

虹ビーズを用いた3次の虹の再現実験

小林 悠介*・國仲 寛人**

An experiment for the third-order rainbow using rainbow beads

Yusuke KOBAYASHI and Hiroto KUNINAKA

要 旨

虹は大気中に漂う雨滴によって生じる大気光学現象である。一般に対日点を中心にして約 42° のところに生じる虹が主虹、約 51° のところに生じる虹が副虹と呼ばれる。これらは、水滴内での反射回数に対応しており、主虹は1回、副虹は2回水滴内で反射した光線によって生じることが知られている。また、理論上3回以上の反射に対しても虹は存在し、それらを高次の虹と呼ぶが、実際に観測された例は世界的に見ても稀である。本研究では、高次の虹を実験室で再現することを目的とし、雨滴の代わりに虹ビーズを用いた。まず、虹ビーズの屈折率を計測し、そこから高次の虹がどのように生じるかを予想し、それをとらえるための実験装置を作成した。その結果、高次の虹と思われる虹を観測することに成功した。虹の視半径、スペクトル配列の順から、観測された虹は3次の虹であると断定した。

キーワード：主虹、副虹、高次の虹、虹ビーズ

1 はじめに

虹は大気中に漂う水滴によって起きる非常に美しい大気光学現象である。雨上がりの夕方に空を見ると雄大で美しい虹に出会って思わず写真を撮ってしまった、という経験がある人は少なくないであろう。

初めて虹が出来る原理を正しく説明したのはデカルトであるといわれている。デカルトは水滴に入射する平行光線がどのような経路を取るかを、スネルの法則を用いて作図することで主虹が水滴内で1回、副虹が2回反射する光線により出来ることを示した。その後、ニュートンは自身が開発した微分法により、水滴内で N 回反射した光がどこに、どのような視半径の虹を作るのかを一般化した[1]。それによると、反射回数が1回、2回の際はそれぞれ、対日点を中心に約 42° 、 51° であることが示され、実際に観測される虹を説明することができた(図1)。

ところで、これらの虹は主虹、副虹という名がつけられていることから、虹には2種類しかないと思われがちであるが、ニュートンによる一般化は反射回数に対応した虹が存在するという事を示唆している。しかし、ニュートンは、 $N \geq 3$ の場合について計算をしなかった[1]。それは、水滴内を3回反射した虹は反射に

よる減衰のせいで人間の目には見ることは到底できないだろうと考えたからだ。このような、 $N \geq 3$ 以降の虹は高次の虹と呼ばれる。以下、話を分かりやすくするために、 N 回反射で出来た虹を N 次の虹と呼ぶことにする。つまり、主虹を1次の虹、副虹を2次の虹と表現する。

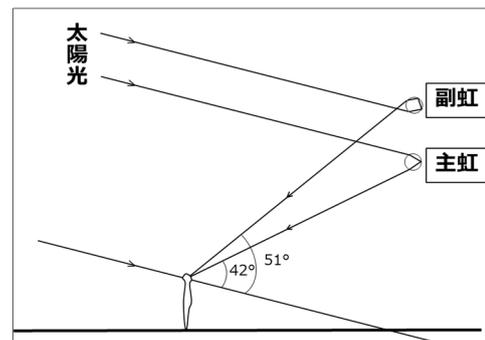


図1：主虹と副虹

エドモンド・ハレーは虹についての研究で3次の虹がどこに現れるかを示した[1]。それによると、ハレーは3次の虹は太陽を取り巻くように視半径約 43° の円として生じるという事を示した。また、4次の虹は太陽を取り巻くように、視半径約 46° の円として生じるという事も示した。この結果は、高次の虹がほとんど

* 三重大学大学院教育学研究科

** 三重大学教育学部

観測不可能であるという事を示しているように思える。なぜなら、ただでさえ高次の虹は淡いものであると予想されるのに、太陽の方向に見えるという事は、その明るさに埋もれてしまうと考えられるからだ。

高次の虹が自然界で観測された例は存在する[2-4]。しかし、その記録数は非常に少なく、ほとんどの記録は画像処理によってようやく見えるようになるものばかりである。高次の虹は理論上反射回数に応じて生じると述べたが、実際に観測されたのは3次、4次の虹までであった。つまり、ほとんど幻と言っていいような現象が高次の虹なのである。

そこで本研究では、水滴の代わりに虹ビーズを用いて高次の虹を実験室で再現することを目的とした。

2 原理

虹が生じる理由は、水滴による光の分散で説明されることが多いが、実はそれだけでは虹が生じる十分な理由になっていない。図2は、水滴に入射した平行光線が水滴内で1回反射した光路を示したものである。円の中心を通過する軸を光軸と呼ぶことにする。光軸から入射光を上にはずらしていくと、光軸より下にはずれた角度で水滴から出ていき、さらに上方に動かすとその角度は大きくなる。この時の、入射光と反射光のなす角 θ を偏角と呼ぶことにする(図3)。偏角には、極小値が存在し、反射光の多くが偏角の極小値付近に集中する。これらが虹を生じさせる。つまり、偏角の極値に虹が出来るということであり、偏角の極値のことを虹角と呼ぶことにする。

ここで、一次の虹角と屈折率の関係を求める。大気に対する水の屈折率を n 、点Pに光線が入射角 α 、屈折角 β で進むとき(図3)、スネルの法則より、

$$\beta = \sin^{-1}\left(\frac{\sin\alpha}{n}\right) \quad (1.1)$$

となる。ここで、点Qでの入射角、反射角は共に β であり、点Rで光線が屈折して出ていくときの入射角と

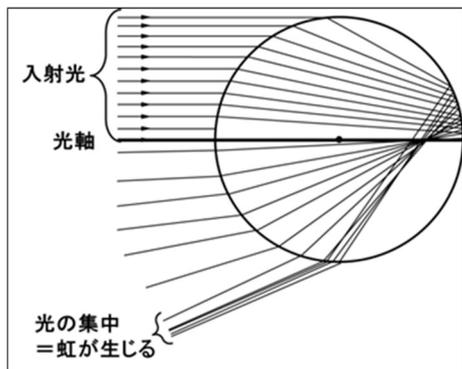


図2：水滴に入射した平行光線の経路

屈折角はそれぞれ β 、 α であることに注意して、入射角 α 、屈折角 β 、偏角 θ の関係を求める。△OPQに着目すると、

$$\angle POQ = 180^\circ - 2\beta \quad (1.2)$$

であり、△OPSに着目すると、

$$\angle PSO = 2\beta - \alpha \quad (1.3)$$

となる。ここで、図の対称性より $\theta = 2\angle PSO$ であるから、偏角 θ は、

$$\theta = 4\beta - 2\alpha \quad (1.4)$$

と表され、(1.1)式を代入すると、

$$\theta = 4 \sin^{-1}\left(\frac{\sin\alpha}{n}\right) - 2\alpha \quad (1.5)$$

と表せる。虹角は(1.5)式において、 α における一次導関数が0となる条件、

$$\frac{d\theta}{d\alpha} = \frac{4\cos\alpha/n}{\sqrt{1 - (\sin\alpha/n)^2}} - 2 = 0 \quad (1.6)$$

から得られ、(1.5)式と(1.6)式から、1次の虹角と屈折率の関係

$$\theta = 4 \sin^{-1} \sqrt{\frac{4-n^2}{3n^2}} - 2 \cos^{-1} \sqrt{\frac{n^2-1}{3}} \quad (1.7)$$

を得る。ここで、水の屈折率を1.33とすると、 $\theta = 42.5^\circ$ となり、自然界でみられる1次の虹の視半径と一致する。

次に、2次の虹角と屈折率の関係を求める。ある光線が点Pに入射する場合を考える(図4)。入射角 α 、屈折角 β 、偏角 θ の関係を求めようとすると、△OPQ、△OQR、△ORSについて、

$$\angle POQ = \angle QOR = \angle ROS = 180^\circ - 2\beta \quad (1.8)$$

となる。これにより $\angle SOP$ は、

$$\angle SOP = 6\beta - 180^\circ \quad (1.9)$$

となる。ここで、四角形OPTSに着目すると、

$$\theta = 180^\circ + 2\alpha - 6\beta \quad (1.10)$$

を得る。(1.1)式を(1.10)式に代入して、偏角 θ は

$$\theta = 180^\circ + 2\alpha - 6 \sin^{-1}(\sin\alpha/n) \quad (1.11)$$

と表される。(1.6)式と同様に、 θ の α による一次導関数が0となる条件

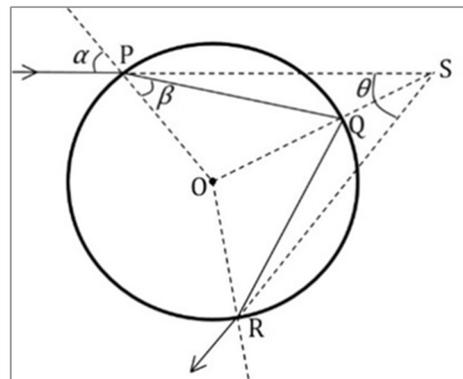


図3：水滴内で1回反射した光路の幾何関係

$$\frac{d\theta}{d\alpha} = 2 - \frac{6\cos\alpha/n}{\sqrt{1 - (\sin\alpha/n)^2}} = 0 \quad (1.12)$$

から α を n で表し、(1.11)式に代入すると、2次の虹角と屈折率の関係

$$\theta = 180^\circ + 2 \cos^{-1} \sqrt{\frac{n^2 - 1}{8}} - 6 \sin^{-1} \sqrt{\frac{9 - n^2}{8n^2}} \quad (1.13)$$

を得る。ここで、水の屈折率を1.33とすると、 $\theta = 50.1^\circ$ となり、自然界で見られる2次の虹の視半径と一致する。

最後に、3次の虹の虹角と屈折率の関係を求める(図5)。これまでと同様に考えると、図5において、偏角 θ 、入射角 α の間には次の関係があることが分かる：

$$\theta = 360^\circ + 2\alpha - 8 \sin^{-1} \left(\frac{\sin\alpha}{n} \right) \quad (1.14)$$

$d\theta/d\alpha = 0$ の条件と、(1.14)式から、3次の虹の虹角 θ は

$$\theta = 360^\circ - 8 \sin^{-1} \sqrt{\frac{16 - n^2}{15n^2}} + 2 \cos^{-1} \sqrt{\frac{n^2 - 1}{15}} \quad (1.15)$$

と表すことができる。水の屈折率を1.33とすると $\theta = 137^\circ$ となった。これは、3次の虹が対日点から 137° のところに行けることを意味しており、太陽を取り巻くように視半径 43° の虹として見えているという事である。

以上の議論から帰納的に N 次の虹の虹角 θ_N は次で表すことができる：

$$\theta_N = 180(N - 1) + 2 \cos^{-1} \sqrt{\frac{n^2 - 1}{N^2 + 2N}} - 2(N + 1) \sin^{-1} \sqrt{\frac{(N + 1)^2 - n^2}{N^2 + 2N}} \quad (1.16)$$

ただし $N \geq 2$ のときである。それは式の導出の際 $N \geq 2$ は凸多角形の内角和から導出するのに対し、 $N = 1$ は凹多角形の内角和から導出するからである。

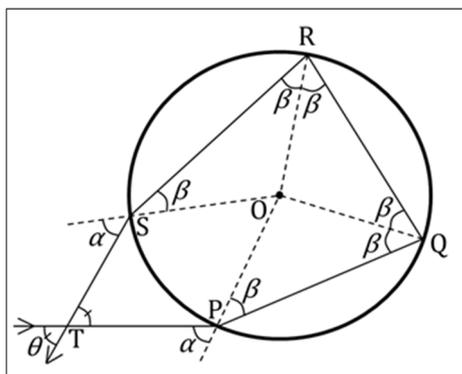


図4：水滴内で2回反射した光路の幾何関係

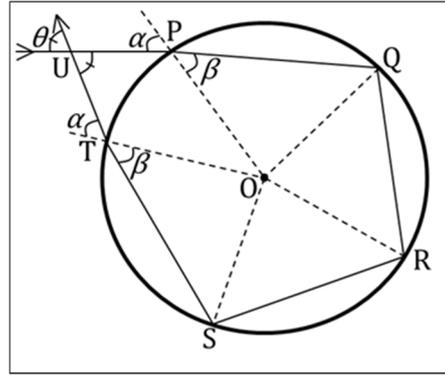


図5：水滴内で3回反射した光路の幾何関係

3 虹ビーズの屈折率の測定実験

3.1 方法

式(1.7)から、虹ビーズによる1次の虹の虹角が分かれば、屈折率を求めることができる。そこで、以下のような実験を行った。

黒画用紙にスプレーのりを塗布し虹ビーズ(株式会社ナリカ：D20-1406-01)を一層になるように均一に撒いて、虹シートを作製した。そして図6のように光源、記録用カメラ、虹シートを配置した。ここで、点光源を用いた虹は、自然界で見える虹とは違う見え方をすることから[5]、虹シートに照射する光は出来るだけ平行な光線が好ましい。実験室内では完全な平行光線を作ることは不可能であるが、平行光線に近づけるためには、光源を虹シートからできるだけ離せばよい。そのためには強力な光源が必要であるが、本実験では液晶プロジェクターの白色光を採用した。

撮影した虹の画像は、画像解析ソフトImageJを用いて解析した。解析の詳細については次のセクションで詳しく述べる。

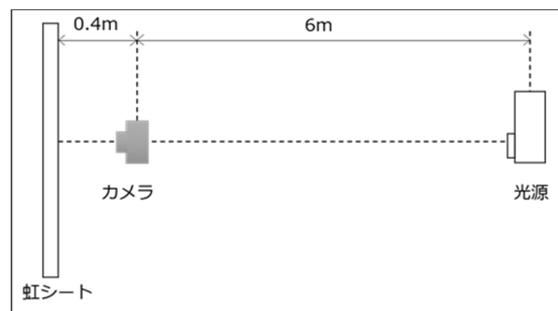


図6：実験装置の配置

3.2 結果

虹シートの上で虹のできる位置を変えて、6個の虹角のデータを得た。撮影データの1つを図7に示す。ここで、写真の中心に写っているのは記録用カメラの影である。

撮影データは、ImageJを用いて長方形選択ツールか

ら、虹に外接するように正方形を書き、その一辺の半分のピクセル数から、虹の視半径（この場合虹角と一致する）を求めた。

その結果、1次の虹角は $16.6 \pm 0.2^\circ$ と求められた。以上より、1次の虹角と屈折率の関係式 (1.7) から、虹ビーズの屈折率は 1.56 ± 0.01 と求められた。

浜崎 (2013) によると NaRiKa のプラスチック虹ビーズの屈折率は 1.55 と与えられているので[6]、信頼性の高い実験結果になったと考えられる。この値に含まれる誤差の要因として、光源から出た光が、完全な平行光線ではないことが挙げられる。

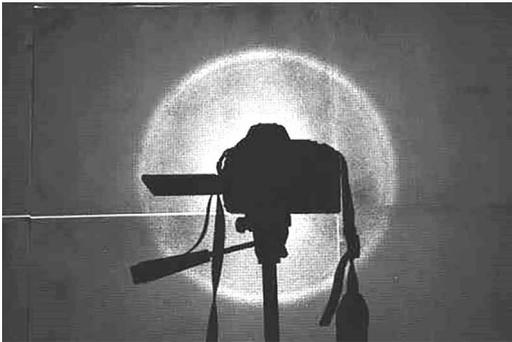


図 7：虹ビーズによる 1 次の虹

3.3 考察

実験で得られた虹ビーズの屈折率と (1.13) 式から 2 次の虹角を求めると $95.3^\circ \sim 98.5^\circ$ であると予想される。図 8 に 2 次の虹ができる様子を示した。虹シートの台紙に使ったのは黒画用紙なので観察者の位置は図でいうところの A である。しかし、もし透明な台紙であったとしたら 2 次の虹は虹シート越しの B の位置から光源を中心にして、視半径約 85° の円として観察することができるであろう。また、3 次、4 次の虹角を計算してみると 3 次の虹が $201.2^\circ \sim 205.7^\circ$ 、4 次の虹角は $304.3^\circ \sim 310.2^\circ$ とわかった。これらの虹がどの位置に見えるかを示したのが図 9 である。3 次の虹は観察者 B の位置で視半径約 23° の円として、4 次の虹は観察者 A の位置で視半径約 53° の円として見えることが分かる。

このことから 4 次の虹は、1 次の虹の外側に出来る虹であると分かるが、目視による観察及び画像解析から 4 次の虹を確認することは出来なかった。これは反射回数が増えることによる光の減衰が原因であると考えられる。これより、4 次以降の虹は再現することが困難であるという事が分かる。

しかし、3 次の虹は視半径がそこまで大きくなく、透明な虹シートを作れば観測できそうである。さらに 3 次の虹は、他の虹と違い、内側が赤く外側が青い円であるという特徴があり、視半径と同時に色の配列からも 3 次の虹であるかどうかを判断することができる。そこで、3 次の虹の再現実験を行うことにした。

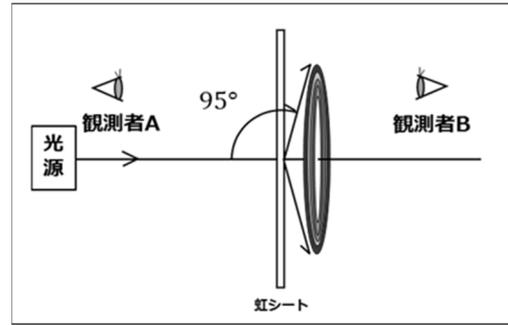


図 8：2 次の虹の見える場所

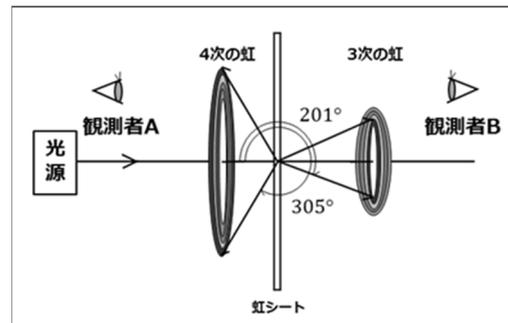


図 9：3 次、4 次の虹の見える場所

4. 3 次の虹の再現実験

4.1 透明虹シートの作成方法

450mm×600mm×5mm のアクリル板を使って透明虹シートを作製した。虹ビーズの固定方法として従来ではスプレーのりによる固定が一般的であったが、スプレーのりを使って作った虹シートはのりの透明度があまり良くないという事が分かったので、Scotch の超透明テープを使って固定した。まずテープの粘着面を上にしてアクリル板の上に置き、両端を強く引っ張りながらアクリル板の裏面にテープを固定することで、粘着面が表になるようにした。この作業を少し重ねるようにしながら行い、最後に端をテープで固定した。そして粘着面に虹ビーズを貼ることで透明虹シートを作製した。

4.2 方法

図 10、11 に実験のセットアップを示す。この際、カメラの方向に虹ビーズの接着面を向けた。この方法だと、アクリル板を透過してきた光が虹ビーズで分光され、3 次の虹を作ることになる。もし光源の方向に虹ビーズの接着面を向けた場合、3 次の虹の光線がアクリル板による反射で減衰し、観測が難しくなると考えたためである。

4.3 結果

カメラで撮影した画像を図 12 に示す。作成した透明

虹シートのサイズはそこまで大きくないため、複数の撮影データを得るために、透明虹シートとカメラとの距離 L を 10、20、30cm と離して撮影した。虹の視半径は水平方向と垂直方向で視半径を測定したところ、次のようになった。

表 1. 測定された視半径

L [cm]	水平方向[°]	垂直方向[°]
10 cm	26.04	25.80
20 cm	26.19	25.07
30 cm	26.47	25.22

撮影データより先ほどの実験と同様の方法でこの虹の視半径（この場合は虹角と視半径は一致しない）を解析したところこの虹の視半径は $25.8 \pm 0.3^\circ$ となった。

(1.15) 式から予想されていた 3 次の虹の視半径は $21.2^\circ \sim 25.7^\circ$ であったため、解析された視半径は 3 次の虹に近い値を取ったという事が出来る。また、図 12 の写真からは、3 次の虹に予想されていたように、内側が赤く、外側が青いという特徴を確認することができた。

以上から、今回観察された虹は 3 次の虹であり、3 次の虹は虹ビーズを使って再現可能であると結論付けた。

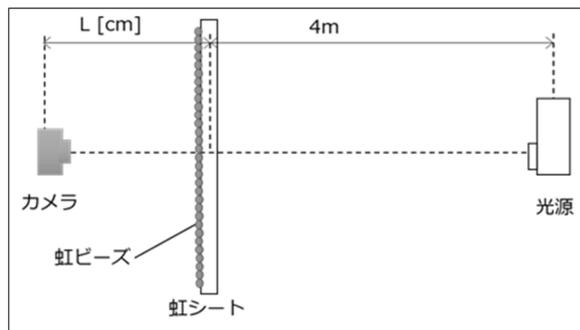


図 10: 実験装置の配置



図 11: 実験の様子

4.4 考察

予想されていた 3 次の虹の視半径は $21.2^\circ \sim 25.7^\circ$ と 4° 近い幅を持っているが、これは反射回数が増えるごとに波長ごとの散乱角が大きくなるためである。そのため、測定された虹ビーズの屈折率 1.56 ± 0.01 の標準誤差 ± 0.01 が反射回数を増すごとに大きく影響すると考えられる。

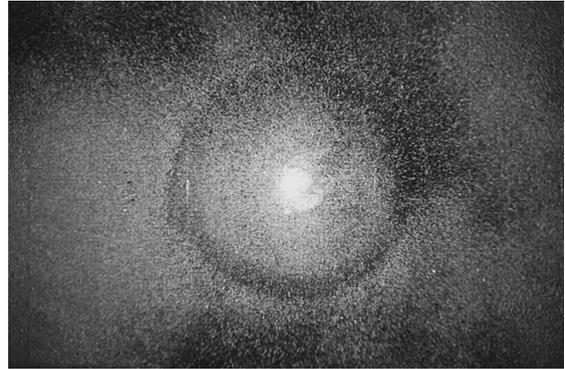


図 12: 3 次の虹

5. まとめ

本研究では 3 次の虹を再現するためのシステムを確立することができた。これにより自然界ではほとんど見ることができない高次の虹を人工的に観測することが可能となった。

課題として、今回の実験では虹ビーズの屈折率を測定するために、液晶プロジェクターを光源として使用したが、どの波長に対する屈折率かは明らかにすることができなかった。そこで、波長が分かっているナトリウム灯などの単色光を用いてその屈折率を明らかにする必要があると考えられる。

今後、3 次の虹がどのような条件で生じるかを考えたい。例えば虹ビーズの直径の大きさやその密度、さらには今回の実験では一層の虹ビーズで実験したため、これが多層になるとどのような見え方をするかなどを調べることで、自然界で生じる 3 次の虹がどのような条件で生じるかを明らかにすることができるかもしれない。これにより、今度は虹ビーズではなく、本物の水を使って高次の虹を再現するための条件を考えることができるようになると思われる。

虹ビーズという教材はすでに調べつくされた教材のように思えるが、虹の大きさからその屈折率を同定したり、高次の虹という観測が難しい虹を、観測できることが分かった。美しい虹が見えるというところで終わらせず、科学的なアプローチを持って実験することができるこの教材は、子どもたちの科学する心を育てる上で非常に有用な教材であるという事が分かる。

参考文献

- [1] R.Greenler 著：『太陽からの贈り物 Rainbows, Halos, and Glories』（丸善，1992）.
- [2] Atmospheric optics: <https://www.atoptics.Co.uk/rainbows/ord34.htm>.
- [3] Atmospheric Phenomena: <https://www.meteoros.de/>.
- [4] 池田圭一・服部貴昭著：『空の虹色ハンドブック』（文一総合，2013）.
- [5] 山本明利：点光源による人工虹の理論，物理教育通信 No.84，9-15（1996）.
- [6] 浜崎修：単色光と虹スクリーン：
<http://www41.tok2.com/home/rikajhm/nijikeityu.pdf>.
- [7] 荒木健太郎著：『雲を愛する技術』（光文社，2018）.
- [8] First Quadruple Rainbow Ever Caught on Camera:
<https://news.nationalgeographic.com/news/2011/10/pictures/111007-first-quadruple-rainbow-triple-science-optics/>.
- [9] 冨塚明：虹のシミュレーション I：長崎大学教養部紀要自然科学篇 vol.34，No.2，103-110（1994）.