Painlevé方程式の解の増大度について

三重大学大学院
教育学研究科教育科学専攻理数・生活系教育領域

No.218M021
川　瀬　朋　大

2020 年 2 月 12 日

序文

日常における物理現象には様々な微分方程式が表れる．しかし，たいていの場合その微分方程式の一般解は初等関数で記述できない．そこで微分方程式を考察する上でしばしば関数の種類を増やす立場がとられる．本論文の考察の対象であるパンルヴェ方程式もこの立場をとる方程式である．

パンルヴェはピカールが提案した「2 階の代数的常微分方程式で動く分岐点を持たない例を見つける」という問題を機にして研究を行った．そのような方程式を調べた結果，線形方程式，楕円関数の方程式，求積できる方程式とは別に新しい 6 つの方程式を発見した．そして 1906 年に弟子のガンビエとともに論文にまとめ発表した．これが現在のパンルヴェ方程式にあたるものである．パンルヴェは，このまま研究を続けていくと思われたがこの論文を発表する同時期に政界に身を転じ 1917 年と 1925 年に 2 度のフランスの首相を務めている。また航空学にも興味を持ち始め，初めて飛行機に乗った数学者としても名をはせた。パンルヴェ自体がこのように数学から離れたこともあってかパンルヴェ方程式自体もだんだんと数学界から姿を消していくことになる。

パンルヴェ方程式は役に立たないものと思われたが，1970 年代に数理物理の分野で大きな変化がもたらされる。統計力学の分野で III 型のパンルヴェ方程式が現れたのである。また，ソリトン波とよばれる非線形波動の分野でもパンルヴェ方程式が表れ特殊関数として注目され始めたのである。これ以降パンルヴェ方程式は様々な研究者によって研究され詳しく調べられることとなった．

本論文ではこのパンルヴェ方程式に関する解を初等関数で近似し評価することが目的である．そこで，1 章では木村俊房「常微分方程式 II」における微分方程式の基礎理論について触れる．2 章では，まず I 型パンルヴェ方程式の解の近似を行う．その際，1 章で用いた形式的変換と優級数を用いることによって解の近似を行う．次に II 型パンルヴェ方程式の解の近似を行う．ここでは形式的変換における $Q=0, P=0$ のときのケースに焦点をあて，解の近似を行う．その際，I 型パンルヴェ方程式のときと同様の方法に加え，ルーシェの定理を上手く使い，解を近似する．

最後に本論文の作成にあたり，丁寧かつ厳しい指導をしてくださった川向洋之教授に感謝し，序文とする．

目次

1　微分方程式の基礎理論

本章では 2 章に必要な微分方程式の基礎的な理論について考える．

1.1　一変数正則関数

一変数の正則性の定義について確認しておく．

《**定義 1.1.1**》 複素平面 $\boldsymbol{C}$ の開集合 D で定義された f を考える．D の点 a に対し，D に含まれる円板 $|x-a|<r$ において収束するベキ級数によって

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(x-a)^k \tag{1.1}$$

と表されるとき，f は $x=a$ において複素解析的であるという．f が D の各店で複素解析的であるとき，f は D において正則であるといわれ，(1.1) の右辺を f の $x=a$ における Taylor 展開という．

正則性について次の定理が成り立つ．

【**定理 1.1.1**】 $f:D\to\boldsymbol{C}$ が D において正則であるための必要十分条件は，f が D において微分可能なことである．

1.2　多変数正則関数

多変数の正則性ついて定義する．

《**定義 1.2.1**》 $\boldsymbol{C}^n$ の開集合 D で定義された複素数値関数 f を考える．D の点 $(b_1,\cdots,b_n)$ に対して，D に含まれる多重円板 $|y_1-b_1|<r_1,\cdots,|y_n-b_n|<r_n$ がとれて，この多重円板において絶対収束するベキ級数により

$$f(y_1,\cdots,y_n)=\sum_{k_1,\cdots,k_n\geq 0}c_{k_1\cdots k_n}(y_1-b_1)^{k_1}\cdots(y_n-b_n)^{k_n} \tag{1.2}$$

と表されるとき，f は $(b_1,\cdots,b_n)$ において複素解析的という．f が D の各点において複素解析的であるとき，f は D において正則であるという．(1.2) を右辺を f の点 $(b_1,\cdots,b_n)$ における Taylor 展開という．

多変数の正則性についても一変数とよく似た定理が成り立つ．

【**定理 1.2.1**】 f が D で正則であるための必要十分な条件は，f が D において連続かつ各変数について偏微分可能なことである．

この定理において，f が D で連続であるという条件を取り去ることができることが知られている．つまり以下の定理が成り立つ．

【**定理 1.2.2**】 f が D で整型 $\Longleftrightarrow$ f が各変数について偏微分可能.

1.3　優級数法

《**定義 1.3.1**》 2つのベキ級数

$$\sum c_{k_1\cdots k_m}(x_1-a_1)^{k_1}\cdots(x_m-a_m)^{k_m}, \tag{1.3}$$

$$\sum C_{k_1\cdots k_m}(x_1-a_1)^{k_1}\cdots(x_m-a_m)^{k_m} \tag{1.4}$$

に対し

$$|c_{k_1\cdots k_m}| \leq C_{k_1\cdots k_m} \quad (k_1,\cdots,k_m=0,1,\cdots)$$

が成り立つとき，(1.4) は (1.3) の優級数という．

【**定理 1.3.1**】 (1.4) が $|x_1-a_1|<r_1,\cdots,|x_m-a_m|<r_m$ において絶対収束すれば，(1.3) も $|x_1-a_1|<r_1,\cdots,|x_m-a_m|<r_m$ において絶対収束する．

関数 $f(x_1,\cdots,x_m)$ は領域 $|x_1-a_1|<r_1,\cdots,|x_m-a_m|<r_m$ において正則かつ有界：$|f(x_1,\cdots,x_m)|\leq M$ とする．f の $(a_1,\cdots,a_m)$ における Taylor 展開を

$$f(x_1,\cdots,x_m)=\sum c_{k_1\cdots k_m}(x_1-a_1)^{k_1}\cdots(x_m-a_m)^{k_m}$$

とすれば，1 変数のときと同様に係数の評価式

$$|c_{k_1\cdots k_m}| \leq \frac{M}{r_1^{k_1}\cdots r_m^{k_m}} \quad (k_1,\cdots,k_m=0,1,\cdots)$$

が成り立つ．

したがって

$$\sum \frac{M}{r_1^{k_1}\cdots r_m^{k_m}}(x_1-a_1)^{k_1}\cdots(x_m-a_m)^{k_m} \tag{1.5}$$

は f の Taylor 展開の優級数である．(1.5) は $|x_1-a_1|<r_1,\cdots,|x_m-a_m|<r_m$ において収束し，その和は

$$\frac{M}{\left(1-\frac{x_1-a_1}{r_1}\right)\cdots\left(1-\frac{x_m-a_m}{r_m}\right)}$$

に等しい．

1.4　優級数法を用いた存在定理の証明

優級数法を用いた解の存在と一意性について次が成り立つ．

【**定理 1.4.1**】 微分方程式

$$y_j'=f_j(x,y_1,\cdots,y_n) \quad (j=1,\cdots,n) \tag{1.6}$$

の右辺はすべて $|x-a|<r, |y_j-b_j|<\rho \quad (j=1,\cdots,n)$ において正則かつ有界 $|f_j(x,y_1,\cdots,y_n)|\leq M$ とする．

そのとき，$x=a$ で正則かつ初期条件

$$y_j(a)=b_j \quad (j=1,\cdots,n)$$

を満たす解が

$$|x-a|<r\left(1-\exp\frac{-\rho}{(n+1)Mr}\right) \tag{1.7}$$

において存在し，ただ 1 つである．

《証明》$x-a, y_j-b_j$ を新しい変数として取り直せばよいので，始めから $a=0, b_j=0$ としても一般性を失わない．f_j の $x=y_1=\cdots=y_n=0$ における Taylor 展開を

$$f_j(x,y_1,\cdots,y_n)=\sum_{k,l_1,\cdots,l_n} c_{k\,l_1\cdots l_n}{}^j x^k y_1^{l_1}\cdots y_n^{l_n} \tag{1.8}$$

とする．$|f_j(x,y_1,\cdots,y_n)|\le M$ と $|x-a|<r, |y_j-b_j|<\rho \quad (j=1,\cdots,n)$ から

$$|c_{k\,l_1\cdots l_n}{}^j|\le \frac{M}{r^k\rho^{l_1+\cdots+l_n}} \tag{1.9}$$

を満たす．

求める解が存在したとすれば，$x=0$ で正則で $x=0$ のとき，$y_j=0$ となるので，$x=0$ での Taylor 展開は，

$$y_j=\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu{}^j x^\nu \qquad (j=1,\cdots,n) \tag{1.10}$$

と表せる．これを (1.6) へ代入すると

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\nu\alpha_\nu{}^j x^{\nu-1}=\sum_{k,l_1,\cdots,l_n} c_{k\,l_1\cdots l_n}{}^j x^k\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu{}^1 x^\nu\right)^{l_1}\cdots\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu{}^n x^\nu\right)^{l_n} \tag{1.11}$$

が成り立つ．

ここからは定理を (i)「形式解が一意的に存在すること」と (ii)「求めた形式解が (1.7) の範囲で収束すること」の 2 段階に分けて証明を行う．

(i)(1.11) を満たすベキ級数 (1.10) がただ一つ存在することを証明する

(1.11) の両辺の定数項を比較して

$$\alpha_1{}^j=c_{00\cdots0}{}^j \quad (j=1,\cdots,n) \tag{1.12}$$

を得る．

(1.11) の右辺を x のベキ級数に整理したときの x^{N-1} の係数 $p_N{}^j$ を求める．そのために (1.11) の項

$$c_{k\,l_1\cdots l_n}{}^j x^k\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu^1 x^\nu\right)^{l_1}\cdots\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu^n x^\nu\right)^{l_n} \tag{1.13}$$

を考察する．(1.10) は 1 次の項から始まるから，(1.13) を x のベキ級数に整理すると (1.13) は $k+l_1+l_2+\cdots+l_n$ 次の項から始まる．したがって x^{N-1} の項を含むためには $k+l_1+l_2+\cdots+l_n<N$ でなければならない．次に，$\alpha_N{}^1x^N, \alpha_{N+1}{}^1x^{N+1},\cdots,\cdots,\alpha_N{}^nx^N,\alpha_{N+1}{}^nx^{N+1},\cdots$ は N 次以上であるから，$\alpha_N{}^1,\alpha_{N+1}{}^1,\cdots,\cdots,\alpha_N{}^n,\alpha_{N+1}{}^n,\cdots$ は $p_N{}^j$ に無関係である．したがって $p_N{}^j$ は $\alpha_1{}^1,\alpha_2{}^1,\cdots,\alpha_{N-1}{}^1,\cdots,\alpha_1{}^n,\cdots,\alpha_{N-1}{}^n$ および $c_{k\,l_1\cdots l_n}{}^j\,(k+l_1+l_2+\cdots+l_n<N)$ のみから決まる．

したがって

$$p_N{}^j=P_N(\alpha_\nu{}^i, c_{kl_1\cdots l_n}{}^j) \quad (j=1,\cdots,n)$$

とおける．P_N は $\alpha_\nu{}^i\,(1\le i\le n, \nu<N)$，$c_{k\,l_1\cdots l_n}{}^j\,(k+l_1+\cdots+l_n<N)$ の多項式でありその係数は正の整数である．

(1.11) の左辺の x^{N-1} の係数は $N\alpha_N{}^j$ なので

$$N\alpha_N{}^j=P_N(\alpha_\nu{}^i, c_{k\,l_1\cdots l_n}{}^j) \tag{1.14}$$

を得る．(1.12) と (1.14) から，$\alpha_\nu{}^j$ は ν に関する帰納法で順次一意的に決まる．よって解が存在したとしてもただ一つである．

(ii) 形式解が収束することを証明する．

微分方程式

$$y_j'=\sum_{k,l_1,\cdots,l_n} C_{k\,l_1\cdots l_n}{}^j x^k y_1^{l_1}\cdots y_n^{l_n} \quad (j=1,\cdots,n) \tag{1.15}$$

を考える．(i) から右辺のベキ級数は収束に関係なく形式解

$$y_j = \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu{}^j x^\nu \qquad (j = 1, \cdots, n) \tag{1.16}$$

をもつ．再び (i) の論法を用いると係数 $A_\nu{}^j$ は

$$A_1{}^j = C_{00\cdots 0}{}^j \tag{1.17}$$

$$NA_N{}^j = P(A_\nu{}^i, C_{k\,l_1\cdots l_n}{}^j) \tag{1.18}$$

から定まることが分かる．(1.15) の右辺の級数が (1.8) の右辺の優級数と仮定する．つまり，

$$|c_{k\,l_1\cdots l_n}{}^j| \leq C_{k\,l_1\cdots l_n}{}^j \quad (k, l_1, \cdots, l_n = 0, 1, \cdots; j = 1, \cdots, n) \tag{1.19}$$

である．このとき，級数 (1.16) は (1.10) の優級数であることを帰納法を用いて証明する．

まず，

$$|\alpha_1{}^j| = |c_{00\cdots 0}{}^j| \leq C_{00\cdots 0}{}^j = A_1{}^j \quad (j = 1, \cdots, n)$$

である．次に

$$|\alpha_\nu{}^j| \leq A_\nu{}^j \quad (\nu = 1, \cdots, N-1; j = 1, \cdots, n) \tag{1.20}$$

が成り立つと仮定する．このとき，(1.14)，(1.19)，(1.20) および P_N の係数が正の整数であることより

$$\begin{aligned} |\alpha_N{}^j| &= N^{-1}|P_N(\alpha_\nu{}^i, c_{k\,l_1\cdots l_n}{}^j)| \\ &\leq N^{-1}P_N(|\alpha_\nu{}^i|, |c_{k\,l_1\cdots l_n}{}^j|) \\ &\leq N^{-1}P_N(A_\nu{}^i, C_{k\,l_1\cdots l_n}{}^j) \\ &= A_N{}^j \quad (j = 1, \cdots, n) \end{aligned}$$

となる．以上より

$$|\alpha_\nu{}^j| \leq A_\nu{}^j \quad (\nu = 1, 2, \cdots; j = 1, \cdots, n) \tag{1.21}$$

が示された．これは級数 (1.16) は (1.10) の優級数であることを示している．

不等式 (1.9) によって級数

$$\sum \frac{M}{r^k \rho^{l_1 + \cdots + l_n}} x^k y_1^{l_1} \cdots y_n^{l_n} \tag{1.22}$$

は (1.8) の優級数である．級数 (1.22) の和は

$$\frac{M}{(1 - x/r)(1 - y_1/\rho) \cdots (1 - y_n/\rho)}$$

である．したがって微分方程式

$$\frac{dy_j}{dx} = \frac{M}{(1 - x/r)(1 - y_1/\rho) \cdots (1 - y_n/\rho)} \quad (j = 1, \cdots, n) \tag{1.23}$$

の解で領域 (1.7) で正則かつ初期条件 $y_j(0) = 0$ を満たすものの存在を示せばよい．

方程式 (1.23) および初期条件は y_j について対称であることから $Y(0) = 0$ を満たす

$$\frac{dY}{dx} = \frac{M}{(1 - x/r)(1 - Y/\rho)^n}$$

の解を $Y = \phi(x)$ とすれば，

$$y_j = \phi(x) \quad (j = 1, \cdots, n)$$

は方程式 (1.23) の解である．この微分方程式は変数分離型であるから

$$\int^Y \left(1-\frac{Y}{\rho}\right)^n dY = \int^x \frac{M}{1-x/r}dx + C \quad (C \text{ は任意定数})$$

となる．初期条件 $Y(0)=0$ から解を求めると

$$\phi(x) = \rho\left\{1-\sqrt[n+1]{1+\frac{(n+1)Mr}{\rho}\log\left(1-\frac{x}{r}\right)}\right\}$$

となる．この解の特異点は log の中を 0 にする点と根号の中を 0 にする点である．実際に求めてみると

$$x = r, r\left(1-\exp\frac{-\rho}{(n+1)Mr}\right)$$

である．よって $\phi(x)$ は領域 (1.7) で正則な解となっている．以上より形式解の収束性が示せた．

1.5 問題提起と記法の導入

前節では解をベキ級数の形で求めることにより存在定理を証明した．この考え方をさらに発展させる．

具体的には次の形式的微分方程式

$$y'_j = \sum a_{kl_1\cdots l_n}x^k y_1^{l_1}\cdots y_n^{l_n} \quad (j=1,\cdots,n) \tag{1.24}$$

を形式的変換

$$y_j = z_j + x{\sum}' a_{kl_1\cdots l_n}{}^j x^k z_1^{l_1}\cdots z_n^{l_n} \quad (j=1,\cdots,n) \tag{1.25}$$

によって

$$z'_j = 0 \quad (j=1,\cdots,n) \tag{1.26}$$

にできることおよび形式的変換 (1.25) は (1.24) が収束ベキ級数のとき収束することを示すことが目標である．なお (1.25) で用いた ${\sum}'$ は $k+l_1+\cdots+l_n \geq 1$ を満たす $(k,l_1,\cdots,l_n)$ についての和を表すものとする．

まず記号の準備から始める．

m 個の変数 $x_1,\cdots,x_m$ と n 個の変数 $y_1,\cdots,y_n$ との形式的ベキ級数全体 $\boldsymbol{C}[[x_1,\cdots,x_m,y_1,\cdots,y_n]]$ を簡単に $\mathscr{G}$ で表す．

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_m), \quad \boldsymbol{y}=(y_1,\cdots,y_n),\\
&\boldsymbol{k}=(k_1,\cdots,k_m), \quad \boldsymbol{l}=(l_1,\cdots,l_n),\\
&\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{l}} = x_1^{k_1}\cdots x_m^{k_m}y_1^{l_1}\cdots y_n^{l_n}\\
&|\boldsymbol{k}| = k_1+\cdots+k_m, \quad |\boldsymbol{l}| = l_1+\cdots+l_n.
\end{aligned}$$

とすると，(1.24) の右辺は簡単に

$$\sum_{|\boldsymbol{k}|+|\boldsymbol{l}|\geq 0} a_{\boldsymbol{kl}}\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{l}}$$

と表される．$\mathscr{G}$ の n 個の元の列

$$(a_{\boldsymbol{kl}}{}^1\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{l}},\cdots,a_{\boldsymbol{kl}}{}^n\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{l}})$$

は，$\boldsymbol{a_{kl}} = (a_{\boldsymbol{kl}}{}^1,\cdots,a_{\boldsymbol{kl}}{}^n)$ とおくことにより，

$$\sum \boldsymbol{a_{kl}}\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{l}}$$

と書ける．

次に以下の n 個の $\mathscr{G}$ の元

$$\varphi_1 = y_1 + {\sum}'' a_{\boldsymbol{kl}}{}^1 \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{y}^{\boldsymbol{l}},$$
$$\vdots$$
$$\varphi_n = y_n + {\sum}'' a_{\boldsymbol{kl}}{}^n \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{y}^{\boldsymbol{l}},$$

の列 $(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)$ を考える．ここで ${\sum}''$ は $|\boldsymbol{k}| + |\boldsymbol{l}| \geq 2$ を満たす $(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{l}) = (k_1, \cdots, k_m, l_1, \cdots, l_n)$ についての和を表すものとする．

$$\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \cdots, \varphi_n), \quad \boldsymbol{p_{kl}} = (p_{\boldsymbol{kl}}{}^1, \cdots, p_{\boldsymbol{kl}}{}^n)$$

とおき，さらに

$$\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{y} + {\sum}'' \boldsymbol{p_{kl}} \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{y}^{\boldsymbol{l}} \tag{1.27}$$

と書く．このような $\boldsymbol{\varphi}$ の全体を $\mathscr{T}$ で表し，その元を形式的変換と呼ぶ．

最後に $\mathscr{T}$ に含まれる変換の中で特別な形をした変換について定義する．

《**定義 1.5.1**》 $\mathscr{T}$ の元で

$$\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{y} + \sum_{|\boldsymbol{k}|>0}{}'' \boldsymbol{p_{kl}} \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{y}^{\boldsymbol{l}} \tag{1.28}$$

の形をしているものの全体を $\mathscr{T}_0$ と表す．

特に，$m = 1$ のときには，$\mathscr{T}_0$ に属する変換は

$$\boldsymbol{y} + x {\sum}' \boldsymbol{p_{kl}} x^k \boldsymbol{y}^{\boldsymbol{l}} \tag{1.29}$$

と書ける．ここで ${\sum}'$ は $k + |\boldsymbol{l}| \geq 1$ を満たす $(k, \boldsymbol{l})$ についての和を表す．

この定義を踏まえると (1.25) は $\mathscr{T}_0$ の元であることが分かる．

1.6 変数変換

前節では形式的変換による準備を行った．本節ではもう少し一般的な変換について変数変換が満たす式を見ていこう．

微分方程式 (1.6) において f_j は $x = y_1 = \cdots = y_n = 0$ で正則とする．変数変換

$$y_j = \varphi_j(x, z_1, \cdots, z_n) \quad (j = 1, \cdots, n) \tag{1.30}$$

によって (1.6) は

$$z'_j = g_j(x, z_1, \cdots, z_n) \quad (j = 1, \cdots, n) \tag{1.31}$$

に移ったとする．ここで φ_j は $x = z_1 = \cdots = z_n = 0$ は正則で，$\varphi_j(0, 0, \cdots, 0) = 0$ を満たし，逆変換

$$z_j = \psi_j(x, y_1, \cdots, y_n) \quad (j = 1, \cdots, n) \tag{1.32}$$

が存在して ψ_j も $x = y_1 = \cdots = y_n = 0$ で正則とする．そのとき (1.31) は次のようにして (1.6) から得られる．

(1.32) を x で微分して

$$\frac{dz_j}{dx} = \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial \psi_j}{\partial y_\nu} \frac{dy_\nu}{dx} \quad (j = 1, \cdots, n)$$

(1.6) から

$$\frac{dz_j}{dx} = \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial \psi_j}{\partial y_\nu} f_\nu \quad (j = 1, \cdots, n)$$

したがって

$$g_j(x, z_1, \cdots, z_n) = \left(\frac{\partial \psi_j}{\partial x} + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial \psi_j}{\partial y_\nu} f_\nu \right) \bigg|_{y_\nu = \varphi_\nu(x, z_1, \cdots, z_n)} \tag{1.33}$$

であって，$g_j = (x, z_1, \cdots, z_n)$ は $x = z_1 = \cdots = z_n = 0$ で正則である．

この (1.33) の右辺を 0 にできれば 1.5 節の目標は達成できる．しかし，いきなりこの変換を考えることは難しい．そこで，変換によって定数項，1 次の項，2 次の項，$\cdots$，と順に消していくことを考える．そのためには変換の合成と 1 変換の効果を考える必要がある．これを次節以降で触れていくこととする．

1.7 形式的変換の合成

$\mathscr{T}$ の二つの元 $\boldsymbol{\varphi}$ と

$$\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{y} + \sum{}'' \boldsymbol{q_{kl}} \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{y}^{\boldsymbol{l}} \tag{1.34}$$

に対して，その合成 $\boldsymbol{\psi} \circ \boldsymbol{\varphi} = ((\boldsymbol{\psi} \circ \boldsymbol{\varphi})_1, \cdots, (\boldsymbol{\psi} \circ \boldsymbol{\varphi})_n)$ を次のように定義する．第 j 成分

$$\psi_j = y_j + \sum{}'' q_{\boldsymbol{kl}}{}^j \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{y}^{\boldsymbol{l}}$$

に $(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)$ を代入したものを

$$(\boldsymbol{\psi} \circ \boldsymbol{\varphi})_j = y_j + \sum{}'' p_{\boldsymbol{kl}}{}^j \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{y}^{\boldsymbol{l}} + \sum{}'' q_{\boldsymbol{kl}}{}^j \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{k}} (\boldsymbol{y} + \sum{}'' \boldsymbol{p_{KL}} \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{K}} \boldsymbol{y}^{\boldsymbol{L}})^{\boldsymbol{l}} \tag{1.35}$$

とする．この式の第 2 項，第 3 項は 2 次以上の項からなるから

$$(\boldsymbol{\psi} \circ \boldsymbol{\varphi})_j = y_j + \sum{}'' r_{\boldsymbol{kl}}{}^j \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{y}^{\boldsymbol{l}}$$

と書ける．$\boldsymbol{r_{kl}} = (r_{\boldsymbol{kl}}{}^1, \cdots, r_{\boldsymbol{kl}}{}^n)$ とおいて

$$\boldsymbol{\psi} \circ \boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{y} + \sum{}'' \boldsymbol{r_{kl}} \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{y}^{\boldsymbol{l}} \tag{1.36}$$

と定義する．

(1.35) から

$$r_{\boldsymbol{kl}}{}^j = p_{\boldsymbol{kl}}{}^j + q_{\boldsymbol{kl}}{}^j + P_{\boldsymbol{kl}}(p_{\boldsymbol{KL}}{}^i, q_{\boldsymbol{KL}}{}^j) \tag{1.37}$$

と書けることが分かる．ここで $P_{\boldsymbol{kl}}$ は $p_{\boldsymbol{KL}}{}^i$ $(|\boldsymbol{K}|+|\boldsymbol{L}| < |\boldsymbol{k}|+|\boldsymbol{l}|; i = 1, \cdots, n)$ と $q_{\boldsymbol{KL}}{}^j$ $(|\boldsymbol{K}|+|\boldsymbol{L}| < |\boldsymbol{k}|+|\boldsymbol{l}|)$ との多項式で係数は正の整数である．

写像

$$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{y}, \quad \text{すなわち} \quad e_j = y_j$$

に対して明らかに

$$\boldsymbol{\varphi} \circ \boldsymbol{e} = \boldsymbol{e} \circ \boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi} \qquad (\boldsymbol{\varphi} \in \mathscr{T})$$

が成り立つ．

$\mathscr{T}$ の任意の元 $\boldsymbol{\varphi}$ に対して

$$\boldsymbol{\psi} \circ \boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{e} \tag{1.38}$$

を満たす $\boldsymbol{\psi} \in \mathscr{T}$ が存在する．実際，$\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\psi} \circ \boldsymbol{\varphi}$ を (1.27), (1.34), (1.36) とする．(1.37) を使うと，$\boldsymbol{\psi} \circ \boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{e}$ は

$$p_{\boldsymbol{kl}}{}^j + q_{\boldsymbol{kl}}{}^j + P_{\boldsymbol{kl}}(p_{\boldsymbol{KL}}{}^i, q_{\boldsymbol{KL}}{}^j) = 0 \tag{1.39}$$

と同値である．$|\boldsymbol{k}| + |\boldsymbol{l}| = 2$ のときは特に

$$p_{\boldsymbol{kl}}{}^j + q_{\boldsymbol{kl}}{}^j = 0$$

である．これと (1.39) から，$|\boldsymbol{k}|+|\boldsymbol{l}|$ に関する帰納法によって，$q_{\boldsymbol{kl}}{}^j$ が一意的に定まる．$\boldsymbol{\varphi} \in \mathscr{T}$ に対し (1.38) を満たす $\boldsymbol{\psi} \in \mathscr{T}$ を $\boldsymbol{\varphi}$ の逆変換といい $\boldsymbol{\varphi}^{-1}$ と書く．

これを基に再度形式的微分方程式の変換を考えていこう．$\mathscr{G}$ の元である形式的微分方程式

$$\frac{dy_j}{dx} = f_j \quad (j = 1, \cdots, n) \tag{1.40}$$

を考える．形式的微分方程式 (1.40) を与えることは $\boldsymbol{f} = (f_1, \cdots, f_n) \in \mathscr{G}^n$ を与えることである．

方程式 (1.40) に対し，$\mathscr{T}$ に属する変換

$$\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{z} + \sum{}'' \boldsymbol{p}_{k\boldsymbol{l}} x^k \boldsymbol{z}^{\boldsymbol{l}} \tag{1.41}$$

を考える．(1.41) の逆変換を $\boldsymbol{\psi}$ とし，

$$\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{y} + \sum{}'' \boldsymbol{q}_{k\boldsymbol{l}} x^k \boldsymbol{y}^{\boldsymbol{l}} \tag{1.42}$$

とする．

ここで (1.41), (1.42) の第 j 成分を

$$y_j = \varphi_j = z_j + \sum{}'' p_{k\boldsymbol{l}}{}^j x^k \boldsymbol{z}^{\boldsymbol{l}}, \tag{1.43}$$

$$z_j = \psi_j = y_j + \sum{}'' q_{k\boldsymbol{l}}{}^j x^k \boldsymbol{y}^{\boldsymbol{l}} \tag{1.44}$$

とし，(1.40) に (1.43) を施すと，1.6 節から

$$\frac{dz_j}{dx} = \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + \sum_{J=1}^{n} \frac{\partial \psi_j}{\partial y_J} f_J$$

となる．以下, 便宜上 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ を $y_1, y_2, \cdots, y_n$ に置き換えたものを「変換 $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1(x, \boldsymbol{y}), \cdots, \varphi_n(x, \boldsymbol{y}))$ で得られる方程式」と呼ぶことにする

また，変換された方程式を $\boldsymbol{g} = (g_1, \cdots, g_n)$ と表し，簡単に

$$\boldsymbol{g} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial x} + \sum_{J=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial y_J} f_J \right) \circ \boldsymbol{\varphi} \tag{1.45}$$

と書くことにする．

方程式 $\boldsymbol{f} = (f_1, \cdots, f_n)$ と変換 $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \cdots, \varphi_n)$ とから方程式 $\boldsymbol{g} = (g_1, \cdots, g_n)$ を導くことは，$\mathscr{E} \times \mathscr{T}$ から $\mathscr{E}$ への写像を与える．すなわち

$$\mathscr{E} \times \mathscr{T} \longrightarrow \mathscr{E} : \quad (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{\varphi}) \mapsto \boldsymbol{g}. \tag{1.46}$$

である．(1.45) において使われる演算 : $\boldsymbol{\varphi}$ から $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\varphi}^{-1}$ を作る演算 $\mathscr{T} \to \mathscr{T}$，微分演算 $\mathscr{G} \to \mathscr{G}$，積および和の演算 $\mathscr{G} \times \mathscr{G} \to \mathscr{G}$，代入の演算 $\mathscr{E} \times \mathscr{T} \to \mathscr{E}$ はすべて連続であるから，写像 (1.46) は連続となる．これを命題としてまとめる．

【命題 1.7.1】 形式的微分方程式

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}$$

と形式的変換 $\boldsymbol{\varphi}$ とに形式的微分方程式

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{g}$$

を対応させる写像 $\mathscr{E} \times \mathscr{T} \to \mathscr{E} : (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{\varphi}) \mapsto \boldsymbol{g}$ は連続である．

特に，$\mathscr{T}$ の列 $\{\boldsymbol{\varphi}^\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ が $\boldsymbol{\varphi} \in \mathscr{T}$ に収束するとき，$(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{\varphi}^\nu) \mapsto \boldsymbol{g}^\nu, (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{\varphi}) \mapsto \boldsymbol{g}$ とすれば，$\{\boldsymbol{\varphi}^\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ は $\boldsymbol{g}$ に収束する．

1.8　変換の効果

次に，方程式 (1.40) を $\boldsymbol{y}' = 0$ にするために必要な変換の効果について見ていく．

形式的微分方程式 (1.40) を

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f} = \sum \boldsymbol{a}_{k\boldsymbol{l}} x^k \boldsymbol{y}^{\boldsymbol{l}} \tag{1.47}$$

の形で表し，次の 2 種類の変換で (1.47) がどう変わるかを調べる：

$$\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{q}x, \tag{1.48}$$

$$\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{y} + x \sum_{k+|\boldsymbol{l}|=\nu} \boldsymbol{q}_{k\boldsymbol{l}} x^k \boldsymbol{y}^{\boldsymbol{l}} \quad (\nu \geqq 1) \tag{1.49}$$

変換 (1.48) は $\mathscr{T}$ には属さないが，(1.47) に変換 (1.48) を施すには 1.6 節を基に考えればよい．(1.49) は $\mathscr{T}_0$ に属する変換である．

まず変換 (1.48) の効果を調べる．(1.48) は明らかに逆変換

$$\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{q}x$$

をもつ．$\boldsymbol{\psi}$ の第 j 成分 ψ_j は

$$\psi_j = y_j - q^j x$$

である．変換された方程式を

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{g} = \sum \boldsymbol{b}_{k\boldsymbol{l}} x^k \boldsymbol{y}^{\boldsymbol{l}} \tag{1.50}$$

とすれば，$\boldsymbol{g}$ の第 j 成分 g_j は，$\boldsymbol{f} = (f_1, \cdots, f_n)$ とおいて，

$$\frac{\partial \psi_j}{\partial x} + \sum_{J=1}^{n} \frac{\partial \psi_j}{\partial y_J} f_J = f_j - q^j$$

に $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \cdots, \varphi_n)$ を代入したものである．

$$g_j = \sum a_{k\boldsymbol{l}}{}^j x^k (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{q}x)^{\boldsymbol{l}} - q^j.$$

定数項に注目すると

$$\boldsymbol{b}_{00} = \boldsymbol{a}_{00} - \boldsymbol{q}$$

が得られる．

したがって，$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{a}_{00}$ とおくと

$$\boldsymbol{b}_{00} = \boldsymbol{0}$$

とできる．

次に，$\boldsymbol{a}_{00} = \boldsymbol{0}$ として (1.49) の効果を調べてみよう．変換された方程式を (1.50) とする．$\boldsymbol{\varphi}$ の逆変換 $\boldsymbol{\psi}$ は

$$\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{y} - x \sum_{k+|\boldsymbol{l}|=\nu} \boldsymbol{q}_{k\boldsymbol{l}} x^k \boldsymbol{y}^{\boldsymbol{l}} + x \sum_{k+|\boldsymbol{l}|>\nu} \boldsymbol{r}_{k\boldsymbol{l}} x^k \boldsymbol{y}^{\boldsymbol{l}}$$

と書ける．$\boldsymbol{\psi}$ の第 j 成分 ψ_j に対して，

$$\frac{\partial \psi_j}{\partial x} = - \sum_{k+|\boldsymbol{l}|=\nu} (k+1) q_{k\boldsymbol{l}}{}^j x^k \boldsymbol{y}^{\boldsymbol{l}} + \sum_{k+|\boldsymbol{l}|>\nu} (k+1) r_{k\boldsymbol{l}}{}^j x^k \boldsymbol{y}^{\boldsymbol{l}},$$

$$\frac{\partial \psi_j}{\partial y_J} = \delta_{jJ} - \sum_{k+|\boldsymbol{l}|=\nu} l_J q_{k\boldsymbol{l}}{}^j x^{k+1} \boldsymbol{y}^{\boldsymbol{l}-\boldsymbol{e}_J} + \sum_{k+|\boldsymbol{l}|>\nu} l_J r_{k\boldsymbol{l}}{}^j x^k \boldsymbol{y}^{\boldsymbol{l}-\boldsymbol{e}_J}.$$

ここで $\delta_{jJ} = \begin{cases} 1 & (j = J) \\ 0 & (j \neq J) \end{cases}$，$\boldsymbol{e}_J = (\underbrace{0 \cdots 0 1}_{J} 0 \cdots 0)$ である．f_J は 1 次以上の項のみからなることに注意して

$$\frac{\partial \psi_j}{\partial x} + \sum_{J=1}^{n} \frac{\partial \psi_j}{\partial y_J} f_J = \sum_{k+|\boldsymbol{l}|\leq\nu} a_{k\boldsymbol{l}}{}^j x^k \boldsymbol{y}^{\boldsymbol{l}} - \sum_{k+|\boldsymbol{l}|=\nu} (k+1) q_{k\boldsymbol{l}}{}^j x^k \boldsymbol{y}^{\boldsymbol{l}} + \cdots$$

を得る．ここで $\cdots$ の部分は $\nu+1$ 次以上の項からなる．これに $\varphi_1,\cdots,\varphi_n$ を代入したものが g_j であるから，

$$g_j=\sum_{k+|\boldsymbol{l}|\le\nu}a_{k\boldsymbol{l}}{}^j x^k(\boldsymbol{y}+x\sum\boldsymbol{q}_{K\boldsymbol{L}}x^K\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{L}})^{\boldsymbol{l}}-\sum_{k+|\boldsymbol{l}|=\nu}(k+1)q_{k\boldsymbol{l}}{}^j x^k(\boldsymbol{y}+x\sum\boldsymbol{q}_{K\boldsymbol{L}}x^K\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{L}})^{\boldsymbol{l}}+\cdots.$$

右辺の ν 次以下の項を調べ，(1.50) と比べて

$$b_{k\boldsymbol{l}}{}^j=\begin{cases}a_{k\boldsymbol{l}}{}^j & (k+|\boldsymbol{l}|\le\nu)\\ a_{k\boldsymbol{l}}{}^j-(k+1)q_{k\boldsymbol{l}}{}^j & (k+|\boldsymbol{l}|=\nu)\end{cases}$$

が得られる．このことは (1.50) の ν 次より低い次数の項の係数は (1.47) の対応する係数と同じ，つまり不変であり，ν 次の項の係数は

$$\boldsymbol{b}_{k\boldsymbol{l}}=\boldsymbol{a}_{k\boldsymbol{l}}-(k+1)\boldsymbol{q}_{k\boldsymbol{l}}$$

という変化を受けることを主張している．

特に

$$\boldsymbol{q}_{k\boldsymbol{l}}=\frac{\boldsymbol{a}_{k\boldsymbol{l}}}{k+1}$$

とすれば，$\boldsymbol{b}_{k\boldsymbol{l}}=\boldsymbol{0}\,(k+|\boldsymbol{l}|=\nu)$ とできる．

以上により，変換 (1.48) を施すによって定数項を 0 にでき，その変換された方程式に (1.49) を施すことによって ν 次の項を 0 にできることが分かった．

1.9 形式的変換の存在

これまでの準備をもとに形式的微分方程式 (1.47) を $\boldsymbol{y}'=0$ に変換する形式的変換

$$\boldsymbol{\varphi}=\boldsymbol{y}+x\sum_{k+|\boldsymbol{l}|\ge 0}\boldsymbol{p}_{k\boldsymbol{l}}x^k\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{l}} \tag{1.51}$$

の構成法について述べる．まず 2 つの注意を述べておく．

変換 (1.51) は逆変換 $\boldsymbol{\varphi}^{-1}$ をもち，$\boldsymbol{\varphi}^{-1}$ も同じ形

$$\boldsymbol{\varphi}^{-1}=\boldsymbol{y}+x\sum_{k+|\boldsymbol{l}|\ge 0}\boldsymbol{q}_{k\boldsymbol{l}}x^k\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{l}}$$

をもつ．

変換 (1.51) は $\mathscr{T}$ に属する変換ではない．しかし，(1.51) は 1.8 節で考えた 1 次変換

$$\boldsymbol{\phi}^1=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{p}^1x$$

と $\mathscr{T}$ の変換

$$\boldsymbol{\phi}^2=\boldsymbol{y}+x{\sum}'\boldsymbol{p}_{k\boldsymbol{l}}{}^2x^k\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{l}}$$

の合成 $\boldsymbol{\phi}^2\circ\boldsymbol{\phi}^1$ に等しい．逆も正しい．

以上を踏まえた上で形式的微分方程式と形式的変換について次の定理が成り立つ．

【定理 1.9.1】 形式的微分方程式 (1.47) に対して，形式的変換 (1.51) が存在し，(1.47) は (1.51) によって

$$\boldsymbol{y}'=\boldsymbol{0} \tag{1.52}$$

に変換される．このような変換 (1.51) は一意的に定まる．

《証明》変換

$$\boldsymbol{\phi}^{\boldsymbol{1}}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{q}x \tag{1.53}$$

によって (1.47) が

$$\boldsymbol{y}'=\boldsymbol{g}=\sum\boldsymbol{b}_{k\boldsymbol{l}}x^k\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{l}} \tag{1.54}$$

に移ったとする．前述の結果から $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{a}_{00}$ とすれば $\boldsymbol{b}_{00} = \boldsymbol{0}$ となる．(1.53) をこのようにとる．次に変換

$$\boldsymbol{\psi}^1 = \boldsymbol{y} + x \sum_{k+|\boldsymbol{l}|=1} \boldsymbol{q}_{k\boldsymbol{l}}{}^1 x^k \boldsymbol{y}^{\boldsymbol{l}} \tag{1.55}$$

を行う．(1.55) によって (1.54) が

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{g}^1 = \sum \boldsymbol{b}_{k\boldsymbol{l}}{}^1 x^k \boldsymbol{y}^{\boldsymbol{l}}$$

になったとする．前述の結果から

$$\boldsymbol{b}_{k\boldsymbol{l}}{}^1 = \begin{cases} \boldsymbol{b}_{00} & ((k,\boldsymbol{l}) = (0,\boldsymbol{0})) \\ \boldsymbol{b}_{k\boldsymbol{l}} - (k+1)\boldsymbol{q}_{k\boldsymbol{l}}{}^1 & (k+|\boldsymbol{l}|=1) \end{cases}$$

である．よって $\boldsymbol{q}_{k\boldsymbol{l}}{}^1 = \boldsymbol{b}_{k\boldsymbol{l}}/(k+1)\,(k+|\boldsymbol{l}|=1)$ ととると

$$\boldsymbol{b}_{\boldsymbol{0}0}{}^1 = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{b}_{k\boldsymbol{l}}{}^1 = 0 \quad (k+|\boldsymbol{l}|=1)$$

とできる．一般に $N-1$ 個の変換

$$\boldsymbol{\psi}^\nu = \boldsymbol{y} + x \sum_{k+|\boldsymbol{l}|=\nu} \boldsymbol{q}_{k\boldsymbol{l}}{}^\nu x^k \boldsymbol{y}^{\boldsymbol{l}} \quad (\nu = 1,2,\cdots,N-1)$$

を順次行い，

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{g}^{N-1} = \sum \boldsymbol{b}_{k\boldsymbol{l}}{}^{N-1} x^k \boldsymbol{y}^{\boldsymbol{l}}$$

が得られ

$$\boldsymbol{b}_{k\boldsymbol{l}}{}^{N-1} = 0 \quad (k+|\boldsymbol{l}| \le N-1)$$

が満たされているとする．次に変換

$$\boldsymbol{\psi}^N = \boldsymbol{y} + x \sum_{k+|\boldsymbol{l}|=N} \boldsymbol{q}_{k\boldsymbol{l}}{}^N x^k \boldsymbol{y}^{\boldsymbol{l}}$$

を行い

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{g}^N = \sum \boldsymbol{b}_{k\boldsymbol{l}}{}^N x^k \boldsymbol{y}^{\boldsymbol{l}}$$

が得られたとする．

$$\boldsymbol{b}_{k\boldsymbol{l}}{}^N = \begin{cases} 0 & (k+|\boldsymbol{l}| < N) \\ \boldsymbol{b}_{k\boldsymbol{l}}{}^{N-1} - (k+1)\boldsymbol{q}_{k\boldsymbol{l}}{}^N & (k+|\boldsymbol{l}| = N) \end{cases}$$

が成り立つ．

よって

$$\boldsymbol{q}_{k\boldsymbol{l}}{}^N = \frac{\boldsymbol{b}_{k\boldsymbol{l}}{}^{N-1}}{k+1} \quad (k+|\boldsymbol{l}|=N)$$

とおくと

$$\boldsymbol{b}_{k\boldsymbol{l}}{}^N = 0 \quad (k+|\boldsymbol{l}| \le N)$$

とできる．よって帰納的に形式的変換の列

$$\psi^\nu = \boldsymbol{y} + x \sum_{k+|\boldsymbol{l}|=\nu} \boldsymbol{q}_{k\boldsymbol{l}}{}^\nu x^k \boldsymbol{y}^{\boldsymbol{l}} \quad (\nu = 1,2,\cdots) \tag{1.56}$$

と形式的微分方程式の列

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{g}^\nu = \sum \boldsymbol{b}_{k\boldsymbol{l}}{}^\nu x^k \boldsymbol{y}^{\boldsymbol{l}} \tag{1.57}$$

が定まる．$\nu = m$ のときの (1.56)，(1.57) を $(1.56)_m$，$(1.57)_m$ と表すこととする．$(1.56)_\nu$，$(1.57)_\nu$ は次の性質をもつ．(1.54) は $(1.56)_1$ によって $(1.57)_1$ に変換され，$(1.57)_{\nu-1}$ は $(1.56)_\nu$ により $(1.56)_\nu$ に変換される．さらに $\boldsymbol{b_{kl}}^\nu = 0 \quad (k + |\boldsymbol{l}| \le \nu)$ が成り立つ．$\boldsymbol{\psi}^1, \cdots, \boldsymbol{\psi}^\nu$ の合成を

$$\boldsymbol{\varphi^\nu} = \boldsymbol{\psi^\nu} \circ \cdots \circ \boldsymbol{\psi^1}$$

とおくと (1.54) は (1.57) に移る．$\mathscr{T}_0$ の元の合成は明らかに $\mathscr{T}_0$ の元になることから φ^ν は $\mathscr{T}_0$ の元

$$\boldsymbol{\phi}^2 = \boldsymbol{y} + x {\sum}' \boldsymbol{p_{kl}} x^k \boldsymbol{y^l}$$

に収束する．一方 $\boldsymbol{b_{kl}}^\nu = \boldsymbol{0}$ によって，$\boldsymbol{g}^\nu$ は $\mathscr{E}$ の元 $\boldsymbol{0} = (0, \cdots, 0)$ に収束する．命題 1.7.1 によって，(1.54) は形式的変換 $\boldsymbol{\phi}^2$ によって (1.52) に変換される．

よって，$\boldsymbol{\phi}^1$ と $\boldsymbol{\phi}^2$ との合成

$$\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\phi}^2 \circ \boldsymbol{\phi}^1$$

は (1.47) を (1.52) に変換する．

最後に変換の一意性について証明する．(1.47) を (1.52) に移す変換が 2 つあるとし，それを $\boldsymbol{\varphi^1}, \boldsymbol{\varphi^2}$ とする．このとき，$\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\varphi^1} \circ (\boldsymbol{\varphi^2})^{-1}$ は (1.52) をそれ自身に移す．$\boldsymbol{\phi}$ は $\boldsymbol{\varphi^1}, \boldsymbol{\varphi^2}$ の形から

$$\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{y} + x \sum_{k+|\boldsymbol{l}| \ge 0} \boldsymbol{q_{kl}} x^k \boldsymbol{y^l} \tag{1.58}$$

という形をしている．したがって，(1.52) を自分自身に移す変換 (1.58) は恒等変換であることを示せばよい．$\boldsymbol{\phi}$ の逆変換を

$$\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{y} + x \sum_{k+|\boldsymbol{l}| \ge 0} \boldsymbol{r_{kl}} x^k \boldsymbol{y^l}$$

とする．(1.52) は (1.58) によって再び (1.52) に移るから，

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial x} + \sum_J \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial y_J} \cdot 0 \right) \circ \boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{0}$$

を満たす．これより

$$\sum (k+1) \boldsymbol{r_{kl}} x^k (\boldsymbol{y} + x \sum \boldsymbol{q_{KL}} x^K \boldsymbol{y^L})^{\boldsymbol{l}} = \boldsymbol{0} \tag{1.59}$$

が得られる．$\boldsymbol{\phi} \ne \boldsymbol{e}$ として矛盾を導く．$\boldsymbol{q_{kl}}$ のうち $\boldsymbol{0}$ でないものがあるから，そのうち $k + |\boldsymbol{l}|$ が最小のものの一つを $\boldsymbol{q_{k_0 l_0}}$ とする．そのとき，

$$\boldsymbol{r_{kl}} = \boldsymbol{0} \quad (k + |\boldsymbol{l}| < k_0 + |\boldsymbol{l_0}|), \quad \boldsymbol{r_{k_0 l_0}} = -\boldsymbol{q_{k_0 l_0}}$$

であることが分かる．(1.59) の左辺の 0 でない最低次の項の一つとして $(k_0 + 1) \boldsymbol{r_{k_0 l_0}} x^{k_0} \boldsymbol{y^{l_0}}$ が表れる．よって矛盾するので $\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{e}$ となる．

1.10　形式的変換の収束性

最後に (1.47) の右辺が収束ベキ級数であるときに (1.47) を (1.52) にする形式的変換も収束ベキ級数であることを示す．まずは準備として以下を示そう．

【命題 1.10.1】 形式的微分方程式 (1.47) が逆変換をもつ変換 $\boldsymbol{\varphi}$ によって形式的微分方程式

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{g} \tag{1.60}$$

に変換されれば，(1.60) は $\boldsymbol{\varphi}$ の逆変換 $\boldsymbol{\psi}$ によって (1.47) に変換される．

《証明》仮定から，$\boldsymbol{g}$ は $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi}$ によって

$$\boldsymbol{g} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial x} + \sum_{J=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial y_J} f_J \right) \circ \boldsymbol{\varphi}$$

と表される．この式から

$$\boldsymbol{f} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial x} + \sum_{J=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial y_J} g_J \right) \circ \boldsymbol{\psi} = \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial x} \circ \boldsymbol{\psi} + \sum_{J=1}^{n} \left(\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial y_J} \circ \boldsymbol{\psi} \right) (g_J \circ \boldsymbol{\psi}) \tag{1.61}$$

を導けばよい．

$\boldsymbol{\varphi}$ と $\boldsymbol{\psi}$ は互いに逆変換であるから $\boldsymbol{\varphi} \circ \boldsymbol{\psi}$ は恒等変換である．これを成分を使って書くと

$$\varphi_i \circ (\psi_1, \cdots, \psi_n) = y_i \quad (i = 1, \cdots, n).$$

となる．この両辺を $x, y_1, \cdots, y_n$ で偏微分すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \circ \boldsymbol{\psi} + \sum_{J=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_J} \circ \boldsymbol{\psi} \right) \frac{\partial \psi_J}{\partial x} &= 0 \quad (i = 1, \cdots, n) \\ \sum_{J=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_J} \circ \boldsymbol{\psi} \right) \frac{\partial \psi_J}{\partial y_k} &= \delta_{ik} \quad (i, k = 1, \cdots, n) \end{aligned}$$

を得る．一方，$\boldsymbol{\varphi} \circ \boldsymbol{\psi}$ は恒等変換であるから

$$g_J \circ \boldsymbol{\psi} = \left(\frac{\partial \psi_J}{\partial x} + \sum_{K=1}^{n} \frac{\partial \psi_J}{\partial y_K} f_K \right) \circ \boldsymbol{\varphi} \circ \boldsymbol{\psi} = \frac{\partial \psi_J}{\partial x} + \sum_{K=1}^{n} \frac{\partial \psi_J}{\partial y_K} f_K$$

となる．よって，

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \circ \boldsymbol{\psi} + \sum_{J=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_J} \circ \boldsymbol{\psi} \right) (g_J \circ \boldsymbol{\psi}) &= - \sum_{J=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_J} \circ \boldsymbol{\psi} \right) \frac{\partial \psi_J}{\partial x} + \sum_{J=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_J} \circ \boldsymbol{\psi} \right) \left(\frac{\partial \psi_J}{\partial x} + \sum_{K=1}^{n} \frac{\partial \psi_J}{\partial y_K} f_K \right) \\ &= \sum_{J=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_J} \circ \boldsymbol{\psi} \right) \sum_{K=1}^{n} \frac{\partial \psi_J}{\partial y_K} f_K \\ &= \sum_{K=1}^{n} f_K \sum_{J=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_J} \circ \boldsymbol{\psi} \right) \frac{\partial \psi_J}{\partial y_K} \\ &= \sum_{K=1}^{n} f_K \delta_{iK} \\ &= f_i \end{aligned}$$

以上より，(1.61) が証明された．

本題に入る．まずこの節の始めに述べたことを定理としてまとめる．

【定理 1.10.1】 微分方程式 (1.47) において $\boldsymbol{f}$ が収束ベキ級数ならば，(1.47) を方程式 (1.52) に移す変換 (1.51) も収束ベキ級数である．

《証明》仮定によって (1.52) は変換 (1.51) の逆変換

$$\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{y} + x \sum \boldsymbol{q}_{k\boldsymbol{l}} x^k \boldsymbol{y}^{\boldsymbol{l}}$$

によって (1.47) へ変換される．したがって

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial x} + \sum_{J=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial y_J} \cdot 0 \right) \circ \boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{f}$$

であり，

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial x} \circ \boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{f}$$

が成り立つ．$\boldsymbol{\psi} \circ \boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{e}$ であるから

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial x} = \boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{\varphi}$$

を得る．級数の形に書き直すと

$$\sum (k+1) p_{k\boldsymbol{l}}{}^j x^k \boldsymbol{y}^{\boldsymbol{l}} = \sum a_{k\boldsymbol{l}}{}^j x^k (\boldsymbol{y} + x \sum \boldsymbol{p}_{KL} x^K \boldsymbol{y}^{\boldsymbol{L}})^{\boldsymbol{l}}$$

を得る．両辺の $x^k \boldsymbol{y}^{\boldsymbol{l}}$ の係数比較することによって

$$\begin{aligned} &p_{0\boldsymbol{0}}{}^j = a_{0\boldsymbol{0}}{}^j && (j = 1, \cdots, n) \\ &(k+1) p_{k\boldsymbol{l}}{}^j = a_{k\boldsymbol{l}}{}^j + Q_{k\boldsymbol{l}}(p_{K\boldsymbol{L}}{}^i, a_{K\boldsymbol{L}}{}^j) && (k + |\boldsymbol{l}| > 0\,; j = 1, \cdots, n) \end{aligned}$$

を得る．ここで $Q_{k\boldsymbol{l}}$ は $p_{K\boldsymbol{L}}{}^i\,(K + |\boldsymbol{L}| < k + |\boldsymbol{l}|; i = 1, \cdots, n)$ と $a_{K\boldsymbol{L}}{}^j\,(K + |\boldsymbol{L}| < k + |\boldsymbol{l}|)$ の多項式で係数は正の整数である．

次に，$\sum a_{k\boldsymbol{l}}{}^j x^k \boldsymbol{y}^{\boldsymbol{l}}$ の優級数 $\sum A_{k\boldsymbol{l}}{}^j x^k \boldsymbol{y}^{\boldsymbol{l}}$ で収束するものをとる．このような優級数がとれることは 1.3 節から分かる．

$$F_j(x, \boldsymbol{y}) = \sum A_{k\boldsymbol{l}}{}^j x^k \boldsymbol{y}^{\boldsymbol{l}}$$

とおく．F_j はすべて $|x| < r, |\boldsymbol{y}| < \rho$ において正則としてよい．$x, \boldsymbol{y}$ の未知関数 $\boldsymbol{z}$ に対する方程式系

$$z_j - y_j = x F_j(x, \boldsymbol{z}) \quad (j = 1, \cdots, n) \tag{1.62}$$

を考える．方程式系 (1.62) は

$$z_j = y_j + x \sum P_{k\boldsymbol{l}}{}^j x^k \boldsymbol{y}^{\boldsymbol{l}} \tag{1.63}$$

の形の形式解をただ一つもつ．実際，(1.63) を (1.62) に代入して

$$\sum P_{k\boldsymbol{l}}{}^j x^k \boldsymbol{y}^{\boldsymbol{l}} = \sum A_{k\boldsymbol{l}}{}^j x^k (\boldsymbol{y} + x \sum \boldsymbol{P}_{KL} x^K \boldsymbol{y}^{\boldsymbol{L}})^{\boldsymbol{l}}$$

を得る．これから直ちに

$$\begin{aligned} &P_{0\boldsymbol{0}}{}^j = A_{0\boldsymbol{0}}{}^j && (j = 1, \cdots, n) \\ &P_{k\boldsymbol{l}}{}^j = A_{k\boldsymbol{l}}{}^j + Q_{k\boldsymbol{l}}(P_{K\boldsymbol{L}}{}^i, A_{K\boldsymbol{L}}{}^j) && (k + |\boldsymbol{l}| > 0\,; j = 1, \cdots, n) \end{aligned}$$

が得られる．

次にベキ級数 $\sum P_{k\boldsymbol{l}}x^k\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{l}}$ はベキ級数 $\sum p_{k\boldsymbol{l}}x^k\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{l}}$ の優級数であることを帰納法を用いて示す．
$k+|\boldsymbol{l}|=0$ のとき，

$$|p_{0\boldsymbol{0}}{}^j| \le |a_{0\boldsymbol{0}}{}^j| \le A_{0\boldsymbol{0}}{}^j \leqq P_{0\boldsymbol{0}}{}^j$$

である．次に $k+|\boldsymbol{l}|=1,2,\cdots,N-1$ まで主張が成り立つとすると $k+|\boldsymbol{l}|=N$ のとき，

$$\begin{aligned}
|p_{k\boldsymbol{l}}{}^j| &= \frac{1}{N+1}|a_{k\boldsymbol{l}}{}^j + Q_{k\boldsymbol{l}}(p_{K\boldsymbol{L}}{}^i, a_{K\boldsymbol{L}}{}^j)| \\
&\le \frac{1}{N+1}\{|a_{k\boldsymbol{l}}{}^j| + |Q_{k\boldsymbol{l}}(p_{K\boldsymbol{L}}{}^i, a_{K\boldsymbol{L}}{}^j)|\} \\
&\le \frac{1}{N+1}\{|a_{k\boldsymbol{l}}{}^j| + Q_{k\boldsymbol{l}}(|p_{K\boldsymbol{L}}{}^i|, |a_{K\boldsymbol{L}}{}^j|)\} \\
&\le \frac{1}{N+1}\{A_{k\boldsymbol{l}}{}^j + Q_{k\boldsymbol{l}}(P_{K\boldsymbol{L}}{}^i, A_{K\boldsymbol{L}}{}^j)\} \\
&= \frac{1}{N+1}P_{k\boldsymbol{l}}{}^j \\
&\le P_{k\boldsymbol{l}}{}^j
\end{aligned}$$

となる．よって，$|p_{k\boldsymbol{l}}{}^j| \le P_{k\boldsymbol{l}}{}^j \quad (k+|\boldsymbol{l}|=0,1,\cdots)$ となり，優級数であることがいえた．
また $f_j(x,\boldsymbol{y},z_1,\cdots,z_n) = z_j - y_j - xF_j(x,\boldsymbol{z})\,(j=1,\cdots,n)$ とすると

$$\begin{aligned}
&f_j(0,0,\cdots,0) = 0 \\
&\frac{\partial(f_1,\cdots,f_n)}{\partial(z_1,\cdots,z_n)} = 1 \neq 0
\end{aligned}$$

である．ただし，$\dfrac{\partial(f_1,\cdots,f_n)}{\partial(z_1,\cdots,z_n)}$ はヤコビ行列式を表す．

ゆえに陰関数定理より方程式系 (1.62) は $x=0,\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$ において正則かつ $\boldsymbol{z}(0,\boldsymbol{0})=0$ となる解

$$z_j = \phi_j(x,y_1,\cdots,y_n) \quad (j=1,\cdots,n)$$

をもつ．したがって，ϕ_j の $x=y_1=\cdots=y_n=0$ での Taylor 展開は (1.63) の右辺と一致する．ゆえに，(1.63) は収束ベキ級数である．これから $\sum p_{k\boldsymbol{l}}x^k\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{l}}$ の収束性がいえ (1.51) の収束性が示された．

2　パンルヴェ方程式の解の評価

パンルヴェ方程式の解は初等関数で記述できない．そこでこの章では一章での基礎理論をもとにパンルヴェ方程式の解を初等関数で近似し評価する．なお，変数の記号は x, y を使うのではなくパンルヴェ方程式の慣習に合わせて p, q, t などを用いる．

2.1　パンルヴェ方程式とは何か

まずはパンルヴェ方程式について簡単に紹介しよう．
2 階の常微分方程式

$$q'' = R(t : q, q') \tag{2.1}$$

について考える．ただし，右辺は t の解析関数を係数とする q と q' の有理式とする．一般に微分方程式の解の特異点の位置は初期条件によって変化する．このような特異点を動く特異点という．例えば，

$$\frac{dq}{dt} = -q^2 \quad \longrightarrow \quad q = \frac{1}{t+c}$$
$$\frac{dq}{dt} = -q^3 \quad \longrightarrow \quad q = \frac{1}{\sqrt{2(t+c)}}$$

である．この 2 つの微分方程式の解の動く特異点は $t = -c$ であるが，前者は $t = -c$ を極にもち，後者は $t = -c$ を 2 位の分岐点にもつ．前者の例のように (2.1) の解の動く特異点が極しかないときパンルヴェ性をもつという．以下，定義としてまとめておく．

《**定義 2.1.1**》 微分方程式の解の特異点の位置が初期条件に依存するものを動く特異点と呼ぶ．また，動く特異点が極しかないとき，パンルヴェ性をもつという

また，パンルヴェ性について次のことが知られている．

【**定理 2.1.1**】（Painlevé,Gambier）
(2.1) がパンルヴェ性をもつとき，(2.1) は次のいずれかに帰着する．

i．線形方程式
ii．楕円関数の方程式
iii．求積できる
iv．以下で与えられる 6 つの方程式

$$\mathrm{P_I} \qquad \frac{d^2q}{dt^2} = 6q^2 + t$$

$$\mathrm{P_{II}} \qquad \frac{d^2q}{dt^2} = 2q^3 + tq + \alpha$$

$$\mathrm{P_{III}} \qquad \frac{d^2q}{dt^2} = \frac{1}{q}\left(\frac{dq}{dt}\right)^2 - \frac{1}{t}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{t}(\alpha q^2 + \beta) + \gamma q^3 + \frac{\delta}{q}$$

$$\mathrm{P_{IV}} \qquad \frac{d^2q}{dt^2} = \frac{1}{2q}\left(\frac{dq}{dt}\right)^2 + \frac{3}{2}q^3 + 4tq^2 + 2(t^2 - \alpha)q + \frac{\beta}{q}$$

$$\mathrm{P_V} \qquad \frac{d^2q}{dt^2} = \left(\frac{1}{2q} + \frac{1}{q-1}\right)\left(\frac{dq}{dt}\right)^2 - \frac{1}{t}\frac{dq}{dt} + \frac{(q-1)^2}{t^2}\left(\alpha q + \frac{\beta}{q}\right) + \gamma\frac{q}{t} + \delta\frac{q(q+1)}{q-1}$$

$$\mathrm{P_{VI}} \qquad \frac{d^2q}{dt^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{q} + \frac{1}{q-1} + \frac{1}{q-t}\right)\left(\frac{dq}{dt}\right)^2 - \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} + \frac{1}{q-t}\right)\frac{dq}{dt} + \frac{q(q-1)(q-t)}{t^2(t-1)^2}\left\{\alpha + \beta\frac{t}{q^2} + \gamma\frac{t-1}{(q-1)^2} + \delta\frac{t(t-1)}{(q-t)^2}\right\}$$

ただし$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ は複素定数である．

$\mathrm{P_I} \sim \mathrm{P_{VI}}$ をパンルヴェ方程式という．

2.2　I 型パンルヴェ方程式の解の評価

まずＩ型パンルヴェ方程式の解の評価を行う．

Ｉ型パンルヴェ方程式は補助変数 p を用いて

$$\begin{cases} q' = p \\ p' = 6q^2 + t \end{cases}$$

と表すことができる．1 章で扱った定理 1.10.1 をこれに適用すると次のことが言える．

【定理 2.2.1】 Ｉ型パンルヴェ方程式

$$\begin{cases} q' = p \\ p' = 6q^2 + t \end{cases} \tag{2.2}$$

に対して，形式的変換

$$\begin{cases} q = Q + t \displaystyle\sum_{k+l+m \geq 1} a_{klm} t^k Q^l P^m \\ p = P + t \displaystyle\sum_{k+l+m \geq 1} b_{klm} t^k Q^l P^m \end{cases} \tag{2.3}$$

で，

$$\begin{cases} Q' = 0 \\ P' = 0 \end{cases} \tag{2.4}$$

となるものが存在し収束する．さらに $q(0) = \alpha, q'(0) = \beta$ となるパンルヴェ方程式の解 $q(t)$ について

$$|q(t)| \leq \frac{1 - \sqrt{1 - 24|t|^5 - 24|\alpha||t|^2 - 24|\beta||t|^3}}{12|t|^2}$$

となる．特に，$\alpha = 0, \beta = 0$ のとき $|t| < \dfrac{1}{\sqrt[5]{24}} \Rightarrow |q(t)| \leq \dfrac{1 - \sqrt{1 - 24|t|^5}}{12|t|^2}$ である．

《証明》Ｉ型パンルヴェ方程式 (2.2) に対し，これを (2.4) にする変換 (2.3) を考える．定理 1.10.1 の証明より

$$\begin{cases} \tilde{q} - Q = t\tilde{p} \\ \tilde{p} - P = t(6\tilde{q}^2 + t) \end{cases} \tag{2.5}$$

を満たす $\tilde{q}, \tilde{p}$ で $t = 0$ のとき，$\tilde{q} = Q, \tilde{p} = P$ となるものが (2.3) の優級数となる．(2.5) の解を実際に求めると

$$\tilde{q} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 24t^5 - 24Qt^2 - 24Pt^3}}{12t^2}$$

となる．

$$\lim_{t \to 0} \frac{1 - \sqrt{1 - 24t^5 - 24Qt^2 - 24Pt^3}}{12t^2} = \lim_{t \to 0} \frac{2t^3 + 2Q + 2Pt}{(1 + \sqrt{1 - 24t^5 - 24Qt^2 - 24Pt^3})} = Q$$

であるから優級数として

$$\tilde{q} = \frac{1 - \sqrt{1 - 24t^5 - 24Qt^2 - 24Pt^3}}{12t^2}$$

を採用する．また，$q(0) = \alpha, p(0) = \beta$ は (2.3) より $Q(0) = \alpha, P(0) = \beta$ に対応する．よって $q(0) = \alpha, p(0) = \beta$ となる解は

$$|q(t)| = |\alpha + t \sum_{k+l+m \geqq 1} a_{klm} t^k \alpha^l \beta^m| \leq \frac{1 - \sqrt{1 - 24|t|^5 - 24|\alpha||t|^2 - 24|\beta||t|^3}}{12|t|^2}$$

となることが分かる．$\alpha = 0, \beta = 0$ とすると $|t| < \dfrac{1}{\sqrt[5]{24}} \Rightarrow |q(t)| \leq \dfrac{1 - \sqrt{1 - 24|t|^5}}{12|t|^2}$ である．

2.3　II 型パンルヴェ方程式の解の評価

この節では II 型パンルヴェ方程式の解を初等関数で近似し評価する．まずは前節で用いた定理 1.10.1 の手法を用いて考えよう．

II 型パンルヴェ方程式は補助変数 p を用いて

$$\begin{cases} q' = p - q^2 - \dfrac{t}{2} \\ p' = 2pq + b \end{cases}$$

と表すことができる．定理 1.10.1 の証明から $q = Q, p = P + bt$ とおくと

$$\begin{cases} Q' = (P + bt) - Q^2 - \dfrac{t}{2} \\ P' = 2(P + bt)Q \end{cases}$$

となる．改めて変数を置きなおして

$$\begin{cases} q' = (p + bt) - q^2 - \dfrac{t}{2} \\ p' = 2(p + bt)q \end{cases} \tag{2.6}$$

としておく．

前節と同様にして (2.6) を (2.4) にする変換 (2.3) を考える．定理 1.10.1 の証明より

$$\begin{cases} \tilde{q} - Q = t\left(\tilde{p} + |b|t + \tilde{q}^2 + \dfrac{t}{2}\right) \\ \tilde{p} - P = 2t(\tilde{p} + |b|t)\tilde{q} \end{cases} \tag{2.7}$$

を満たす $\tilde{q}, \tilde{p}$ で $t = 0$ のとき，$\tilde{q} = Q, \tilde{p} = P$ となるものが (2.3) の優級数となる．この連立方程式を $\tilde{q}$ に関する方程式に直すと 3 次方程式になる．カルダノの公式を使って三次方程式を解き，Taylor 展開すれば優級数を求めることができる．しかし，I 型のときと違い，この 3 次方程式の解は非常に複雑であり，この根で II 型の解を近似してもあまり意味がない．そこで本論文では $Q = 0, P = 0$ の場合のみを考え，初等関数で近似することとする．まずは結果を定理としてまとめる．

【定理 2.3.1】 II 型パンルヴェ方程式 (2.6) に対して，形式的変換 (2.3) で (2.4) となるものが存在し収束する．さらに $q(0) = 0, q'(0) = 0$ となる解 $q(t)$ は $|t| < \dfrac{1}{10(2b+1)}$ で

$$|q(t)| \leq \frac{(2|b|+1)|t|^2}{2}$$

に近似できる．

証明に入る前に少し準備を行う．

連立方程式 (2.7) において $Q = 0, P = 0$ とし $\tilde{q}$ だけの方程式にすると

$$-4t^2\tilde{q}^3 + 6t\tilde{q}^2 - 2(t^3 + 1)\tilde{q} + (1 + 2|b|)t^2 = 0$$

となる．この式を左辺を $F(\tilde{q})$ とおき，$F(\tilde{q}) = 0$ の解を $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ としておく．

この式に対して

$$\begin{aligned} f(\tilde{q}) &= -4t^2\tilde{q}^3 + 6t\tilde{q}^2 - 2(t^3 + 1)\tilde{q} + \frac{t^2}{2}(1 + 2|b|)\left\{(1 + 2|b|)^2 t^6 - (1 + 6|b|)t^3 + 2\right\} \\ g &= -\frac{1}{2}(1 + 2|b|)t^5\left\{(1 + 2|b|)^2 t^3 - (1 + 6|b|)\right\} \end{aligned}$$

とおき

$$F(\tilde{q}) = f(\tilde{q}) + g$$

とすると $f(\tilde{q})=0$ の解 $\tilde{q}_1,\tilde{q}_2,\tilde{q}_3$ は

$$f(\tilde{q})=0 \Longrightarrow \begin{cases} \tilde{q}_1=\dfrac{t^2}{2}(1+2|b|) \\ \tilde{q}_2=-\dfrac{t^2}{4}(1+2|b|)+\dfrac{1}{4t}\left\{3+\sqrt{1+2(-1+6|b|)t^3-3(1+2|b|)^2t^6}\right\} \\ \tilde{q}_3=-\dfrac{t^2}{4}(1+2|b|)+\dfrac{1}{4t}\left\{3-\sqrt{1+2(-1+6|b|)t^3-3(1+2|b|)^2t^6}\right\} \end{cases}$$

となる．$t\to 0$ のとき $g\to 0$ であることから t が十分小さいとき，$F(\tilde{q})=0$ の解と $f(\tilde{q})=0$ の解は十分近いと考えられる．このことを証明するために Rouché の定理を用いる．

> **【定理 2.3.2】** (Rouché の定理) $f(z),g(z)$ が閉領域 $\overline{D}$ で正則で ∂D 上で
>
> $$|f(z)|>|g(z)|$$
>
> が成り立つとき，D 内での $f(z)+g(z)$ の零点の個数と $f(z)$ の零点の個数は等しい

ここまでが準備である．次に証明の方針を述べる．

(i) 初めに $\left|\tilde{q}-\dfrac{1+2|b|}{2}t^2\right|=A(t)$ で $|f(\tilde{q})|>|g|$ となるような $A(t)$ について考える．すると Rouché の定理より $\left|\tilde{q}-\dfrac{1+2|b|}{2}t^2\right|<A(t)$ で $f(\tilde{q})+g=F(\tilde{q})$ の零点の個数と $f(\tilde{q})$ の零点の個数が一致する．

(ii) $\left|\tilde{q}-\dfrac{1+2|b|}{2}t^2\right|<A(t)$ において $f(\tilde{q})$ の零点が 1 つであること，つまり $|\tilde{q}_1-\tilde{q}_j|>A(t)\,(j=2,3)$ を示す．

(iii) (i) で求めた $A(t)$ は t が小さくなるほど大きくなるため，領域内に含まれる $f(\tilde{q})$ の零点 $\tilde{q}_1$ が $F(\tilde{q})$ の零点 λ_1 を近似しているかわからない．そこで最後に $t\to 0$ のとき $|\tilde{q}_1-\lambda_1|\to 0$ であることを示す．

《証明》

(i)$|f(\tilde{q})|>|g|$ となる範囲について考える．

$\tilde{q}-\dfrac{1+2|b|}{2}t^2=w,\beta=2|b|+1,u=tw,s=\beta t^3$ とおくと，

$$\begin{aligned} f(\tilde{q}) &= -w\{4t^2w^2+6t(\beta t^3-1)w+3\beta^2t^6-2(3\beta-1)t^3+2\} \\ &= \frac{1}{t}tw\{4(tw)^2+6t(\beta t^3-1)w+3(\beta t^3)^2-2\left(3-\frac{1}{\beta}\right)\beta t^3+2\} \\ &= -\frac{u}{t}\{4u^2+6(s-1)u+3s^2-2\left(3-\frac{1}{\beta}\right)s+2\} \end{aligned}$$

となる．g についても

$$\begin{aligned} g &= -\frac{1}{2}\beta t^5(\beta^2t^3-3\beta+2) \\ &= -\frac{1}{t}\beta^2t^6\left(\beta t^3-3+\frac{2}{\beta}\right) \\ &= \frac{1}{2t}s^2\left(s-3+\frac{2}{\beta}\right) \end{aligned}$$

となる．

よって，$|s|<r, |u|=R$ とすると

$$\begin{aligned}|f(\tilde{q})| &= \frac{|u|}{|t|}\left|4\left(u-\frac{1}{2}\right)(u-1)+3s^2+\left(6u-6+\frac{2}{\beta}\right)s\right| \\ &\geq \frac{|u|}{|t|}\left\{\left|4\left(u-\frac{1}{2}\right)(u-1)\right|-\left|3s^2+\left(6u-6+\frac{2}{\beta}\right)s\right|\right\} \\ &> \frac{|u|}{|t|}\left\{4\left|u-\frac{1}{2}\right||u-1|-r\left(3r+6R+6-\frac{2}{\beta}\right)\right\}\end{aligned}$$

となる．さらに $R<\dfrac{1}{2}$ とすると $\left|u-\dfrac{1}{2}\right|>\dfrac{1}{2}-R, |u-1|>1-R$ より

$$|f(\tilde{q})|>\frac{R}{|t|}\left\{4\left(\frac{1}{2}-R\right)(1-R)-r\left(3r+6R+6-\frac{2}{\beta}\right)\right\}$$

となる．g については

$$\begin{aligned}|g| &= \frac{1}{2|t|}|s|^2\left|s-3+\frac{2}{\beta}\right| \\ &< \frac{1}{2|t|}r^2\left(r+3-\frac{2}{\beta}\right)\end{aligned}$$

となる．よって $R<\dfrac{1}{2}$ のとき，

$$|f|-|g|>\frac{1}{|t|}\left[R\left\{4\left(\frac{1}{2}-R\right)(1-R)-r\left(3r+6R+6-\frac{2}{\beta}\right)\right\}-\frac{r^2}{2}\left(r+3-\frac{2}{\beta}\right)\right]$$

であり，この式に対して $r=\dfrac{R}{2}$ とすると，

$$|f|-|g|>\frac{R}{16|t|}\left\{3R^2+\frac{20}{\beta}R-150R+32\right\}$$

となり，$R=\dfrac{1}{5}$ とすれば，$|f|-|g|>0$ である．つまり，$|t|<\dfrac{1}{\sqrt[3]{10\beta}}, \left|\tilde{q}-\dfrac{1+2|b|}{2}t^2\right|=\dfrac{1}{5|t|}$ のとき，$|f|>|g|$ となる．

(ii) $\left|\tilde{q}-\dfrac{1+2|b|}{2}t^2\right|=\dfrac{1}{5|t|}$ のもとで $|\tilde{q}_1-\tilde{q}_j|>\dfrac{1}{5|t|}$ $(j=2,3)$ を示す．

変換の記号は (i) のときと同様のものを用いることとする．

$$\begin{aligned}|\tilde{q}_1-\tilde{q}_2| &= \left|\frac{t^2}{2}(1+2|b|)-\left[-\frac{t^2}{4}(1+2|b|)+\frac{1}{4t}\left\{3+\sqrt{1+2(-1+6|b|)t^3-3(1+2|b|)^2t^6}\right\}\right]\right| \\ &= \left|\frac{3}{4}\beta t^2-\frac{1}{4t}\left\{3+\sqrt{1+2(3\beta-4)t^3-3\beta^2t^6}\right\}\right| \\ &= \left|\frac{3s}{4t}-\frac{1}{4t}\left\{3+\sqrt{1+6s-\frac{8s}{\beta}-3s^2}\right\}\right| \\ &= \frac{1}{4|t|}\left|3s-\left\{3+\sqrt{1+6s-\frac{8s}{\beta}-3s^2}\right\}\right|\end{aligned}$$

となる．次に $\left|3s-\left\{3+\sqrt{1+6s-\frac{8}{\beta}s-3s^2}\right\}\right|$ の最小値について考える．三角不等式と $|s|<\frac{1}{10}$ によって

$$\begin{aligned}\left|3s-\left\{3+\sqrt{1+6s-\frac{8}{\beta}s-3s^2}\right\}\right| &\geq 3-\left|\sqrt{1+6s-\frac{8}{\beta}s-3s^2}\right|-3|s| \\ &> 3-\sqrt{\left|1+6s-\frac{8}{\beta}s-3s^2\right|}-3|s| \\ &> 3-\sqrt{1+\left|6-\frac{8}{\beta}\right||s|+3|s|^2}-3|s| \\ &> 3-\sqrt{1+6\cdot\frac{1}{10}+3\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^2}-3\cdot\frac{1}{10} \\ &> \frac{7}{5} \\ &> \frac{4}{5}\end{aligned}$$

以上より，$|\tilde{q}_1-\tilde{q}_2|>\frac{1}{5|t|}$ となる．$|\tilde{q}_1-\tilde{q}_3|$ についても同様である．

(iii) $t\to 0$ のとき $|\tilde{q}_1-\lambda_1|\to 0$ であることを示す．

$|F(\tilde{q})-f(\tilde{q})|=|g|$ について考える．$\tilde{q}=\lambda_1$ とすると，

$$|4t^2(\lambda_1-\tilde{q}_1)(\lambda_1-\tilde{q}_2)(\lambda_1-\tilde{q}_3)|-|g|=0$$

となる．(i) より $|\lambda_1-\tilde{q}_1|<\frac{1}{5|t|}$，(ii) より $|\tilde{q}_1-\tilde{q}_j|>\frac{1}{5|t|}$ $(j=2,3)$ が成り立つので $|\lambda_1-\tilde{q}_1|<|\tilde{q}_1-\tilde{q}_2|, |\lambda_1-\tilde{q}_1|<|\tilde{q}_1-\tilde{q}_3|$ となる．ここで (i) でとった t よりさらに小さくとって $|t|<\frac{1}{10\beta}$ としておく．三角不等式を上手く使うと

$$4|t|^2|\lambda_1-\tilde{q}_1||\lambda_1-\tilde{q}_2||\lambda_1-\tilde{q}_3|-|g|\geq 4|t|^2|\lambda_1-\tilde{q}_1|(|\tilde{q}_1-\tilde{q}_2|-|\tilde{q}_1-\lambda_1|)(|\tilde{q}_1-\tilde{q}_3|-|\tilde{q}_1-\lambda_1|)-|g|$$

より

$$|\lambda_1-\tilde{q}_1|(|\tilde{q}_1-\tilde{q}_2|-|\tilde{q}_1-\lambda_1|)(|\tilde{q}_1-\tilde{q}_3|-|\tilde{q}_1-\lambda_1|)-\frac{1}{4|t|^2}|g|\leq 0$$

とできる．$|\tilde{q}_1-\lambda_1|=d$ とおき計算すると

$$\begin{aligned}d(|\tilde{q}_1-\tilde{q}_2|-d)(|\tilde{q}_1-\tilde{q}_3|-d)-\frac{1}{4|t|^2}|g|\leq 0 \\ d^3-(|\tilde{q}_1-\tilde{q}_2|+|\tilde{q}_1-\tilde{q}_3|)d^2+|\tilde{q}_1-\tilde{q}_2||\tilde{q}_1-\tilde{q}_3|d-\frac{1}{4|t|^2}|g|\leq 0\end{aligned}$$

この左辺の関数を $H(d)$ とし $|\tilde{q}_1-\tilde{q}_2|=\alpha, |\tilde{q}_1-\tilde{q}_3|=\beta$ としてグラフの変曲点を調べると

$$d=\frac{\alpha+\beta\pm\sqrt{(\alpha+\beta)^2-3\alpha\beta}}{3}>0$$

であり $H(0)<0$ であることを踏まえると，$H(d)=0$ の解を d_1,d_2,d_3 とし，その実数解の中で一番小さいものを $d_1(t)$ としたとき，この不等式の解は $0<d<d_1(t)$ となる．$\lim_{t\to 0}d_1(t)=0$ となれば，$d\to 0$ である．これは，t が 0 に近づけば近づくほど $\tilde{q}_1$ と λ_1 が近づいていることを表しており $\tilde{q}_1$ が λ_1 を近似しているといえる．しかし，三次方程式の解は非常に複雑になるので直接調べるのは難しい．そこで d_1 より少し大きめの値 $c(t)$ を考え，$\lim_{t\to 0}c(t)=0$ を示す. この $c(t)$ を求めるために次のような方針をとる．

(ア)$H(d)$ より少し小さい関数 $G(d)$ を持ってくる．

(イ)$G(d)$ の変曲点を $a(t),b(t)$ $(a(t)<b(t))$ とし $a(t)$ より小さい値 $c(t)$ を考え，$G(c(t))>0$ かつ $\lim_{t\to 0}c(t)=0$ を示す．

まず (ア) について考えるために方程式の係数部分である $|\tilde{q}_1-\tilde{q}_2|+|\tilde{q}_1-\tilde{q}_3|, |\tilde{q}_1-\tilde{q}_2||\tilde{q}_1-\tilde{q}_3|, \dfrac{1}{4|t|^2}|g|$ の評価を考える．

三角不等式と $|s|<\dfrac{1}{10}, \beta \geq 1$ を用いると

$$
\begin{aligned}
|\tilde{q}_1-\tilde{q}_2|+|\tilde{q}_1-\tilde{q}_3| &= \frac{1}{4|t|}\left|3s-3-\sqrt{1+6s-\frac{8s}{\beta}-3s^2}\right|+\frac{1}{4|t|}\left|3s-3+\sqrt{1+6s-\frac{8s}{\beta}-3s^2}\right| \\
&< \frac{1}{4|t|}\left\{6|s|+6+2\sqrt{1+6|s|+\frac{8|s|}{\beta}+3|s|^2}\right\} \\
&< \frac{1}{4|t|}\left\{6\cdot\frac{1}{10}+6+2\sqrt{1+6\cdot\frac{1}{10}+8\cdot\frac{1}{10}+3\left(\frac{1}{10}\right)^2}\right\} \\
&< \frac{1}{4|t|}\left\{\frac{3}{5}+6+2\cdot\frac{8}{5}\right\} \\
&< \frac{5}{2|t|} \qquad (2.8) \\
|\tilde{q}_1-\tilde{q}_2||\tilde{q}_1-\tilde{q}_3| &= \frac{1}{16|t|^2}\left|(3s-3)^2-1-6s+\frac{8}{\beta}s+3s^2\right| \\
&= \frac{1}{4|t|^2}\left|3s^2-6s+\frac{2}{\beta}s+2\right| \\
&> \frac{1}{4|t|^2}\left(2-\frac{2}{\beta}|s|-6|s|-3|s|^2\right) \\
&> \frac{1}{4|t|^2}(2-8|s|-3|s|^2) \\
&> \frac{1}{4|t|^2}\left\{2-8\cdot\frac{1}{10}-3\left(\frac{1}{10}\right)^2\right\} \\
&> \frac{1}{4|t|^2} \qquad (2.9) \\
\frac{1}{4|t|^2}|g| &= \frac{1}{8}|\beta s^2-(3\beta-2)s| \\
&< \frac{1}{8}(\beta|s|^2+3\beta|s|+2|s|) \\
&< \frac{1}{8}\left\{\beta\left(\frac{1}{10}\right)^2+3\beta\cdot\frac{1}{10}+2\cdot\frac{1}{10}\right\} \\
&< \frac{1}{40}(2\beta+1) \qquad (2.10)
\end{aligned}
$$

とそれぞれ評価できる．(2.8),(2.9),(2.10) により $H(d)$ は

$$
H(d) > d^3-\frac{5}{2|t|}d^2+\frac{1}{4|t|^2}d-\frac{1}{40}(2\beta+1)
$$

となる．この右辺を $G(d)$ とおく．

次に (イ) について考える．

$$
G(d)' = 3d^2-\frac{5}{|t|}d+\frac{1}{4|t|^2}
$$

から，$G(d)'=0$ とすると

$$
d=\frac{5\pm\sqrt{22}}{6|t|}
$$

となる．この値を踏まえ $d = \beta|t|$ とすると

$$
\begin{aligned}
\frac{5-\sqrt{22}}{6|t|} - \beta|t| &= \frac{5-\sqrt{22}-6\beta|t|^2}{6|t|} \\
&> \frac{5-\sqrt{22}-3/50\beta}{6|t|} \\
&> \frac{5-\sqrt{22}-3/50}{6|t|} > 0
\end{aligned}
$$

より $\beta|t| < \dfrac{5-\sqrt{22}}{6|t|}$ である．明らかに $\lim_{t\to 0}\beta|t| = 0$ である．あとは $G(\beta|t|) > 0$ を示せばよい．

$$
\begin{aligned}
G(\beta|t|) &= \beta^3|t|^3 - \frac{5}{2}\beta^2|t| + \frac{\beta}{4|t|} - \frac{1}{40}(2\beta+1) \\
&= \frac{1}{4|t|}\left\{4\beta^3|t|^4 - 10\beta^2|t|^2 + \beta - \frac{1}{10}|t|(2\beta+1)\right\} \\
&> \frac{1}{4|t|}\left\{4\beta^3|t|^4 - 10\beta^2\left(\frac{1}{10\beta}\right)^2 + \beta - \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10\beta}(2\beta+1)\right\} \\
&> \frac{1}{4|t|}\left\{4\beta^3|t|^4 - \frac{1}{10} + \beta - \frac{1}{50} - \frac{1}{100\beta}\right\} \\
&> \frac{1}{4|t|}\left\{4\beta^3|t|^4 + \beta - \frac{13}{100}\right\}
\end{aligned}
$$

で $\beta \geq 1$ より $G(\beta|t|) > 0$ となる．以上のことから t が十分小さいとき $\tilde{q}_1$ が λ_1 を近似しているといえた．

参考文献

[1] 大山陽介，「初めて空を飛んだ数学者」，数学セミナー (2003 年 12 月号)，p54-58

[2] 大山陽介，「ポール・パンルヴェ」，数理科学 (2011 年 11 月号)，p78-83

[3] 大山陽介，「パンルヴェ方程式の大域解析」，生産と技術 (2013 年第 65 巻第 2 号)，p72-75

[4] 岡本和夫，「パンルヴェ方程式」序説 (上智大学講究録)，上智大学理工学部数学教室，1985

[5] 岡本和夫，「ポール・パンルヴェ」，学術の動向 (2003 年 12 月)，p66

[6] 木村俊房，「常微分方程式 II」，岩波書店 (1997 年)