三重大学教育学部研究紀要　第 70 巻　教育科学（2019）301－311 頁

「単位当たり量」と「単位量当たりの大きさ」の考え方の違いについての一考察

中　西　正　治*

A Consideration on the Difference in Concept of “Unit Quantity” and “Quantity per Unit”

Masaharu NAKANISHI*

要　旨

現場では「単位当たり量」と「単位量当たりの大きさ」の 2 つの用語が混在している。同じような意味で使用している場合がほとんどで、この 2 つがどう異なるのかについて明確に認識されているとは考えにくい状況である。そこで本稿では「単位当たり量」と「単位量当たりの大きさ」の考え方の違いについて考察している。結論として、「単位当たり量」は、その物や事象が内包している強さや大きさの程度を表すために（少なくとも）適切な 2 つの独立した量を測定しそれらをもとに数量化された既測量であり、「単位量当たりの大きさ」は、2 つの量を見比べるときに生まれてくる量であるとしている。2 つの考え方の違いはシェーマにも現れ、「単位当たり量」は「かけわり図」になり、「単位量当たりの大きさ」は 2 つの直線になる。またそれらの違いがシェーマの違いにつながり、児童の理解にどのように関わるのかについて考察している。

1．はじめに

教科書では「単位量当たりの大きさ」という用語が使用されている。「単位当たり量」は数学教育協議会が使っている用語である。現場では「単位当たり量」と「単位量当たりの大きさ」の 2 つの用語が混在している。同じような意味で使用している場合がほとんどで、この 2 つがどう異なるのかについて明確に認識されているとは考えにくい状況である。そこで本稿では「単位当たり量」と「単位量当たりの大きさ」の考え方の違いについて考察し、さらにそれらの違いがシェーマの違いにつながり、児童の理解にどのように関わるのかについて述べる。

2．「単位当たり量」について

内包量には未測量の段階と既測量の段階がある。

（1）未測量の段階

長さや重さは、そこにすでに存在している。ものさしや計りで測定しなくとも、長さは目で見ればその存在と、その長短は測定せずとも認識できる。また、重さは手に持てばその存在と、その軽重は測定せずとも認識できる。同じように、混み具合は朝の満員電車で体が感じるぎゅうぎゅうさで、速さは目の前を通り過ぎていく車窓の景色の流れで、雨の激しさは耳に入る音や目で見た雨水の跳ね具合で、そ

＊三重大学教育学部

の存在とその程度は測定をしなくとも認識できる。その混み具合や速さや雨の激しさの程度を量（**内包量**）として捉える。それらの量はその物や事象が内包している強さや大きさの程度を表している。混み具合は「スカスカ」や「ギュウギュウ」、速さは「ノロノロ」や「ビューン」、雨の激しさは「ポツポツ」や「ジャージャー」など未測量であるが、擬態語や擬音語で表現されることがある。

満員電車の混み具合がどこも同じならば、広い範囲で人数を数えようが狭い範囲で数えようが混み具合は変わらない。混み具合は広さや人数には関係しない。また同じ速さで走っていれば、長い時間走ろうが少しの時間だけ走ろうが、長い距離を走ろうが少しの距離だけ走ろうが速さは変わらない。速さは時間や距離には関係しない。雨の激しさが同じようであれば、時間が経ったからとか降水量（降った雨などが横に流れ出すことなく溜まった場合の水の深さ）が増したからといって雨の激しさは変わらない。雨の激しさは、時間や降水量には関係しない。

混み具合、速さ、雨の激しさは、それ自身存在している。

（2）既測量の段階

長さや重さは、日常では 10cm や 20g などと測定した数量（既測量）を使っている。例えば、混み具合（人口密度、体密度）は 120 人/km^2、13.5g/cm^3、速さは 40km/h、雨の激しさは 12mm/h など既測量を使って表現している。10cm や 20g は、人間が自分たちに便利なように勝手に決めた単位（cm、g、h）で、それがいくら分あるかを測定し数量化したものである。長さは**長さの単位**を決めて、重さは**重さの単位**を決めて測定し数量化している。しかし、120 人/km^2 や 13.5g/cm^3 や 40km/h や 120mm/h は、それぞれ 2 つの外延量、人数と広さ、質量と体積、距離と時間、降水量と時間を測定し組み合わせて数量化されている（外延量は連続量を対象として用いる用語であるが、ここでは便宜上「人数」にも使用する）。

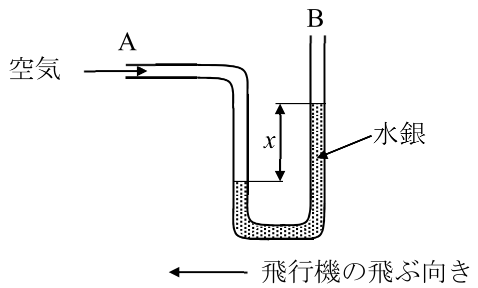
人数と広さは異なる量なので比較しようがない。このようなとき、広さと人数は互いに独立した量であるという。質量と体積、距離と時間、降水量と時間についても同様である。混み具合（人口密度）は、互いに独立している 2 つの量（人数と広さ）を用いて表されている。速さや雨の激しさも同様である。しかし、広さと人数でなくとも混み具合（人口密度）を数量化できるし、距離と時間でなくとも速さを数量化できる。例えば、人口密度はお互いの距離間でも表現でき、速さは車窓を過ぎ去っていく電信柱が 1 秒間に何本過ぎるかでも表現できる。また、観覧車のように円運動する物体に対しては角速度が用いられる。その時その場合によって、より有効で便利な量を利用すれば表現は可能である。結論から言えば、混み具合（人口密度）には人数と広さが、速さには距離と時間が、雨の激しさには降水量と時間が有効で便利なのである。だから、一般に人口密度は人数と広さを、速さは距離と時間を、雨の激しさは降水量と時間を測定し数量化して求められている。

しかし、自動車や飛行機の速さは、直接距離を測定しているわけではない。

自動車は、タイヤの外周の長さと回転数がわかれば、「タイヤの外周の長さ×回転数＝距離」で距離を求めることができるため、一定時間のタイヤの回転数を測定することで速さを算出している。自動車のタイヤの車軸には回転数を測るセンサーがついており、回転数を表すデジタル信号が速度計に伝えられコンピューターが速さを表す数値に変換している。

飛行機は、飛行機に取り付けられているピトー管という U 字形の管を用いている。飛行機が飛ぶと、周りの空気が A と書いてある口から管の中に飛び込んでくる。そのとき管の中の水銀が強く押されて下がる。そして、A から飛び込む空気は飛行機の速さが速ければ速いときほど強く水銀を押すことになる。U 字管の中の水銀面の高さの違い（x）を測定することで速さを算出している［図 1］。

速さは、距離と時間を測定して「距離÷時間」を計算して求めていることが唯一ではない。大切なのは、何を測定すると有効で便利かである。



[図 1]

風の強さは 1 秒間当たりに進む距離（m/s）で、雨の強さは 1 時間当たりの降水量（mm/h、例えば、1 時間に 120 ミリ（120mm/h）は猛烈な雨である）で、台風の大きさは 1m^2 当たりにかかる力（hPa、1Pa＝1N/m^2、例えば、950hPa（95000N/m^2）は大型台風である）で示している。その事象が内包している強さや大きさの程度（内包量）を 120mm/h や 950hPa で表現している。120mm/h や 950hPa を **単位当たり量**（内包量）という。単位当たり量とは、その物や事象が内包している強さや大きさの程度を表すために、（少なくとも）適切な 2 つの独立した量を測定し、それらをもとに数量化された既測量である。

(3) 単位当たり量のさらなる意味

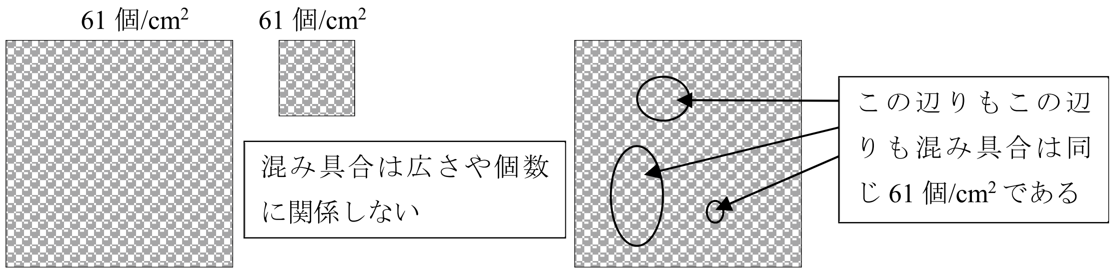
ここでは混み具合と速さについて述べる。

①混み具合

混み具合（一様分布）は、どの辺りでも広さや個数には関係なく同じである。

例えば、「10cm^2 中に 610 個ある混み具合」と「5cm^2 中に 305 個ある混み具合」と「1 cm^2 中に 61 個ある混み具合」と「 0.5 cm^2 中に 30.5 個ある混み具合」と「0.1 cm^2 中に 6.1 個ある混み具合」はすべて同じ混み具合であり「61 個/cm^2」で代表される。筆者の混み具合のイメージ図は［図 2］のようである。

〈混み具合（一様分布）のイメージ図〉



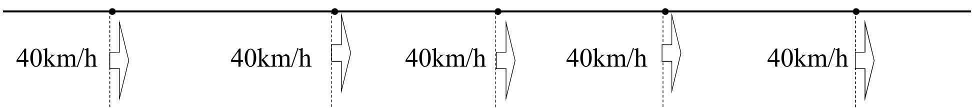
[図 2]

②速さ

速さ（一様変化）は、どの地点でも距離や時間に関係なく変わらない。例えば、「5 時間に 200km の長さを移動する速さ」と「2 時間に 80km の長さを移動する速さ」と「1 時間に 40km の長さを移動する速さ」と「30 分間に 20km の長さを移動する速さ」と「6 分間に 4km の長さを移動する速さ」と「9 秒間に 10m の長さを移動する速さ」はすべて同じ速さであり、「40km/h の速さ」で代表される（ここでは便宜上、学習指導要領解説書で示されている表現を使用する）。筆者の速さのイメージ

図は［図 3］のようである。

〈速さ（一様変化）のイメージ図〉



［図 3］

（4）速さは何を表しているか

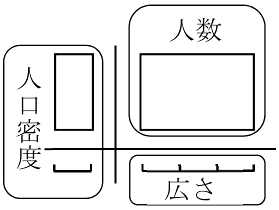
教科書には「国や都道府県の人のこみぐあいは、人口密度で表します。」（東京書籍）という説明がある。他の教科書会社も混み具合の学習の流れの中で人口密度を教えていて、「こみぐあい」を「密度」で表わすとしている。しかし速さの学習において「何」を速さで表すかという説明はどこにもない。そこで、「何」とは何かについて考えてみたい。

詳しく言えば、速さは $y=f(x)$（x は時間、y は距離）の微分係数であるから、目の前を通り過ぎるその一瞬に在る、その物体が前に進もうとしている内包された強さや大きさの程度ということになる。目の前を通り過ぎていった車の状況を説明するのに「ゆっくり走っていった」「すごいスピードで走っていった」「すごい勢いで通り過ぎて行った」などという。目や耳で知覚した擬態語である「ノロノロ」や「ビューン」はその状況を端的に表している。「何」は、これらのことを表現でき、しかもそれは児童にも分かり易くなければならない。そこで本稿では「何」をその瞬間に前に進もうとしている「勢いの程度」と捉えた。そして「勢いの程度」を速さで表すとした。つまり「40km/h」は「その瞬間、1 時間に 40km 進もうとしている勢いの程度」ということになる。

（5）単位当たり量といくら分と全体の量の関係

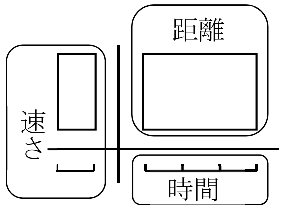
混み具合を例にして説明する。

そこに混み具合（未測量）が存在し、それを数量化するために、適切な独立した 2 つの量（人数と広さ）を選びそれぞれを測定し、それらをもとに数量化して人口密度（単位当たり量）を求める。この活動の中には「人口密度（混み具合）」「広さ」「人数」の 3 つの量が存在する。ゆえに 3 つの量はシェーマにも明記される。そのシェーマが［図 4］である。このシェーマは、かけ算やわり算の関係を表しているので「かけわり図」と呼ばれている。そして、人口密度を「人口密度＝人数÷広さ」（第一用法）と求めるとした瞬間から、「人数＝人口密度×広さ」（第二用法）、「広さ＝人数÷人口密度」（第三用法）が同時に発生する。同様のことが速さや雨の激しさについても言える。



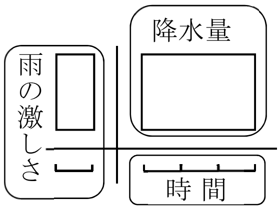
人口密度＝人数÷広さ

人数＝人口密度×広さ　広さ＝人数÷人口密度



速さ＝距離÷時間

距離＝速さ×時間　時間＝距離÷速さ



雨の激しさ＝降水量÷時間

降水量＝雨の激しさ×時間　　時間＝降水量÷雨の激しさ

［図 4］

３．「単位量当たりの大きさ」について

（1）学習指導要領における「単位量当たりの大きさ」の定義

この用語は教科書で扱われている。どういう意味で使用しているのか。文部科学省『小学校学習指導要領解説　算数編』（平成 29 年 6 月 pp.259-260）を見ると、以下のようなことが書かれている。（波下線は中西）

C(2) 異種の二つの量の割合

(2) 異種の二つの量の割合として捉えられる数量に関わる数学的活動を通して，次の事項を身に付けることができるよう指導する。 ア　次のような知識及び技能を身に付けること。 (ｱ) 速さなど単位量当たりの大きさの意味及び表し方について理解し，それを求めること。 イ　次のような思考力，判断力，表現力等を身に付けること。 (ｱ) 異種の二つの量の割合として捉えられる数量の関係に着目し，目的に応じて大きさを比べたり表現したりする方法を考察し，それらを日常生活に生かすこと。

（中略）

第５学年の速さなど単位量当たりの大きさの学習においては，基本的な量の性質をもっていない量を比較するのは初めてであるので，異種の二つの量の割合として捉えられる量を比べることの意味を十分理解できるようにすることが大切である。この意味の理解に基づいて，目的に応じて速さや人口密度などを考察する方法を工夫し，日常生活の事象の解決に活用することができる資質・能力の育成を目指すことが大切である。

（中略）

(ｱ) 速さなど単位量当たりの大きさ

児童は日常生活において，人の走る速さや乗り物が移動する速さなどを，速い，遅いなどと表現して捉える経験

をしてきている。速さを量として表すには，移動する長さと，移動にかかる時間という二つの量が必要になる。速さは，単位時間当たりに移動する長さとして捉えると，（速さ）＝（長さ）÷（時間）として表すことができる。例えば，時速 60km の速さとは，１時間に 60km の長さを移動する速さということになる。

以上のことから「異種の二つの量の割合」の 1 つの例として「単位量当たりの大きさ」があることがわかる。「異種の二つの量の割合」の下位概念として「単位量当たりの大きさ」がある。

(2)「異種の二つの量の割合」の歴史的背景

「単位量当たりの大きさ」の上位概念である「異種の二つの量の割合」はどんな考え方なのか、その言葉はいつの頃から使用されてきたのかについて確認しておこう。そのことについて先行研究がある。直 房子（1990）は論文「小学校における「割合」指導の変遷―「割合」と「比」の定義に着眼して―」の「（2）割合という日常語が戦後なぜ用語として使われるようになったか」（pp.20-22）で、「異種の量の割合」について以下のように分析している。理解を深めるために少し長くなるがここに引用する（下線は中西）。

① 戦前と戦後では割合や比の指導目標が変わったため

黒表紙本では割合に対する問題は損得・租税・利息・公債・株式等の経済面での事実算を中心としており歩合算と呼ばれていた。この歩合算は小学校算術では相当重要視されていた。しかし「高等小学校第二学年ニ於テ授クル歩合算ノ如キハ最モ実際的ナルモノナレハ重キヲ事柄ニ置キテ教授スヘキモノナリ然ラスンハ其計算ハ無意識ニ帰スヘケレナリ」という尋常・高等小学校算術編纂趣意書の文面に見られるように、黒表紙本の割合指導は関係的な見方を養うというよりも歩合算の内容自体を学ばせることに意義があるとしていた。また、歩合算の指導内容以外で（例えば分数の乗除の場面など）割合の考えを使わせるということもなかった。

しかし、戦後は歩合算のための割合指導ではなく、数の働きの理解や、乗除の意味の拡張の把握のための重要な考え方を身に付けることを割合指導の目標とするようになった。このような目標のもとに指導内容も大幅に変わり、歩合算のような商業面での問題は一掃された。そして割合の導入段階では児童の日常生活に近い具体的な場面から、どのような時に割合や比というものが必要とされるかを気付かせることが強調されるようになったのである。そして割合の表現方法も歩合だけでなく、整数倍・小数倍・分数倍・百分率・比・比の値・グラフによる表現など多様になった。

つまり戦後は割合や比がふたつの数量を見比べる時に生まれてくる考え方だという本質を意識するようになったのである。このような考え方を歩合という言葉で称してはしっくりこないものが有る。そこで A の何倍というような倍概念を含み比・比の値・百分率・歩合・分数で表わされた割合すべてを内容に含めることのできる言葉として「割合」という言葉の登場となったと考える。

また、戦前は比は同種の量に限っていたが、戦後はそれを異種の量にも広げ、5 年生の指導内容に据えた。これを「異種の量の歩合」というのはもちろん「異種の量の比」というのもぴったりしない。やはり「異種の量の割合」という表現が一番よくあてはまる。このように戦後になって異種の量の割合が指導内容になったことも割合という言葉が用語として使われるようになった理由のひとつであろう。

さて割合の指導目標の変化に伴って変わったのは指導内容や用語だけではない。指導順序も戦前と戦後で変わった。黒表紙・緑表紙では「比→比例→歩合」の順に指導している。したがって、歩合や百分率は比の値の表現とされていた。しかし、戦後（正確には 33 年以降）は比の前に割合という単元を設定し「割合→百分率・歩合→比→比例」の順に指導している。これはやがて比としてまとめる前に、まず割合で二量を比較するということはどういうことかを知らせ、その有用性に気付かせることをねらっているのである。つまり比を理解してこれを使うことがで

きるまでの中間語としても割合という言葉は必要になったのである。

戦前は、商業面を中心とした歩合算が小学算術では割合指導として相当重視されていたが、戦後は歩合算の商業面での問題は一帰され、数の働きの理解や、乗除の意味の拡張の把握のための重要な考え方を身に付けることを割合指導の目標とするようになった。そのため戦後は、割合の導入段階では児童の日常生活に近い具体的な場面から、どのような時に割合や比というものが必要とされるかを気付かせることが強調され、割合の表現方法も歩合だけでなく、整数倍・小数倍・分数倍・百分率・比・比の値・グラフによる表現など多様になった。戦後は割合や比がふたつの数量を見比べる時に生まれてくる考え方だという本質を意識するようになったと分析している。そして、倍概念を含み比・比の値・百分率・歩合・分数で表わされた割合すべてを内容に含めることのできる言葉として「割合」という言葉の登場となったと推測している。戦後はその考え方を異種の量にも広げ適用していった。その結果、一番よくあてはまる表現として「異種の量の割合」が出現したのではないかとしている。図式にすると［図 5］のようになる。

以上が「異種の量の割合」の歴史的背景である。2 つの異種の量を対象とすれば、「異種の量の割合」は「異種の二つの量の割合」となる。

以上のことから「異種の二つの量の割合」下位概念である「単位量当たりの大きさ」は、2 つの数量を見比べる時に生まれてくる考え方であることがわかる。

戦前　歩合算（商業面重視）　同種の量

戦後　数の働きの理解や、乗除の意味の拡張の把握のための重要な考え方を身に付ける　⇓

表現方法（歩合、整数倍・小数倍・分数倍・百分率・比・比の値・グラフなど）　⇓

⇓　同種の量

割合 ―― 異種の量

↓

異種の量の割合

［図 5］

（3）小学校学習指導要領解説の考察

・「C(2) 異種の二つの量の割合」の（2）のアの「(ｱ) 速さなど単位量当たりの大きさ‥‥」のからは、

速さ＝単位量当たりの大きさ

と捉えていることがわかる。「単位量当たりの大きさ」は「異種の二つの量の割合」であるから、「単位量当たりの大きさ」である速さは、2 つの数量を見比べる時に生まれてくる考え方となる。「速さを量として表すには，移動する長さと，移動にかかる時間という二つの量が必要になる。」と述べられていることにも納得がいく。

・「速さは，単位時間当たりに移動する長さとして捉えると，(速さ)＝(長さ)÷(時間)として表すことができる。」からは、

速さ＝<u>単位時間</u>当たりに<u>移動する長さ</u>

（単位量）当たりの（大きさ）

↓

(速さ)＝(長さ)÷(時間)

となる。この解釈で時速 60km を考えると、

時速 60km＝1 時間当たりに移動する長さは 60km＝1 時間に 60km の長さを移動する

ということになる。この両辺に「速さ」を入れると、解説にもあるように、

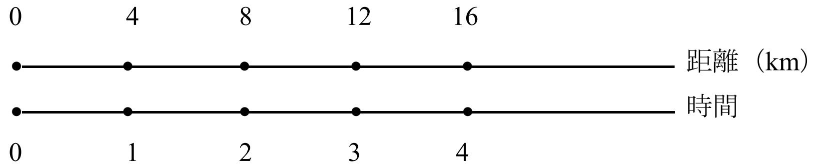
時速 60km の速さとは，1 時間に 60km の長さを移動する速さ

となる。筆者は

時速 60km とは，1 時間に 60km の長さを移動する速さ

の方がすっきりする。

・単位量当たりの大きさは、2 つの数量を見比べる時に生まれてくる考え方なので、速さを考えるときには、時間と距離の 2 つの量が前提となる。教科書ではその 2 つの量を 2 つの数直線で表現している［図 6］。



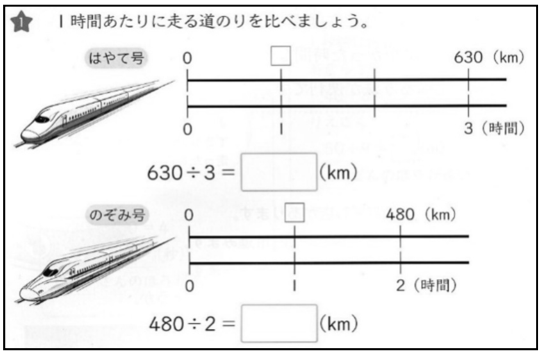
［図 6］

ここから時速 4km を導き出すことになる。

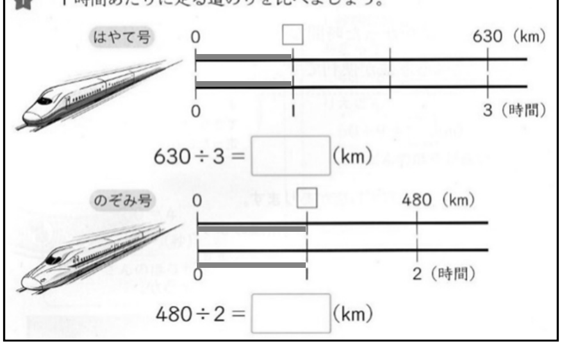
４．シェーマの限界と有効性について

(1) 単位量当たりの大きさで使用するシェーマの限界（限界 1）速さの視覚的表示ができない

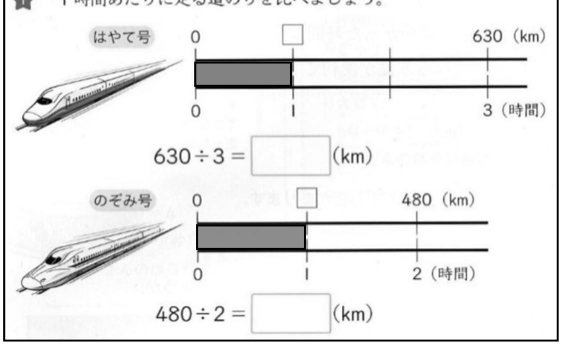
東京書籍『新しい算数 6』（平成 26 年 2 月 28 日検定済）p.112 には右図のような説明図がある。はやて号とのぞみ号の速さをそれぞれ求めさせている。はやて号は時速 210km、のぞみ号は時速 240km である。では、時速 210km、時速 240km は説明図のどこに現れているのであろうか。現場の先生方にお聞きすると、次のようないくつかの答えが返ってくる。



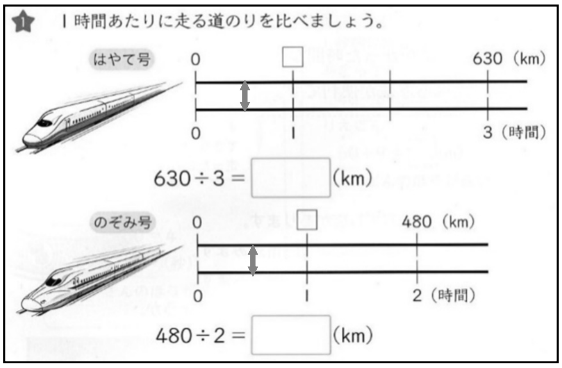
［例 1］



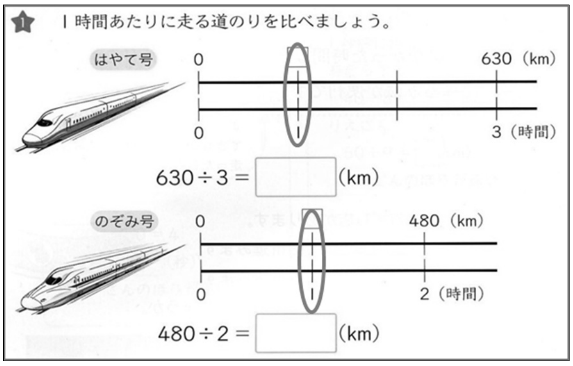
［例 2］



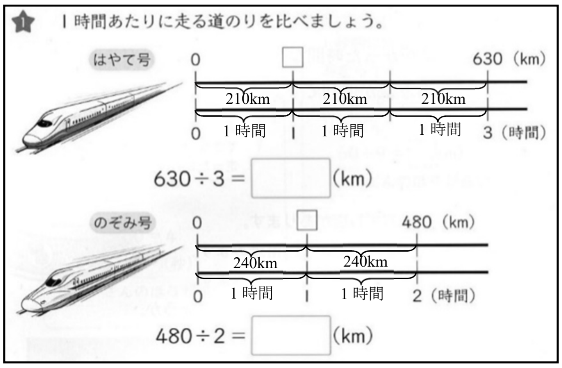
［例 3］



［例 4］



［例 5］



［例 6］

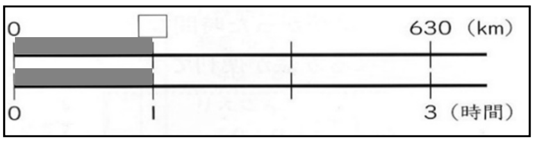
どこにも表されていない。

答えは、「どこにも表されていない」である。

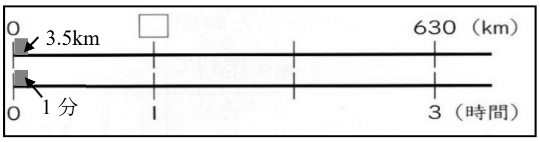
（限界 2）単位換算をしても速さは変わらないが、その視覚的表現ができない

時速 210km は、単位換算すると、分速 3.5km、秒速約 58.3m である。もし上述の［例 1］のように図示すると、時速 210km、分速 3.5km、秒速約 58.3m は、それぞれ次のようになる［図 7］。

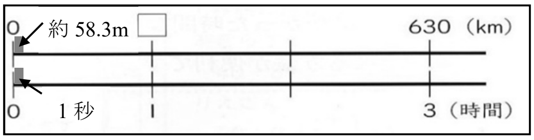
時速 210km



分速 3.5km



秒速約 58.3m



［図 7］

見た目には距離と時間がなくなっていく。速さはなくなっていくのか。速さがなくなるわけがない。時速 210km、分速 3.5km、秒速約 58.3m の速さは同じであるが、そのようには見えない。そもそもこのシェーマでは速さは表現できていないので、時速 210km、分速 3.5km、秒速約 58.3m の速さが同じであることは説明できない。

頭の中だけで同じ速さであることを認識しなければならない。このことが児童にとって難しいことは

容易に想像がつく。

（限界 3）シェーマと立式が結び付きにくい

距離と時間の 2 つの数直線から「時速 4km×3 時間＝12km」の関係式を導くには、時速 4km を頭の中で考えなければならない。このシェーマには、時間と距離しかないので立式するのは難しい［図 6］。

（2）単位当たり量で使用するシェーマの有効性

単位当たり量で使用するシェーマ（かけわり図）は、単位量当たりの大きさで使用するシェーマの欠点を克服している。

（解決 1）速さの視覚的表示ができる

かけわり図では、速さを左側に視覚化している（[図 4］参照）。

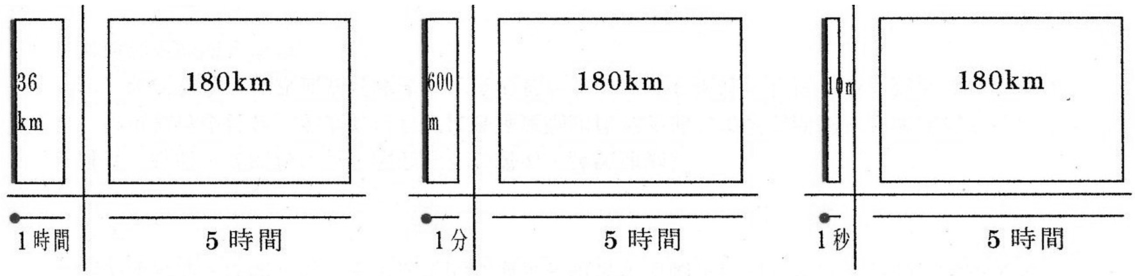
（解決 2）単位換算をしても速さは変わらないことを視覚的に表現ができる

高さ（太い線分）が「（瞬間の）勢いの程度」を表し、距離と時間と速さの 3 者関係を表現している。このシェーマでは、時速であろうが、分速であろうが、秒速であろうが、「（瞬間の）勢いの程度」は同じであることが同じ高さで視覚的に表されている［図 8］。

36km/時 → 600m/分 →10m/秒 をさらにこれを推し進めていくと瞬間の速さになる。視覚的には黒い線分になり、その長さが「（瞬間の）勢いの程度」36km/時を表している［図 9］。この長さは、$y=f(x)$（x は時間、y は距離）の微分係数を表している。

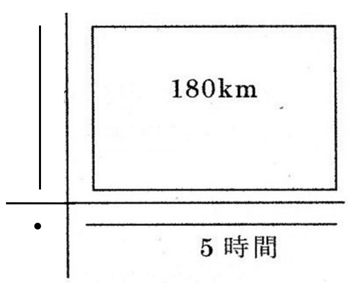
連続量を対象としたときの「かけわり図」は本来［図 9］である。しかし、分離量を対象としているときの「かけわり図」では単位当たり量を長方形で表している。連続量になったからと言って急に［図 9］を提示しても難しく感じるのではないか、やはり段階的に進めた方が良いのではないかと考え、本稿では、当面幅を持たせた長方形を単位当たり量の表示としている。

36km/h の場合



36km/時　　600m/分　　10m/秒

［図 8］



［図 9］

（解決 3）シェーマと立式が結び付きやすい

3 つの量が視覚化されているので、児童はかけわり図を見て考えることができ、思考を助けられるので、演算決定が 2 つの数直線の場合と比べより容易にできる（[図 4］参照)。

５．おわりに

以上の考察から、混み具合や速さの指導の道筋が見えてくる。

「単位当たり量」の立場を取るのか、「単位量当たりの大きさ」の立場を取るのかで、その指導内容・指導方法は自ずと異なる。本稿は、人/km^2、g/cm^3、km/h、mm/h、N/m^2 などの複合単位の本質的な意味、小中高を見通した系統性・発展性、児童の理解などを鑑み、前者の立場を取る。すなわち、まず未測量の内包量の存在を示し、その内包量の数量化のために適切な 2 つの外延量を選び、それらを測定し単位当たり量を求めるという流れの指導である。

今後は、この立場に立った具体的指導について研究を進めたい。

〔引用文献・参考文献〕

(1) 東京書籍『新しい算数 5 下』平成 26 年 2 月 28 日検定済 p.14
(2) 文部科学省『小学校学習指導要領解説　算数編』平成 29 年 6 月 pp.259-260
(3) 直 房子（1990）「小学校における「割合」指導の変遷―「割合」と「比」の定義に着眼して―」pp.20-22
(4) 東京書籍『新しい算数 6』平成 26 年 2 月 28 日検定済 p.112
(5) 銀林浩著『量の世界・構造主義的分析』昭和 50 年 8 月 20 日発行