

倒立弾性振り子の強制振動

牧原 義一*・國仲 寛人*

Forced Oscillation of an Inverted Elastic Pendulum

Yoshikazu MAKIHARA* and Hiroto KUNINAKA*

Abstract

Nonlinear forced oscillation of an inverted elastic pendulum, which has a massive bob on the top of a vertically standing stainless thin rod, is investigated by measuring the frequency response curve of the pendulum. The pendulum is driven by reciprocating the bottom of the rod periodically in a direction defined as y-axis.

The pendulum shows hard characteristics whose amplitude for the elliptical orbit of the massive bob increases with increasing driving frequency. Further increase in driving frequency causes abrupt decrease in amplitude at a certain frequency. With decreasing the driving frequency, on the other hand, a similar jump phenomenon (abrupt increase) is observed at lower frequency than that where the abrupt decrease occurs with a large hysteresis phenomenon. This result indicates a characteristic of the nonlinear oscillation.

In the experiment where the amplitude of reciprocal motion is increased, it is found that as soon as the amplitude of semi-major axis of the orbit takes a small and abrupt decrease, the amplitude of semi-minor axis shows an abrupt increase, resulting in a large circular orbit of the massive bob. Large amplitude of the orbit decreases abruptly at a higher driving frequency. These peculiar characteristics of nonlinear motion in the system are investigated in detail.

Keywords : Inverted elastic pendulum; Nonlinear oscillation; Frequency response curve; Jump phenomenon; Hysteresis

1. はじめに

ブランコや振り子時計などで見られるように、振り子の運動は私たちが身近に接する親しみ深い運動であり、振動現象を理解するための最も基本的で重要な運動でもある。小学校の理科から大学の初等物理までは、振り子の運動は単振動を示す典型例として取り扱われている。しかし、その運動は本来非線形運動方程式で表されるため、大学の物理教育における振り子の運動は、線形運動から非線形運動までを取り扱うための重要な教材である。とくに、振り子の非線形強制振動においては振動の条件によってバラエティーに富んだ運動が出現するため、大学で初めて学ぶ非線形運動を理解する上で格好なテーマの一つである。

振り子の支点を水平往復運動させる強制球面振り子は興味深い非線形運動を示す単純な力学系であり、これまで数多くの研究がなされている。J. Miles は強制球面振り子の微小振幅の振動を理論的に研究し、強制振動数を変化させたときのおもりの軌道が周期軌道、準周期軌道およびカオス軌道となることを示した^[1]。また、著者の一人は強制球面振り子の長周期強制振動に関する実験的研究を行い、Miles によって示されていたカオスを含む非線形振動が、おもりの軌道が長周期・大振幅となる振動においても観測されることを実験とシミュレーションの両方で示した^[2]。

今回、振り子の糸を細い鋼鉄線（弾性ロッド）に交換して振り子を倒立させた「倒立弾性振り子」の

* 三重大学教育学部

強制振動実験を行い、重力と弾性力が復元力として作用する力学系の非線形強制振動の詳細を実験的に明らかにすることを目的とした。本稿では、作製した実験システムと実験結果（強制振動におけるおもりの軌道の振動数依存性）について報告する。

2. 実験方法

本研究で作製した計測システムの概略を Fig.1 に示す。倒立弾性振り子の加振装置は、ステッピングモーター（Oriental motor, ARM98AC-PS36）にプーリー、クランクシャフト（長さ 300mm）、クランクおよびスライドシャフト（長さ 1100mm）を取り付けたものであり、モーターの回転運動をスライドシャフトの水平往復運動に変換する。ステッピングモーターの角振動数分解能は 1.74×10^{-4} rad/s であり、角振動数設定器と回転数コントローラを用いて、モーターの回転角振動数 ω を $0 \sim 8$ rad/s（周期 $T > 0.8$ s）の範囲で高精度に設定・制御することができる。モーターのステップ角度は 0.01° であり、モーターは極めて滑らかに回転する。スライドシャフトの先端に設置したゴニオメーターヘッドに、発泡スチロール球の表面に反射テープを貼ったおもり（直径 $\phi=39.70$ mm, 質量 $m=2.8$ g）を取り付けた鋼製のロッド（直径 $2r=1.00$ mm, 長さ $L=701.0$ mm）を固定した。ゴニオメーターヘッドには単結晶 X 線回折装置用の $x-y$ ステージ付き 2 軸ヘッドを使用しており、ロッドの傾きを高精度に調整して振動前のロッドを鉛直に固定することができる。そして、天井に設置したハイスピードカメラ（デジモ, VCC-H1200C）で撮影した $1/100$ 秒ごとのおもりの位置 (x, y) を画像処理システム（デジモ, ラインレコーダー-LRH1200X-1）により検出し、モニター上におもりの軌道（射影軌道）を表示した。ここで、ロッドが鉛直状態でのおもりとカメラ間の距離は 1550mm とした。本研究ではモーターの角振動数 ω をパラメータとして、軌道の形や大きさの ω 依存性を調べた。さらに、強制振動におけるスライドシャフトの振幅 Y を $Y=25$ mm と $Y=50$ mm の 2 種類の場合について、おもりの軌道の ω 依存性を計測して振動の振幅依存性を調べた。なお、軌道の測定においては、設定した角振動数 ω [rad/s] の値でおもりの軌道が安定した後に 2~10 分間測定を行い、その状態から ω をわずかに増加（減少）して再び軌道が安定した状態で測定を行うというように、直前の安定な軌道の状態を初期条件として ω 依存性の測定を行った。

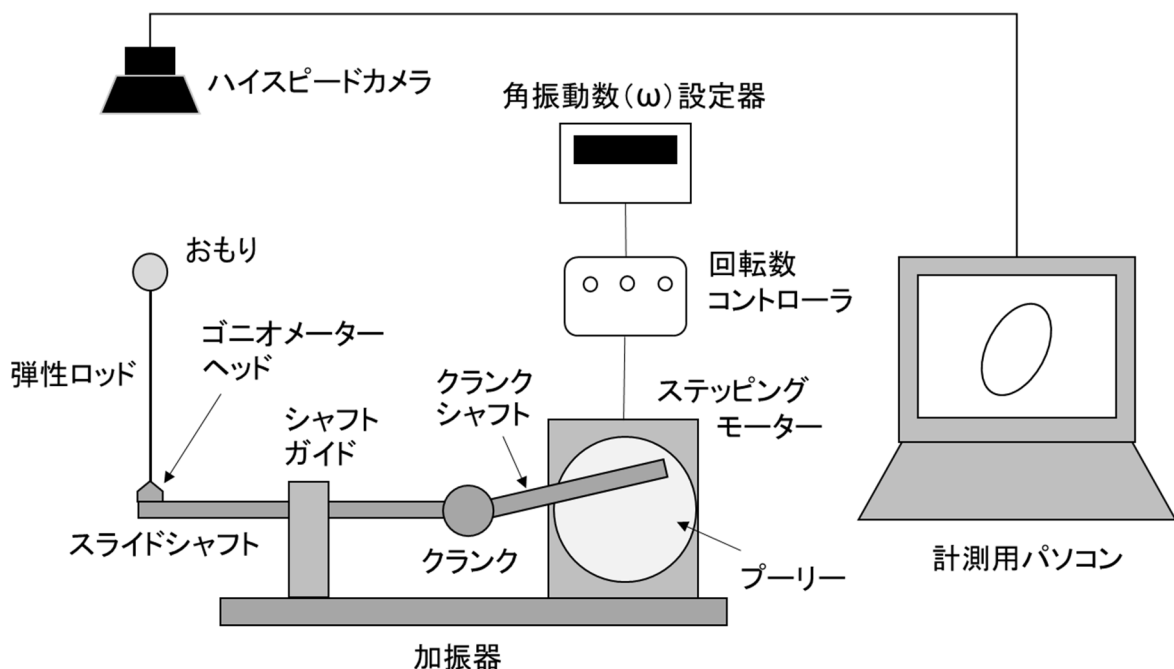


Fig.1 Experimental system for measuring nonlinear motion of the inverted elastic pendulum.

3. 結果および考察

はじめに、ロッドの下端を固定した状態でおもりの初期振幅を x_0 [cm] として5回往復分の振動時間を計測することにより、倒立弾性振り子の自由振動における固有角振動数 ω_0 を求めた。その結果、 $x_0=10\text{cm}$ および 50cm のとき、 ω_0 はそれぞれ 1.53 rad/s および 1.88 rad/s となり、振幅が増加すると固有角振動数は増加することが分かった。この結果は、倒立弾性振り子がロッドの弾性力の影響を反映した漸硬型の復元力を有する振動系であり^[3]、重力の作用による漸軟型の復元力を有する通常の単振り子とは対照的な振動系であることを示している。

Fig.2 に強制振動におけるスライドシャフトの振幅 (Y) を 25mm としたときの、おもりの軌道の特徴を表すパラメータ A, B, θ の ω 依存性を示す。また、Fig.3 にいくつかの特徴的なおもりの軌道の測定結果を示す。ここで、 $\omega \geq 1.25\text{ rad/s}$ でおもりは楕円軌道を描いたため、Fig.2 の挿入図に示すように、楕円の軌道短半径 (semi-minor axis) と軌道長半径 (semi-major axis) をそれぞれ A, B とし、加振方向 (y 軸) に垂直な方向 (x 軸) と楕円長軸のなす角を θ [rad] とした。A, B の単位はモニター画面上の画素数 [pixel] である。ここで、図中のシンボル (Δ , \circ , $*$) は、それぞれ ω の増加過程における A, B, θ の振動数依存性の結果を、(\blacktriangle , \bullet) は、それぞれ ω の減少過程における A, B の結果を示す。

ω を増加させていくと漸硬型の復元力によるロッドの主共振によって振幅 B の値はしだいに大きくなるが、 $\omega_1=2.042\text{ rad/s}$ を超えると軌道の大きさは急激に減少して非共振の状態へ転移した。一方、A の値は ω_1 で小さなピークを示した後減少した。また、楕円の傾きを表す θ は、Fig.3 ②のように長半径が加振方向とほぼ平行な状態 ($\theta \approx \pi/2$) から、軌道の振幅 B が最大値をとる ω_1 付近で③のように右へ傾いた状態 ($\theta < \pi/2$) へ変化した。さらに、振幅の急減後はわずかに左に傾いた (④)。次に、振幅 B が急減した状態から ω を減少させていくと、図中の \bullet で示すように B は $\omega=1.76\text{ rad/s}$ 付近で急激に増大して、 $\Delta\omega \approx 0.30\text{ rad/s}$ の大きなヒステリシスが観測された。

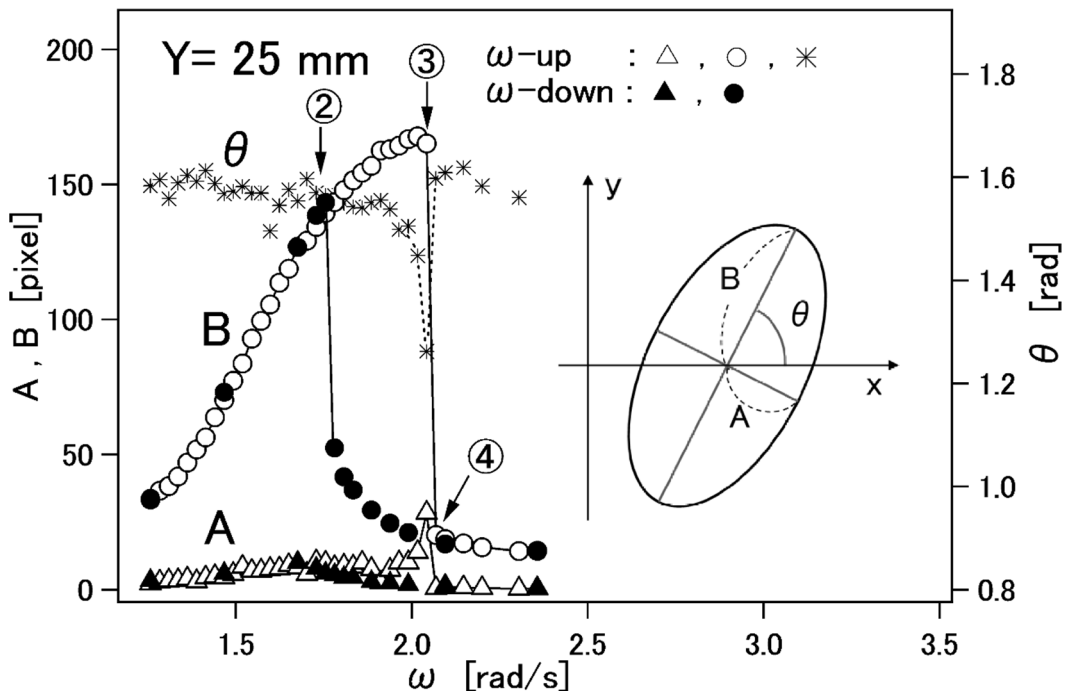


Fig.2 Experimental result of the frequency response curve for $Y=25\text{mm}$ which is a driving amplitude of the slide shaft. The parameters A, B and θ show semi-minor axis, semi-major axis and the angle between x-axis and the semi-major axis for the elliptical orbit of the massive bob, respectively, as shown in the inset.

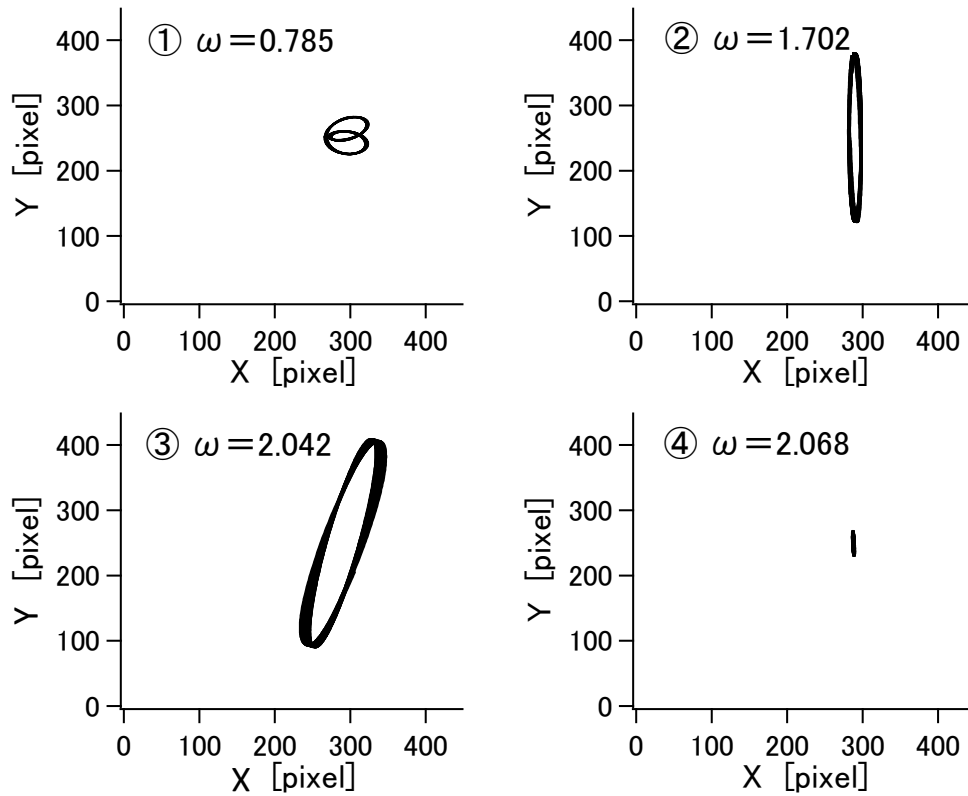


Fig.3 Typical orbits of the massive bob at indicated points ①~④ on the frequency response curve in Fig.2.

この現象は一次と三次の復元力が働く非線形振動系の強制振動の運動方程式 (Duffing の方程式) の解の振る舞いとして説明される^[4]。ここで、一次元振動の運動方程式は

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x + \beta x^3 = f_0 \cos \omega t \quad (1)$$

と表される。上式の左辺第 2 項はおもりの速度に比例する抵抗を、右辺は振動数 ω の周期的強制力を表す。上式において、減衰が無く ($\gamma=0$)、強制力も無い ($f_0=0$) 場合、(1) 式は

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x + \beta x^3 = 0 \quad (2)$$

となる。これを近似的に解くために

$$x = A_1 \cos \omega t + A_3 \cos 3\omega t \quad (3)$$

とおき、 $A_3 \ll A_1$ と仮定して、これを(2)式に代入して振り子の振幅 $|A_1|$ を求めると

$$|A_1| = \sqrt{\frac{4}{3\beta}(\omega^2 - \omega_0^2)} \quad (4)$$

となる。Fig.4 に $|A_1|$ の ω 依存性を一点鎖線で示す^[4]。この曲線は抵抗の無い非線形振動の自由振動に対する応答であり背骨曲線 (backbone curve) と呼ばれる。一方、Fig.4 中の実線と破線で表される曲線は、 $\beta > 0$ すなわち漸硬型の復元力が働く場合の (1) 式から得られる振幅の ω 依存性である。一般に、(1) 式においては振動数に対して P, Q, R の各分枝に対応する 3 個の解が存在する。ここで、破線で表される Q 分枝は不安定な解であるため実験的には実現されない。このため、振幅 $|A_1|$ は加振振動数の増加と

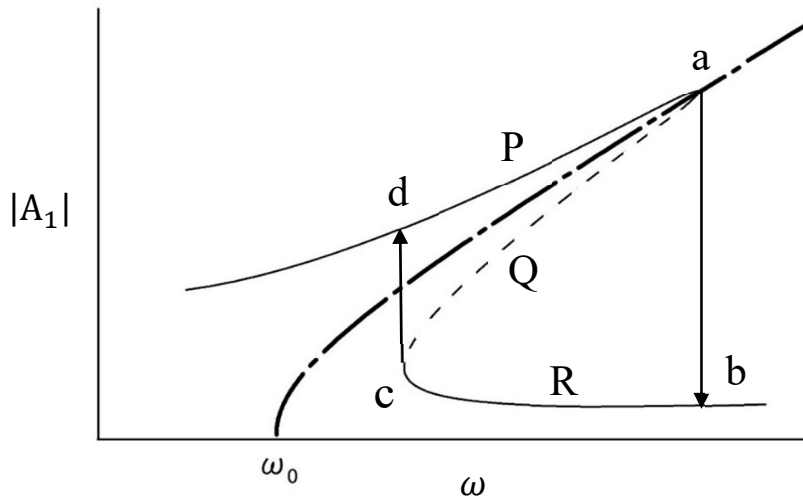


Fig.4 Frequency response curve (FRC) represented with solid and broken lines which is the solution of Duffing equation (1). The dot-dash line called backbone curve indicates the solution of equation (2) that have no terms of damping and external driving force. The red arrows represents the jump phenomena with large hysteresis in the FRC [4].

ともに増大するが、その増大は復元力と抵抗の影響で妨げられ、最大値を示す点 a まで達した後、点 a から点 b の安定解へのジャンプ現象が生じる。また、加振振動数の減少過程においては、同様な理由で点 c から点 d へのジャンプ現象が生じる。この結果、振動数の増減過程でジャンプ位置のずれ（履歴現象）が生じる[4]。

以上のように、ジャンプ現象とそれに伴う大きなヒステリシスは、一次元の非線形強制振動において観測される特徴的な現象として理論的および実験的 [5,6] に良く知られている。本研究においては、倒立弾性振り子の擬3次元的（擬球面上の2次元）な振動において、主として加振（y）方向において類似の現象が生じることが明らかになった。また、Fig.2 の振幅 B と Fig.4 の周波数応答曲線が類似していることから、本系には、 $\beta > 0$ すなわち漸硬型の復元力が働くことも分かった。

一方、 $\omega \leq 1.0 \text{ rad/s}$ の角振動数領域では楕円以外の軌道が現れた。そのため、軌道の大きさを表すパラメータとして、軌道の x 座標および y 座標のそれぞれの最大値と最小値の差として定義した W_x および W_y を用いた。 ω の増加とともに W_x 、 W_y の値は単調に増加するが、 $\omega_2 = 0.785 \text{ rad/s}$ において明確な W_x および W_y のピークが観測された。このときの軌道は Fig.3①に示すような形となり、スライドシャフトが y 方向へ 1 往復する間に、おもりは x および y 方向へそれぞれ 2 往復した。これは、外力の振動数の 2 倍の振動数の振動状態であり、また、 ω_2 の値は前述した振り子の自由振動の実験における振幅が小さい場合（ $x_0 = 10 \text{ cm}$ ）の固有角振動数 ω_0 の約半分であることから、①の軌道は一次元非線形強制振動におけるいわゆる「2 次の高調波共振」の状態に対応するものと考えられる[4]。

Fig.5 に、強制振動の振幅（Y）が 50mm のときの $1.204 \leq \omega \leq 3.456 \text{ rad/s}$ における、おもりの楕円軌道のパラメータ A, B, θ の ω 依存性を示す。また、Fig.6 にいくつかの特徴的なおもりの軌道の測定結果を示す。 ω の増加とともに軌道長半径 B の値はしだいに大きくなり、 $\omega = 2.251 \text{ rad/s}$ を超えると B の値がわずかに減少すると同時に A の値が急激に増加した。この結果、Fig.6 に示すように、軌道の形は傾いた縦長の楕円 (②, ③) から円に近い形 (④) へと大きく変化した。その後、円に近い軌道が続いた後、 $\omega = 3.351 \text{ rad/s}$ で軌道の大きさは急激に減少した。上述した $\omega = 2.251 \text{ rad/s}$ での A, B の値の変化は、y 方向（強制振動方向）で振幅のジャンプ現象が起こると同時に、x 方向（強制振動方向と垂直方向）の振

動が共鳴してその振幅が増大し、その結果、y 方向の振幅の崩壊が抑えられたことによるものであると考えられる。これに対して $Y=25\text{mm}$ の場合は、x 方向の共鳴が始まる前に y 方向のジャンプ現象が起こったものと考えられる。一方、 θ の値は A が急激に増加すると同時に増加し、右へ傾いた ($\theta < \pi/2$) 楕円軌道から左へ傾いた円軌道に近い状態へと変化した。その後、 θ の値は A, B の値が急激に減少するまでほぼ単調に減少した。

次に、A, B の値が急激に減少した $\omega > 3.351 \text{ rad/s}$ の振動状態から ω を減少させてゆくと、以下のような興味深い現象が観察された。Fig.5 の●で示すように、B は $\omega=1.95 \text{ rad/s}$ 付近で急激に増大して $\Delta\omega \doteq 1.40 \text{ rad/s}$ の非常に大きなヒステリシスが観測された。このとき、A の値は飛びを示すことなく ω 増加過程の値へ連続的につながっていった。一方、軌道が円に近い $\omega=2.622 \text{ rad/s}$ から ω を減少させてゆくと、 $\omega \doteq 2.164 \text{ rad/s}$ で B および A はそれぞれ急激に増加および減少して ω 増加過程の値までジャンプし、その後 ω 増加過程とほぼ同じ値をとりながら変化した。このように、円軌道に近い振動状態からの ω の減少過程では、 $\Delta\omega \doteq 0.09 \text{ rad/s}$ の非常に小さなヒステリシスが観測された。このようなヒステリシスの結果や上述した $\omega=2.251 \text{ rad/s}$ における A, B の値の変化は、 $Y=25\text{mm}$ の場合とは大きく異なった興味深い結果であるが、そのメカニズムの詳細は現時点では不明であり、今後の理論的な研究が望まれる。

一方、 $\omega \leq 1.2 \text{ rad/s}$ の領域では、 $\omega=0.340, 0.471, 0.733 \text{ rad/s}$ の3か所において軌道の大きさを表すパラメータ W_x の ω 依存性にピークが観測された。2次の高調波共振と考えられる $\omega=0.733 \text{ rad/s}$ での軌道を Fig.6① に示す。このような複数の ω の値における高調波共振の発生は、非線形強制振動の特性として一次元の振動系について理論的に指摘されている^[4]。

ところで、本研究と同様な条件で強制振動数を変化させた強制球面振り子の振動では、振り子の固有角振動数 ω_0 より数%小さな強制角振動数 ω で振幅の大きな準周期軌道やカオス軌道が観測された^[1]。さらに、 $\omega > \omega_0$ では振幅の大きな円軌道に近い周期軌道が観測され、 ω の増加とともにその振幅はしだいに増加する場合のあることが示された。また、この円軌道に近い軌道は高角振動数側からの ω 減少過程では観測されないことから、 $\omega > \omega_0$ の領域では初期条件に依存する2種類の安定な軌道が共存すること

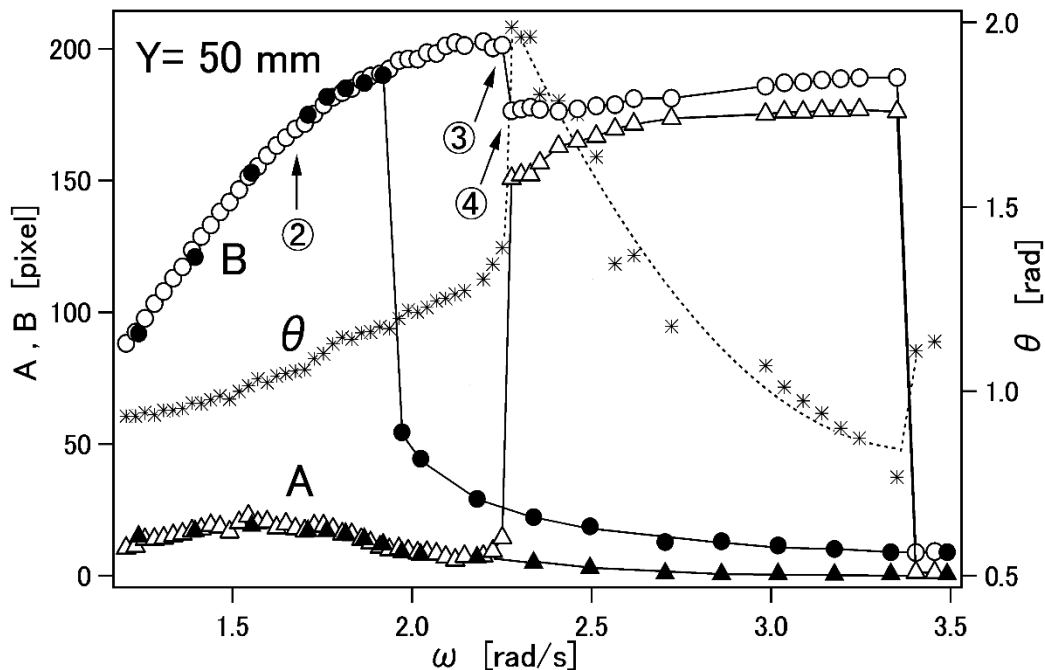


Fig.5 Experimental result of the frequency response curve for $Y=50\text{mm}$ which is a driving amplitude of the slide shaft. The parameters A, B, θ and the symbols show the same parameters and symbols as those in Fig.2.

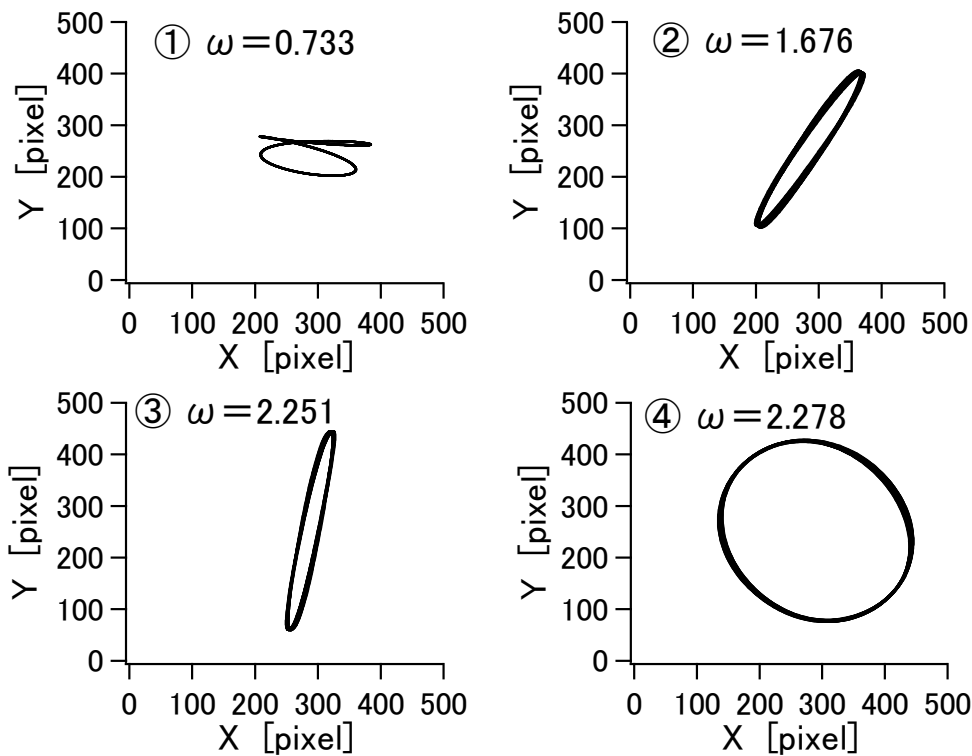


Fig.6 Typical orbits of the massive bob at indicated points ①~④ on the frequency response curve in Fig.5.

が示された。以上の結果から、弾性ロッドの $Y=50\text{mm}$ の場合の $2.251 \leq \omega \leq 3.351 \text{ rad/s}$ における円に近い軌道は、強制球面振り子の場合と同様なメカニズムで発生する初期条件に依存した準安定な軌道であると考えられる。一方、今回の倒立弾性振り子の実験では準周期軌道やカオス軌道は観測されなかった。これは、重りの質量が小さかったことにより運動の安定性が増大したこと、すなわち倒立弾性振り子の重りに働く復元力に起因するものと考えられるが、その詳細を明らかにするためには今後シミュレーションや理論的な解析を行うことが必要である。

4. おわりに

本研究では、倒立弾性振り子の強制振動の周波数応答曲線を測定して、擬球面上の2次元的な弾性振り子の振動状態を明らかにするとともに、本系においてジャンプ現象やヒステリシス現象が現れることを明らかにした。

近年、兵庫県南部地震（阪神・淡路大震災、1995年）、東北地方太平洋沖地震（東日本大震災、2011年）、熊本地震（2016年）、北海道胆振東部大地震（2018年）など震度7クラスの地震が発生するとともに、東海・東南海・南海地震や首都圏直下地震などの大地震の発生が予測されている。このような状況下において、地震時の建物の揺れやその対応策を学習するための教材開発の必要性が高まっている^[7]。今回作製した倒立弾性振り子の実験システムは、建造物の1自由度系質点モデルとして超高層ビルの長周期地震動を演示・研究するための実験装置としても有効である^[8]。また、弾性ロッドに取り付けるおもりの数を2個、3個と増やすことによって、多自由度系の振動状態を基本的な弾性棒-質点モデルとして学習・研究することも可能である。今後、本研究に関するシミュレーション計算や、上述した多自

由度系の弾性棒-質点モデル系の実験を行って、その興味深い振動状態と揺れのメカニズムを明らかにしてゆきたい。

謝 辞

本研究を実施するにあたり、当研究室所属の須藤智香氏、稲垣慎也氏、高山博貴氏には、実験システムの作製、実験データの収集、計算において協力をいただいた。ここに記して各氏に謝意を表す。本研究は、平成 23 年度・科学技術振興機構 (JST) 研究成果展開事業 A-STEP (課題番号: AS232Z02055B、課題名: 弾性ロッドの共振実験による超高層建造物の破壊的な揺れの研究)、および、平成 24 年度・中部電力からの受託研究 (課題名: カオス振動に関する基礎研究) の助成を受けたものである。

参考文献

- [1] J. Miles, "Resonant motion of a spherical pendulum", *Physica* 11D, 309-323 (1984).
- [2] 牧原義一, 太田成俊, 森信之, "強制球面振り子によるカオスの実験", *大学の物理教育*, 10, 91-94 (2004).
- [3] 戸田盛和, 「振動論」, 培風館, p.56 (1968). および, 永井健一, 「ダイナミクスのシステム解析」, 森北出版, p.58, p.60 (2000).
- [4] 戸田盛和, 「振動論」, 培風館, p.77-79 (1968). および, 永井健一, 「ダイナミクスのシステム解析」, 森北出版, p.148-151 (2000).
- [5] 島田昌敏, 由井慶子, 下村昇, 「物理振子の強制振動 第1報 -実験-」大阪教育大学紀要, 第 V 部門, 第 30 巻, 第 1-2 号 41-50 (1981).
- [6] 島田昌敏, 下村昇, 田中友安, 「物理振子の強制振動 第2報 -コンピュータ・シミュレーション-」大阪教育大学紀要, 第 V 部門, 第 31 巻, 第 1 号 37-49 (1982).
- [7] 福和伸夫, 原徹夫, 小出栄治, 倉田和己, 鶴田庸介, 「建物耐震化促進のための振動実験教材の開発」地域安全学会論文集 No.7, 11, 1-12 (2005).
- [8] 平成 23 年度 JST 研究成果展開事業 研究成果最適展開支援プログラム フィージビリティスタディ【FS】ステージ完了報告書 (課題番号: AS232Z02055B, 課題名: 弾性ロッドの共振実験による超高層建造物の破壊的な揺れの研究), および, 平成 24 年度中部電力からの受託研究報告書 (課題名: カオス振動に関する基礎研究).