三重大学教育学部研究紀要　第 70 巻　教育実践（2019）497－505 頁

児童の数学的な考え方を引き出す算数授業の研究

－ 事象の変化を数理的に捉えることを通して －

田中　伸明*・神谷　麻美**

A Study on Developing Mathematical Thinking in an Elementary Class
：Through Mathematical Consideration about Changes of Phenomena

Nobuaki TANAKA and Mami KAMIYA

要　旨

算数・数学教育において、「数学的な見方・考え方」は、概念理解、処理技能の獲得、さらには、事象の考察において重要な働きをなすものである。

本研究は、三重大学教育学部と津市立北立誠小学校の連携事業に位置付けられたものであり、数量関係を扱う小学校 6 年生の授業において、事象の変化を数理的に捉えることを通して、児童が存分に「数学的な考え方」を働かせることを目指した研究授業の報告である。

キーワード：小学校算数、数量関係、数学的な考え方

1. 研究の背景と目的

昭和 33 年施行の「小学校学習指導要領」において、「数学的な考え方」が算数科の目標に明示されて以来、それを涵養することは、算数教育の重要な目標の一つとされてきた。新しくは、平成 29 年 3 月末告示の「小学校学習指導要領」の算数科の目標に、

「数学的な見方・考え方を働かせ、数学的活動を通して、数学的に考える資質・能力を次の通り育成することを目指す。」

とあり、目標の柱書冒頭に「数学的な見方・考え方」が置かれ、これを働かせることが、算数に関する概念理解や、処理技能の獲得、事象を考察する力を身につける上で、極めて重要なものと位置付けられている。

算数の問題解決の際、児童は、自らの内面にある既習の知識や技能を検索し、その中のどれを用いたらよいか判断が求められる。また、解決のために、どんな新しい知識や技能を獲得すべきかを、見定める必要にも迫られる。そのような知識や技能を繰り出し、新たに構成する原動力となるものが「数学的な考え方」なのである。これは、算数科のカリキュラム構成原理であると同時に、算数教育において、児童に身につけさせる最も重要な力なのである。

算数授業において、数学的な知識や技能を教師が提示し、「これを使ってみなさい」と指導すれば、それを用いて児童は問題解決へと向うだろう。また、どのような新しい知識や技能が必要となるかを教師が示せば、児童はそのような知識や技能を身につけようと取り組むだろう。そうすれば、授業計画は着々と進み、授業は“成功”を収めるに違いない。

しかしながら、このような教師の“親切な”指導や指示は、児童が「数学的な考え方」を獲得することへの障壁となってしまう。なぜならば、本来、児童が働かせるべき「数学的な考え方」を教師が代行し、その重要な機会を児童から奪っているからである。

一方、教材を提示し、めあてと課題を示し、教師は指導、指示を行わず、児童にすべてを委ねるだけでは、児童は何をどう考えたらよいのか分からず、適切に「数学的な考え方」を働かせることはできない。ややもすれば、誤った数学的知識、概念や技能を身につけさせてしまうことにもなる。

ここに、「数学的な考え方」が働く授業づくりの難しさがある。それを克服するために、教師は、各単元で身につけさせる「数学的な考え方」を明確化し、投げかけ

＊　三重大学教育学部教授
＊＊　津市立北立誠小学校教諭

る発問の工夫をしたり、児童の話し合い活動を重視したりするなどの、指導改善が必要なのである。

平成 29 年度、津市立北立誠小学校は、三重大学教育学部数学教育講座と連携し、研究主題として「筋道立てて、友だちに分かりやすく表現できるこどもの育成」を掲げ、「数学的な考え方」を児童から引き出すための算数授業の研究に取り組んだ。

2. 数学的な考え方をどう捉えるか

北立誠小学校の平成 29 年度の研究紀要『校内研究のまとめ』には、「数学的な考え方」に関し、以下の記述がある。

> 「数学的な考え方」をどのようにとらえていくか。算数・数学科において、基礎基本的な知識及び技能を習得した上で、数学的に考える力をはぐくむことが求められる。「知識」「技能」は比較的明確にとらえられるが、「考え方」は曖昧になりがちである。そういった中で、「数学的な考え方」は、算数を学習したり、算数の問題を解決したりするときに働く力・考え方のことであり、日々の算数の活動を通して意図的に取り組むことで育成されると考える。
>
> 子どもが算数の問題に出合ったとき、どのように既習の知識や技能を引出し、根拠を明確にして筋道を立てて考え、説明していくかを指導することがその育成につながっていく。
>
> …（中略）…
>
> 各単元の学習で子どもたちに身につけさせたい「数学的な考え方」を教師が具体的に把握し、どのような方法で指導していくかを明確にすることにより、数学的な考え方を育てることができるであろう。

つまり、まず教師が、単元で子どもにつけたい「数学的な考え方」を事前に把握し、適切な授業改善をして臨むことが大切なのである。そこで、片桐（2004）の研究を基に、「数学的な考え方」を次のように分類・整理し捉えた。

1. 数学的な態度
   - ・数学的な問題を見つける
   - ・見通しを立てる　　・既習内容と照らす
   - ・分類整理して表す
   - ・よりよいものを求めようとする　など
2. 数学の方法に関わる考え方
   - ・帰納的な考え方　　・類推的な考え方
   - ・演繹的な考え方　　・統合化の考え方
   - ・発展的な考え方　　・抽象化の考え方
   - ・単純化の考え方　　・一般化の考え方
   - ・特殊化の考え方　　・記号化の考え方
   - ・数量化、図形化の考え方　など
3. 数学の内容に関わる考え方
   - ・関数的な考え　　・集合の考え
   - ・式をよむ　　・単位への着目　など

そして、北立誠小学校では、次の 4 点を柱として研究を推進。全教員が公開授業を行った。

1. 単元で身につけさせる「数学的な考え方」の明確化
2. 「数学的な考え方」を育てるための指導の工夫
3. 話し合い活動の重視
4. 学習規律の徹底と学力の基盤づくり

上記のように、「数学的な考え方」を明確化して捉え、それを教員間で共有し、児童がそれを存分に働かせることの出来る算数授業を目指し、本研究は行われた。

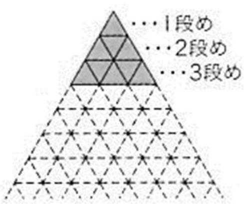
3. 研究授業の概要

本節では、著者が 6 年生に実施した「関係を見つけて」（全 2 時）という研究授業を取り上げ、その第 1 時の「学習指導案」を示す。「学習指導案」では、前節で述べたように、授業で引き出す「数学的な考え方」を明確にし、それを「指導上の留意点」に記した。

題材は、使用教科書である東京書籍『新しい算数 6』にある「関係を見つけて」というものを参考にした。これは、正三角形の板を規則に従って敷いていく際、板の枚数が規則的に変化することを捉えさせる教材、つまり「事象の変化を数理的に捉える」教材である。

日時：平成 30 年 1 月 15 日（月）第 2 限
場所：北立誠小学校　6 年 1 組教室　授業者：神谷麻美
単元名：関係を見つけて（全 2 時のうち第 1 時）
目標：正三角形の板の枚数の求め方を考える。
　　　図や表、式に表すなどして自分の考えを説明する。

【導入】（5 分）

学習活動	指導上の留意点 （数学的な考え方）
1.本時の問題の確認 【問題】 正三角形の板を、図のように並べていきます。 21 段目には、正三角形の板が何枚並びますか。 	・1 から 3 段目までの正三角形の板を並べる様子を教師が演示し、並べ方を確認し題意を正確にとらさせる。 ・「2 段目は 3 枚，3 段目は 5 枚だな。」「板の数が多い場合は数えるのが大変。」などの気づきを板書していく。 ・「何かきまりがありそうだ。」「きまりが分かれば求められる。」等を引出す。 （見通しを立てる）

<table>
<tr><td>

【単純化した問題】
第 6 段目には、正三角形の板が何枚並びますか。

<table>
<tr><td>段の数（段め）</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr>
<tr><td>板の数（枚）</td><td>1</td><td>3</td><td>5</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

</td><td>

・「21 段目を求めるのは大変だね、どうしたらいい？」と発問。「小さな段の数で考えてみる。」等を引き出す。（単純化の考え方）

・表に整理するときまりが見つけやすいことに気づかせる。（関数的な考え）

・表を板書で示し、1~3 段目までを埋めさせる。表を活用させる。

</td></tr>
<tr><td colspan="2">

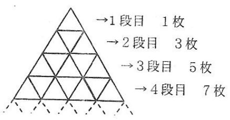
2.本時のめあての確認
【めあて】
正三角形の板の数を工夫して求め、見つけたきまりを説明することができる。

</td></tr>
</table>

【展開】（35 分）

<table>
<tr><th>学習活動</th><th>指導上の留意点</th></tr>
<tr><td>

3.本時の課題に取り組む
第 6 段目には、何枚並びますか。



</td><td>

・ワークシート配付

・「板は何枚並ぶかな？」と声かけし、数が少ない場合で考えさせる。

</td></tr>
<tr><td>

◇自力解決
ワークシートに補助線や表などを記入し、式や考え方、答を記入する。

</td><td>

・「段の数と板の数にきまりはあるのかな？」と発問。

・机間指導をし、個人の考えを把握する。

・きまりを見出せない児童には、友達の考えを紹介する。

・説明できるよう、接続詞「まず、次に、さらに、そして、最後に」を用いまとめさせる。

</td></tr>
<tr><td>

◇ペア交流
ペアになり、互いに自分の考えを交流し合い、考えを深める。

</td><td>

・書き込んだワークシートを見せ合いながら、考えが途中で止まって困っている児童から話させ、どこまで考えられているかを踏まえながら、交流させる。

・自分の考えに自信が持てるようにしたり、自分にはなかった考え方に気づかせたりする場にし、全体での発表につなげる。

</td></tr>
<tr><td>

◇全体交流
全体で、求め方の工夫について交流する。

</td><td>

・ワークシートを書画カメラで見せながら、説明させる。

</td></tr>
</table>

【展開時における児童の活動の予想】

<table>
<tr><th>学習活動</th><th>指導上の留意点
（数学的な考え方）</th></tr>
<tr><td>

◇ 表を横に見る。

<table>
<tr><td>段の数（段め）</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr>
<tr><td>板の数（枚）</td><td>1</td><td>3</td><td>5</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

・板の枚数の変化に着目する。

・2 枚ずつ増えている。

・板の数はそれぞれ 1 枚，3 枚，5 枚，7 枚，9 枚，11 枚と奇数になる。
段の数が 4 のとき、
5＋2＝7 （枚）
段の数が 5 のとき、
7＋2＝9 （枚）
段の数が 6 のとき、
9＋2＝11 （枚）

</td><td>

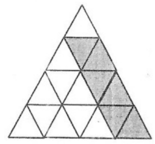
・3 段目までで、「1,3,5（枚）」と「2 枚ずつ増える」ことに気づかせる。（帰納的な考え方）

・4 段目以降が、「7,9,11,…（枚）」となることを、図で確かめさせる。（帰納的な考え方）

</td></tr>
<tr><td>

<table>
<tr><td>段の数（段め）</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr>
<tr><td>板の数（枚）</td><td>1</td><td>3</td><td>5</td><td>7</td><td>9</td><td>11</td></tr>
</table>

2枚ずつ増える。



</td><td>

・児童のワークシートから、左の図と同趣旨のものを拾い上げる。図と表、式を結びつけ、板が 2 枚ずつ増えることを捉えさせ、説明させる。（演繹的な考え方）

</td></tr>
<tr><td>

・段が 6 段のとき
段は 5 段増えた。板の数は、(2×5)枚増える。1 段目の枚数は 1 枚だから，合わせて 11（枚）になる。
1＋2×（6−1）＝11（枚）

</td><td>

・同じ立式の児童に考えや式の意味を付け加えさせる。

・「1＋2×（段の数−1）」と、言葉の式を使い、その意味を理解させ、まとめる。（一般化の考え）

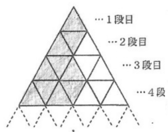
</td></tr>
<tr><td>

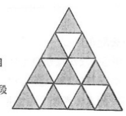
◇ 表を縦に見る(A)。

<table>
<tr><td>段の数（段め）</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr>
<tr><td>板の数（枚）</td><td>1</td><td>3</td><td>5</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

・上下の値の差に着目する。
4 段目は、4＋3＝7（枚）
5 段目は、5＋4＝9（枚）
6 段目は、6＋5＝11（枚）

<table>
<tr><td>段の数（段め）</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr>
<tr><td>板の数（枚）</td><td>1</td><td>3</td><td>5</td><td>7</td><td>9</td><td>11</td></tr>
</table>





</td><td>

・わかりにくい児童がいる場合は，1 段目から取り上げるようにする。

・上下の値の関係に着目させる。（関数的な考え）

・児童のワークシートから、左の図と同趣旨のものを拾い上げる。

・図と表、式を結びつけ、（段の数）と（段の数−1）を図形に見出させる。（演繹的な考え方）

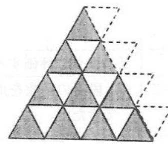
</td></tr>
<tr><td>

・（段の数）＋（段の数 - 1）になっている。

</td><td>

・「(段の数）＋（段の数−1)」と、言葉の式を使い、その意味を理解させ、まとめる。（一般化の考え）

</td></tr>
</table>

◇ **表を縦に見る(B)。** ・段の数の2倍を考える。 4段目は、4×2－1＝7（枚） 5段目は、5×2－1＝9（枚） 6段目は、6×2－1＝11（枚）  ・(段の数）×2－1　になっている。	・児童のワークシートから、左の図と同趣旨のものを拾い上げる。 ・図と表、式を結びつけ、「(段の数)×2－1」を図形に見出させる。 (演繹的な考え方)

【まとめ】（5分）

学習活動	指導上の留意点
4.本時のまとめをする。 ・図や表に整理するときまりが見つけやすくなる。 ・きまりを式に表すと、数が大きくなっても答が簡単に求められる。 ・ワークシートに、振り返りをまとめる。	・考え方のポイントはどこであったかを発表させ、ワークシートに書かせる。 「2ずつ増える」 「(段の数)＋(段の数－1)」 「(段の数)×2－1」 ・次時は、21段、50段等の枚数を求めることを伝える。また、段の数をx、板の数をyとして式で表し、その意味も考えることも伝える。

この授業で児童が用いる知識や技能は、いずれも簡単なものである。すなわち、「100までの整数が数えられること」、「低学年で扱った掛け算・足し算の意味理解と計算技能」、「三角形の辺、頂点等の意味理解」、「変化する数を見出すこと」、「数の対応を表に示すこと」程度のものであり、極めて易しい。

しかし、この授業では、そのような知識・技能を用いるだけでは問題解決は出来ない。とても重要で、大きな力が必要となる。

それは、まず、「問題をとらえる」、「見通しを立てる」といった数学的な態度、次に、「数の変化をもとに帰納的に考える」、「図形が増加する仕組みを読み解き演繹的に考える」、「式を用いて一般化する」といった数学の方法、さらには、「数と数を対応させる関数的な考え」等の数学の内容に関わる力である。それらはまさに、「数学的な考え方」に他ならない。本研究では、それらを「学習指導案」に明記し、教師が把握した上で授業実践に臨んでいる。

この授業のねらいは、知識や技能を身につけたり、それを確かなものにしたりすることではなく、むしろ、児童の「数学的な考え方」を引き出し、それを存分に働かせることである。教師が、こうした意図を持ちつつ授業実践を行うことで、児童は着実に「数学的な考え方」を身に付けていくことが出来るはずである。

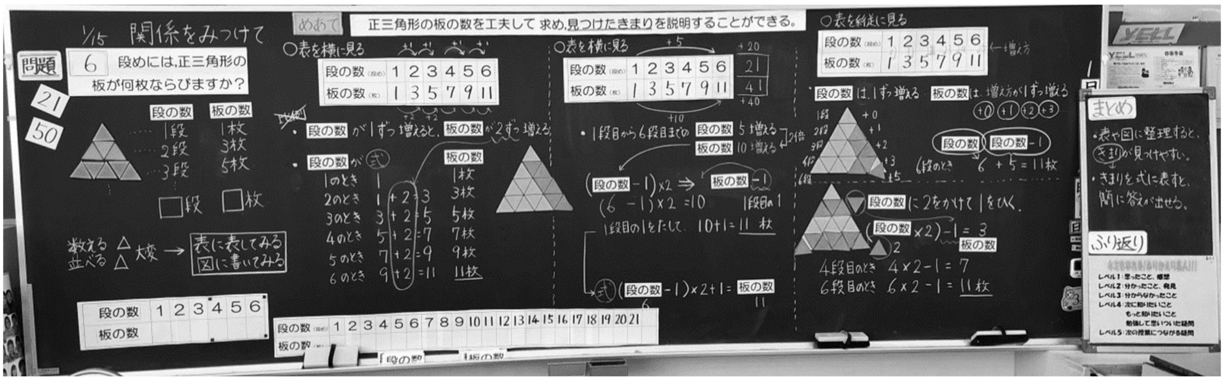


図1　板書の計画

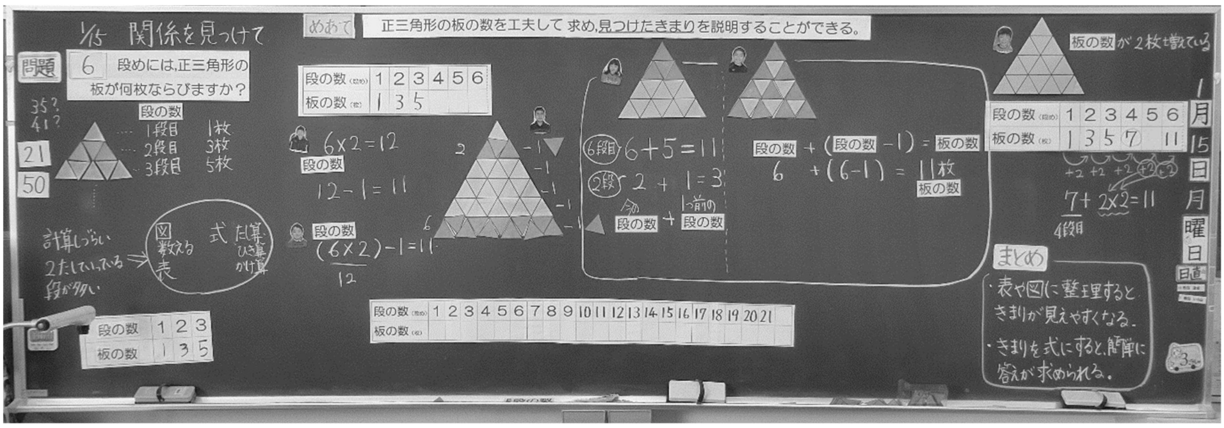


図2　板書の実際

4. 研究授業分析と「数学的な考え方」の検討

実際に行われた授業の流れを追いながら、児童から引き出せた「数学的な考え方」について、検討を加えていくことにする。

①　導入

まず、授業者が正三角形の小さなピースを、1 段目、2 段目、3 段目と、題意を説明しながら黒板に貼る。

「□段めには、正三角形の板が何枚ならびますか？」と問題を提示。□に 1 を入れ、「1 段目は何枚ですか？」と発問すると、多くの児童が挙手をする。1 名の児童を指名し、児童は「1 枚です。」と答える。

同様に、□に 2、3 を入れ、2 段目、3 段目の板の数を問う。挙手指名された児童は、それぞれ「3 枚です。」「5 枚です。」と答える。（「図 2」板書左上。）

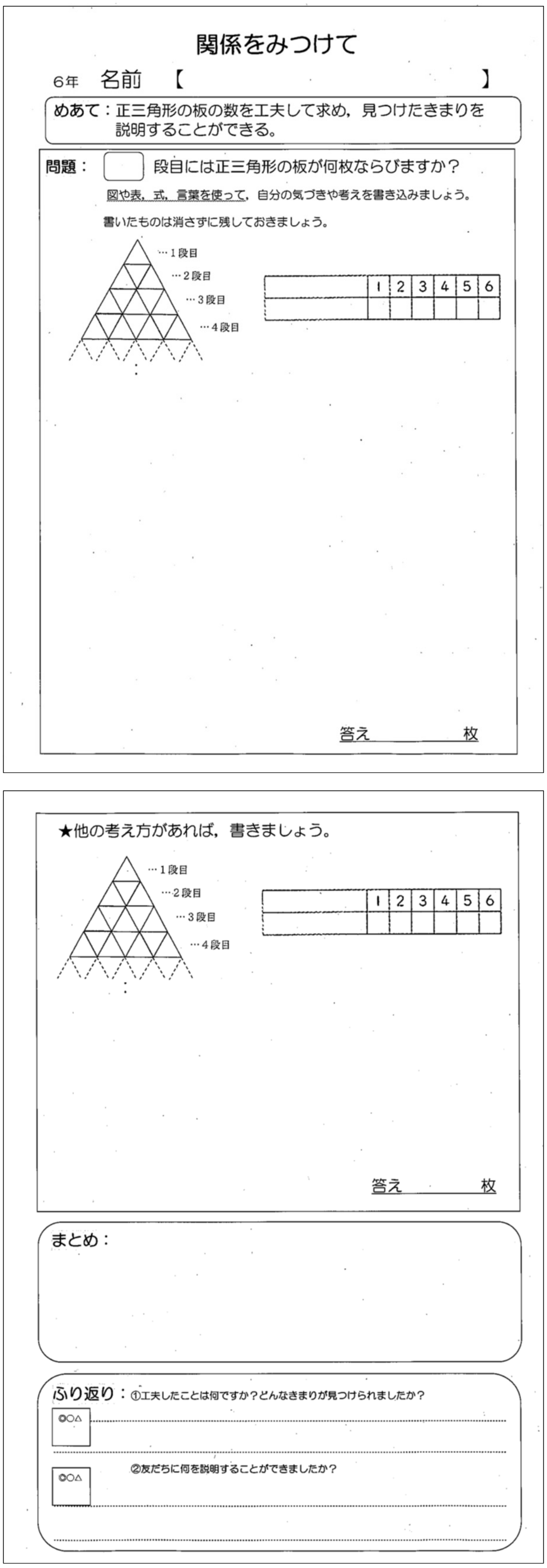
次に授業者は、「じゃあ、次はパッと答えてね。準備はいい？」と告げ、おもむろに、□に 21 を入れ、「21 段目は？」と問う。教室は沸く。「ええ？」と驚いたり、「ははは…」と苦笑したりする児童たち。多数である。「知らんやろ！そんなん！！」と訴える児童もいる。

こうした反応を見る限り、児童は問題の意味を捉えることが出来ている。つまり、たとえそれが「苦笑」という反応であっても、その態度は、「問題を捉える」という、「数学的な考え方」が働いたからこそ表出したもので、評価すべきである。なお、中には、35 枚、41 枚と、枚数を瞬時に計算した児童もいる。

すかさず授業者は、「みんな困ってる？何が困る？」と返す。数名の児童に答えさせると、「計算しづらい。」「2 足してるのは分かるけど…。」「3 段目とかだったら数えられたけど、21 段目には図がないし、枚数も多いから分からない。」と返答する。

授業者は、「ちょっとみんなつらそうだね。いくつなのかな？35 枚、41 枚と答えてくれた人もいるけど、他の答えも出てくるかもしれないね。そこで、明日、明後日の授業で、段が 50 段、100 段となっても、『パッ』と、板が何枚か出せるようになってほしい。そのために、今日は、問題を簡単にして「6 段目を考えること」で、この形の中にある『きまり』や『秘密』のようなものを見つけてほしいと思うの。」と提案する。

この提案を行ったのは、直ちに「一般化」することは、6 年生児童にとっては容易でないと考えたからである。一般化をする前に、まず 6 段目までに限定して考察させる。これは「単純化」であり、これは方法に関する「数学的な考え方」だと言える。また、きまりを見つけて解決しようと「見通しをもつこと」、これは、態度に関する「数学的な考え方」である。ここでは、


関係をみつけて

6年　名前　【　　　　　　　　　　】

めあて：正三角形の板の数を工夫して求め，見つけたきまりを説明することができる。

問題：□段目には正三角形の板が何枚ならびますか？

図や表，式，言葉を使って，自分の気づきや考えを書き込みましょう。

書いたものは消さずに残しておきましょう。

	1	2	3	4	5	6

答え　　　　枚

★他の考え方があれば，書きましょう。

	1	2	3	4	5	6

答え　　　　枚

まとめ：

ふり返り：①工夫したことは何ですか？どんなきまりが見つけられましたか？

◎○△

②友だちに何を説明することができましたか？

◎○△

図 3　ワークシート

授業者の側から「単純化」、「見通しを持つ」の両者を提案したことになる。

「6 段目までで決まりを見つけるために、何を使いたいですか？何か使えそうなものはないですか？」と発問する。児童らは、返答に困っていたので、ペアで相談させると、「表をつかう。」「式、足し算、引き算、掛け算。」という答えが返ってくる。こうした反応は、児童が「数学的な考え方」を働かせ、既習事項で使えそうなものを、児童が自らの中に検索を行ったことで得られるものである。

授業者は、「すごいね。おもしろそう。今日先生は、こんなものを準備してきました。」と告げ、表を黒板に貼る。児童とともに「段の数」「板の数」の表であることを確認しながら、3 段目までの板の数「1，3，5」を記入する。（「図 2」板書左下）

次に、次時以降 21 段目と 50 段目の枚数を求めることを目指すと告げ、本時のめあてを授業者は提示し、児童とともに読み合わせを行う。本時のめあては、「正三角形の板の数を工夫して求め、見つけたきまりを説明することができる。」とし、これを皆で共有する。（「図 2」板書中央上の「めあて」）

②　展開

筆者は、通常、授業の展開において、構成主義的に、「1.個人 → 2.ペア → 3.個人 → 4.全体 →」というサイクルを、展開過程に取り入れている。つまり、「1.個人」で考えた後、「2.ペア」でそれを深めさせる。さらに、「3.個人」で一度振り返り、付け加えや変更を行う。そして、「4.全体」で、構成された知識・理解や考え方を皆のものにするのである。

授業者は、ワークシート（「図 3」）を配付。「今から、それぞれで考えて、きまりを見つけてください。けれど、見つけにくい場合は、気づいたことを書いてもらえばよいです。」と指示、自力解決の時間とする。

そして、7 分程度経過した時、解決が進みにくい児童もいたため、「では、困っている人は隣の人に相談しよう。わかった事がある人は、隣の人に伝えてみよう。」と、座席の近いペアやグループでの相談を許可する。相談の時間も併せ、都合 15 分程の課題解決を行わせる。

続いて、発表の時間である。自分のワークシートを持って前に出て来させ、書画カメラと大型ディスプレーで提示し説明をさせる。以下は、その時の児童の説明と授業者とのやり取りである。C は児童の発言、T は授業者の発言を示している。なお、C の添え番号は、それぞれ番号別に別個の児童の発言を示し、T の添え番号は授業者 1 人の言を順次示すものである。

T1：時間が来ました。誰からでも発表してください。発表してくれる人。はい、C1 さん。
C1：僕の考えは、段の数が 6 段目だから、6 かける 2 をして 12、その 12 から 1 を引いて 12－1 で 11 になりました。こういうやり方です。（C1 は、「図 2」中央左中に「6×2=12、12－1＝11」と板書。）
T2：なるほどね。11 枚と求められたね。同じやり方をした人はいますか？では、C2 さん。
C2：僕は式を一本にし、段の数を 6 として、「6×2－1」としました。（「図 2」中央左下に板書。）
T3：なるほど、一本の式にしたのね。じゃあ、なんでこの式になったの？
C2：「6」は段の数です。分かりますよね。それを 2 倍して真ん中を引けばいい。右から数えて 6、左から数えて 6、まん中を引く。
C3：C2 の説明だと、4 段目は 7 から 1 引いて、6 ということになって、7 にはならない。
C2：…（困っている）…。
T4：じゃあ、6 段目で考えてみようか。6 の 2 倍の 12 個を並べてみたら分かるね。（6 段目に並べる。）一つ多いね。これを 1 引くんだね。このしくみがどの段でも成り立つということか。
（「図 4」を示す。）

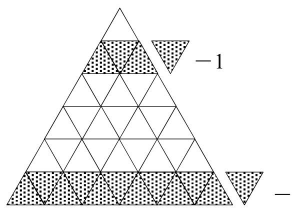
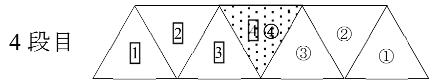


図 4　C1、C2 の考えの説明図

上記の児童 C1、C2 の考え方は、前々頁の「展開時における児童の活動の予想」で示した「表を縦に見る(B)」の考えと同一である。つまり、板の枚数が「(段の数)×2－1＝(板の枚数)」と一般化されるものである。

C1、C2 は、この関係を見つけ、それを式で表現し、答えを出している。C2 は、立式の理由について、「真ん中を引けばいい。」と主張している。これは「図 5」のように、各段で、両端から段の数だけ正三角形を数えていくと、必ず中央の 1 個を重複して数えてしまうことに気付いたと考えられる。これも「重複部分を後から取り去る」という「数学的な考え方」である。ただ、C2 は、説明表現が上手くいかなかったため、C3 に返すことが出来なかった。



左から囲み数字、右から丸数字の順に、段の数分だけ数えると中央の部分が必ず重複する。

図5　C2の考えの補足図

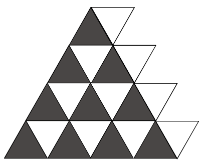


図6　授業者が準備していた説明図

授業者は、「表を縦に見る（B）」の考えに対して、「図6」を準備し臨んだ。「図6」で、正立している正三角形のピース ▲ は段の数と同一である。一方、倒立している正三角形のピース ▽ は、1つ右端に▽を追加すれば ▲ と同一となる。したがって、「(段の数)×2」を求めてから追加した1枚を減じて「(段の数)×2－1」と一般化するものである。C2の説明は、不十分であったが、これとほぼ同等と考えてよい。

このように、ピースが増えていく仕組みを捉え、理由も併せて一般化するのは、「演繹的な考え方」に属する。C2は、「演繹的な考え」を働かせたと考えてよい。

ところで、授業者は、机間指導時、児童がどのような考え方を用いているかを把握しなければならない。そして、表を用いて「帰納的な考え方」を働かせ立式している C1 を見出し、その C1 に説明させた。その後、発問 T2、T3 を繰り出し、「演繹的な考え方」を行っている C2 を指名、その考えを授業で取り上げようとしている。T2、T3 は、「数学的な考え方」を引出し、深めるための重要な発問となっている。

次に、「学習指導案」には記述していなかったが、児童から「(今の段の数)＋(前の段の数)＝(板の枚数)」という考えが出される。以下、児童とのやり取りを記す。

T5：じゃあ、他の考えで求められた人。はい、C4 さん、説明してくれる？

C4：2段目で、段の数と同じ2枚は濃い部分で、薄い色は、1段目の段の数と同じ。3段目を見ると、この濃い枚数が3で、薄い枚数が2段目の段の数と同じ2。3と2が足されて5。だから、6段目を求める時は、6足す5で11、つまり 6+5=11 となります。（「図7」を示す。）

T6：なるほど、みんな分かった？C4 さんの考えを、2段目で説明してもらいましょう。説明できる人はいますか？（1人だけが挙手。）

T7：自信がない人が多いみたいだね。じゃ、ちょと、おとなりさんと相談してごらん。（1分ほど相談の時間を取る。）

T8：はい、2段目で説明できる人。C5 さん。

C5：：2段目だったら、今の段の数は2、前の段の数は1段目だから1、2と1を足して3。2+1＝3

T9：「今の段の数」たす「前の段の数」、だね。つまり、(今の段の数)＋(前の段の数)＝(板の枚数)となるね。（以上、「図2」板書中央右。）

T10：なるほど、そういうことか。これなら、21段目も分かりそう？（児童多数、うなづく。）

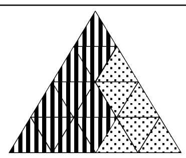


図7　C4 の考えの説明図

上記の児童の考え方において、「前の段の数」は、「今の段の数－1」と同じであるから、「学習指導案」で想定した「表を縦に見る（A）」の「(段の数)＋(段の数－1)」と同じとなるが、しかし、上記の児童が見つけた「(今の段の数)＋(前の段の数)」は、図を描き、関係を数列の「帰納的定義」として見出した点が特筆できる。

授業者の発言 T6 は、皆で C4 の意見を共有することを促したものである。反応する児童が少ないため、T7 でペアで相談することを指示し、対話的な過程を取り入れて深め、発表に繋げるテクニックを用いている。

次に取り上げるのは、「表を縦に見る（A）」で想定した「(段の数)＋(段の数－1)」という考えである。

T11：C6 さんは、どんなふうに考えた？

C6：僕はこんな図で考えました。（「図8」を示す。）簡単な段で考えると、上向きの三角（▲）は段の数と同じ。下向きの三角（▽）は、段の数引く1。なので、6段目なら6たす（6ひく1）だから、「6＋(6－1)＝11」となる。（「図2」中央右を板書。）

T12：言葉の式で言うとどうなる？

C6：(段の数)＋(段の数－1)

T13：なるほど、また新しい考えが出てきたね。

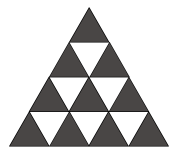


図8　C6 の考えの説明図

C6 は、成立している正三角形は三角数となるから、（段の数）と同じ枚数、倒立している正三角形は（段の数－1）の枚数であることを根拠に、(段の数)＋(段の数－1) と一般化している。これは、演繹的な考え、一般化の考えである。

最後に、「学習指導案」で「表を横に見る」とした考えも出される。

T14：他にどうですか？はい、じゃあ C7 さん。
C7：僕は、こんな図を描きました。(「図 9」を示す。) 板の数が 2 枚ずつ増えています…。あれっ？…（困っている）…？…よく分からん！
T15：2 枚ずつ増えていることが分かったの？図からは、説明しにくいね。じゃあ、表を使ってみる？（授業者は、「図 2」右上に「板の数が 2 枚増えている」と板書。）
C7：（表を指し、「板の数」の 1、3、5、7、9、11 をたどって）1 たす 2 は 3、3 たす 2 は 5、5 たす 2 は 7、7 たす 2 は 9、9 たす 2 は 11。
T16：同じように、2 ずつ増えていることを見つけた人いない？はい、C8 さん。
C8：4 段目の板が 7 枚、7 たす 2 かける 2 で 11。4 段目の 7 枚から 5 段目を飛ばして、2 が 2 回たされるから、7＋2×2＝11。
T17：他にはいませんか？ C9 さん。
C9：1 段目から始めて、2 をどんどんたしていけばいい。
T18：なるほど、じゃあこの長い表を使ってみる？（「図 2」中央下の表を提示。）C9 さん。
C9：2 をどんどん足していけば、6 段目でも 21 段目でも求められる。
T19：なるほど、そんな工夫が出来るんだね。

上記は、「1＋(段の数－1)×2＝(板の枚数)」と、等差数列の「一般項」に至る考えである。

C7 は、「図 9」からこの関係を導いている。しかし、導出過程をうまく表現することが出来ていない。おそらく、次のようなものと考えられる。

例えば、2 段目と 3 段目の境界線で、2 段目を下に折り返せば、2 段目が 3 段目の中央部で重なる。その重複部分を除けば、3 段目の両端の 2 個だけが残る。つまり、2 段目と 3 段目の正三角形の数の差は 2 である。この関係がすべての段と次の段の間に成り立つから、常に前の段と今の段の階差は 2 個。つまり 2 個ずつ正三角形が増えていくことになる。(「図 10」)

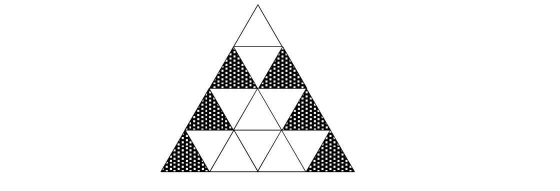


図 9　C7 の考えの説明図

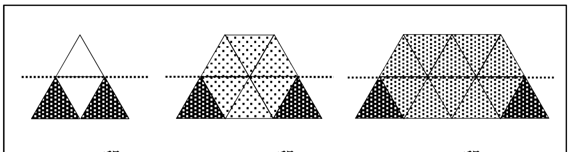


図 10　C7 の考えの補足図

前掲の C2 もそうであったが、小学校 6 年生が、論拠をもって演繹的考えることには限界がある。ましてや、それを適切に説明・表現することは難しい。しかし、図を描いて 2 ずつ増える仕組みを捉え、それを理解した C7 は、「演繹的な考え方」を働かせたのである。

C7 は、図で説明することに戸惑ったため、授業者は、「じゃあ、表を使ってみる？」と支援をする。表に書かれている数を観察すれば､2 枚ずつ増えていることは一目瞭然である。これは、表で示すことのよさである。その後、同一のきまりを利用した C8、C9 を取り上げ、皆で共有している。

授業は、ここで終了時間が迫ったため、「1＋(段の数－1)×2＝(板の枚数)」までの一般化には至っていないが、この関係が見出せたことを明らかにし、次時へと繋げている。

③　まとめ

授業者は、「今日は、この問題について、3 つの考え方を出してくれました。それぞれの考えを使えば、21 段目や 50 段目の板の数も求められそうだね。」とまとめる。そこで、次時で図と表を使って、3 つの考えを深めることを予告する。さらに、「21 段目、50 段目を、3 つのどのきまりを使って求めたいですか。」と問い、それぞれの考えに対して、全体に挙手を求め、「やってみたい、出来そうだ。」という意欲を引き出す。

最後に、「まとめ」として、以下を板書して（「図 2」右下)、授業を終える。

まとめ
・表・図に整理すると、きまりが見えやすくなる。
・きまりを式にすると、簡単に答えが求められる。

5. 研究授業を終えて

昭和 33 年施行の「学習指導要領」に明示されて以来、

「数学的な考え方」を涵養することは、算数教育の重要な目標の一つに位置付けられてきた。

現在、「数学的な考え方」は、平成 23 年度に完全実施された「学習指導要領」を踏まえ、「関心・意欲・態度」、「技能」、「知識・理解」と並んで算数の「評価規準」の 4 項目に組み入れられている。

新しくは、平成 29 年 3 月末告示の「小学校学習指導要領」において、「数学的な見方・考え方」は、「事象を、数量や図形及びそれらの関係に着目して捉え、根拠を基に筋道立てて考え、統合的・発展的に考えること」であるとし、これを、算数科のカリキュラム構成原理へと昇華するとともに、「数学的な考え方」働かせることは、算数科で育てるべき資質・能力の 3 つの柱である「知識及び技能」、「思考力、判断力、表現力等」及び「学びに向かう力、人間性等」を培うために欠くべからざるものに位置付けている。この新「学習指導要領」は平成 32 年度から全面実施される運びとなる。

本研究は、新「学習指導要領」の実施に先駆け、「算数の授業において、児童が『数学的な考え方』を存分に働かせるためには、どうしたらよいか。」という問いへの答えを求めたものである。

研究授業においては、問題解決に用いる知識や技能は、極めて平易なものに限定した。そうすることで、児童が繰り出す「数学的な考え方」を際立たせることが出来、多様な考えを引き出せた。また、児童に考えを発表させ、それを共有することで、対話的な学びも実現することが出来た。

児童から引き出せた「数学的な考え方」を、前節に照らして列挙してみる。

1. 問題を捉える
2. 見通しを立てる
3. 既習内容と照らす
4. 帰納的な考え方
5. 演繹的な考え方
6. 単純化の考え方
7. 一般化の考え方
8. 数量化・図形化の考え方
9. 関数的な考え
10. 式をよむ

片桐（2004）によれば、上記「1、2、3」は「数学的な態度」、「4、5、6、7、8」は、「数学の方法に関わる考え方」、「9、10」は「数学の内容に関わる考え方」である。

もちろん、これらは児童の発言の分析から拾い上げられたものだけであり、発言しなかった児童のものも加えれば、部分的なものに過ぎない。このように、多くの「数学的な考え方」を引き出せたことには、以下の工夫が奏功したと言える。

1. 単純な「知識・理解」や「技能」で、問題解決が出来るが、豊かな「数学的な考え方」を用いることが求められるような題材を用いる。
2. 授業者は、児童が働かせる「数学的な考え方」を予測し、それを明確化し授業に臨む。
3. 授業者は、児童の問題解決過程から、多様な「数学的な考え方」を拾い上げる。
4. 児童が解決に戸惑っているとき、ペアやグループなどの対話的な学習を取り入れる。
5. 児童に発表させる際、考えに至った理由を述べさせる。不十分な場合は、他の児童に補わせ共有する。

上記「1」は、すべての単元のどの授業でも行えるものではない。しかし、「数学的な考え方」の涵養に特化した授業を考えるならば、これに適う題材を選んで学ばせることが有効であることを意味する。

「2」については、通常、評価規準の 1 として「数学的な見方・考え方」を設定して授業は行われる。しかし、それだけではなく、各授業場面に細分化して「学習指導案」に明記して臨むことにする。そうすることで、「3」で、児童の様々な「数学的な考え方」を見出し、拾い上げることが出来る。

「4」は、児童の考え方を引出し、学びを前に進めたり、振り返ったりする際に有効な手段で、対話的な過程を組み入れると、より児童は「数学的な考え方」を働かせることが出来ると考えられる。

「5」は、演繹的な思考を引き出し、「数学的な考え方」を共有する手立てである。小学生の発達段階では、論理を十分に操ることは難しいが、理由づけや、意味解釈を児童なりに行わせることは、大切だと言える。

以上、本研究は、三重大学教育学部数学教育講座と津市立北立誠小学校の連携により、「数学的な考え方」を授業計画の中で明確化し、教師が投げかける発問の工夫、児童間の話し合い活動の重視などの指導改善を行い、算数授業の中でそれを児童から存分に引き出すことに取り組んだものであり、一定の成果が得られた。

参考・引用文献

(1) 文部科学省(2018)『小学校学習指導要領解説（平成 29 年告示）算数編』，日本文教出版.

(2) 黒田雅夫ほか(2018)『校内研究のまとめ』，津市立北立誠小学校.

(3) 片桐重男(2004)『数学的な考え方の具体化と指導―算数・数学科の真の学力向上を目指して―』，明治図書.

(4) 藤井斉亮ほか(2014)『新編 新しい算数 6』，東京書籍.