 式のように表現できる。(3.4) 式以降では引数 $j\omega_i, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta}$ を省略する。

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= \Delta_R + \Delta_{RQ} \\ &= \Delta_R + \frac{1}{D_Q + RN_Q} \begin{bmatrix} N_Q N_R D_R & -N_Q N_R^2 \\ N_Q D_R^2 & -N_Q N_R D_R \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} RN_C D_C U + N_Q N_R D_R & RD_C^2 U - N_Q N_R^2 \\ -RN_C^2 U + N_Q D_R^2 & -RN_C D_C U - N_Q N_R D_R \end{bmatrix} \mathbf{Z}^{-1} \\ &= \mathbf{Y} \mathbf{Z}^{-1} \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$U = D_Q + RN_Q \quad (3.5)$$

$$\mathbf{Z} = \text{diag}(U, U) \quad (3.6)$$

ここで、 \mathbf{Y} 、 \mathbf{Z} は N_Q 、 D_Q 、すなわち $\boldsymbol{\rho}$ 、 $\boldsymbol{\eta}$ に対して線形である。(3.3)、(3.4) 式より、設計問題は (3.7) 式のように書き直すことができる。

$$\min_{\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta}} \Gamma$$

subject to

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}^* \mathbf{Z} - \frac{1}{\Gamma^2} \mathbf{Y}^* \mathbf{Y} &> 0 \\ \text{for } i &= 1, \dots, N \end{aligned} \quad (3.7)$$

(3.7) 式は Quadratic Matrix Inequality 制約 (以下、QMI 制約と呼ぶ) となっており、一般に凸最適化による効率的な解の導出は困難であるが、文献 [7] で提案されている反復 LMI 制約のアルゴリズムを利用して解を導出する。

3.1.3 反復 LMI 制約による解法

Boyd らは (3.7) 式の形の QMI 制約を線形近似により LMI 制約として記述し、反復的に設計問題を解く手法を提案している^[7]。(3.7) 式は Schur complement^[12]より (3.8)

式と等価である。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Z}^* \mathbf{Z} & \mathbf{Y}^* \\ \mathbf{Y} & \Gamma^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} > 0 \quad (3.8)$$

また、適切な次元を持つ任意の複素行列 $\tilde{\mathbf{Z}}$ に対して $(\mathbf{Z} - \tilde{\mathbf{Z}})^*(\mathbf{Z} - \tilde{\mathbf{Z}}) \geq 0$ が成り立つため (3.9) 式が得られる。

$$\mathbf{Z}^* \mathbf{Z} \geq \mathbf{Z}^* \tilde{\mathbf{Z}} + \tilde{\mathbf{Z}}^* \mathbf{Z} - \tilde{\mathbf{Z}}^* \tilde{\mathbf{Z}} \quad (3.9)$$

(3.9) 式より (3.8) 式の十分条件である (3.10) 式が導出できる。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Z}^* \tilde{\mathbf{Z}} + \tilde{\mathbf{Z}}^* \mathbf{Z} - \tilde{\mathbf{Z}}^* \tilde{\mathbf{Z}} & \mathbf{Y}^* \\ \mathbf{Y} & \Gamma^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} > 0 \quad (3.10)$$

(3.10) 式は (3.8) 式の下界を与えており、(3.10) 式が成り立つとき必ず原問題である (3.8) 式は成り立つ。また、(3.10) 式において $\mathbf{Z} = \tilde{\mathbf{Z}}$ のとき、(3.8) 式と一致する。以上より、設計パラメータに対して線形に定義された \mathbf{Y} 、 \mathbf{Z} に関する非凸な制約を、 $\tilde{\mathbf{Z}}$ を導入し、LMI 制約として記述した。(3.10) 式は (3.8) 式の十分条件であるが、 $\tilde{\mathbf{Z}}$ を 1 回前における最適化による解 \mathbf{Z} とし、繰り返し最適化計算により解が収束し、 $\mathbf{Z} = \tilde{\mathbf{Z}}$ となれば (3.9) 式の等号が成り立ち、(3.10) 式が元の制約と一致する。また、(3.10) 式は常に元の制約の下界を示すため、繰り返し最適化により更新される解は単調収束する。以上より、提案手法の設計問題は以下のように表現できる。

$$\min_{\boldsymbol{\rho}_k, \boldsymbol{\eta}_k} \Gamma_k$$

subject to

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Z}_k^* \tilde{\mathbf{Z}}_k + \tilde{\mathbf{Z}}_k^* \mathbf{Z}_k - \tilde{\mathbf{Z}}_k^* \tilde{\mathbf{Z}}_k & \mathbf{Y}_k^* \\ \mathbf{Y}_k & \Gamma_k^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} > 0 \quad (3.11)$$

for $i = 1, \dots, N$

ここで、下添え字 k は最適化の繰り返し回数を表す。 $\tilde{\mathbf{Z}}_k$ は (3.12) 式のように 1 回前の最適化による解 $\boldsymbol{\rho}_{k-1}$ 、 $\boldsymbol{\eta}_{k-1}$ を用いて (3.12) 式のように与える。

$$\tilde{\mathbf{Z}}_k = \mathbf{Z}(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}_{k-1}, \boldsymbol{\eta}_{k-1}) \quad (3.12)$$

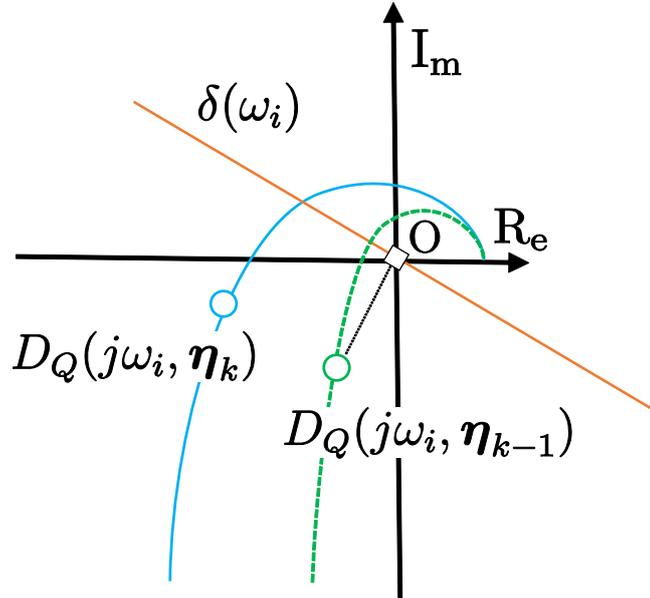


図 3.1: Q の安定性

この最適化により局所的最適解に収束する可能性があるが，非凸な評価関数を含む最適化問題に対して解の単調収束を保証し，LMI 最適化により簡易に準最適解を導出することができる。

3.2 Youla パラメータの安定性

Youla パラメトリゼーションの性質上， Q は安定な伝達関数である必要がある。しかし，本研究における Q の設計問題は分母多項式のパラメータ調整も含めた設計となっているため， Q が不安定極を持つ可能性がある。そのため，本節では設計する Q の極を安定極に限定するために文献 [8] で提案された Nyquist の安定判別に基づく制約式を導入する。本手法では， Q の分母多項式を決定する $D_Q(j\omega_i, \eta_k)$ のベクトル軌跡を評価し，安定な初期解 $D_Q(j\omega_i, \eta_0)$ のベクトル軌跡における原点に対する回転数を Q の調整後も維持することで Q の安定性を保証する。周波数点 ω_i において，現在の解 $D_Q(j\omega_i, \eta_{k-1})$ から原点に引かれた直線と直交し，原点を通る (3.13) 式の直線 $\delta(\omega_i)$ を図 3.1 のように定義する。

$$\operatorname{Re}\{D_Q(j\omega_i, \eta_{k-1})\}x + \operatorname{Im}\{D_Q(j\omega_i, \eta_{k-1})\}y = 0 \quad (3.13)$$

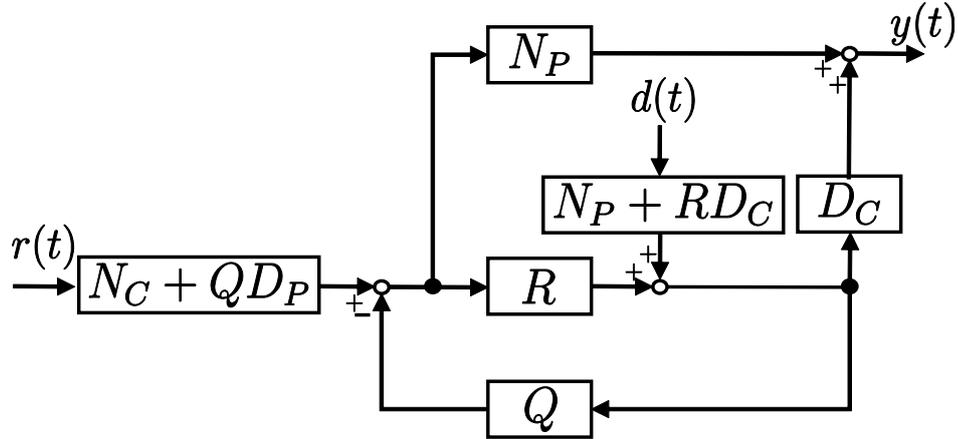


図 3.2: 図 1 と等価なブロック線図

ここで, x は実軸, y は虚軸を表す。そして, 全周波数点で $D_Q(j\omega_i, \boldsymbol{\eta}_k)$ と $D_Q(j\omega_i, \boldsymbol{\eta}_{k-1})$ が直線 $\delta(\omega_i)$ に対して同じ側に位置すれば, Q の更新前後でベクトル軌跡が原点を回る回数は変化しない。この条件は (3.14) 式で表現できる^[8]。

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re}\{D_Q(j\omega_i, \boldsymbol{\eta}_{k-1})\}\operatorname{Re}\{D_Q(j\omega_i, \boldsymbol{\eta}_k)\} + \operatorname{Im}\{D_Q(j\omega_i, \boldsymbol{\eta}_{k-1})\}\operatorname{Im}\{D_Q(j\omega_i, \boldsymbol{\eta}_k)\} \\ &= \operatorname{Re}\{D_Q(j\omega_i, \boldsymbol{\eta}_{k-1})^* D_Q(j\omega_i, \boldsymbol{\eta}_k)\} \geq 0 \end{aligned} \quad (3.14)$$

for $i = 1, \dots, N$

(3.14) 式は $\boldsymbol{\eta}_k$ に対して線形であるため, 安定極のみを有する初期解を与えれば, 最適化計算により不安定極を持たない Q を設計することが可能になる。

3.3 閉ループシステムの安定性

閉ループシステムが安定となるためには, R と Q を用いて表現された図 2.1 と等価な図 3.2 のフィードバック制御系が安定である, すなわち, Q が R を安定化する必要がある。そのため, $L(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta}) = RQ(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta})$ を開ループ伝達関数と考え, Aoki らによって提案された Nyquist の安定判別に基づく制約式を導入する^[10]。この制約式では開ループ伝達関数の臨界点に対するベクトル軌跡の回転数をパラメータの更新の前後で維持する制約となっている。初期解 $L(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}_0, \boldsymbol{\eta}_0)$ が図 3.2 の閉ループシステムを安定化し, この制約を満たしつつ Q が更新されるならば, 更新後の $\boldsymbol{\rho}_k, \boldsymbol{\eta}_k$ を用いた閉ループシステムの安定性は維持され続ける。この条件は (3.15) 式で表現できる。ただし,

$L_{k-1}(j\omega_i) = L(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}_{k-1}, \boldsymbol{\eta}_{k-1})$ とする。

$$|1 + L_{k-1}(j\omega_i)| > |L_{k-1}(j\omega_i) - L(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}_k, \boldsymbol{\eta}_k)| \quad (3.15)$$

for $i = 1, \dots, N$

しかし、(3.15) 式は文献 [10] では制御器の分子パラメータのみ調整するため凸な制約であるのに対し、本研究においては分母多項式のパラメータ調整も含めた設計となるため、(3.15) 式は $\boldsymbol{\rho}_k, \boldsymbol{\eta}_k$ に対して非凸な関数となる。そこで、(3.7) 式の評価関数と同様の式変形を行う。まず、(3.15) 式の両辺を 2 乗し、 $D_Q(j\omega_i, \boldsymbol{\eta}_k)^2$ を両辺に掛けると、(3.16) 式を得る。

$$|D_Q(j\omega_i, \boldsymbol{\eta}_k)(1 + L_{k-1}(j\omega_i))|^2 > |D_Q(j\omega_i, \boldsymbol{\eta}_k)L_{k-1}(j\omega_i) - R(j\omega_i)N_Q(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}_k)|^2 \quad (3.16)$$

さらに、(3.16) 式は (3.17) 式のように変形できる。

$$M^*M - O^*O > 0 \quad (3.17)$$

$$M = D_Q(j\omega_i, \boldsymbol{\eta}_k)(1 + L_{k-1}(j\omega_i))$$

$$O = D_Q(j\omega_i, \boldsymbol{\eta}_k)L_{k-1}(j\omega_i) - R(j\omega_i)N_Q(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}_k)$$

また、3.1.3 節と同様に文献 [7] の手法に基づき適切な次元を持つ任意の複素数 \tilde{M} に対して $(M - \tilde{M})^*(M - \tilde{M}) \geq 0$ が成り立つため (3.18) 式が得られる。(3.18) 式以降では引数 $j\omega_i, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta}$ を省略する

$$M^*M \geq M^*\tilde{M} + \tilde{M}^*M - \tilde{M}^*\tilde{M} \quad (3.18)$$

(3.18) 式より (3.17) 式の十分条件である (3.19) 式が導出され、閉ループシステムに対する安定制約は反復 LMI 制約として表現できる。

$$\begin{bmatrix} M_k^*\tilde{M}_k + \tilde{M}_k^*M_k - \tilde{M}_k^*\tilde{M}_k & O_k^* \\ O_k & 1 \end{bmatrix} > 0 \quad (3.19)$$

for $i = 1, \dots, N$

ここで、下添え字 k は最適化の繰り返し回数、 \tilde{M}_k は (3.20) 式のように 1 回前の最適化による解 $\boldsymbol{\rho}_{k-1}, \boldsymbol{\eta}_{k-1}$ を用いる。

$$\tilde{M}_k = M(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}_{k-1}, \boldsymbol{\eta}_{k-1}) \quad (3.20)$$

以上より，設計パラメータに対して線形に定義された M ， O に関する非凸な制約を \tilde{M} を導入することで反復 LMI 制約として記述した。(3.19) 式は十分条件であるが， \tilde{M} を 1 回前における最適化による解 M とすれば繰り返し最適化計算により，解が収束し， $M = \tilde{M}$ となれば (3.19) 式が元の制約式と一致する。また，(3.19) 式は常に元の制約の下界を示すため，繰り返し最適化により更新される解は単調収束する。

3.4 最終的な設計問題

提案手法では (3.11) 式, (3.14) 式, (3.19) 式の制約を同時に評価し, 3つの制約下でノミナル時の閉ループ特性に近い特性を実現する Youla パラメータを設計する。Youla パラメータ自身の安定性を保証するための安定制約である (3.14) 式は設計パラメータに対して線形に記述されている。非凸な QMI 制約で表現したノルム制約である (3.7) 式と閉ループシステムの安定性を保証するための安定制約である (3.17) 式に対して反復 LMI 制約を導入した線形化により (3.11) 式, (3.19) 式的设计パラメータに対して線形な制約式として記述している。最終的な設計問題は以下の凸最適化問題として記述される。

$$\min_{\boldsymbol{\rho}_k, \boldsymbol{\eta}_k} \Gamma_k$$

subject to

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Z}_k^* \tilde{\mathbf{Z}}_k + \tilde{\mathbf{Z}}_k^* \mathbf{Z}_k - \tilde{\mathbf{Z}}_k^* \tilde{\mathbf{Z}}_k & \mathbf{Y}_k^* \\ \mathbf{Y}_k & \Gamma_k^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} > 0$$

$$\operatorname{Re}\{D_Q(j\omega_i, \boldsymbol{\eta}_{k-1})^* D_Q(j\omega_i, \boldsymbol{\eta}_k)\} \geq 0$$

$$\begin{bmatrix} M_k^* \tilde{M}_k + \tilde{M}_k^* M_k - \tilde{M}_k^* \tilde{M}_k & O_k^* \\ O_k & 1 \end{bmatrix} > 0$$

for $i = 1, \dots, N$

反復 LMI 制約では線形化を導入しているため (3.11) 式, (3.19) 式は元の制約式の十分条件となっているが, 評価値の単調収束が保証される。さらに, 繰り返し最適化により解が収束することで, 線形化された制約式と元の制約式は一致する。つまり, 繰り返し最適化を行い, 解が収束することで十分条件を用いたことによる解の保守性を回避できる。

3.5 数値例

本節では、ダイレクトドライブモータの回転速度制御系においてアクチュエータの発生トルクが 20% に低下する制御対象の変動を模擬したシミュレーションを通して提案手法の有効性を確認する。2 章で述べた文献 [5] の双対 Youla パラメータの数式モデルに基づいた Youla パラメータの設計法と 3 章で述べた双対 Youla パラメータの周波数応答を用いた Youla パラメータの設計法を比較する。以後、2 章の手法は従来手法、3 章の手法を提案手法 1 と表記する。

3.5.1 制御対象

非変動時である制御対象のノミナルモデル P_0 は (3.24) 式と表現でき、変動時の制御対象 P は $P = 0.2P_0$ と表現する。

$$P_0 = \frac{1}{Js + D} \quad (3.24)$$

シミュレーションに用いた制御対象のパラメータを表 3.1 に示す

表 3.1: 制御対象の各パラメータ

symbol	description	value
J	Moment of inertia	$6.514 \times 10^{-3} [\text{kg} \cdot \text{m}^2]$
D	Viscosity	$2.734 \times 10^{-3} [\text{Nm} \cdot \text{s}]$

P_0 に対して非変動時の制御性能を決定するノミナルコントローラ C_0 は非変動時に 1 型サーボ系を構成できるようにループ整形設計法 (LSDP : Loop Shaping Design Procedure)^[14]を用いて積分特性を持つように (3.25) 式で与えた。

$$C_0 = \frac{32.49s^2 + 493.9s + 1691}{s^3 + 266.5s^2 + 2426s} \quad (3.25)$$

3.5.2 設計条件

提案手法 1 にて設計する Q は制御対象の変動に対して 1 型サーボとなるよう (3.26) 式のような構造を持ち、次数を $n = m = 3$ として以下のように定義した。

$$Q(s, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta}) = \frac{\rho_3 s^3 + \rho_2 s^2 + \rho_1 s}{s^3 + \eta_2 s^2 + \eta_1 s + \eta_0} \quad (3.26)$$

また、既約分解要素 N_P, D_P, N_C, D_C は対象が SISO システムであるため $N_P = \tilde{N}_P, D_P = \tilde{D}_P, N_C = \tilde{N}_C, D_C = \tilde{D}_C$ であり、(2.4), (2.5) 式をを満たせば十分であるが、一意に決定するため正規化条件 $N_P^* N_P + D_P^* D_P = 1, N_C^* N_C + D_C^* D_C = 1$ を満たす正規化既約分解^[13] を用いて (3.28) 式のリカッチ方程式^[15] の解より求めた。 P_0 を状態空間表現で (3.27) 式で示す。

$$P_0 = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] \quad (3.27)$$

このパラメータに基づいて (3.28) 式のリカッチ方程式を定義する。

$$A_r Y_r + Y_r A_r^T - Y_r B_r Y_r + C_r = 0 \quad (3.28)$$

$$A_r = A - B D^T \tilde{R}^{-1} C$$

$$B_r = C^T \tilde{R}^{-1} C$$

$$C_r = B R^{-1} B^T$$

ただし、 \tilde{R} は (3.29) 式で与えられる。

$$\tilde{R} = I + D D^T \quad (3.29)$$

ハミルトン行列 H_Y を用いると、(3.28) 式の解 Y_r は (3.30) 式と記述することができる。

$$Y_r = \text{Ric}(H_Y) \quad (3.30)$$

$$H_Y \triangleq \begin{bmatrix} A^T & 0 \\ -B B^T & -A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -C^T \\ B D^T \end{bmatrix} \tilde{R}^{-1} \begin{bmatrix} D B^T & C \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

(3.30) 式は H_Y の固有ベクトルからリカッチ方程式により求めた安定化解である。これらの解を用いて (3.32) 式のゲイン H を定義する。

$$H \triangleq (B D^T + Y_r C^T) \tilde{R}^{-1} \quad (3.32)$$

これらを用いると、既約分解の状態空間表現は (3.33) 式のように与えられる。

$$\left[\begin{array}{c|c} N_P & D_P \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c|c} A_H & B_H & -H \\ \hline \tilde{R}^{\frac{1}{2}} C & \tilde{R}^{\frac{1}{2}} D & \tilde{R}^{\frac{1}{2}} \end{array} \right] \quad (3.33)$$

ここで、 $A_H \triangleq A - HC$ 、 $B_H \triangleq B - HD$ であり、 A_H は安定行列となる。これを用いてノミナルモデル P_0 の既約分解要素 N_P 、 D_P は、(3.34) 式、(3.35) 式のように求まった。

$$N_P = \frac{152.86}{s + 152.9} \quad (3.34)$$

$$D_P = \frac{s + 0.418}{s + 152.9} \quad (3.35)$$

同様に、ノミナル制御器 C_0 の既約分解要素 N_C 、 D_C は、(3.36) 式、(3.37) 式のように求まった。

$$N_C = \frac{35.49(s + 152.9)(s + 7.836)(s + 6.08)}{(s + 234.3)(s + 18.34)(s^2 + 14.27s + 60.15)} \quad (3.36)$$

$$D_C = \frac{s(s + 257.1)(s + 152.9)(s + 9.437)}{(s + 234.3)(s + 18.34)(s^2 + 14.27s + 60.15)} \quad (3.37)$$

(3.2) 式の $\mathbf{G}(s, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta})$ に対するノルム制約に (3.38) 式の重み関数 $\mathbf{W}(s)$ を導入し、 $\mathbf{W}(s)\mathbf{G}(s, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta})$ に対するノルム制約を考える。

$$\mathbf{W}(s) = \begin{bmatrix} W_1 & 0 \\ 0 & W_2 \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

ここで、

$$W_1 = \frac{100}{(s + 100)(s + 0.001)} \quad (3.39)$$

$$W_2 = 10 \quad (3.40)$$

であり、(2.22) 式においても (3.39) 式と (3.40) 式を用いる。すなわち、(3.2) 式の制約式は (3.41) 式のように書き直される。

$$\|\mathbf{W}(s)\mathbf{G}(s, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta})\|_\infty < \Gamma \quad (3.41)$$

この修正により (3.4) 式で定義される \mathbf{Y} は \mathbf{WY} に置き換える必要がある。この重みのゲインが大きい帯域ほど変動時とノミナル時の閉ループ特性が近づくように Q が調整される。設計における繰り返し終了判定は、 Q の設計後に (3.42) 式で定義する評価値の相対誤差 $\epsilon(\Gamma_k)$ が 3 回連続して 0.1% を下回ることとする。繰り返しが終了した時点の設計パラメータ $\boldsymbol{\rho}_k$ 、 $\boldsymbol{\eta}_k$ がこの手法における設計結果となる。

$$\epsilon(\Gamma_k) = \frac{|\Gamma_{k-1} - \Gamma_k|}{\Gamma_{k-1}} \times 100[\%] \quad (3.42)$$

与える初期解は $\boldsymbol{\rho}_0 = \mathbf{0}$ とし, $\boldsymbol{\eta}_0$ は $\frac{1}{D_Q}$ が安定な伝達関数となるよう試行錯誤により求めた (3.43) 式を用いた。

$$\boldsymbol{\eta}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

設計周波数は, 10^{-2} から 10^3 rad/s の区間で対数的に等間隔な 1000 点とした。

3.5.3 シミュレーション結果と考察

従来手法により設計された Youla パラメータ Q_{con} は (3.44) 式となり, 提案手法 1 により設計された Youla パラメータ Q_{pro1} は (3.45) 式となった。

$$Q_{\text{con}}(s) = \frac{-38.664(s + 152.9)^2(s + 99.98)(s - 47.58)(s + 9.261)(s + 3.03)}{(s + 236.5)(s + 211.3)(s + 149.8)(s + 99.98)(s + 7.15)} \cdot \frac{(s + 0.0009999)(s^2 + 21.62s + 117.5)(s^2 + 479.4s + 5.899 \times 10^4)}{(s + 3.98)(s^2 + 21.59s + 117)(s^2 + 23.23s + 152.9)(s^2 + 1.028s + 2968)} \quad (3.44)$$

$$Q_{\text{pro1}}(s) = \frac{-0.81493s(s - 119.6)(s + 0.5454)}{(s + 0.6639)(s^2 + 18.35s + 121.3)} \quad (3.45)$$

従来手法と提案手法 1 により設計された Q の間に次数に差があるため, 低次元化により, (3.46) 式の 3 次の Q_{red} を算出する。

$$Q_{\text{red}}(s) = \frac{-5.5983(s - 2153)(s - 575.5)(s - 0.01273)}{(s + 4.025 \times 10^4)(s^2 + 1.008s + 2966)} \quad (3.46)$$

両手法により設計された Q を用いた際の評価値を表 3.2 に示す。両手法により設計された Q を用いることで Q の補償を加わり, Γ が小さくなっている。しかし, 3 次に低次元化された Q_{red} を用いると補償を加える前よりも評価値が大きくなっていることがわかる。 Γ が小さいほど制御対象の変動である性能劣化項 Δ_R の影響を抑制するため, 制御対象の変動時においてもノミナル時に近い閉ループ特性を実現できることを意味している。この結果から, 従来手法が提案手法 1 よりも小さい値となっているが, 従来手法で設計された Q_{con} の次数は 12 次と高次数であったため, 従来手法では実装面におけるコストの増大の問題も生じると考えられる。これは, 設計に用いた R の次数が 6 次であり, R の次数に基づいて Q_{con} が設計されたためと考えられる。これに対し, 提案

表 3.2: 各手法における評価値の比較

	Evaluation value Γ
Without compensation	7.328
Conventional method	5.406
Conventional method (Reduced)	7.379
Proposed method 1	5.689

手法 1 では R の周波数応答を用いることで設計者が決めた任意の固定次数での Q_{pro1} の設計を実現している。そして、提案手法 1 で設計した Q_{pro1} の次数に合わせて Q_{con} を低次元化した Q_{red} は補償前よりも評価値が大きい値となっている。この結果から、低次数での設計が可能な提案手法 1 の有効性がわかる。これにより、従来手法の問題点であった Q の高次元化を解決でき、従来手法と同等の結果を得られる。次に、図 3.3 に設計周波数領域での $\mathbf{G}(j\omega)$ の最大特異値を示す。図 3.3 から両手法とも同様な特性を示しており、両手法とも $\mathbf{G}(j\omega)$ の最大特異値が小さくなっていることがわかる。しかし、 Q_{red} を用いた場合、補償前と同様な特性となっている。これは、低次元化により Q の補償性能が劣化したためと考えられる。そのため、補償前からの閉ループ特性の改善は期待できない。次に、それぞれの手法により設計された Q を用いた際に得られる $\mathbf{G}(j\omega)$ のゲイン線図を図 3.4 に示す。 Q の補償を加えた \mathbf{G}_{yr} と \mathbf{G}_{ud} のゲイン特性が同様な特性を示していることがわかる。図 3.4 の左上 \mathbf{G}_{yr} は、ノミナル時からの相補感度関数の変動分を示しており、図 3.4 の右下 \mathbf{G}_{ud} は、ノミナル時からの感度関数の変動分を示している。(3.5) 式において、 $\mathbf{Z} = \text{diag}(U, U)$ であるため、 \mathbf{G}_{yr} と \mathbf{G}_{ud} の違いは $\mathbf{Y}(1, 1)$ と $\mathbf{Y}(2, 2)$ の違いになる。そのため、(3.5) 式より両者の違いは符号のみであることがわかり、同様なゲイン特性は示している。図 3.4 から、 Q の補償を加えた \mathbf{G}_{yr} と \mathbf{G}_{ud} のゲイン特性が抑制されていることがわかる。そのため、この結果に対応するように閉ループ特性 T_{yr} と T_{ud} の改善も期待される。一方で、 \mathbf{G}_{yd} と \mathbf{G}_{ur} のゲイン特性では大きな変動抑制は見られなかった。これは、設計に用いた周波数重み関数 $\mathbf{W}(s)$ の構造が原因と考えられる。 $\mathbf{W}(s)$ は設計者が任意に設計するため、 $\mathbf{W}(s)$ の構造によって抑制される $\mathbf{G}(j\omega)$ のゲイン特性が変化する。そのため、 $\mathbf{W}(s)$ を最適に設計することでより良好な結果が得られると考えられる。次に、それぞれの手法により設計された Q を用いた際の閉ループ特性 T_{yr} , T_{yd} , T_{ur} , T_{ud} をそれぞれ図 3.5, 3.6, 3.7,

3.8 に示す。従来手法，提案手法共に $\mathbf{G}(j\omega)$ のゲイン特性と対応するように T_{yr} , T_{ud} では補償によりノミナル時に近い閉ループ特性が整形されている。一方で， T_{ur} , T_{yd} では閉ループ特性が劣化し，ノミナル特性と大きく異なる特性となっている。この原因は， $\mathbf{G}(j\omega)$ のゲイン特性の際に述べた理由と同様に， $\mathbf{W}(s)$ の構造によって改善される閉ループ特性が変わるため， $\mathbf{W}(s)$ を最適に設計することでより良好な結果が得られると考えられる。

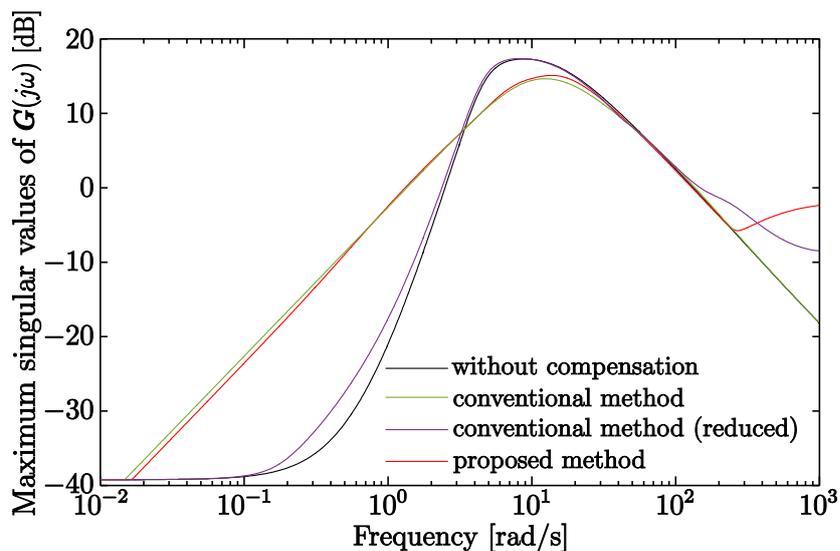


図 3.3: 設計周波数における $G(j\omega)$ の最大特異値プロット

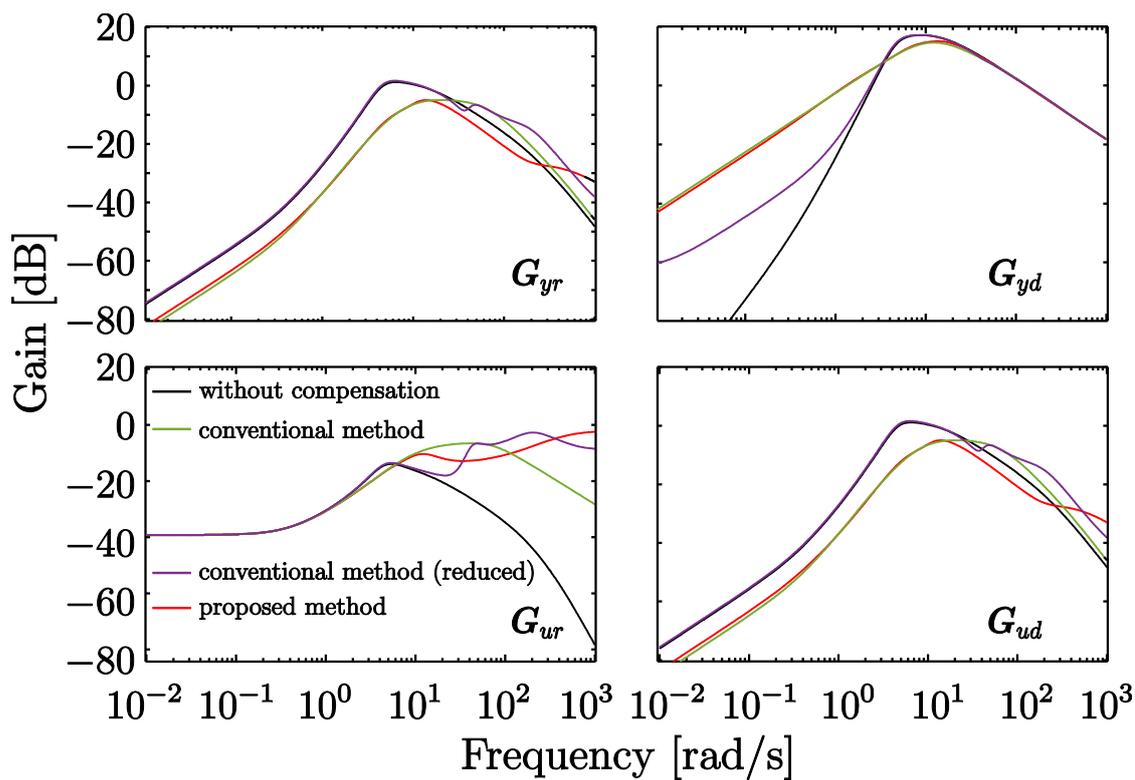


図 3.4: $G(j\omega)$ のゲイン特性

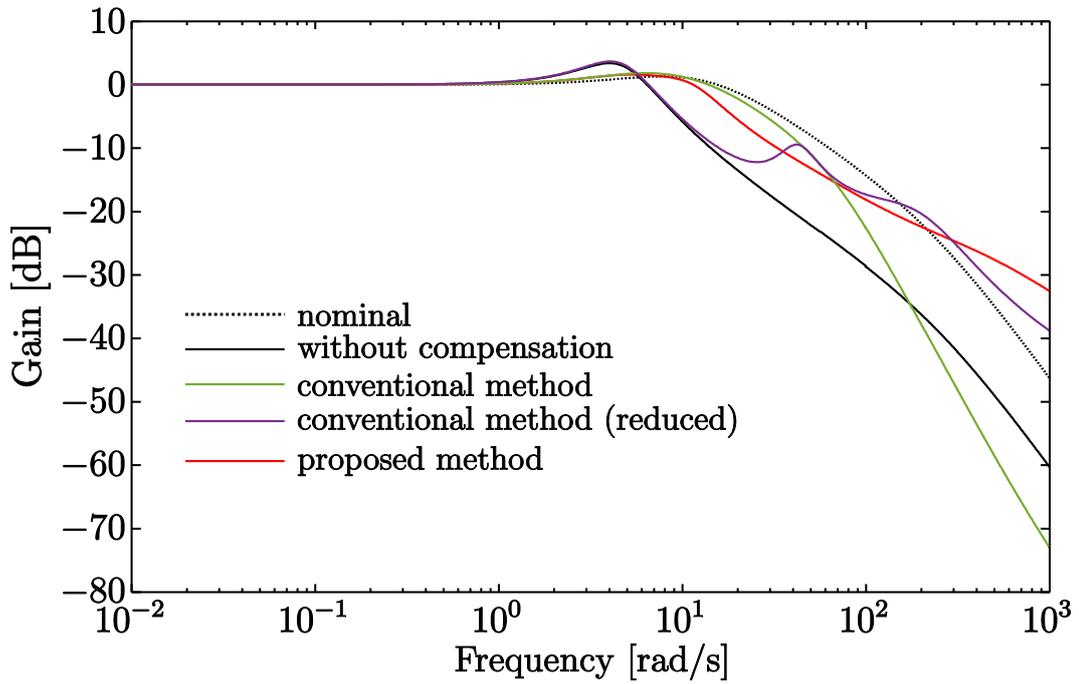


図 3.5: T_{yr} のゲイン特性

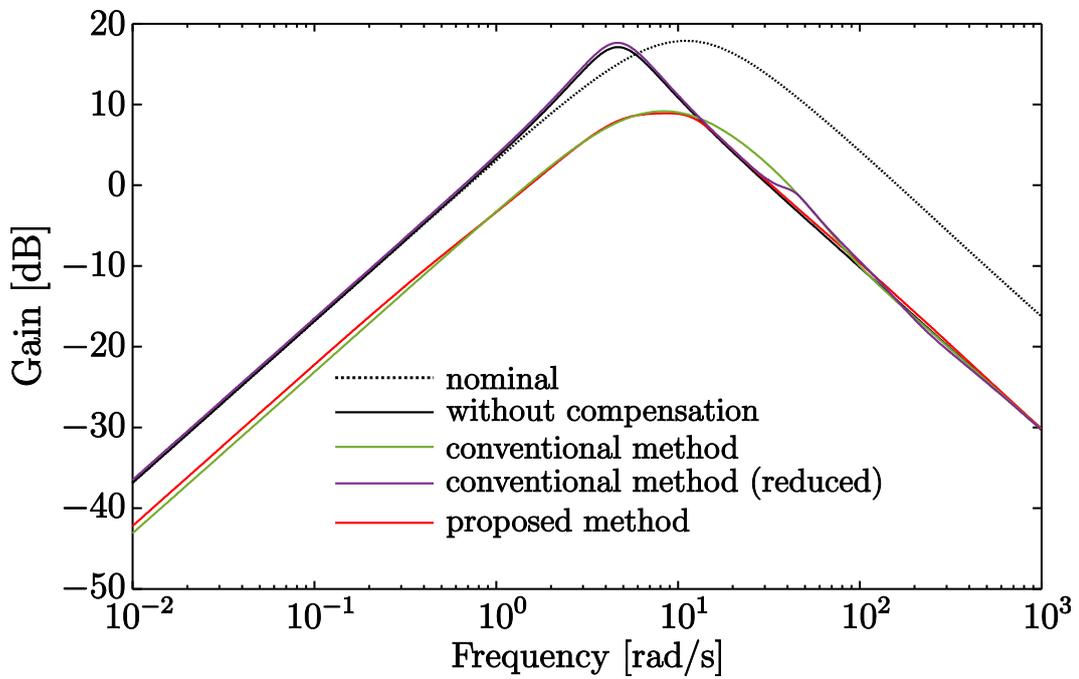


図 3.6: T_{yd} のゲイン特性

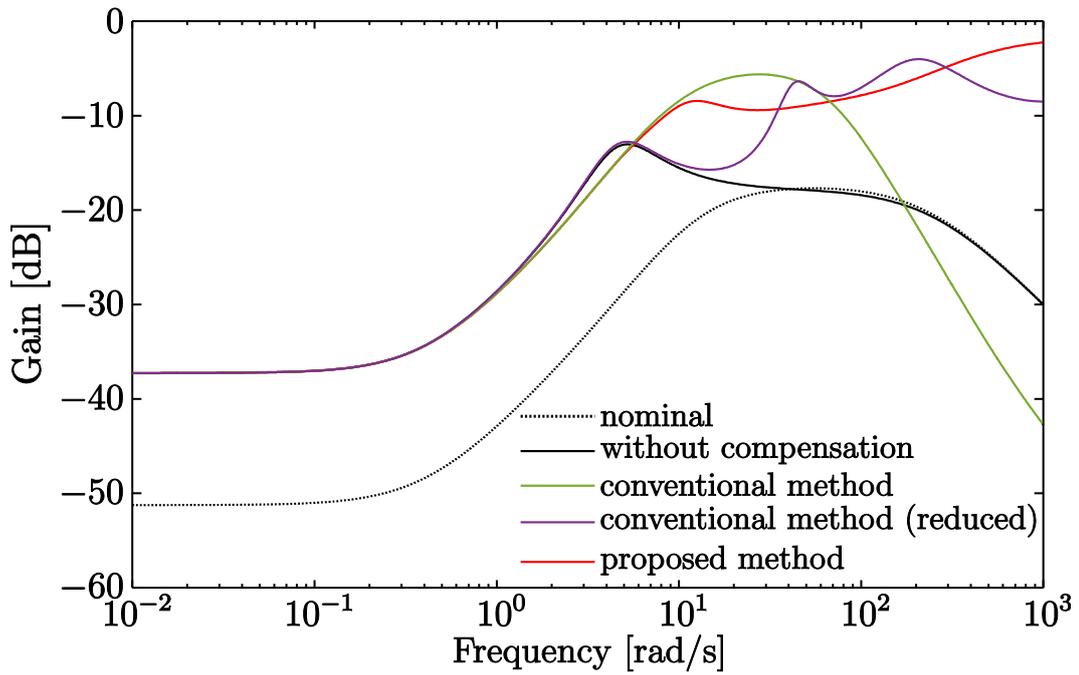


図 3.7: T_{ur} のゲイン特性

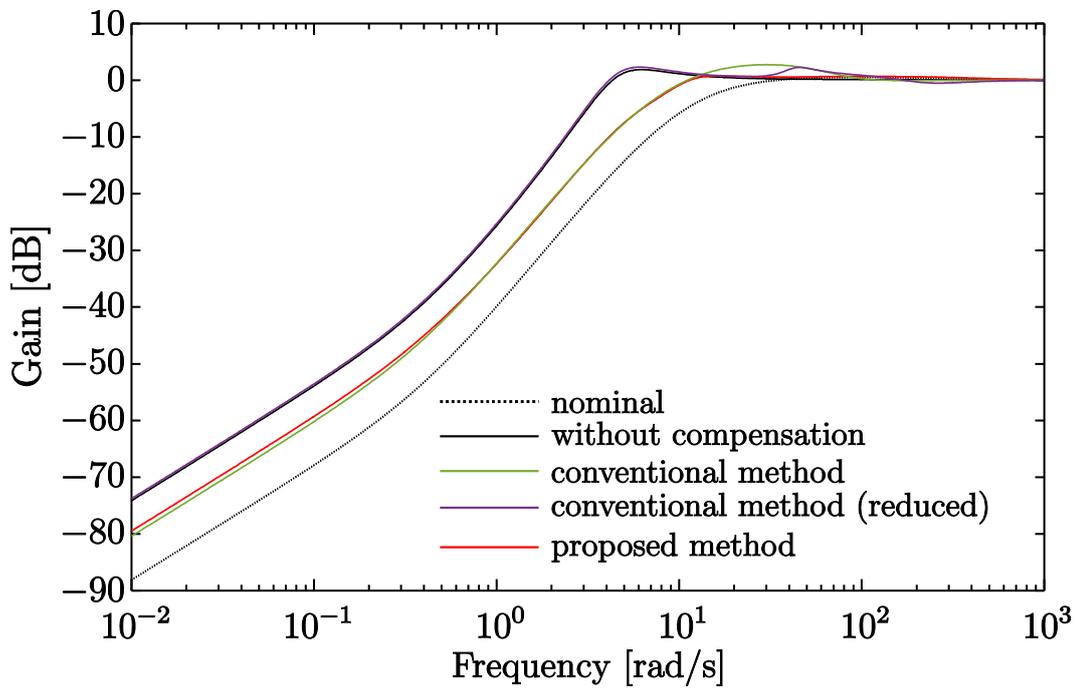


図 3.8: T_{ud} のゲイン特性

3.6 実機検証

本節では、二慣性共振速度装置に対する設計を通して従来手法と提案手法 1 を比較し、提案手法 1 の有効性を示す。

3.6.1 制御対象

実験装置の外観を図 3.9 に示す。本実験装置は、プーリと負荷ディスクの間がバネ特性を持つフレキシブルベルトにより連結されておりバネによる復元力が駆動ディスクに影響し共振を持つシステムとなっている。さらに、駆動ディスクと負荷ディスクに付けられた錘の位置や数により、共振周波数が変化するシステムである。なお、この制御対象は不安定極を持たないものとする。



図 3.9: 実験装置

3.6.2 設計条件

非変動時である制御対象のノミナルモデル P_0 は (3.47) 式のように与えた。

$$P_0 = \frac{30170}{s^2 + 417.4s + 1127} \quad (3.47)$$

非変動時の制御対象はプーリと負荷ディスクが剛体ベルトでつながれたシステムを模擬した剛体モデルとした。また、変動時の制御対象は図 3.9 に示した装置の錘の位置を

変えた状態とする。 P_0 を安定化するノミナルコントローラ C_0 は (3.48) 式のように与えた。

$$C_0 = \frac{0.9315s^2 + 3.162s + 4.261}{s^2 + 1.798s} \quad (3.48)$$

また、既約分解要素 N_P , D_P , N_C , D_C は対象が SISO システムであるため、3.5.2 節と同様に求め、以下のように与えた。

$$N_P = \frac{30170}{(s + 408)(s + 73.99)} \quad (3.49)$$

$$D_P = \frac{(s + 414.7)(s + 2.718)}{(s + 408)(s + 73.99)} \quad (3.50)$$

$$N_C = \frac{0.93149(s + 408)(s + 73.99)(s^2 + 3.395s + 4.574)}{(s + 329)(s + 86.9)(s^2 + 3.343s + 4.497)} \quad (3.51)$$

$$D_C = \frac{s(s + 408)(s + 73.99)(s + 1.798)}{(s + 329)(s + 86.9)(s^2 + 3.343s + 4.497)} \quad (3.52)$$

(3.2) 式の $\mathbf{G}(s, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta})$ に対するノルム制約に (3.53) 式の重み関数 $\mathbf{W}(s)$ を導入する。

$$\mathbf{W}(s) = \begin{bmatrix} W_1 & 0 \\ 0 & W_2 \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

ここで、

$$W_1 = \frac{10(s + 1)}{s + 0.1} \quad (3.54)$$

$$W_2 = 10 \quad (3.55)$$

である。この重みのゲインが大きい帯域ほど変動時とノミナル時の閉ループ特性が近づくように Q が調整される。設計における繰り返し終了判定は、3.5.2 節と同様である。繰り返しが終了した時点の設計パラメータ $\boldsymbol{\rho}_k$, $\boldsymbol{\eta}_k$ がこの手法における設計結果となる。与える初期解は $\boldsymbol{\rho}_0 = \mathbf{0}$ とし、 $\boldsymbol{\eta}_0$ は $\frac{1}{D_Q}$ が安定な伝達関数となるよう試行錯誤により求めた (3.56) 式を用いた。

$$\boldsymbol{\eta}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

設計周波数は、0.01 から 300 rad/s の区間で対数的に等間隔な 1000 点とした。変動における制御対象の周波数応答を取得するため、変動時の制御対象と C_0 で構成される閉ループ系に対して (3.57) 式で示した入力信号を C_0 の既約分解要素 N_C^{-1} でフィルタリングした連続的に変化するサインスイープ信号を駆動ディスクに接続されたモータへを与えた。

$$v(t) = 9 \sin \left(\frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{T_c} + \omega_{\min} \right) t \quad (3.57)$$

なお、 $v(t)$ は $T_c = 100$ s 間で $\omega_{\min} = 0.01$ rad/s から $\omega_{\max} = 300$ rad/s まで周波数が連続的に変化する振幅 9 V のサインスイープ信号である。これにより取得した双対 Youla パラメータの周波数応答プロットと従来手法で用いるために同定した双対 Youla パラメータのゲイン線図を図 3.10 に示す。

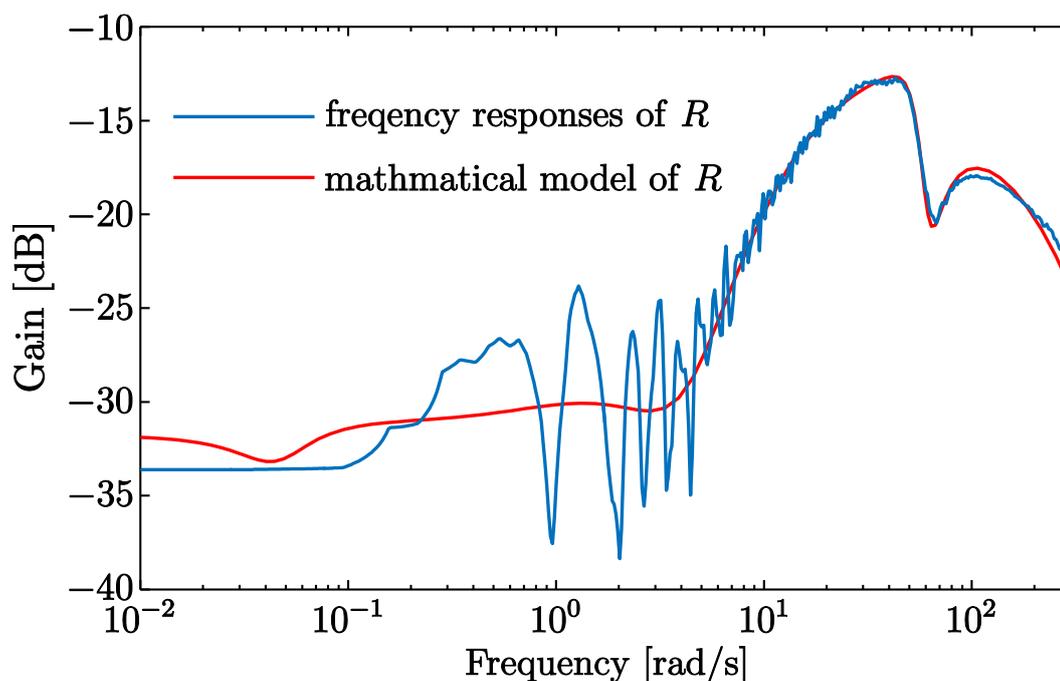


図 3.10: R の周波数応答プロットと同定した R のゲイン線図

3.6.3 設計結果と考察

提案手法 1 により設計された Youla パラメータ Q_{pro1} は (3.58) 式となり，従来手法により設計された Youla パラメータ Q_{con} は 22 次となった。

$$Q_{\text{pro1}}(s) = \frac{-0.136s(s - 37.01)(s + 16.18)}{s(s^2 + 10.51s + 1781)} \quad (3.58)$$

従来手法と提案手法 1 により設計された Q の間に次数に差があるため，低次元化により，(3.59) 式の 3 次の Q_{red} を算出する。

$$Q_{\text{red}}(s) = \frac{-0.00568(s + 444)(s - 135.5)(s + 0.1194)}{(s + 1.605)(s^2 + 7.439s + 2123)} \quad (3.59)$$

両手法により設計された Q を用いた際の評価値を表 3.3 に示す。両手法により設計さ

表 3.3: 各手法における評価値の比較

	Evaluation value Γ
Without compensation	0.520
Conventional method	0.459
Conventional method (Reduced)	0.467
Proposed method 1	0.455

れた Q を用いることで Q の補償を加わり， Γ が小さくなっている。また， Q_{red} を用いた際も Γ が小さくなった。3.5 節と同様に，評価値 Γ が小さいほど制御対象の変動である性能劣化項 Δ_R の影響を抑制するため，制御対象の変動時においてもノミナル時に近い閉ループ特性を実現できることを意味している。表 3.3 の結果から提案手法 1 が従来手法よりもわずかに小さい値となっている。これは， R をモデル化した際のモデル化誤差による影響と考えられる。提案手法 1 は R の周波数応答から Q を直接設計するため，モデル化誤差の影響を受けず，さらに固定次数での設計が可能である。これに対し，従来手法では補償前よりも評価値が小さくなっているが，提案手法 1 よりも大きい値となっている。さらに Q_{con} の次数は 22 次と高次数であったため，従来手法では実装面におけるコストの増大の問題も生じると考えられる。これは，設計に用いた R の次数が 9 次であり， R の次数に基づいて Q_{con} が設計されたためと考えられる。そして，提案手法 1 で設計した Q_{pro1} の次数に合わせて Q_{con} を低次元化した Q_{red} は補償前より

も評価値が小さくなっているが、提案手法 1 よりも大きい値となっている。この結果から、低次数での設計が可能な提案手法 1 の有効性がわかる。これにより、従来手法の問題点であった Q の高次数化を解決でき、従来手法と同等かまたはそれ以上の結果を得られる。次に、図 3.3 に設計周波数領域での $\mathbf{G}(j\omega)$ の最大特異値を示す。図 3.3 から両手法とも同様な特性を示しており、両手法とも表 3.3 の結果の通り、 $\mathbf{G}(j\omega)$ の最大特異値が小さくなっていることがわかる。次に、それぞれの手法により設計された Q を用いた際に得られる $\mathbf{G}(j\omega)$ のゲイン線図を図 3.4 に示す。 Q の補償を加えた \mathbf{G}_{yr} と \mathbf{G}_{ud} のゲイン特性が同様な特性を示していることがわかる。この原因は 3.5.3 節で述べた通りである。図 3.4 から、 Q の補償を加えた \mathbf{G}_{yr} と \mathbf{G}_{ud} のゲイン特性が 30 rad/s 付近でゲインが抑制されていることがわかる。そのため、30 rad/s 付近で T_{yr} と T_{ud} の特性が改善されることが期待できる。一方で、 \mathbf{G}_{yd} と \mathbf{G}_{ur} のゲイン特性では 30 rad/s 付近でゲインが大きくなっている。これは、設計に用いた周波数重み関数 $\mathbf{W}(s)$ の構造が原因と考えられる。 $\mathbf{W}(s)$ は設計者が任意に設計するため、 $\mathbf{W}(s)$ の構造によって抑制される $\mathbf{G}(j\omega)$ のゲイン特性が変化する。そのため、今回用いた $\mathbf{W}(s)$ で設計する場合は \mathbf{G}_{yr} と \mathbf{G}_{ud} を抑制することで $\mathbf{G}(j\omega)$ の最大特異値を最小化したと考えられる。この結果から、 $\mathbf{W}(s)$ を最適に設計することでより良好な結果が得られると考えられる。次に、それぞれの手法により設計された Q を用いた際の閉ループ特性 T_{yr} , T_{yd} , T_{ur} , T_{ud} をそれぞれ図 3.5, 3.6, 3.7, 3.8 に示す。従来手法、提案手法 1 共に $\mathbf{G}(j\omega)$ のゲイン特性と対応するように T_{yr} , T_{ud} では補償により 30 rad/s 付近で閉ループ特性が改善され、ノミナル特性に近づいていることがわかる。一方で、 T_{ur} , T_{yd} では閉ループ特性が 30 rad/s 付近で補償前よりも閉ループ特性が劣化している。この原因は、 $\mathbf{G}(j\omega)$ のゲイン特性の考察で述べた理由と同様に、 $\mathbf{W}(s)$ の構造によって改善される閉ループ特性が変わるため、 $\mathbf{W}(s)$ を最適に設計することでより良好な結果が得られると考えられる。

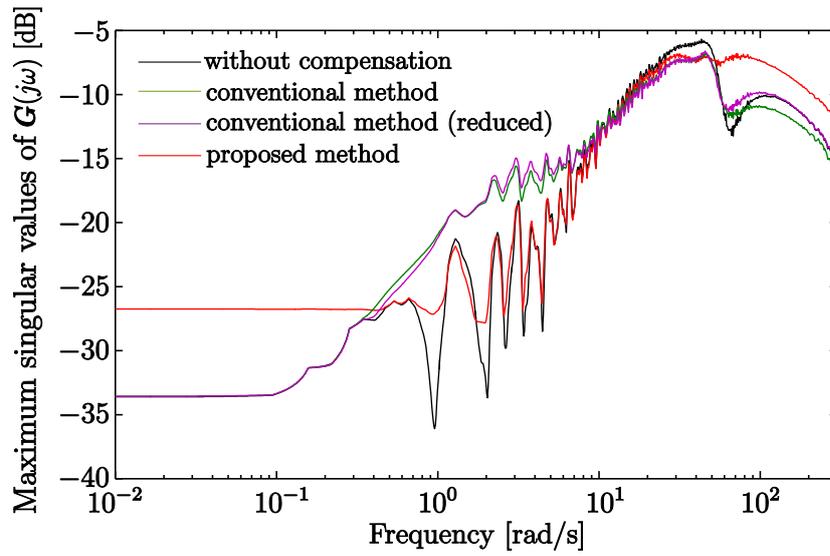


図 3.11: 設計周波数における $G(j\omega)$ の最大特異値プロット

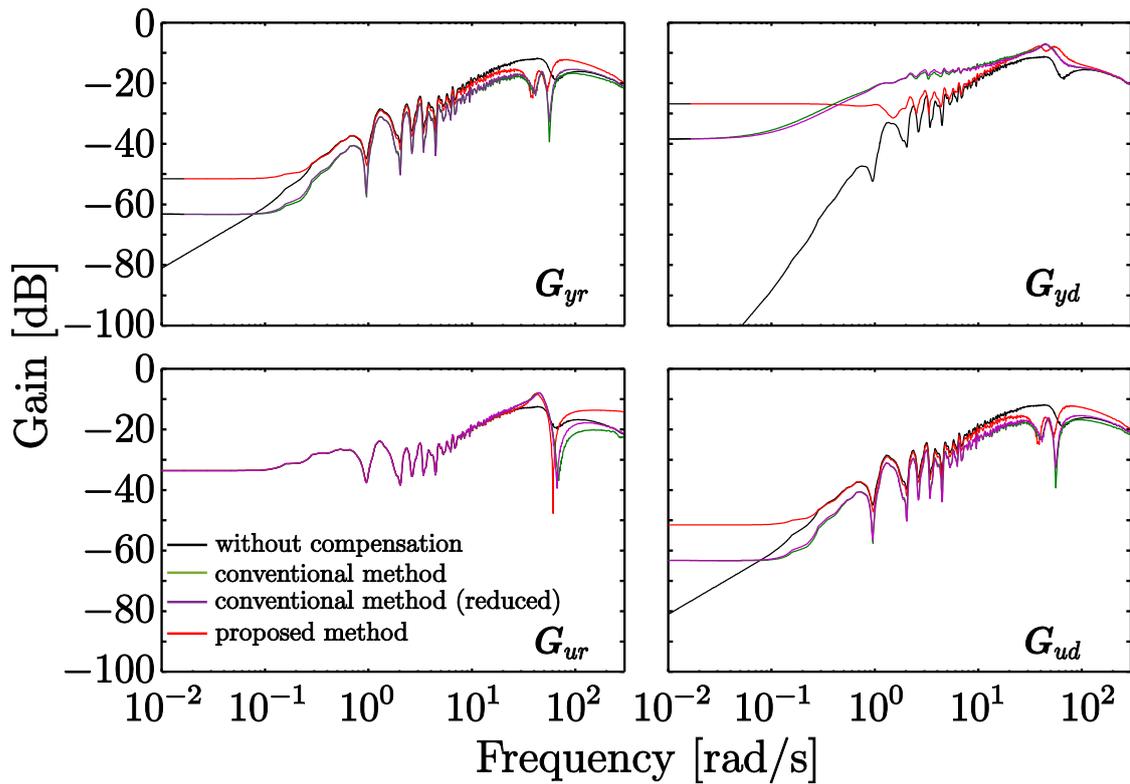


図 3.12: $G(j\omega)$ のゲイン特性

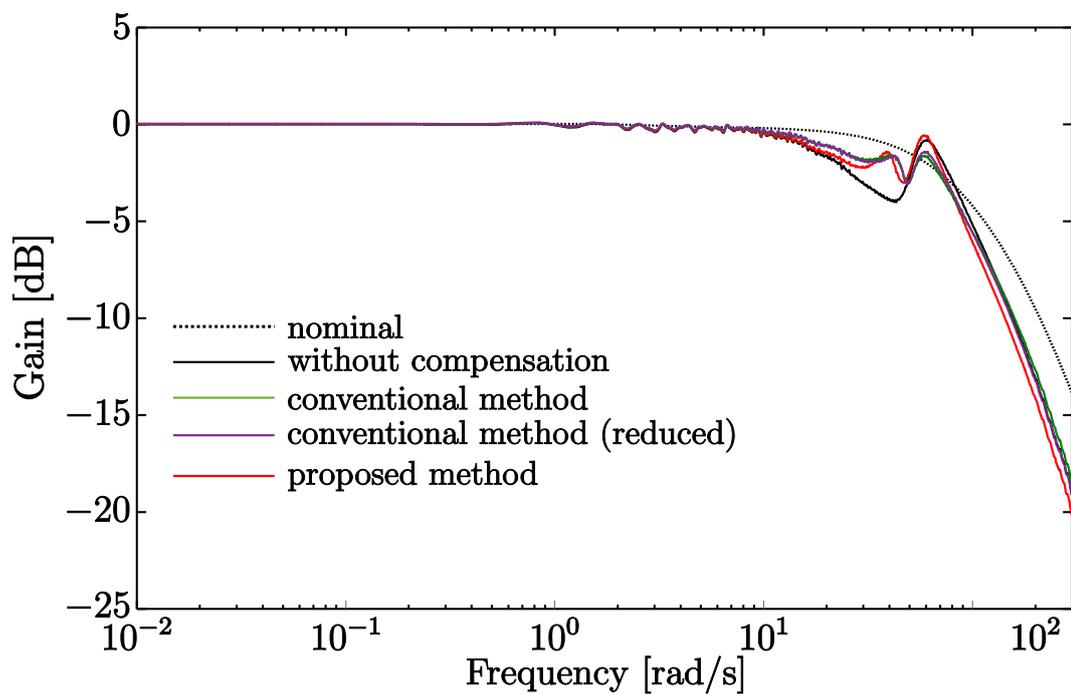


図 3.13: T_{yr} のゲイン特性

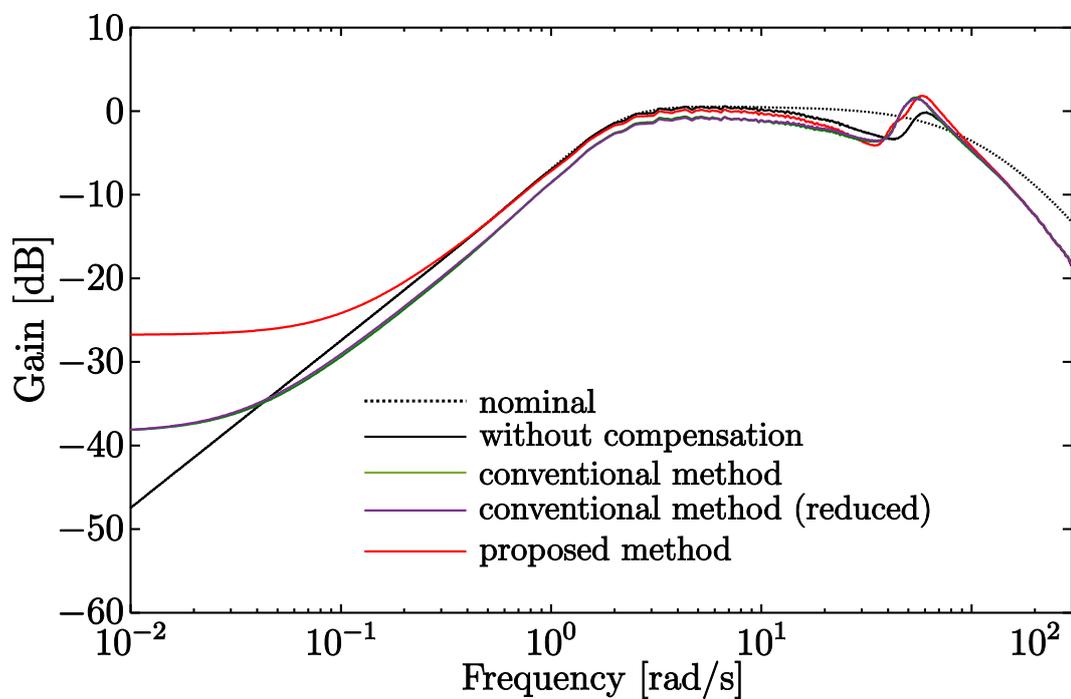


図 3.14: T_{yd} のゲイン特性

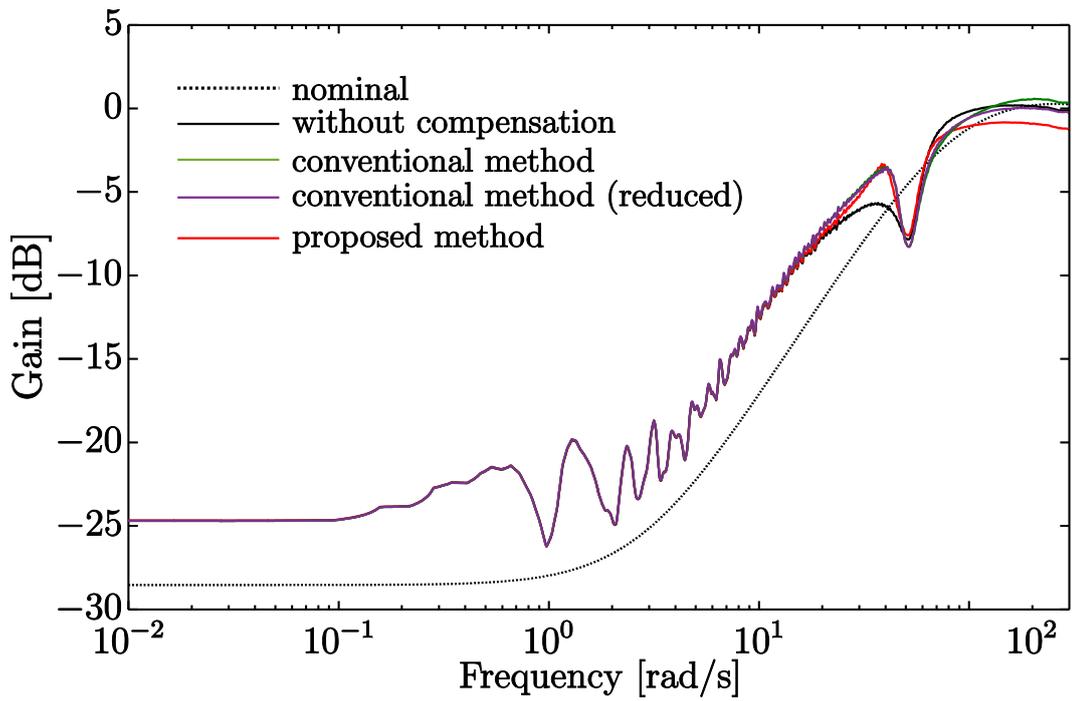


図 3.15: T_{ur} のゲイン特性

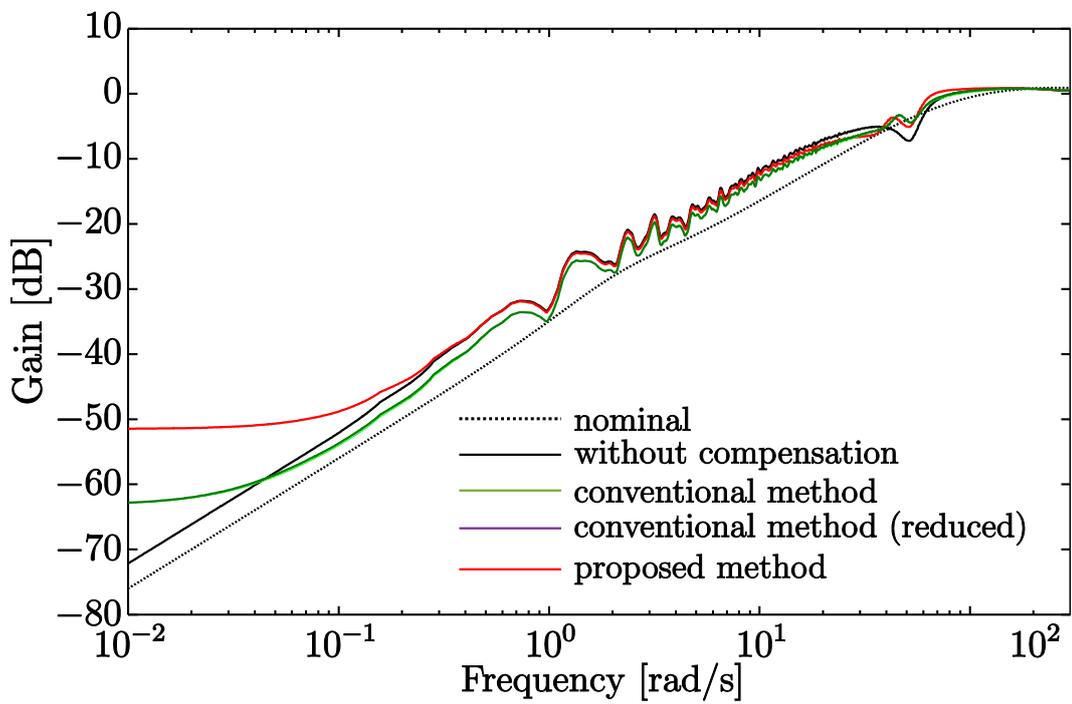


図 3.16: T_{ud} のゲイン特性

3.7 周波数応答を用いた固定次数 Youla パラメータの設計法の問題点

本章では、文献 [5] で提案された双対 Youla パラメータ R の数式モデルに基づく Youla パラメータ Q の問題点を解決する周波数応答を用いた固定次数 Youla パラメータの設計法について述べた。そして、それぞれの手法では Q の設計に周波数重み関数 $\mathbf{W}_d(s)$, $\mathbf{W}(s)$ を用いて $\mathbf{G}(s)$ のゲイン特性を抑制していた。両手法で用いた周波数重みは対角行列となっているため、非対角要素も考えることでさらに自由度を増やすことが可能となるが、それぞれの周波数重み関数の設計は近づきたい変動時とノミナル時の閉ループ特性の帯域に周波数重み関数のゲイン特性が大きくなるように設計者が任意に設計しており、周波数重みの設計には煩雑さが伴う。そのため、周波数重みの設計に伴う煩雑さを低減する必要がある。

次に、文献 [16] で述べられている制御器設計の設計指標である性能レベル γ に着目する。性能レベル γ は 4 つの閉ループ特性を用いて (3.60) 式で表される。

$$\gamma = \left\| \left\| \begin{bmatrix} T_{yr} & T_{yd} \\ T_{ur} & T_{ud} \end{bmatrix} \right\| \right\|_{\infty} \quad (3.60)$$

(3.60) 式からノミナル時の性能レベルは $\|T(P_0, C_0)\|_{\infty}$, 変動時の性能レベルは $\|T(P, C_0)\|_{\infty}$, 補償時の性能レベルは $\|T(P, C)\|_{\infty}$ と表される。これから 3.6.3 節で得られた $\mathbf{G}(j\omega)$ の最大特異値 $\bar{\sigma}(\mathbf{G}(j\omega))$ とそれぞれの場合の性能レベルを表 3.4 に示す。提案手法 1 では

表 3.4: 性能レベル

	$\bar{\sigma}(\mathbf{G}(j\omega))$	γ
Nominal performance	0	1.586
Without compensation	0.520	1.726
Conventional method	0.459	1.691
Proposed method 1	0.455	1.886

$\mathbf{G}(j\omega)$ の最大特異値を評価しているため、最も小さい値を実現している。しかし、性能レベルの評価では提案手法 1 が最も大きい値となっている。この結果に対し、(2.17)

式とノルムの三角不等式の関係^[13]から (3.61) 式の間係を考える。

$$\begin{aligned} \|\mathcal{T}(P, C)\|_{\infty} &= \|\mathcal{T}(P_0, C_0) + \mathbf{G}\|_{\infty} \\ &\leq \|\mathcal{T}(P_0, C_0)\|_{\infty} + \|\mathbf{G}\|_{\infty} \end{aligned} \quad (3.61)$$

(3.61) 式の間係から $\mathbf{G}(j\omega)$ の最大特異値を評価する設計問題から得られた性能レベルは (3.61) 式の間係を満たしているため、 $\mathbf{G}(j\omega)$ の最大特異値が小さい場合においても補償後の性能レベルの値が補償前の値から大きくなる可能性は十分考えられる。また、文献 [16] において $\gamma \leq 4$ が推奨されており、制御性能としては十分であると考えられる。しかし、本研究の目的はノミナル時の制御性能を実現することであり、ノミナル時の性能レベル $\gamma = 1.586$ を実現する Youla パラメータ Q を設計することである。しかし、3 章の設計問題では、 $\mathbf{G}(j\omega)$ のみの評価となっており、ノミナル時の閉ループ特性や性能レベル γ との間係は明確に示されていない。そのため、設計結果によっては制御対象の変動を抑制しても 4 つの閉ループ特性がノミナル時に近い特性を整形しているか保証されていないという問題がある。そのため、制御対象の変動抑制とノミナル時の閉ループ特性や性能レベルとの間係を示す Youla パラメータ Q の設計問題を考える必要がある。

第4章 周波数応答を用いた ν -gapに基づく固定次数 Youlaパラメータの設計

3章で提案した周波数応答を用いた固定次数 Youla パラメータの設計法において、ノミナル性能からの変動である $G(j\omega)$ の最大特異値を周波数応答を用いて評価していたが、制御器設計の設計指標の1つである性能レベルの評価では Youla パラメータの補償を加える前よりも性能レベルの値が大きくなり、制御性能が劣化する可能性があった。そのため、Youla パラメータの設計において変動抑制と性能レベルの関係を明確にする必要があった。そこで、新たに周波数応答を用いた ν -gap に基づく固定次数 Youla パラメータの設計法を記述する。本章では、3章で述べた手法の問題点を解決すべく、新たに以下の利点を有する。

- 閉ループ特性の周波数特性の違いを距離として直接評価可能である
- 変動抑制と性能レベルの関係を明確に表現可能である

なお、本章では SISO システムを対象とする。

4.1 ν -gap

本節では ν -gap^[16] の定義と制御器設計に用いられる設計指標である閉ループシステムの性能レベル γ との関係性を述べ、 ν -gap の導入により、少なくとも達成可能な性能レベル γ の上界が算出可能であることを示す。まず、この設計法の根幹をなす ν -gap について示す。 ν -gap は2つの安定なシステムの周波数特性の違いを距離として表す指標であり、ある2つの安定なシステム z_1, z_2 に対して図4.1に示される Riemann 球面上に投影された2つの複素数の距離の最大値 δ_ν に相当する。なお、図4.1における z'_1 および z'_2 は2つの複素数 z_1 および z_2 の Riemann 球面上への射影であり、複素数 $z = x + iy$ に

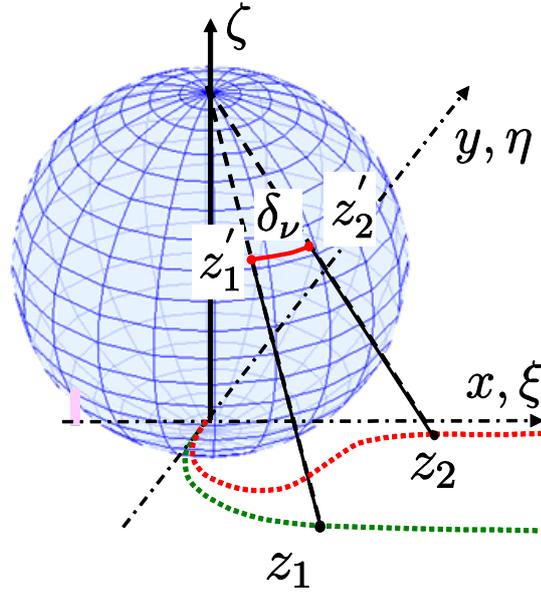


図 4.1: Riemann 球面

対して，射影後の座標 ξ , η , ζ は以下のように得られる。

$$\xi = \frac{x}{x^2 + y^2 + 1}, \quad \eta = \frac{y}{x^2 + y^2 + 1}, \quad \zeta = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + 1}$$

したがって，小さな ν -gap は 2 つのシステムの Nyquist 線図上での距離，すなわち周波数特性が近いことを意味する。また，ある 2 つの安定システム \mathbf{T} , \mathbf{T}_0 に対して ν -gap は (4.1) 式で定義される。

$$\delta_\nu(\mathbf{T}, \mathbf{T}_0) = \sup_\omega \bar{\sigma}(\mathbf{V}(j\omega)) \quad (4.1)$$

ここで，

$$\mathbf{V}(j\omega) = (\mathbf{I} + \mathbf{T}_0(j\omega)\mathbf{T}_0(j\omega)^*)^{-1/2}(\mathbf{T}_0(j\omega) - \mathbf{T}(j\omega))(\mathbf{I} + \mathbf{T}(j\omega)^*\mathbf{T}(j\omega))^{-1/2}$$

である。また，文献 [16] では，(4.2) 式を満たし，2 つのシステム \mathbf{T}_0 , \mathbf{T} を共に安定化する制御器 $\tilde{\mathbf{C}}$ が存在することが述べられている。

$$\arcsin \frac{1}{\gamma_{\max}(\mathbf{T}, \tilde{\mathbf{C}})} = \arcsin \frac{1}{\gamma(\mathbf{T}_0, \tilde{\mathbf{C}})} - \arcsin \delta_\nu(\mathbf{T}, \mathbf{T}_0) \quad (4.2)$$

(4.2) 式より $\delta_\nu(\mathbf{T}, \mathbf{T}_0)$ と \mathbf{T}_0 に対する性能レベル $\gamma(\mathbf{T}_0, \tilde{\mathbf{C}})$ が既知であれば， \mathbf{T} に対する性能レベル $\gamma(\mathbf{T}, \tilde{\mathbf{C}})$ の上界 $\gamma_{\max}(\mathbf{T}, \tilde{\mathbf{C}})$ が計算可能であることが分かり，性能レベル $\gamma(\mathbf{T}, \tilde{\mathbf{C}})$ は $\gamma_{\max}(\mathbf{T}, \tilde{\mathbf{C}}) \geq \gamma(\mathbf{T}, \tilde{\mathbf{C}})$ の値となることが期待される。つまり， \mathbf{T}_0 を安定化する制御器 $\tilde{\mathbf{C}}$ が既知であれば， \mathbf{T} に対する安定化制御器を設計しなくても， γ の上界である $\gamma_{\max}(\mathbf{T}, \tilde{\mathbf{C}})$

を算出可能であり、 ν -gap が小さいならば $\gamma(\mathbf{T}, \tilde{\mathbf{C}})$ と $\gamma(\mathbf{T}_0, \tilde{\mathbf{C}})$ は近い値となる。以上より、 ν -gap が小さい 2 つのシステムは周波数特性のみならず、性能レベル γ においても近い特性を示すことを意味する。

4.2 設計問題の再設定

新たに提案する周波数応答を用いた ν -gap に基づいた固定次数 Youla パラメータの設計法について説明する。

4.2.1 設計問題の定式化

本章で設計する Youla パラメータの構造を 3 章と同様にパラメータベクトル $\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta}$ に対して線形な多項式 $N_Q(s, \boldsymbol{\rho})$ と $D_Q(s, \boldsymbol{\eta})$ の比として定義する。本章での提案手法を提案手法 2 と表記し、提案手法 2 では、(2.14) 式のノミナル時の閉ループシステムと (2.17) 式の補償時の閉ループシステムの ν -gap を最小化する Youla パラメータを設計する。以降では、(2.14) 式と (2.17) 式をそれぞれ \mathbf{T}_0, \mathbf{T} と表記する。 \mathbf{T} を制御対象と見なし、 \mathbf{T} の安定化制御器 $\tilde{\mathbf{C}}$ を用いた閉ループシステムを考え、 $\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{0}$ とすると $\gamma_{\max}(\mathbf{T}, \mathbf{0})$ と実際に評価したい閉ループシステムの性能レベルの上界 $\gamma_{\max}(P, C)$ の関係は最大特異値の関係^[13]から (4.3) 式となる。

$$\gamma_{\max}(\mathbf{T}, \mathbf{0})^2 = 1 + \gamma_{\max}(P, C)^2 \quad (4.3)$$

同様に、ノミナル時においても $\tilde{\mathbf{C}}$ を用いた閉ループシステムを考え、 $\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{0}$ とすると、(4.4) 式の関係がある。

$$\gamma(\mathbf{T}_0, \mathbf{0})^2 = 1 + \gamma(P_0, C_0)^2 \quad (4.4)$$

つまり、 \mathbf{T}_0 と \mathbf{T} の ν -gap である $\delta_\nu(\mathbf{T}, \mathbf{T}_0)$ が小さいとき、(4.2) 式から $\gamma_{\max}(\mathbf{T}, \mathbf{0})$ と $\gamma(\mathbf{T}_0, \mathbf{0})$ が近い値となり、(4.3) 式と (4.4) 式から $\gamma_{\max}(P, C)$ と $\gamma(P_0, C_0)$ が近い値となる。さらに、 $\gamma_{\max}(P, C) \geq \gamma(P, C)$ の関係が保証されるため、 $\delta_\nu(\mathbf{T}, \mathbf{T}_0)$ が小さい値であれば制御対象の変動時においてもノミナル時に近い性能レベルを実現できる。 \mathbf{T}_0 と \mathbf{T} の ν -gap を最小化する設計は変数 δ を $\delta_\nu(\mathbf{T}, \mathbf{T}_0)$ の上界として導入し、 δ の最小化を行うことで実現できる。 ν -gap を最小化する設計問題は (4.5) 式のように記述できる。

$$\min_{\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta}} \delta$$

subject to

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}(\mathbf{V}(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta})) &< \delta \\ \text{for } i &= 1, \dots, N \end{aligned} \quad (4.5)$$

ここで,

$$\mathbf{V}(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta}) = (\mathbf{I} + \mathbf{T}_0(j\omega_i)\mathbf{T}_0(j\omega_i)^*)^{-1/2}(\mathbf{T}_0(j\omega_i) - \mathbf{T}(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta}))(\mathbf{I} + \mathbf{T}(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta})^*\mathbf{T}(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta}))^{-1/2}$$

である。(4.5) 式は設計パラメータ $\boldsymbol{\rho}$, $\boldsymbol{\eta}$ に対して非凸な関数であり, 簡易に Youla パラメータを設計することが困難である。そこで, 設計問題を凸最適化問題へと変形していく。まず, (4.5) 式と等価な評価として (4.6) 式のように表現できる。

$$\mathbf{V}(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta})^*\mathbf{V}(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta}) < \delta^2\mathbf{I} \quad (4.6)$$

また, (4.6) 式の左辺は (4.7) 式のように展開できる。

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta})^*\mathbf{V}(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta}) &= ((\mathbf{I} + \mathbf{T}(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta})^*\mathbf{T}(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta}))^{-1/2})^* (\mathbf{T}_0(j\omega_i) - \mathbf{T}(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta}))^* \cdot \\ &\quad \cdot (\mathbf{I} + \mathbf{T}_0(j\omega_i)\mathbf{T}_0(j\omega_i)^*)^{-1} (\mathbf{T}_0(j\omega_i) - \mathbf{T}(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta})) \cdot \\ &\quad \cdot (\mathbf{I} + \mathbf{T}(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta})^*\mathbf{T}(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta}))^{-1/2} \end{aligned} \quad (4.7)$$

そして, (4.6) 式の左から $((\mathbf{I} + \mathbf{T}(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta})^*\mathbf{T}(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta}))^{1/2})^*$, 右から $(\mathbf{I} + \mathbf{T}(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta})^*\mathbf{T}(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta}))^{1/2}$ を掛けて (4.7) 式を用いて整理し, 設計問題は (4.8) 式のように書き換えることができる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta^2}(\mathbf{T}_0(j\omega_i) - \mathbf{T}(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta}))^*(\mathbf{I} + \mathbf{T}_0(j\omega_i)\mathbf{T}_0(j\omega_i)^*)^{-1}(\mathbf{T}_0(j\omega_i) - \mathbf{T}(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta})) \\ < (\mathbf{I} + \mathbf{T}(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta})^*\mathbf{T}(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta})) \end{aligned} \quad (4.8)$$

また, (2.17) 式より $\mathbf{T}(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta}) = \mathbf{T}_0(j\omega_i) + \mathbf{G}(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta})$ であるため (4.8) 式は整理すると (4.9) 式で表現できる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta^2}\mathbf{G}(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta})^*(\mathbf{I} + \mathbf{T}_0(j\omega_i)\mathbf{T}_0(j\omega_i)^*)^{-1}\mathbf{G}(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta}) \\ < \mathbf{I} + (\mathbf{T}_0(j\omega_i) + \mathbf{G}(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta}))^*(\mathbf{T}_0(j\omega_i) + \mathbf{G}(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta})) \end{aligned} \quad (4.9)$$

さらに, \mathbf{G} は (3.4) 式より $\mathbf{G}(j\omega_i, \rho, \eta) = \mathbf{Y}(j\omega_i, \rho, \eta)\mathbf{Z}(j\omega_i, \rho, \eta)^{-1}$ であるため, (3.4) 式を用いて整理すると (4.9) 式は (4.10) 式のようになる。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\delta^2} (\mathbf{Z}(j\omega_i, \rho, \eta)^{-1})^* \mathbf{Y}(j\omega_i, \rho, \eta)^* (\mathbf{I} + \mathbf{T}_0(j\omega_i) \mathbf{T}_0(j\omega_i)^*)^{-1} \mathbf{Y}(j\omega_i, \rho, \eta) \mathbf{Z}(j\omega_i, \rho, \eta)^{-1} \\ & < \mathbf{I} + (\mathbf{T}_0(j\omega_i)^* + (\mathbf{Z}(j\omega_i, \rho, \eta)^{-1})^* \mathbf{Y}(j\omega_i, \rho, \eta)^*) (\mathbf{T}_0(j\omega_i) + \mathbf{Y}(j\omega_i, \rho, \eta) \mathbf{Z}(j\omega_i, \rho, \eta)^{-1}) \end{aligned} \quad (4.10)$$

(4.10) 式の両辺に左から $\mathbf{Z}(j\omega_i, \rho, \eta)^*$, 右から $\mathbf{Z}(j\omega_i, \rho, \eta)$ を掛け, 整理すると (4.10) 式は (4.11) 式となる。

$$\frac{1}{\delta^2} \mathbf{Y}(j\omega_i, \rho, \eta)^* (\mathbf{I} + \mathbf{T}_0(j\omega_i) \mathbf{T}_0(j\omega_i)^*)^{-1} \mathbf{Y}(j\omega_i, \rho, \eta) < \mathbf{X}(j\omega_i, \rho, \eta)^* \mathbf{X}(j\omega_i, \rho, \eta) \quad (4.11)$$

ここで

$$\mathbf{X}(j\omega_i, \rho, \eta) = [\mathbf{Z}(j\omega_i, \rho, \eta)^{\top} \quad (\mathbf{Y}(j\omega_i, \rho, \eta) + \mathbf{T}_0(j\omega_i) \mathbf{Z}(j\omega_i, \rho, \eta))^{\top}]^{\top} \quad (4.12)$$

である。(4.11) 式は QMI 制約となっており, 一般に凸最適化による解の導出は困難であるが, 3 章と同様に文献 [7] で提案されている反復 LMI 制約のアルゴリズムを利用して解を導出する。(4.13) 式以降では引数 $j\omega_i, \rho, \eta$ を省略する。

4.2.2 反復 LMI 制約による解法

(4.11) 式は Schur complement^[12] より (4.13) 式と等価である。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}^* \mathbf{X} & \mathbf{Y}^* \\ \mathbf{Y} & \delta^2 (\mathbf{I} + \mathbf{T}_0 \mathbf{T}_0^*) \end{bmatrix} > 0 \quad (4.13)$$

また, 適切な次元を持つ任意の複素行列 $\tilde{\mathbf{X}}$ に対して $(\mathbf{X} - \tilde{\mathbf{X}})^* (\mathbf{X} - \tilde{\mathbf{X}}) \geq 0$ が成り立つため (4.14) 式が得られる。

$$\mathbf{X}^* \mathbf{X} \geq \mathbf{X}^* \tilde{\mathbf{X}} + \tilde{\mathbf{X}}^* \mathbf{X} - \tilde{\mathbf{X}}^* \tilde{\mathbf{X}} \quad (4.14)$$

(4.14) 式より (4.13) 式の十分条件である (4.15) 式が導出できる。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}^* \mathbf{X} \geq \mathbf{X}^* \tilde{\mathbf{X}} + \tilde{\mathbf{X}}^* \mathbf{X} - \tilde{\mathbf{X}}^* \tilde{\mathbf{X}} & \mathbf{Y}^* \\ \mathbf{Y} & \delta^2 (\mathbf{I} + \mathbf{T}_0 \mathbf{T}_0^*) \end{bmatrix} > 0 \quad (4.15)$$

(4.15) 式は (4.13) 式の下界を与えており, (4.15) 式が成り立つとき必ず原問題である (4.13) 式は成り立つ。また, (4.15) 式において $\mathbf{X} = \tilde{\mathbf{X}}$ のとき, (4.13) 式と一致する。以

上より，設計パラメータに対して線形に定義された \mathbf{Y} ， \mathbf{X} に関する非凸な制約を， $\tilde{\mathbf{X}}$ を導入し，LMI 制約として記述した。(4.15) 式は (4.13) 式の十分条件であるが， $\tilde{\mathbf{X}}$ を 1 回前における最適化による解 \mathbf{X} とし，繰り返し最適化計算により解が収束し， $\mathbf{X} = \tilde{\mathbf{X}}$ となれば (4.14) 式の等号が成り立ち，(4.15) 式が元の制約と一致する。また，(4.15) 式は常に元の制約の下界を示すため，繰り返し最適化により更新される解は単調収束する。以上より，提案手法 2 の設計問題は以下のように表現できる。

$$\min_{\boldsymbol{\rho}_k, \boldsymbol{\eta}_k} \delta_k$$

subject to

$$\left[\begin{array}{cc} \mathbf{X}_k^* \tilde{\mathbf{X}}_k + \tilde{\mathbf{X}}_k^* \mathbf{X}_k - \tilde{\mathbf{X}}_k^* \tilde{\mathbf{X}}_k & \mathbf{Y}_k^* \\ \mathbf{Y}_k & \delta_k^2 (\mathbf{I} + \mathbf{T}_0 \mathbf{T}_0^*) \end{array} \right] > 0 \quad (4.16)$$

for $i = 1, \dots, N$

ここで，下添え字 k は最適化の繰り返し回数を表す。 $\tilde{\mathbf{X}}_k$ は (4.17) 式のように 1 回前の最適化による解 $\boldsymbol{\rho}_{k-1}$ ， $\boldsymbol{\eta}_{k-1}$ を用いて (4.17) 式のように与える。

$$\tilde{\mathbf{X}}_k = \mathbf{X}(j\omega_i, \boldsymbol{\rho}_{k-1}, \boldsymbol{\eta}_{k-1}) \quad (4.17)$$

この最適化により局所的最適解に収束する可能性があるが，非凸な評価関数を含む最適化問題に対して解の単調収束を保証し，LMI 最適化により簡易に準最適解を導出することができる。

4.3 最終的な設計問題

提案手法 2 では (4.16) 式と 3 章と同様に, (3.14) 式, (3.19) 式の制約を同時に評価し, 3 つの制約下でノミナル時の性能レベルに近い性能レベルを実現する Youla パラメータを設計する。Youla パラメータ自身の安定性を保証するための安定制約である (3.14) 式は設計パラメータに対して線形に記述されている。非凸な QMI 制約で表現したノルム制約である (3.7) 式と閉ループシステムの安定性を保証するための安定制約である (3.17) 式に対して反復 LMI 制約を導入した線形化により (3.11) 式, (3.19) 式の設計パラメータに対して線形な制約式として記述している。最終的な設計問題は以下の凸最適化問題として記述される。

$$\min_{\boldsymbol{\rho}_k, \boldsymbol{\eta}_k} \gamma_k$$

subject to

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}_k^* \tilde{\mathbf{X}}_k + \tilde{\mathbf{X}}_k^* \mathbf{X}_k - \tilde{\mathbf{X}}_k^* \tilde{\mathbf{X}}_k & \mathbf{Y}_k^* \\ \mathbf{Y}_k & \delta_k^2 (\mathbf{I} + \mathbf{T}_0 \mathbf{T}_0^*) \end{bmatrix} > 0$$

$$\operatorname{Re}\{D_Q(j\omega_i, \boldsymbol{\eta}_{k-1})^* D_Q(j\omega_i, \boldsymbol{\eta}_k)\} \geq 0$$

$$\begin{bmatrix} M_k^* \tilde{M}_k + \tilde{M}_k^* M_k - \tilde{M}_k^* \tilde{M}_k & O_k^* \\ O_k & 1 \end{bmatrix} > 0$$

for $i = 1, \dots, N$

反復 LMI 制約では線形化を導入しているため (3.11) 式, (3.19) 式は元の制約式の十分条件となっているが, 評価値の単調収束が保証される。さらに, 繰り返し最適化により解が収束することで, 線形化された制約式と元の制約式は一致する。つまり, 繰り返し最適化を行い, 解が収束することで十分条件を用いたことによる解の保守性を回避できる。

4.4 実機検証

本節では、本章で述べた手法を提案手法 2 とし、二慣性共振速度装置に対する実験を通して提案手法 2 の有効性を示す。

4.4.1 設計条件

実験装置は 3 章と同様のシステムとする。そして、設計に用いたノミナルモデル及びノミナルコントローラ、設計する Youla パラメータの構造、繰り返しの終了条件、双対 Youla パラメータの周波数応答も同様のものとした。比較の手法は 3 章で提案したノミナル時からの変動である $\mathbf{G}(s, \rho, \eta)$ の最大特異値を評価する周波数応答を用いた固定次数 Youla パラメータの設計法とし、設計した Q_{pro1} は (3.58) 式である。

4.4.2 設計結果と考察

提案手法 2 により設計された Youla パラメータ Q_{pro2} は (4.18) 式となった。

$$Q_{\text{pro2}}(s) = \frac{-0.3395s(s - 60.16)(s + 18.96)}{(s + 0.4531)(s^2 + 35.51s + 1399)} \quad (4.18)$$

それぞれの手法により設計された Q を用いた際に得られる ν -gap と \mathbf{G} の最大特異値 $\bar{\sigma}(\mathbf{G}(j\omega))$, (4.2) 式, (4.3) 式から得られる実際の閉ループシステムの性能レベルの上界 $\gamma_{\max}(P,C)$ をそれぞれ表 4.1 に示す。 $\mathbf{G}(j\omega)$ の最大特異値を評価する従来手法に比べ、

表 4.1: 設計結果

	ν -gap	$\bar{\sigma}(\mathbf{G}(j\omega))$	$\gamma_{\max}(P,C)$
Without compensation	0.2662	0.5203	3.3118
Proposed method1	0.2498	0.4555	3.1197
Proposed method2	0.2497	0.8754	3.1190

提案手法 2 の方が ν -gap がわずかに小さくなっている。 ν -gap が小さいほど 2 つのシステムの周波数特性の距離が近いため、変動時においてもノミナル時に近い周波数特性を実現していることを意味している。しかし、この結果の値から両手法とも同様な閉ループ特性が整形されると考えられる。次に設計周波数領域での ν -gap の周波数プロッ

トを図 4.2 に示す。この結果から、両手法とも ν -gap が小さくなり、最大値がほぼ一致していることがわかる。しかし、図 4.2 から提案手法 2 では最大値以外は提案手法 1 よりも大きい値となっている。そのため、最大値付近の周波数範囲では提案手法 1 よりも提案手法 2 がノミナル時の閉ループシステムに近い特性が整形されるが、それ以外の周波数範囲では提案手法 1 の方がノミナル時の閉ループ特性に近い特性が整形されると考えられる。また、 $\bar{\sigma}(\mathbf{G}(j\omega))$ の評価では提案手法 2 が最も大きい値となっている。それに対し、 $\gamma_{\max(P,C)}$ の値は提案手法 2 の方がわずかに小さくなっており、 Q の実装時に $\gamma_{\max(P,C)} \geq \gamma(P,C)$ を達成する性能レベルが期待される。この結果から、 $\bar{\sigma}(\mathbf{G}(j\omega))$ の値が大きい場合においても ν -gap を直接評価することで性能レベルの上界 $\gamma_{\max(P,C)}$ を保証可能なことがわかり、制御対象の変動抑制により性能レベルの上界を算出可能なため提案手法 1 の課題を解決できる。図 4.3 に設計周波数領域での $G(j\omega)$ の最大特異値を示す。表 4.1 の結果の通り、従来手法では $\mathbf{G}(j\omega)$ の最大特異値のみを評価するため、最大特異値が小さくなっている。一方で、提案手法 2 では $\bar{\sigma}(\mathbf{G}(j\omega))$ は従来手法よりも大きいですが、 ν -gap を評価しているため、 ν -gap が小さくなるように $\mathbf{G}(j\omega)$ の最大特異値が整形されたと考えられる。次に、それぞれの手法により設計された Q を用いた際に得られる $\mathbf{G}(j\omega)$ のゲイン線図を図 4.4 に示す。図 4.4 から、 \mathbf{G}_{yr} と \mathbf{G}_{ud} の低周波数領域で提案手法 1 よりも提案手法 2 の方がゲイン特性が抑えられていることがわかり、低周波数領域での閉ループ特性の改善が期待できる。一方で、 \mathbf{G}_{yd} のゲイン特性では両手法共にゲイン特性が補償前よりも劣化しており、 \mathbf{G}_{yd} が $\bar{\sigma}(\mathbf{G}(j\omega))$ の周波数特性と同様の特性を示していることがわかる。次に、それぞれの手法により設計された Q を用いた際の閉ループ特性 T_{yr} , T_{yd} , T_{ur} , T_{ud} をそれぞれ図 4.5, 4.6, 4.7, 4.8 に示す。両手法共に $\mathbf{G}(j\omega)$ のゲイン特性と対応するように T_{yr} , T_{ud} では補償により低周波数領域では提案手法 2 がノミナル特性に近づいていることがわかり、高周波数領域では提案手法 1 が近づいていることがわかる。以上より、提案手法 1 の Youla パラメータの設計法では、制御対象の変動抑制と閉ループ特性との関係が明確に示されていないが、提案手法では ν -gap と閉ループシステムの性能レベル γ_{\max} の関係を用いた Youla パラメータの設計を実現した。

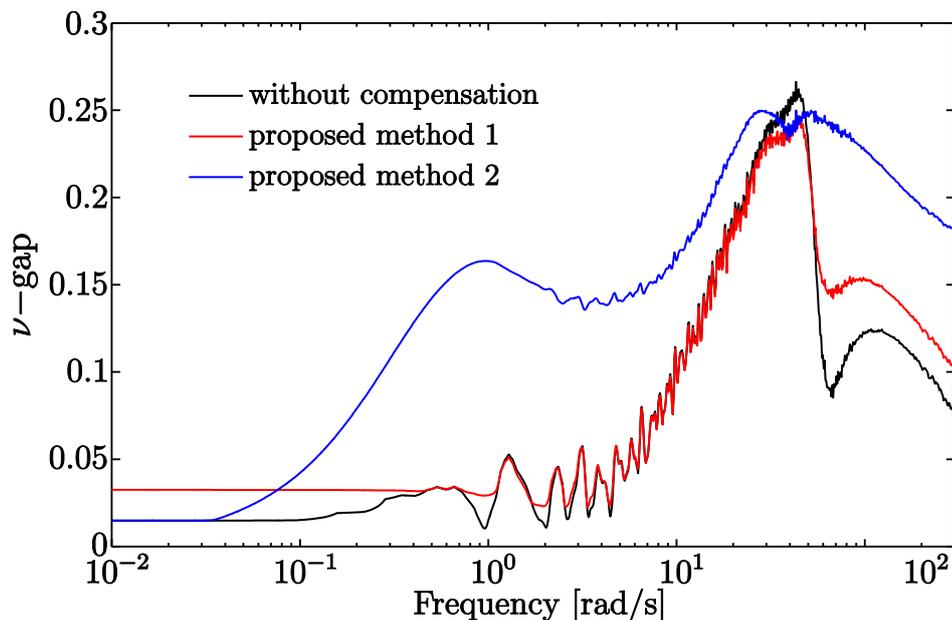


図 4.2: ν -gap

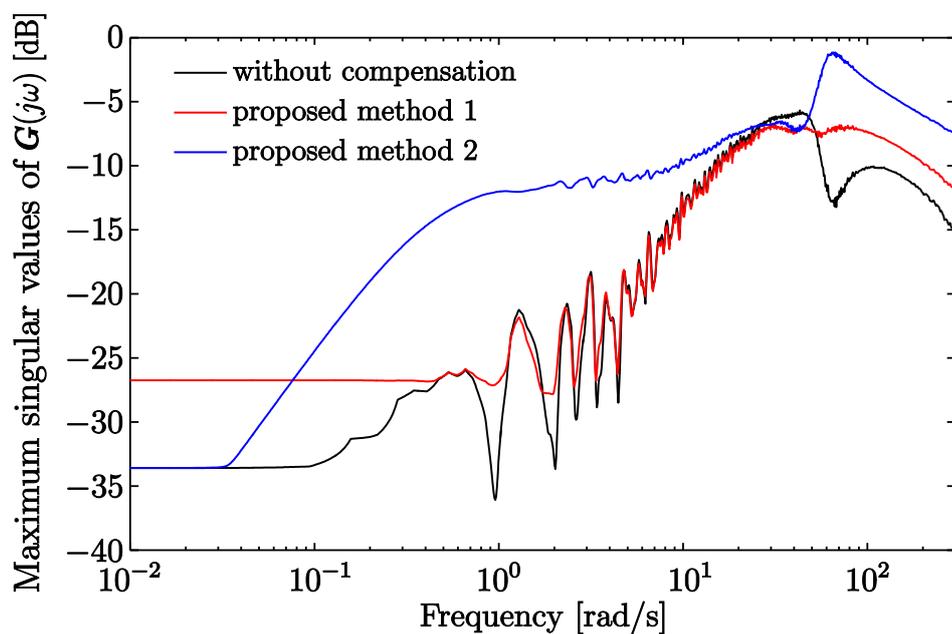


図 4.3: 設計周波数における $G(j\omega)$ の最大特異値プロット

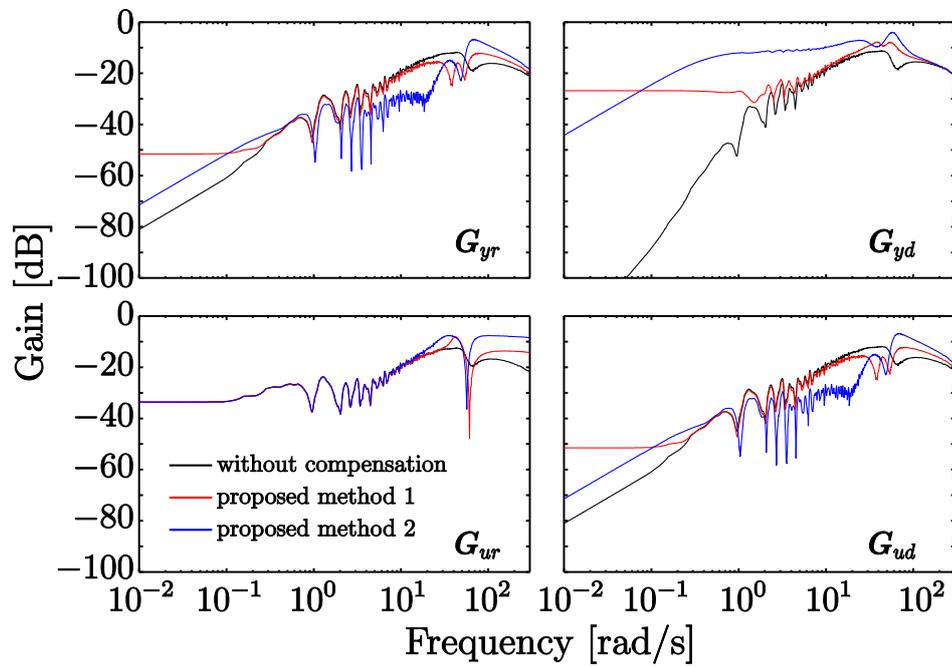


図 4.4: $G(j\omega)$ のゲイン特性

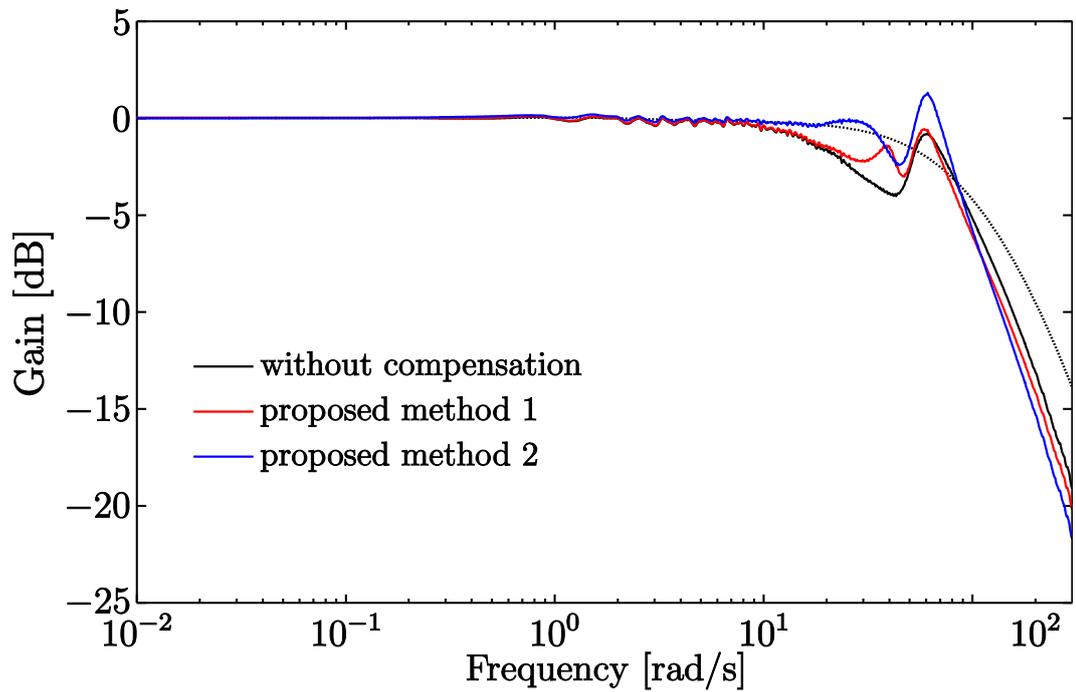


図 4.5: T_{yr} のゲイン特性

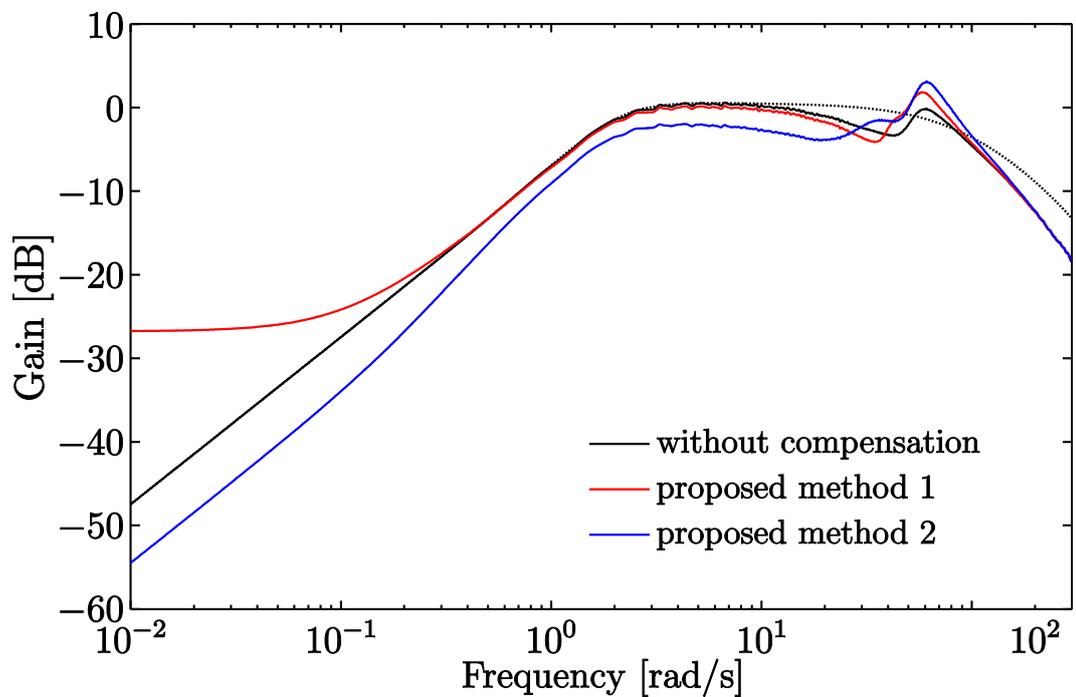


図 4.6: T_{yd} のゲイン特性

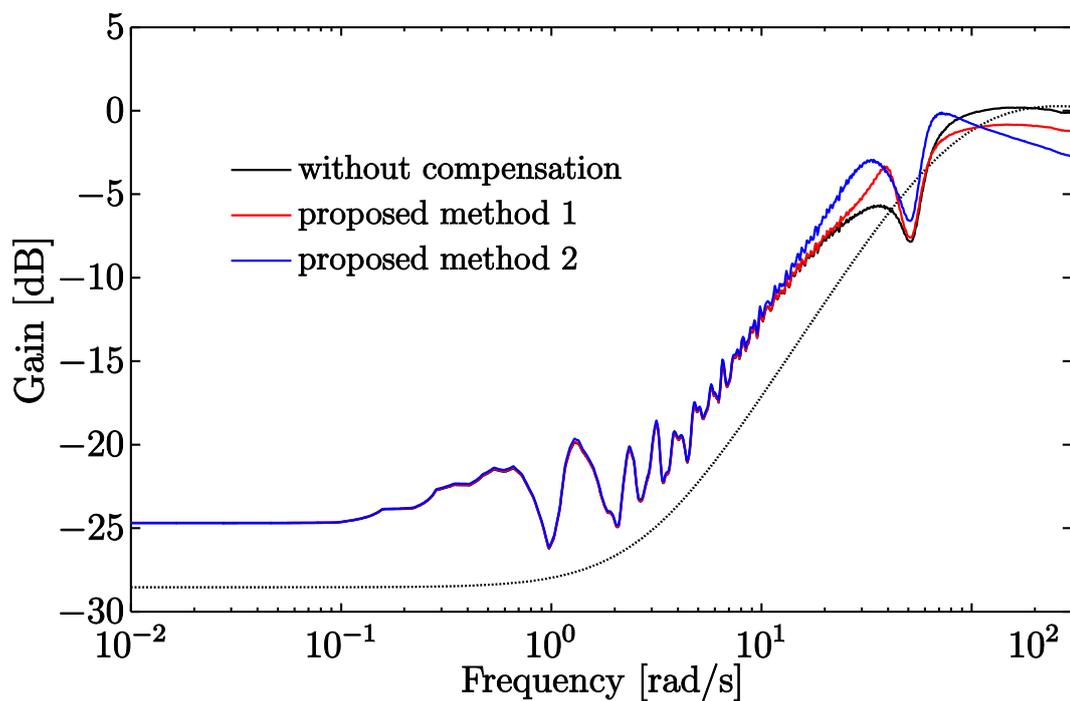


図 4.7: T_{ur} のゲイン特性

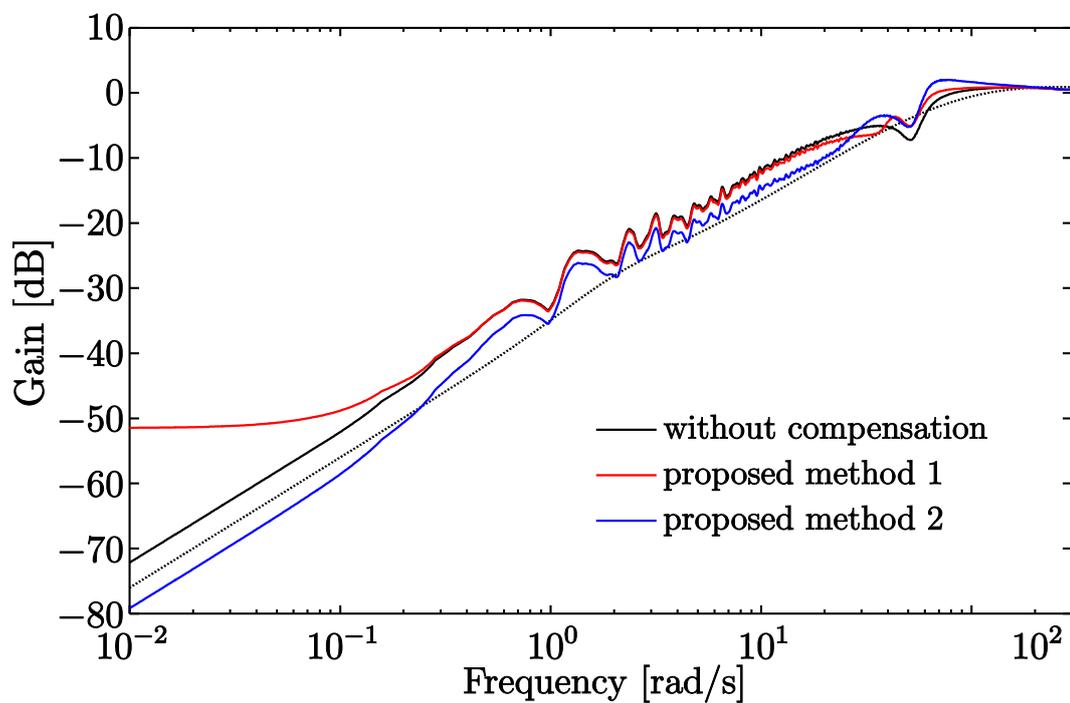


図 4.8: T_{ud} のゲイン特性

第5章 結言

5.1 まとめ

数式モデルに基づいた Youla パラメータ設計法には双対 Youla パラメータの数式モデルに対してモデル化誤差や不確かさによる Youla パラメータの高次数化や制御性能の低下などの問題が存在した。この問題に対し、著者は制御対象の周波数応答のみを用いた制御器設計法^[6, 7, 8]に着目し、この設計法の利点を活かして本研究では数式モデルを不要とするこの設計法を用いてモデルベースでの Youla パラメータ設計法の課題であったモデル化誤差や高次数化の問題を解決した。また、提案した2つの Youla パラメータの設計法は4つの閉ループ特性においてノミナル性能と実際の制御性能を近づけることを Youla パラメータの設計目的としており、SISO システムの4つの閉ループ特性を同時に整形可能とした。提案手法1では、シミュレーションを通して従来のモデルベースでの手法と同等の結果を実現し、実機検証を通して従来手法よりも良好な結果を実現した。提案手法2では、制御器設計の設計手法の1つである性能レベルと制御対象の変動抑制の関係に着目し、Youla パラメータの設計により性能レベルの上界を算出可能にした。これにより、上界以下の性能レベルを実現可能になり、制御対象の変動抑制と性能レベルの関係を示すことが可能となった。提案した2つの Youla パラメータ設計法では、周波数応答を用いた設計問題が複雑化し、簡易に設計問題を解くことが困難であったが、設計問題を反復 LMI 最適化問題として定式化したため、凸最適化問題として簡易に Youla パラメータの設計が可能となるため、設計者の労力が低減されている。

5.2 本研究における課題

本研究の今後の課題として3つの点が挙げられる。

第1に、2つの提案手法は共に SISO システムのみに適用可能な点である。提案した2つの手法は共に SISO システムの制御対象を想定しており、MIMO (Multi-Input-Multi-Output) システムの制御対象には適用が困難である。MIMO システムへ提案手法を拡

張することを考えるため、両手法で用いている \mathbf{G} の表現を考える。ノミナル時ノミナルモデルとノミナルコントローラをそれぞれ $\mathbf{P}_0, \mathbf{C}_0$ とし、ノミナル時の閉ループ特性 $\mathcal{T}(\mathbf{P}_0, \mathbf{C}_0)$ は (2.1) 式と (2.3) 式から (5.1) 式で表現できる。

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\mathbf{P}_0, \mathbf{C}_0) &= \begin{bmatrix} \mathbf{P}_0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} (\mathbf{I} + \mathbf{C}_0 \mathbf{P}_0)^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{N}_P \\ \mathbf{D}_P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{N}_C & \mathbf{D}_C \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.1)$$

次に、制御対象が \mathbf{P}_0 から \mathbf{P} に変化したとする。このとき、変動後の閉ループ特性 $\mathcal{T}(\mathbf{P}, \mathbf{C}_0)$ は (5.2) 式のように $\mathcal{T}(\mathbf{P}_0, \mathbf{C}_0)$ と \mathbf{R} による性能劣化項 Δ_R を用いて表現できる。

$$\mathcal{T}(\mathbf{P}, \mathbf{C}_0) = \mathcal{T}(\mathbf{P}_0, \mathbf{C}_0) + \Delta_R \quad (5.2)$$

$$\Delta_R = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{D}}_C \\ -\tilde{\mathbf{N}}_C \end{bmatrix} \mathbf{R} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{N}}_C & \tilde{\mathbf{D}}_C \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

さらに、 \mathbf{Q} を導入した場合、 \mathbf{Q} による補償が加わることで閉ループ特性 $\mathcal{T}(\mathbf{P}, \mathbf{C})$ は (5.4) 式で表現できる。

$$\mathcal{T}(\mathbf{P}, \mathbf{C}) = \mathcal{T}(\mathbf{P}_0, \mathbf{C}_0) + \Delta_R + \Delta_{RQ} \quad (5.4)$$

$$\Delta_{RQ} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_R \\ \mathbf{D}_R \end{bmatrix} \mathbf{Q} (\mathbf{I} + \mathbf{RQ})^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{D}}_R & -\tilde{\mathbf{N}}_R \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

$$\mathbf{N}_R = \mathbf{N}_P + \tilde{\mathbf{D}}_C \mathbf{R}, \quad \mathbf{D}_R = \mathbf{D}_P - \tilde{\mathbf{N}}_C \mathbf{R} \quad (5.6)$$

$$\tilde{\mathbf{N}}_R = \tilde{\mathbf{N}}_P + \mathbf{R} \mathbf{D}_C, \quad \tilde{\mathbf{D}}_R = \tilde{\mathbf{D}}_P - \mathbf{R} \mathbf{N}_C \quad (5.7)$$

$\mathbf{G} = \Delta_R + \Delta_{RQ}$ であるため (5.8) 式のように表現できる。

$$\begin{aligned}\mathbf{G} &= \Delta_R + \Delta_{RQ} \\ &= \mathbf{Y}\mathbf{Z}^{-1}\end{aligned}\quad (5.8)$$

$$\mathbf{Y} = \Delta_R \mathbf{Z} + \mathbf{U} \quad (5.9)$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{N}}_R \mathbf{Q} & -\tilde{\mathbf{N}}_R \mathbf{Q} \\ \tilde{\mathbf{D}}_R \mathbf{Q} & -\tilde{\mathbf{D}}_R \mathbf{Q} \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{D}}_R & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{N}}_R \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{I} + \mathbf{R}\mathbf{Q} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} + \mathbf{R}\mathbf{Q} \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

提案手法と同様に考えるためには \mathbf{Y} と \mathbf{Z} を用いて反復 LMI 制約として定式化できる。しかし, (5.11) 式に着目すると $\tilde{\mathbf{N}}_R^{-1}$ と $\tilde{\mathbf{D}}_R^{-1}$ が用いられており, $\tilde{\mathbf{N}}_R$ と $\tilde{\mathbf{D}}_R$ がバイプロパーである必要がある。特に, $\tilde{\mathbf{N}}_R$ には $\tilde{\mathbf{N}}_P$ が含まれており, 制御対象によっては $\tilde{\mathbf{N}}_P^{-1}$ の求解が困難となる可能性がある。そのため, MIMO システムに対して適用範囲が制限される問題がある。

第 2 に提案手法 1 で用いる周波数重み関数 $\mathbf{W}(s)$ に設計指標がない点である。 $\mathbf{W}(s)$ のゲインが大きい周波数帯域ほど閉ループ特性がノミナル時に近づくが, $\mathbf{W}(s)$ の与え方は設計者の試行錯誤により決定される。つまり, $\mathbf{W}(s)$ の構造によって設計結果が変化することになる。そのため, 近づきたい閉ループ特性を選択できる自由度が $\mathbf{W}(s)$ から得られるが, 最小の評価値を得るための最適な $\mathbf{W}(s)$ を決定するには設計者の経験や労力が必要となる。ここで, $\mathbf{W}(s)$ の与え方を考えるため ν -gap を評価する (5.12) 式を考える。

$$\bar{\sigma}(\mathbf{V}(j\omega_i, \rho, \eta)) < \delta \quad (5.12)$$

ここで,

$$\mathbf{V}(j\omega_i, \rho, \eta) = (\mathbf{I} + \mathbf{T}_0(j\omega_i)\mathbf{T}_0(j\omega_i)^*)^{-1/2}(\mathbf{T}_0(j\omega_i) - \mathbf{T}(j\omega_i, \rho, \eta))(\mathbf{I} + \mathbf{T}(j\omega_i, \rho, \eta)^*\mathbf{T}(j\omega_i, \rho, \eta))^{-1/2}$$

であり, $\delta_\nu(\mathbf{T}, \mathbf{T}_0)$ を表している。 $\mathbf{T}_0(j\omega_i) - \mathbf{T}(j\omega_i, \rho, \eta) = -\mathbf{G}(j\omega_i, \rho, \eta)$ であるため, $\mathbf{V}(j\omega_i, \rho, \eta)$ は (5.13) 式で表せる。

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(j\omega_i, \rho, \eta) &= -(\mathbf{I} + \mathbf{T}_0(j\omega_i)\mathbf{T}_0(j\omega_i)^*)^{-1/2}\mathbf{G}(j\omega_i, \rho, \eta)(\mathbf{I} + \mathbf{T}(j\omega_i, \rho, \eta)^*\mathbf{T}(j\omega_i, \rho, \eta))^{-1/2} \\ &= \mathbf{W}_{T_0}(j\omega_i)\mathbf{G}(j\omega_i, \rho, \eta)\mathbf{W}_{T(j\omega_i, \rho, \eta)}\end{aligned}\quad (5.13)$$

(5.13) 式から $\delta_{\nu}(\mathbf{T}, \mathbf{T}_0)$ は $\mathbf{G}(j\omega_i, \rho, \eta)$ の左右から重み関数 \mathbf{W}_{T_0} と \mathbf{W}_T を掛けたものと一致する。実際に、提案手法 2 で得られた \mathbf{G} に対して \mathbf{W}_{T_0} と \mathbf{W}_T を用いると $\mathbf{G}(j\omega)$ と $\delta_{\nu}(\mathbf{T}, \mathbf{T}_0)$ の最大特異値は一致していた。この関係を用いた周波数重み関数 $\mathbf{W}(s)$ を考えることにより、提案手法 1 においても性能レベル γ との関係を表現可能な Youla パラメータの設計が可能になると考えられる。

第 3 に提案手法 2 は性能レベルの上界 γ_{\max} を評価している点である。提案手法 2 では $\gamma_{\max}(P, C)$ を評価する設計手法となっているため、閉ループシステムが実際に達成する $\gamma(P, C)$ との関係も明確にする必要がある。Youla パラメータの補償により $\gamma_{\max}(P, C) \geq \gamma(P, C)$ の関係は保証されるが、 $\gamma(P, C)$ を直接評価していない。そのため、制御対象の変動抑制と $\gamma(P, C)$ の関係を直接評価可能な Youla パラメータの設計問題を考える必要がある。

参考文献

- [1] D. Youla, H. Jabr, and J. Bongiorno: “Modern Wiener-Hopf design of optimal controllers—Part II: The multivariable case”, *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. 21, No. 3, pp. 319–338 (1976)
- [2] M. Vidyasagar: *Control System Synthesis A Factorization Approach*, MIT Press, Cambridge, Massachusetts (1985)
- [3] T. T. Tay, J. B. Moore, and R. Horowitz: “Indirect Adaptive Techniques for Fixed Controller Performance Enhancement”, *International Journal of Control*, Vol. 50, No. 5, pp. 1941–1959 (1989)
- [4] 松本和則, 鈴木達也, S. Sangwongwanich, 大熊繁: 「2 自由度制御系の内部構造と補償器のフリーパラメータの一設計法」, *電気学会論文誌 D*, Vol. 113, No. 6, pp. 768–777 (1993)
- [5] 弓場井一裕, 作石翼, 平井淳之: 「GIMC 構造に基づいた故障による性能劣化の補償-フレキシブルアームの冗長センサ故障への応用-」, *電気学会論文誌 D*, Vol. 127, No. 8, pp. 866–874 (2007)
- [6] A. Karimi, G. Galdos, and R. Longchamp: “Robust Fixed-Order H_∞ Controller Design for Spectral Models by Convex Optimization”, *Proc. of the 47th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 921–926 (2008)
- [7] S. Boyd, M. Hast, and K. J. Astrom: “MIMO PID Tuning via Iterated LMI Restriction”, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Vol. 26, No.8, pp. 1718–1731 (2016)
- [8] K. Yubai, S. Shinoda, D. Yashiro, and J. Hirai: “Multivariable Controller Tuning for Suppression of Closed-Loop Interaction Using Frequency Response Data Set”, *International Journal of Advanced Mechatronic Systems*, Vol. 7, Issue 2, pp. 71–80 (2017)

第 5 章 結言

- [9] 岡村雅行, 弓場井一裕, 矢代大祐, 駒田諭: 「周波数応答を用いた極調整可能な Youla パラメータの設計法」, 平成 29 年度電気・電子・情報関係学会東海支部連合大会講演論文集, F3-1 (2017)
- [10] S. Aoki, K. Yubai, D. Yashiro, and S. Komada: “Data-Driven Tuning of State Feedback Gains with Stability Constraint Using Experimental Data”, *Proc. of 2016 CACS International Automatic Control Conference*, pp. 109–114 (2016)
- [11] F. Hansen: A Fractional Representation Approach to Closed-loop System Identification and Experiment Design, Ph.D Thesis, Stanford University (1989)
- [12] J. Boyd, E. Feron, L. E. Ghaoui, and V. Balakrishnan: Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory, SIAM, Philadelphia (1994)
- [13] K. Zhou, J. Doyle, and K. Glover: Robust and optimal control, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey (1996)
- [14] D. McFarlane and K. Glover: “A Loop Shaping Design Procedure Using H_∞ Synthesis”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol.37, No.4, pp. 391–396, (1992)
- [15] 藤森 篤: ロバスト制御, コロナ社, (2001)
- [16] G. Vinnicombe: “Uncertainty and Feedback - H_∞ Loop Shaping And The ν -Gap Metric”, Imperial College Press, (2001)

謝辞

本研究の遂行ならびに修士論文執筆にあたり、終始丁寧かつ熱心なご指導を賜りました三重大学工学研究科准教授 弓場井 一裕先生に心から深く感謝いたします。弓場井先生は、研究の進捗や学会発表練習、投稿論文などにおいて常に厳しく指導して頂き、私自身の研究への意識や技術者として今後必ず必要となる問題解決力の向上に大きく寄与していただきました。この場を借りて、重ねて深く感謝いたします。

本研究の遂行ならびに研究室の生活を通じて大変貴重なご意見を頂きました同大学元教授 平井 淳之先生に深く感謝いたします。平井先生は、就職活動で社会人としてのアドバイスを頂き、留学生との交流では大変貴重な経験をさせて頂きました。重ねて感謝いたします。

本研究ならびに修士論文執筆にあたり、検討会で、そして副査としてご意見を頂きました同大学教授 駒田 諭先生、同大学助教授 小山 昌人先生に深く感謝いたします。

本研究の遂行にあたり、日々の検討会および学生生活において、貴重なご意見を頂きました同大学准教授 山村 直紀先生、同大学助教授 矢代 大祐先生に心から感謝いたします。また、日頃より、学生生活を通じて技術面および研究室生活でお世話になりました技術職員 中村 勝氏に深く感謝いたします。

本研究の遂行にあたり、制御理論部門モデルベースグループの先輩として、制御の基礎を教え、資料作成やプレゼンテーションの技術を親切にご指導いただきました中村 和樹氏、宇佐美 朋大氏に深く感謝いたします。また、同部門の先輩として親身にご指導頂きました青木 翔吾氏、岩本 直也氏、竹若 恵太氏、堀 智貴氏、山本 直輝氏に深く感謝いたします。また、同部門の同期として多くの時間を共にし、互いに切磋琢磨しあった伊達 宗光君、柳川 晃佑君に深く感謝いたします。同部門として共に研究した堀田 敦君、辻井 祥太郎君、森田 晃史君、江川 和輝君、酒徳 大雅君、長瀬 瑛君に感謝し、今後のご活躍を心より期待しております。

また、同期として、日々の研究生活を共に送り、鼓舞し合った岸 寛海君、永添 晃一朗君、藤崎 正洋君、冬木 貴士君、間所 修平君 ならびに、充実した生活を送らせて頂いた電機システム研究室の皆様感謝いたします。

最後に、大学への入学及び大学院への進学を含め、何一つ不自由なく学生生活を送らせて頂いた両親をはじめとする家族に心から深く感謝いたします。

論文目録

投稿論文

- (1) 岡村雅行, 弓場井一裕, 矢代大祐, 駒田諭: 「周波数応答を用いた固定次数 Youla パラメータの設計法」, 電気学会論文誌 C (電子・情報システム部門誌), Vol. 138, No. 12, pp. 1469–1477 (2018.12)

国際会議

- (1) M. Okamura, K. Yubai, D. Yashiro, S. Komada: “Design of Youla Parameter in GIMC Structure Using Frequency Responses”, *Proc. of International Symposium for Sustainability by Engineering at MIU*, 1P-3, pp. 52–57 (2017.12)
- (2) M. Okamura, K. Yubai, D. Yashiro, S. Komada: “Fully-Parameterized Youla Parameter Design Method in GIMC Structure Using Frequency Responses”, *Proc. of the 37th Chinese Control Conference*, FrB19-4, pp. 170–175 (2018.7)
- (3) M. Okamura, K. Yubai, D. Yashiro, S. Komada: “Frequency-Responses-Based Design of Fully-Parameterized Youla Parameter Achieving Nominal Performance”, *Proc. of 12th France-Japan and 10th Europe-Asia Congress on Mechatronics*, JD-001627, pp. 195–200 (2018.9)
- (4) M. Okamura, K. Yubai, D. Yashiro, S. Komada: “Design method of Fixed-Order Youla Parameter Based on ν -gap Using Frequency Responses”, *Proc. of the 5th IEEJ international workshop on Sensing, Actuation, Motion Control, and Optimization* (2019.3 発表予定)

学会発表

- (1) 岡村雅行, 弓場井一裕, 矢代大祐, 駒田諭: 「周波数応答を用いた極調整可能な Youla パラメータの設計法」, 平成 29 年度電気・電子・情報関係学会東海支部連合大会講演論文集, F3-1 (2017.9)

- (2) 岡村雅行, 弓場井一裕, 矢代大祐, 駒田諭:「周波数応答を用いた GIMC 構造における Youla パラメータの設計」, 電気学会制御研究会資料, CT-18-035, pp. 137–142 (2018.1) (平成 30 年電気学会制御技術委員会奨励賞 受賞)
- (3) 岡村雅行, 弓場井一裕, 矢代大祐, 駒田諭:「周波数応答を用いた ν -Gap に基づく固定次数 Youla パラメータの設計」, 電気学会制御研究会資料, CT-19-021, pp. 97–102 (2019.1)