

無限級数を用いた Painlevé 方程式の研究

三重大学大学院
教育学研究科教育科学専攻理数・生活系教育領域

齋藤 千依

2020 年 2 月 12 日

目次

1	基礎定理	3
1.1	整型関数	3
1.2	整型写像	4
1.3	解の存在について	5
1.4	解析接続	9
1.5	解の解析接続	11
1.6	パラメータと初期値に関する整型性	12
1.7	優級数法による解の存在定理の証明	12
2	Painlevé 方程式について	16
2.1	代数的微分方程式	16
2.2	動く分岐点を持たない方程式	17
2.3	Painlevé 方程式	20
3	$P_1^{(2,1)}$ の非 Painlevé 性の証明	22

序文

複素領域で定義された m 階の線形常微分方程式

$$y^{(m)} + p_1(x)y^{(m-1)} + \cdots + p_{m-1}(x)y^{(1)} + p_m(x)y = 0 \quad (*)$$

(ただし $p_1(x), \dots, p_m(x)$ は x の有理関数) に対し, この方程式の一次独立な解 $\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)$ を取ると, モノドロミー行列, およびストークス係数と呼ばれるものが定義できる. これらの量は, 一般に解 $y = {}^t(\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x))$ の特異点の周りでの挙動を表すものなので, $(*)$ に含まれるパラメータが十分多いとき, パラメータの一部 (これを t_1, \dots, t_n とする) を変化させても残りのパラメータ (これを a_1, \dots, a_k とする) をうまく変化させれば, モノドロミー行列, およびストークス係数がパラメータによらない (つまり t_1, \dots, t_n が変化しても, モノドロミー行列, およびストークス係数が変化しない) ことがある. このような場合, 「線形方程式 $(*)$ はモノドロミー保存変形を許す」という.

線形方程式のモノドロミー保存変形に関する研究は 1907 年の R.Fuchs の研究 [2] から始まる. そして, R.Fuchs と R.Garnier の研究 [2],[3] により, モノドロミー保存変形と Painlevé 方程式との関連が明らかになり, 三輪哲二氏の論文 [5] により, モノドロミー・データにある条件が付いた場合, モノドロミー保存変形から得られる方程式は Painlevé 性 (つまり特異点で, その位置が初期条件に依存するものは極しくないという性質) を持つことが示された. このようなことから, モノドロミー保存変形から得られる方程式は, いつでも Painlevé 性を持つと信じられてきた. しかし, 2014 年になって B.Dobrovin と A.Kapaev の論文 [1] により, 下村俊氏が [8] で研究した方程式 $P_1^{(2,1)}$:

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + 120 \left(\frac{dy}{dx} \right)^3 \frac{d^2 y}{dx^2} - 120x \frac{dy}{dx} \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{200}{3} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - \frac{40}{3} y \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{200}{9} x = 0$$

は Painlevé 性を持たないにも関わらず, 線形方程式のモノドロミー保存変形から得られることが示された.

この修士論文では, $P_1^{(2,1)}$ が Painlevé 性を持たないことを再確認する. 第 1 章では, 解の特異点を考察するのに必要な無限級数や正則性に関する定理等を記述している. 第 2 章では, Painlevé 性について紹介し, それを満たす Painlevé 方程式を求めるために Painlevé が使用した α -method とはどのようなものかについて述べている. 第 3 章では, $P_1^{(2,1)}$ が Painlevé 性を持たないことについて α -method を用いた証明を行う.

本研究を進めるに当たり, 指導教官の川向洋之教授からは多大な助言を受け賜りました. 厚く感謝を申し上げます.

1 基礎定理

本章では、解の特異点を考察するのに必要な無限級数や正則性に関する基礎的な定理等について述べている。

1.1 整型関数

《定義 1.1》複素平面 C の開集合 D で定義された f を考える。 D の点 a に対し、 D に含まれる円板 $|x-a| < r$ において収束するべき級数によって

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k \quad (1.1)$$

と表されるとき、 f は $x = a$ において複素解析的であるという。 f が D の各点で複素解析的であるとき、 f は D において整型または正則であるといわれる。

《定義 1.2》 n 個の変数 y_1, y_2, \dots, y_n のべき級数

$$\sum_{k_1, \dots, k_n \geq 0} c_{k_1 \dots k_n} (y_1 - b_1)^{k_1} \dots (y_n - b_n)^{k_n} \quad (1.2)$$

について絶対収束するような C^n の点 (y_1, y_2, \dots, y_n) の集合の内部 Δ を (1.2) の収束域という。 また、 $\Delta \neq \phi$ のとき、 (1.2) を収束べき級数、 $\Delta = \phi$ のとき、 (1.2) を発散べき級数という。

《定義 1.3》 収束べき級数 (1.2) に対して、 $|y_1 - b_1| < R_1, \dots, |y_n - b_n| < R_n$ においては絶対収束し、 $|y_1 - b_1| > R_1, \dots, |y_n - b_n| > R_n$ においては絶対収束しないような (R_1, \dots, R_n) を (1.2) の一組の関連収束半径という。 ここでは $0 < R_j \leq \infty$ である。 関連収束半径は一組とは限らず、 一般には無数組存在する。

【命題 1.1】 $0 < R_j < \infty$ ($j = 1, \dots, n$) のとき、 (R_1, \dots, R_n) が (1.2) の関連収束半径であるための必要かつ十分条件は

$$\lim_{k_1 + \dots + k_n \rightarrow \infty} \sup (|c_{k_1 \dots k_n}| R_1^{k_1} \dots R_n^{k_n})^{1/(k_1 + \dots + k_n)} = 1$$

が成り立つことである。

収束べき級数はその収束域において広義一様収束する。 したがって、

$$f(y_1, \dots, y_n) = \sum_{k_1, \dots, k_n \geq 0} c_{k_1 \dots k_n} (y_1 - b_1)^{k_1} \dots (y_n - b_n)^{k_n} \quad (1.3)$$

とおくと、 f は右辺の収束域 Δ において連続な複素数値関数である。

【命題 1.2】 f は Δ において各変数 y_j について偏微分可能であって、 偏導関数 $\frac{\partial f}{\partial y_j}$ は (1.2) を y_j について項別に微分して得られるべき級数によって

$$\frac{\partial f}{\partial y_j} = \sum_{k_1, \dots, k_n \geq 0} k_j c_{k_1 \dots k_n} (y_1 - b_1)^{k_1} \dots (y_j - b_j)^{k_j-1} \dots (y_n - b_n)^{k_n} \quad (1.4)$$

と表される。 (1.4) の右辺のべき級数の収束域を Δ_j とすると、 $\Delta_j \supset \Delta$ が成り立つ。

《定義 1.4》 C^n の開集合 D で定義された複素数値関数 f を考える. D の点 (b_1, \dots, b_n) に対して, D に含まれる多重円板 $|y_1 - b_1| < r_1, \dots, |y_n - b_n| < r_n$ がとれて, f はこの多重円板において絶対収束するべき級数 (1.2) によって (1.3) と表されるとき, f は (b_1, \dots, b_n) において複素解析的という. f が D の各点において複素解析的であるとき, f は D において整型であるという. (1.2) を f の点 (b_1, \dots, b_n) における Taylor 展開という.

【定理 1.1】 f が D で整型であるための必要十分な条件は, f が D において連続かつ各変数について偏微分可能なことである.

この定理において, f が D で連続であるという条件を取り去ることができることが知られている.

【定理 1.2】 f が D で整型であるための必要十分な条件は, f が各変数について偏微分可能なことである.

【定理 1.3】 D において整型な関数は何回でも偏微分可能であって, それらの偏導関数はすべて D において整型である.

《定義 1.5》 C^n の集合 E に対して, f が E を含むある開集合 D において整型であるとき, f は E において整型であるという. E が 1 点 (b_1, \dots, b_n) のみからなるときには, f は点 (b_1, \dots, b_n) において整型であるという.

1.2 整型写像

C^n の点 $(y_1, \dots, y_n), (b_1, \dots, b_n)$ などに対応する太文字 \mathbf{y}, \mathbf{b} などで表す. C^n の点 $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$, $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n)$ と複素数 λ に対して, 和 $\mathbf{y} + \mathbf{z}$ とスカラー倍 $\lambda \mathbf{y}$ を

$$\begin{aligned}\mathbf{y} + \mathbf{z} &= (y_1 + z_1, \dots, y_n + z_n), \\ \lambda \mathbf{y} &= (\lambda y_1, \dots, \lambda y_n)\end{aligned}$$

によって定義する. この演算によって, C^n は n 次元複素ベクトル空間になる. よって, C^n の元をベクトルということもある. C^n の点 $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ に対して, その長さ $|\mathbf{y}|$ を

$$|\mathbf{y}| = \max(|y_1|, \dots, |y_n|)$$

によって定義する.

【命題 1.3】 対応 $\mathbf{y} \mapsto |\mathbf{y}|$ は C^n から \mathbf{R} への写像であって, 次の性質をもつ.

- (1) $|\mathbf{y}| \geq 0$; $|\mathbf{y}| = 0 \iff \mathbf{y} = \mathbf{0}$ ($\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$),
- (2) $|\lambda \mathbf{y}| = |\lambda| |\mathbf{y}|$,
- (3) $|\mathbf{y} + \mathbf{z}| \leq |\mathbf{y}| + |\mathbf{z}|$.

すなわち, $|\cdot|$ は C^n の一つのノルムである.

集合 A から C^n への写像を与えることは, A から C への n 個の写像の列 $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ を与えることである. 写像 $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ も対応する太文字 $\boldsymbol{\varphi}$ で表す.

《定義 1.6》 C^m の領域 Δ から C^n への写像 $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$ は, f_1, \dots, f_n がすべて Δ で整型のとき, Δ において整型であるという.

f_1, \dots, f_n の点 $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_m)$ における Taylor 展開を

$$f_j(x_1, \dots, x_m) = \sum c_{k_1 \dots k_m}^j (x_1 - a_1)^{k_1} \dots (x_m - a_m)^{k_m} \quad (j = 1, \dots, n)$$

とする. 各 (k_1, \dots, k_m) に対して,

$$\mathbf{c}_{k_1, \dots, k_m} = (c_{k_1, \dots, k_m}^1, \dots, c_{k_1, \dots, k_m}^n) \in \mathbf{C}^n$$

とおくと,

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sum \mathbf{c}_{k_1 \dots k_m} (x_1 - a_1)^{k_1} \dots (x_m - a_m)^{k_m}$$

と表せる.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_j} &= \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_j}, \dots, \frac{\partial f_n}{\partial x_j} \right), \\ \int_L \mathbf{f}(x_1, \dots, x_m) dx_i &= \left(\int_L f_1(x_1, \dots, x_m) dx_i, \dots, \int_L f_n(x_1, \dots, x_m) dx_i \right) \end{aligned}$$

などの記法も使われる.

【命題 1.4】 不等式

$$\left| \int_L \mathbf{f}(x_1, \dots, x_m) dx_i \right| \leq \int_L |\mathbf{f}(x_1, \dots, x_m)| |dx_i|$$

が成り立つ.

【命題 1.5】 Δ は \mathbf{C}^m の領域, D は \mathbf{C}^n の領域で, $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ は Δ から \mathbf{C}^n への整型写像, $z = g(\mathbf{y})$ は D で整型な関数で, Δ の f による像 $\mathbf{f}(\Delta)$ が D に含まれていれば, \mathbf{f} と g との合成写像

$$(g \circ \mathbf{f})(\mathbf{x}) = g(f_1(\mathbf{x}), \dots, f_n(\mathbf{x}))$$

が Δ において定義されて Δ において整型である. また, 公式

$$\frac{\partial (g \circ \mathbf{f})}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial g}{\partial y_j} \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \quad (i = 1, \dots, m)$$

が成り立つ.

【定理 1.4】 \mathbf{C}^m の領域 $\Delta: |x_1 - a_1| < r_1, \dots, |x_m - a_m| < r_m$ から \mathbf{C}^n への整型写像 $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$ に対して, 偏導関数 $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ がすべて Δ において有界ならば, 正の定数 L がとれて, \mathbf{f} は Δ において

$$|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}')| \leq L |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \quad (\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \Delta) \quad (1.5)$$

を満たす.

1.3 解の存在について

微分方程式

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}) \quad (1.6)$$

を考える. ここで $x \in \mathbf{C}$, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbf{C}^n$ で, $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$ は \mathbf{C}^{n+1} の領域において整型とする.

【命題 1.6】 $y = \varphi(x)$ は $x = a$ で整型かつ初期条件

$$y(a) = b \quad (1.7)$$

を満たす (1.6) の解とする. $\varphi(x)$ が C の領域 D において整型 ($a \in D$ とする), 任意の $x \in D$ に対し f が $(x, \varphi(x))$ で整型ならば, $\varphi(x)$ は

$$\varphi(x) = b + \int_a^x f(\xi, \varphi(\xi)) d\xi \quad (x \in D) \quad (1.8)$$

を満たす. 逆に, (1.8) を満たす $\varphi(x)$ は D で整型で初期条件 (1.7) を満たす (1.6) の解である.

【定理 1.5】 f は C^{n+1} の領域

$$\mathcal{D} : |x - a| < r, \quad |y - b| < \rho$$

において整型かつ有界

$$|f(x, y)| \leq M$$

とする. そのとき, $x = a$ で整型かつ初期条件 (1.7) を満たす解はただ一つ存在して, $\varphi(x)$ は領域

$$D : |x - a| < s = \min\left(r, \frac{\rho}{M}\right)$$

において整型である.

証明 任意の $0 < r' < r, 0 < \rho' < \rho$ に対して,

$$D' : |x - a| < s' = \min\left(r', \frac{\rho'}{M}\right)$$

において整型で, (1.7) を満たす (1.6) の解が存在することを示す.

そのためには, D' において整型な関数 $\varphi(x)$ で, 不等式

$$|\varphi(x) - b| \leq \rho' \quad (1.9)$$

と (1.8) を満たす関数の存在をいえばよい. 偏導関数 $\frac{\partial f_j}{\partial y_k}$ はすべての \mathcal{D} において整型であるから, 領域

$$\mathcal{D}' : |x - a| < r', \quad |y - b| < \rho'$$

において有界である. したがって, 定理 1.4 により, f は \mathcal{D}' において

$$|f(x, y) - f(x, z)| \leq L'|y - z| \quad (1.10)$$

を満たす.

逐次近似法によって解の存在をいう. まず第 0 次近似関数 φ_0 を

$$\varphi_0(x) = b \quad (1.11)$$

とおき, 次に第 ν 次近似関数 φ_ν を

$$\varphi_\nu(x) = b + \int_a^x f(\xi, \varphi_{\nu-1}(\xi)) d\xi \quad (1.12)$$

によって定義する. 右辺の積分は a から x への線分に沿って行うことにする. 近似関数はすべて D' において整型で

$$|\varphi_\nu(x) - b| \leq \rho'$$

を満たすことを帰納法によって示す.

φ_0 については明らかである. $\varphi_{\nu-1}$ が満たしていると仮定する. このとき, $f(x, \varphi_{\nu-1}(x))$ は D' において定義され整型, したがって, φ_ν も D' において整型である. (1.12) より,

$$|\varphi_\nu(x) - \mathbf{b}| \leq \int_a^x |f(\xi, \varphi_{\nu-1}(\xi))| d\xi$$

$|f(x, \mathbf{y})| \leq M$ と $s' \leq \frac{\rho'}{M}$ から, D' において

$$|\varphi_\nu(x) - \mathbf{b}| \leq M|x - a| \leq \rho'$$

が得られる.

次に関数列 $\varphi_0, \varphi_1, \dots$ が D' において一様収束することを示す. $\nu \geq 1$ のとき,

$$\varphi_\nu(x) = \varphi_0 + (\varphi_1(x) - \varphi_0(x)) + \dots + (\varphi_\nu(x) - \varphi_{\nu-1}(x))$$

より, 級数

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} (\varphi_\nu(x) - \varphi_{\nu-1}(x)) \quad (1.13)$$

が D' において一様収束することを示せばよい. すべての $\nu \geq 1$ に対して,

$$|\varphi_\nu(x) - \varphi_{\nu-1}(x)| \leq ML'^{\nu-1} \frac{|x-a|^\nu}{\nu!} \quad (1.14)$$

が成り立つことを帰納法によって示す. $\nu = 1$ のとき, (1.11), (1.12) より

$$|\varphi_1(x) - \varphi_0| \leq \left| \int_a^x f(\xi, \mathbf{b}) d\xi \right| \leq M|x - a|$$

である. 次に,

$$|\varphi_{\nu-1}(x) - \varphi_{\nu-2}(x)| \leq ML'^{\nu-2} \frac{|x-a|^{\nu-1}}{(\nu-1)!} \quad (1.15)$$

と仮定して, (1.14) が成り立つことを示す. φ_ν の定義より

$$\varphi_\nu(x) - \varphi_{\nu-1}(x) = \int_a^x (f(\xi, \varphi_{\nu-1}(\xi)) - f(\xi, \varphi_{\nu-2}(\xi))) d\xi$$

よって

$$|\varphi_\nu(x) - \varphi_{\nu-1}(x)| \leq \int_a^x |f(\xi, \varphi_{\nu-1}(\xi)) - f(\xi, \varphi_{\nu-2}(\xi))| d\xi$$

これと (1.10) から,

$$|\varphi_\nu(x) - \varphi_{\nu-1}(x)| \leq L' \int_a^x |\varphi_{\nu-1}(\xi) - \varphi_{\nu-2}(\xi)| d\xi$$

が成り立つ. ここに (1.15) を代入すると

$$|\varphi_\nu(x) - \varphi_{\nu-1}(x)| \leq L' \int_a^x ML'^{\nu-2} \frac{|x-a|^{\nu-1}}{(\nu-1)!} d\xi$$

が成り立ち, 右辺を計算すると (1.14) が得られる.

級数

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} ML'^{\nu-1} \frac{|x-a|^\nu}{\nu!} = \frac{M}{L'} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(L'|x-a|)^\nu}{\nu!}$$

は D' において一様収束するから、級数 (1.13) も D' において一様収束する。よって、関数列 $\varphi_0, \varphi_1, \dots$ は D' において一様収束する。

$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots$ の極限関数を $\varphi(x)$ とすると、 $\varphi(x)$ は D' において整型で (1.9) を満たしている。 $\varphi_\nu(x)$ の定義

$$\varphi_\nu(x) = \mathbf{b} + \int_a^x \mathbf{f}(\xi, \varphi_{\nu-1}(\xi)) d\xi$$

において、 $\nu \rightarrow \infty$ とすれば、 $\{\varphi_\nu(x)\}$ の一様収束性から $\{\mathbf{f}(x, \varphi_\nu(x))\}$ の一様収束性がいえることから、

$$\varphi(x) = \mathbf{b} + \int_a^x \mathbf{f}(\xi, \varphi(\xi)) d\xi$$

が得られる。 $\varphi(x)$ が求める解である。

次に、 D' において整型で初期条件 (1.7) を満たす解がただ 1 つであることを示す。そのために、 D' において整型で (1.7) を満たす $\varphi(x), \psi(x)$ が、十分小さい $r_0 > 0$ に対して、 $|x - a| < r_0$ において

$$\varphi(x) = \psi(x)$$

が成り立つことを示せばよい。

r_0 を $0 < r_0 < s', L'r_0 < 1$ を満たすようにとり、

$$m = \sup\{|\varphi(x) - \psi(x)| \mid |x - a| < r_0\}$$

とおく。 $\varphi(x), \psi(x)$ は

$$\varphi(x) = \mathbf{b} + \int_a^x \mathbf{f}(\xi, \varphi(\xi)) d\xi, \quad \psi(x) = \mathbf{b} + \int_a^x \mathbf{f}(\xi, \psi(\xi)) d\xi$$

を満たすから、

$$\varphi(x) - \psi(x) = \int_a^x (\mathbf{f}(\xi, \varphi(\xi)) - \mathbf{f}(\xi, \psi(\xi))) d\xi$$

よって

$$|\varphi(x) - \psi(x)| \leq \int_a^x |\mathbf{f}(\xi, \varphi(\xi)) - \mathbf{f}(\xi, \psi(\xi))| d\xi$$

(1.10) から

$$|\varphi(x) - \psi(x)| \leq L' \int_a^x |\varphi(\xi) - \psi(\xi)| d\xi$$

$|\xi - a| < r_0$ において

$$|\varphi(\xi) - \psi(\xi)| \leq m$$

であるから、 $|x - a| < r_0$ において

$$|\varphi(x) - \psi(x)| \leq L'mr_0$$

よって

$$m \leq L'mr_0$$

が成り立つ。 $L'r_0 < 1$ から $m = 0$ となるので、 $|x - a| < r_0$ において $\varphi(x) = \psi(x)$ といえ、一意性が示せた。

$r' \rightarrow r, \rho' \rightarrow \rho$ のとき

$$s' = \min\left(r', \frac{\rho'}{M}\right) \longrightarrow s = \min\left(r, \frac{\rho}{M}\right)$$

であることに注意すれば、求める解は D で整型であることがわかる。

系 $f(x, \mathbf{y})$ は C^{n+1} の領域 \mathcal{E} において整型とする。そのとき任意の $(a, \mathbf{b}) \in \mathcal{E}$ に対し、 $x = a$ で整型で初期条件 (1.7) を満たす解がただ一つ存在する。

n 階微分方程式

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (1.16)$$

に対し、

$$y_1 = y, \quad y_2 = y', \quad \dots, \quad y_n = y^{(n-1)}$$

とおくと、(1.16) は微分方程式系

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ \dots \\ y_{n-1}' = y_n \\ y_n' = f(x, y_1, \dots, y_n) \end{cases}$$

に移る。この方程式に定理 1.5 の系を適用すると、次の定理が得られる。

【定理 1.6】 $f(x, y_1, \dots, y_n)$ は点 (a, b_1, \dots, b_n) において整型とする。そのとき、 $x = a$ で整型かつ初期条件

$$y(a) = b_1, \quad y'(a) = b_2, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(a) = b_n$$

を満たす (1.16) の解がただ一つ存在する。

n 階微分方程式 (1.16) が線形である場合、 $P_1(x), \dots, P_n(x)$ を有理関数として、次のような形に置くことができる。

$$\frac{d^n y}{dx^n} + P_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + P_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + P_n(x) y = 0 \quad (1.17)$$

《定義 1.7》すべての $P_j(x) (j = 1, \dots, n)$ が $x = a$ で正則であるとき、 $x = a$ は微分方程式 (1.17) の正則点であるという。

【命題 1.7】 $x = a$ が正則点であるならば、(1.17) は $x = a$ で正則な n 個の独立な解を持つ。

【定理 1.7】 微分方程式

$$\frac{dy_j}{dx} = \sum_{k=1}^n p_{jk}(x) y_k + q_j(x) \quad (j = 1, \dots, n) \quad (1.18)$$

を考える。 $p_{jk}(x)$, $q_j(x)$ はすべて $|x - a| < r$ において整型とする。そのとき、任意の $\mathbf{b} \in C^n$ に対して、 $x = a$ で整型かつ初期条件 (1.7) を満たす (1.18) の解はただ一つ存在して、 $|x - a| < r$ において整型である。

1.4 解析接続

【定理 1.8】 D, D_0 は C^n の領域で $D_0 \subset D$ とする。 $f, g : D \rightarrow C$ は D で整型で、 $f(\mathbf{y}) = g(\mathbf{y}) (\mathbf{y} \in D_0)$ が成り立つとする。そのとき、 f と g とは D で恒等的に等しい。

《定義 1.8》 D_1, D_2 は C^n の領域で $D_1 \cap D_2 \neq \phi$ とする. $f_1 : D_1 \rightarrow C$ は D_1 で整型, $f_2 : D_2 \rightarrow C$ は D_2 で整型とする. $f_1(\mathbf{y}) = f_2(\mathbf{y}) (\mathbf{y} \in D_1 \cap D_2)$ ならば,

$$f(\mathbf{y}) = \begin{cases} f_1(\mathbf{y}) & (\mathbf{y} \in D_1) \\ f_2(\mathbf{y}) & (\mathbf{y} \in D_2) \end{cases}$$

とおくと, f は $D = D_1 \cup D_2$ において整型である. f_1 と f_2 とは互いに他の解析接続, f は f_1 または f_2 の D への解析接続という.

一致の定理により, 解析接続は存在すれば, ただ一通りである.

C^n の領域で整型な関数をできるだけ広い領域に解析接続していくと, もうこれ以上解析接続できないような関数に到達する. このような関数をしばしば複素解析関数とよぶ. 複素解析関数は 1 価関数とはかぎらず, 多価関数となることがある.

1 変数のときと同様, 曲線に沿っての解析接続を定義できる.

《定義 1.9》 収束べき級数

$$f(\mathbf{y}) = \sum c_{k_1 \dots k_n} (y_1 - a_1)^{k_1} \dots (y_n - a_n)^{k_n}$$

の収束域を Δ とすると, $f(\mathbf{y})$ は Δ で整型である. Δ の点 $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$ における $f(\mathbf{y})$ の Taylor 展開を

$$g(\mathbf{y}) = \sum d_{k_1 \dots k_n} (y_1 - a_1)^{k_1} \dots (y_n - a_n)^{k_n}$$

とすれば, $g(\mathbf{y})$ は右辺の収束域で整型であって, $f(\mathbf{y})$ の解析接続である. このような $g(\mathbf{y})$ を $f(\mathbf{y})$ の直接接続という.

《定義 1.10》 点 \mathbf{a} と点 α を結ぶ曲線

$$C : \mathbf{y} = \mathbf{y}(t) \quad (0 \leq t \leq 1)$$

に対し, 次の条件が満たされるとき, $f(\mathbf{y})$ は C に沿って α まで解析接続されるという.

(1) 各 $t \in [0, 1]$ に点 $\mathbf{y}(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t))$ を中心とする収束べき級数

$$f_t(\mathbf{y}) = \sum c_{k_1 \dots k_n}(t) (y_1 - y_1(t))^{k_1} \dots (y_n - y_n(t))^{k_n}$$

が対応している.

(2) $f_0(\mathbf{y}) = f(\mathbf{y})$.

(3) 任意の $\tau \in [0, 1]$ に対して, 次のような $\varepsilon > 0$ がとれる: $t \in [0, 1] \cap [\tau - \varepsilon, \tau + \varepsilon]$ ならば, $\mathbf{y}(t)$ は f_τ の収束域 Δ_τ に属し, f_t は f_τ の直接接続である.

【定理 1.9】 Δ_0, Δ は C^l の領域で $\Delta_0 \subset \Delta$, $\psi_0 : \Delta_0 \rightarrow C^m$ は Δ_0 で整型, $\psi : \Delta \rightarrow C^m$ は Δ で整型で, かつ ψ は ψ_0 の Δ への解析接続であるとする. F は C^m の領域 D から C^n への整型写像で, $x \in \Delta$ ならば $\psi(x) \in D$ とする. そのとき

$$F(\psi_0(x)) = \mathbf{0} \quad (x \in \Delta_0)$$

が成り立てば,

$$F(\psi(x)) = \mathbf{0} \quad (x \in \Delta)$$

が成り立つ.

1.5 解の解析接続

【定理 1.10】 f は C^{n+1} の領域 \mathcal{D} で整型, $\varphi_0(x)$ は C の領域 D_0 における (1.6) の解とする. D は D_0 を含む領域で $\varphi: D \rightarrow C^n$ は φ_0 の D への解析接続で, $x \in D$ のとき, $(x, \varphi(x)) \in \mathcal{D}$ とする. そのとき, $\varphi(x)$ は D における (1.6) の解である.

定理 1.10 は, 解の解析接続は, それが f の整型である領域に止まる限り, 解であることを主張している. しかし, 解の解析接続は f の整型である領域に止まるとは限らない.

【定理 1.11】 p_{jk}, q_j はすべて領域 D で整型とする. D の任意の点 a で整型な線型微分方程式

$$\frac{dy_j}{dx} = \sum_{k=1}^n p_{jk}(x)y_k + q_j(x) \quad (j = 1, \dots, n) \quad (1.18)$$

解は a から出る D 内の任意の曲線に沿って解析接続可能である.

この定理を次のようにいうことができる: 線型微分方程式の解の特異点は係数の特異点のところに現れる. 領域 D が単連結であれば, すべての解は D で 1 価であるが, 単連結でなければ, 解は D において 1 価とは限らない.

【定理 1.12】 点 a に収束する曲線

$$C: x = x(t) \quad (0 \leq t < 1), \quad x(t) \rightarrow a \quad (t \rightarrow 1)$$

を考える. (1.6) の解 φ は曲線 C に沿って a の直前まで解析接続可能, かつ, C 上の点列 $\{x(t_\nu)\}_{\nu=1}^\infty$, $t_\nu \rightarrow 1$ ($\nu \rightarrow \infty$) で $\{\varphi(x(t_\nu))\}_{\nu=1}^\infty$ がある値 \mathbf{b} に収束するものが存在するとする. そのとき, f が (a, \mathbf{b}) で整型ならば, φ は C に沿って a まで解析接続可能である.

定理 1.5 によって, f が (a, \mathbf{b}) で整型ならば, $x = a$ で整型かつ初期条件 $\mathbf{y}(a) = \mathbf{b}$ を満たす解はただ一つである. 定理 1.12 は, a を境界点にもつ領域 D 内で整型な解 φ に対し, a に収束する D 内の曲線上の点列 $\{x_\nu\}$ ($x_\nu \rightarrow a$) に沿って $\varphi(x_\nu) \rightarrow \mathbf{b}$ となる解は $x = a$ で整型であることを主張している. したがって, 解は定理 1.5 でその存在を保障されている解と一致する. このことから, 定理 1.12 は拡張された意味の初期値問題の一意性を述べた定理ともみなされる.

(1.6) の解 φ は, $x = a$ で整型で初期条件 $\mathbf{y}(a) = \mathbf{b}$ を満たし, かつ, 点 a と a' を結ぶ滑らかな曲線

$$C: x = x(t) (0 \leq t \leq 1), \quad x(0) = a, \quad x(1) = a'$$

上において整型とする. そのとき,

$$\mathbf{z} = \psi = \varphi(x(t))$$

とおくと,

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{d\varphi}{dx} \frac{dx}{dt}$$

であるから, $\psi(t)$ は初期条件

$$\mathbf{z}(0) = \mathbf{b} \quad (1.19)$$

を満たす

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = x'(t) \mathbf{f}(x(t), \mathbf{z}) \quad (1.20)$$

の解である．次の定理はこの事実の逆が成り立つことを主張する．

【定理 1.13】 $z = \psi(t)$ は初期条件 (1.19) を満たす $[0, 1]$ における (1.20) の解で，任意の $t \in [0, 1]$ に対し， f は点 $(x(t), \psi(t))$ で整型とする．そのとき， C において整型で $y(a) = b$ を満たす (1.6) を満たす解 φ が存在して

$$\psi(t) = \varphi(x(t)) \quad (0 \leq t \leq 1). \quad (1.21)$$

1.6 パラメータと初期値に関する整型性

何個かのパラメータが微分方程式に含まれる場合がよくある．パラメータの個数を m とし $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ とおく． λ をパラメータとして含む微分方程式

$$y = f'(x, y, \lambda) \quad (1.22)$$

を考える． (x, y) は C^{n+1} の領域 \mathcal{D} を動き， λ は C^m の領域 Δ を動くものとし， $f: \mathcal{D} \times \Delta \rightarrow C^n$ は $\mathcal{D} \times \Delta$ において整型とする． $(a, b) \in \mathcal{D}$ とし， $x = a$ で整型で， λ に無関係な初期条件

$$y(a) = b \quad (1.23)$$

を満たす解が各 $\lambda \in \Delta$ に対して存在する．このような解は λ に関係するから，それを $\varphi(x, \lambda)$ と書く．このとき次が成り立つ．

【定理 1.14】 f は領域

$$\mathcal{D}: |x - a| < r, \quad |y - b| < \rho$$

と Δ との直積 $\mathcal{D} \times \Delta$ において整型かつ

$$|f(x, y, \lambda)| \leq M$$

とする．そのとき， $x = a$ で整型で初期条件 (1.23) を満たす解 $\varphi(x, \lambda)$ は C の領域

$$D: |x - a| < s = \min\left(r, \frac{\rho}{M}\right)$$

と Δ との直積 $D \times \Delta$ において整型である．

1.7 優級数法による解の存在定理の証明

《定義 1.11》 2つのベキ級数

$$\sum c_{k_1 \dots k_m} (x_1 - a_1)^{k_1} \dots (x_m - a_m)^{k_m}, \quad (1.24)$$

$$\sum C_{k_1 \dots k_m} (x_1 - a_1)^{k_1} \dots (x_m - a_m)^{k_m} \quad (1.25)$$

に対し

$$|c_{k_1 \dots k_m}| \leq C_{k_1 \dots k_m} \quad (k_1, \dots, k_m = 0, 1, \dots)$$

が成り立つとき，(1.25) は (1.24) の優級数という．(1.25) が $|x_1 - a_1| < r_1, \dots, |x_m - a_m| < r_m$ において絶対収束すれば，(1.24) も $|x_1 - a_1| < r_1, \dots, |x_m - a_m| < r_m$ において絶対収束する．

【命題 1.8】 関数 $f(x_1, \dots, x_m)$ は領域 $|x_1 - a_1| < r_1, \dots, |x_m - a_m| < r_m$ において整型かつ有界：
 $|f(x_1, \dots, x_m)| \leq M$ とする． f の (a_1, \dots, a_m) における Taylor 展開を

$$f(x_1, \dots, x_m) = \sum c_{k_1 \dots k_m} (x_1 - a_1)^{k_1} \dots (x_m - a_m)^{k_m}$$

とすれば、係数の評価式

$$|c_{k_1 \dots k_m}| \leq \frac{M}{r_1^{k_1} \dots r_m^{k_m}} \quad (k_1, \dots, k_m = 0, 1, \dots)$$

が成り立つ．

【定理 1.15】 微分方程式

$$y'_j = f_j(x, y_1, \dots, y_n) \quad (j = 1, \dots, n) \quad (1.26)$$

の右辺はすべて

$$|x - a| < r, \quad |y_j - b_j| < \rho \quad (j = 1, \dots, n)$$

において整型かつ有界 $|f_j(x, y_1, \dots, y_n)| \leq M$ とする． そのとき、 $x = a$ で整型かつ初期条件

$$y_j(a) = b_j \quad (j = 1, \dots, n)$$

を満たす解が

$$|x - a| < r \left(1 - \exp \frac{-\rho}{(n+1)Mr} \right)$$

において存在し、ただ 1 つである．

証明 $x - a, y_j - b_j$ を新しい変数としてとればよいので、 $a = 0, b_j = 0$ と仮定しても一般性は失われない．
 f_j の $x = y_1 = \dots = y_n = 0$ における Taylor 展開を

$$f_j(x, y_1, \dots, y_n) = \sum_{k, l_1, \dots, l_n} c_{k l_1 \dots l_n}^j x^k y_1^{l_1} \dots y_n^{l_n} \quad (1.27)$$

とする． 仮定から

$$|c_{l_1 \dots l_n}| \leq \frac{M}{r^k \rho^{l_1 + \dots + l_n}} \quad (k, l_1, \dots, l_n = 0, 1, \dots) \quad (1.28)$$

を満たす．

求める解が存在したとすれば、 $x = 0$ で整型で、初期条件より $x = 0$ のとき $y_j = 0$ となるので、 $x = 0$ で
 の Taylor 展開は、

$$y_j = \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_{\nu}^j x^{\nu} \quad (j = 1, \dots, n) \quad (1.29)$$

と表せる． これを (1.26) へ代入すると

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu \alpha_{\nu}^j x^{\nu-1} = \sum_{k, l_1, \dots, l_n} c_{k l_1 \dots l_n}^j x^k \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_{\nu}^1 x^{\nu} \right)^{l_1} \dots \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_{\nu}^n x^{\nu} \right)^{l_n} \quad (1.30)$$

が成り立つ．

定理の証明には、形式解が一意的に存在することと形式解が収束することを示せばよい．

まず、(1.30) を満たすべき級数 (1.29) が一意的に存在することを証明する．

(1.30) の両辺の定数項を比較すると

$$\alpha_1^j = c_{00\dots 0}^j \quad (j = 1, \dots, n) \quad (1.31)$$

が得られる.

次に, (1.30) の右辺を x のべき級数に整理したときの x^{N-1} の係数 p_N^j を求める. そのために (1.30) の項

$$c_{kl_1\dots l_n}^j x^k \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_{\nu}^1 x^{\nu} \right)^{l_1} \cdots \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_{\nu}^n x^{\nu} \right)^{l_n} \quad (1.32)$$

を考察する. (1.32) を x のべき級数に整理すると $k + l_1 + l_2 + \cdots + l_n$ 次の項から始まる. したがって x^{N-1} の項を含むためには $k + l_1 + l_2 + \cdots + l_n < N$ でなければならない. また, $\alpha_N^1 x^N, \alpha_{N+1}^1 x^{N+1}, \dots$ のような N 次以上の項は p_N^j に無関係である. したがって p_N^j は $\alpha_1^1, \alpha_2^1, \dots, \alpha_{N-1}^1, \dots, \alpha_1^n, \dots, \alpha_{N-1}^n$ および $c_{kl_1\dots l_n}^j$ ($k + l_1 + l_2 + \cdots + l_n < N$) のみから決まる. したがって,

$$p_N^j = P_N(\alpha_{\nu}^i, c_{kl_1\dots l_n}^j) \quad (j = 1, \dots, n)$$

とおける. P_N は α_{ν}^i ($1 \leq i \leq n, \nu < N$), $c_{kl_1\dots l_n}^j$ ($k + l_1 + \cdots + l_n < N$) の多項式であり, その係数は正の整数である.

(1.30) の左辺の x^{N-1} の係数は $N\alpha_N^j$ であるから,

$$N\alpha_N^j = P_N(\alpha_{\nu}^i, c_{kl_1\dots l_n}^j) \quad (1.33)$$

が得られる. (1.31) と (1.33) から, α_{ν}^j は ν に関する帰納法で順次一意的に決まる.

次に, 形式解が収束することを証明する.

微分方程式

$$y_j' = \sum_{k, l_1, \dots, l_n} C_{kl_1\dots l_n}^j x^k y_1^{l_1} \cdots y_n^{l_n} \quad (j = 1, \dots, n) \quad (1.34)$$

を考える. (1.34) の右辺のべき級数は, 収束級数であるかに関係なく形式解

$$y_j = \sum_{\nu=1}^{\infty} A_{\nu}^j x^{\nu} \quad (j = 1, \dots, n) \quad (1.35)$$

を持つ. 先と同様にして, 係数 A_{ν}^j は

$$\begin{aligned} A_1^j &= C_{00\dots 0}^j \\ NA_N^j &= P(A_{\nu}^i, C_{kl_1\dots l_n}^j) \end{aligned}$$

から定まる. (1.34) の右辺の級数が (1.27) の右辺の優級数, つまり

$$|c_{kl_1\dots l_n}^j| \leq C_{kl_1\dots l_n}^j \quad (k, l_1, \dots, l_n = 0, 1, \dots; j = 1, \dots, n) \quad (1.36)$$

と仮定する. このとき, 級数 (1.35) は (1.29) の優級数であることを帰納法を用いて証明する.

まず,

$$|\alpha_1^j| = |c_{00\dots 0}^j| \leq C_{00\dots 0}^j = A_1^j \quad (1.37)$$

である. 次に

$$|\alpha_{\nu}^j| \leq A_{\nu}^j \quad (\nu = 1, \dots, N-1; j = 1, \dots, n) \quad (1.38)$$

が成り立つとき,

$$|\alpha_N^j| \leq A_N^j \quad (j = 1, \dots, n)$$

が成り立つことを示す. このとき, (1.33), (1.36), (1.38) および P_N の係数が正の整数であることより

$$\begin{aligned} |\alpha_N^j| &= N^{-1} |P_N(\alpha_\nu^i, c_{kl_1 \dots l_n}^j)| \\ &\leq N^{-1} P_N(|\alpha_\nu^i|, |c_{kl_1 \dots l_n}^j|) \\ &\leq N^{-1} P_N(A_\nu^i, C_{kl_1 \dots l_n}^j) \\ &= A_N^j \quad (j = 1, \dots, n) \end{aligned}$$

となる. よって帰納法により,

$$|\alpha_\nu^j| \leq A_\nu^j \quad (\nu = 1, 2, \dots; j = 1, \dots, n)$$

が示された. これは級数 (1.35) は (1.29) の優級数であることを表している.

不等式 (1.28) によって級数

$$\sum \frac{M}{r^k \rho^{l_1 + \dots + l_n}} x^k y_1^{l_1} \dots y_n^{l_n} \quad (1.39)$$

は (1.27) の優級数である. 級数 (1.39) の和は

$$\frac{M}{(1 - \frac{x}{r})(1 - \frac{y_1}{\rho}) \dots (1 - \frac{y_n}{\rho})}$$

である. したがって, 微分方程式

$$\frac{dy_j}{dx} = \frac{M}{(1 - \frac{x}{r})(1 - \frac{y_1}{\rho}) \dots (1 - \frac{y_n}{\rho})} \quad (j = 1, \dots, n) \quad (1.40)$$

の解で領域

$$|x| < r \left(1 - \exp \frac{-\rho}{(n+1)Mr} \right) \quad (1.41)$$

で正則かつ初期条件 $y_j(0) = 0$ を満たすものの存在を示せばよい.

方程式 (1.40) および初期条件は y_j について対称であることから $Y(0) = 0$ を満たす

$$\frac{dY}{dx} = \frac{M}{(1 - x/r)(1 - Y/\rho)^n}$$

の解を $Y = \phi(x)$ とすれば,

$$y_j = \phi(x) \quad (j = 1, \dots, n)$$

は方程式 (1.40) の解である. この微分方程式は変数分離型であるから

$$\int^Y \left(1 - \frac{Y}{\rho} \right)^n dY = \int^x \frac{M}{1 - x/r} dx + C \quad (C \text{ は任意定数})$$

となる. 初期条件 $Y(0) = 0$ から解を求めると

$$\phi(x) = \rho \left\{ 1 - \sqrt[n+1]{1 + \frac{(n+1)Mr}{\rho} \log \left(1 - \frac{x}{r} \right)} \right\}$$

となる. この解の特異点は \log の中を 0 にする点と根号の中を 0 にする点である. 実際に求めてみると

$$x = r, r \left(1 - \exp \frac{-\rho}{(n+1)Mr} \right)$$

である. よって $\phi(x)$ は領域 (1.41) で正則な解となっている. 以上より形式解の収束性がいえた.

2 Painlevé 方程式について

この章では、動く分岐点を持たない「Painlevé 性」について紹介し、それを満たす Painlevé 方程式と求めるために Painlevé が使用した「 α -method」とはどのようなものかについて述べている。

2.1 代数的微分方程式

《定義 2.1》 x の解析関数を係数とする、 y_0, y_1, \dots, y_n の多項式 $F(x, y_0, \dots, y_n)$ に対して、常微分方程式

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0 \quad (2.1)$$

を代数的微分方程式、代数的方程式という。

一般に、線形方程式でない代数的微分方程式の解を調べることは難しい。関数論の教科書に現れる次の代数的微分方程式

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 4y^3 + g_2y + g_3 = 0 \quad (g_2, g_3 \text{ は複素定数}) \quad (2.2)$$

(つまり、ワイエルストラスの $\wp(x)$ が満たす方程式) の場合、解は比較的によく調べられているから、これは数少ない例外の 1 つといってよいだろう。

《定義 2.2》代数的微分方程式 (2.1) の解で、初期条件

$$\begin{aligned} y(x_0) &= \dot{y}_0, \quad \frac{d^j y}{dx^j}(x_0) = \dot{y}_j \quad (j = 1, \dots, n) \\ F(x_0, \dot{y}_0, \dots, \dot{y}_n) &= 0 \end{aligned}$$

を満足し、 $x = x_0$ のある近傍で正則なものを

$$y = \varphi(x; x_0, \dot{y}_0, \dots, \dot{y}_n) \quad (2.3)$$

とかく。これを可能なかぎり広義解析接続して得られる解析関数も同じ記号で表すと約束する。(2.3) の特異点 ω で初期条件 $\dot{y}_0, \dots, \dot{y}_n$ に依存するものを動く特異点という。また、特異点の性質に従って動く極、動く分岐点、動く真性特異点などという。

例 1 階代数的微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = y^{1+k} \quad (k \neq 0) \quad (2.4)$$

を解くと、

$$y = k^{-\frac{1}{k}}(c - x)^{-\frac{1}{k}}$$

という解が得られる (c は積分定数)。解の特異点の位置は $x = c$ となり、初期条件に依存しているので、動く特異点を持つといえる。

また、 $k = 1$ のとき動く極となり、それ以外のときは動く分岐点である。このような特異点を代数特異点という。

実はこの性質は (2.4) のときに限らず、一般の 1 階の代数的微分方程式においていえることである。つまり次がいえる。

【定理 2.1】 1 階の代数的微分方程式の動く特異点は、代数特異点である。

なお、この性質は 2 階以上の方程式では成立しないことが知られている。

動く特異点でないような特異点 ω が、 $x = \xi (\xi \in \mathbf{C})$ 上に存在するとき、 $x = \xi$ を動かない特異点という。命題 1.7 の対偶をとることで以下の命題を得ることができる。

【命題 2.1】 代数的微分方程式 (2.1) が線形ならば、その解の特異点は動かない特異点にかぎる。

2.2 動く分岐点を持たない方程式

1 階正規型代数的微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)} \quad (2.5)$$

で、 P, Q は、 x の解析関数を係数とする y の多項式とする。

【命題 2.2】 (2.5) が動く分岐点をもたないならば、これはリッカチの微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = a(x)y^2 + b(x)y + c(x) \quad (2.6)$$

に帰着される。

証明 $Q(x, y)$ が y を含んでいると仮定すると、 $Q(x_0, y_0) = 0, P(x_0, y_0) \neq 0$ を満たすような (x_0, y_0) が存在する。そこで、 x と y とを交換した方程式

$$\frac{dx}{dy} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)} \quad (2.7)$$

の初期条件

$$x(y_0) = x_0$$

をみたす解 $x = \psi(y)$ を考えよう。この解は、定理 1.5 の系より $y = y_0$ で正則であるから、

$$\psi(y) = x_0 + \alpha(y - y_0)^{m+1} + \cdots \quad (m \geq 1)$$

と展開できる。これを逆に解くと、

$$\varphi(x) = y_0 + \alpha'(x - x_0)^{\frac{1}{m+1}} + \cdots$$

という形で表される。これは (2.7) が動く分岐点を持つことを意味し、仮定と矛盾するので $Q(x, y)$ は y を含まないことがいえた。

したがって、(2.5) は

$$\frac{dy}{dx} = P(x, y)$$

と表すことができる。ここで $y = \frac{1}{u}$ とおくと、方程式は

$$\frac{du}{dx} = -u^2 P\left(x, \frac{1}{u}\right)$$

となる。もしこの右辺が分母をもつと動く分岐点があられるから、 P は y について高々 2 次である。したがって、(2.6) が得られる。

注意 2.2.1

$$\eta = \xi^m + a_1 \xi^{m+1} + a_2 \xi^{m+2} + \dots \quad (2.8)$$

の右辺が $|\xi| < \rho$ において収束するとき、この式を ξ について解くことができ、その形は

$$\xi = \eta^{\frac{1}{m}} + b_1 \eta^{\frac{2}{m}} + b_2 \eta^{\frac{3}{m}} + \dots \quad (2.9)$$

となる。以下でこれを確かめる。

$\eta = \zeta^m$ とおくと、(2.8) は

$$\begin{aligned} \zeta^m &= \xi^m + a_1 \xi^{m+1} + a_2 \xi^{m+2} + \dots \\ \zeta &= \xi \sqrt[m]{1 + a_1 \zeta + a_2 \zeta^2 + \dots} \end{aligned}$$

と表され、これは

$$\zeta = \xi (1 + \alpha_1 \xi + \alpha_2 \xi^2 + \dots) \quad (2.10)$$

のように収束するべき級数の形に置くことができる。これを ξ について解くと

$$\xi = \zeta + \beta_1 \zeta^2 + \beta_2 \zeta^3 + \dots \quad (2.11)$$

のように表せると仮定する。これを (2.10) に代入した

$$\zeta = (\zeta + \beta_1 \zeta^2 + \dots) + \alpha_1 (\zeta + \beta_1 \zeta^2 + \dots)^2 + \alpha_2 (\zeta + \beta_1 \zeta^2 + \dots)^3 + \dots \quad (2.12)$$

を ζ で整理し、両辺の係数を比較すると、

$$\begin{aligned} 0 &= \beta_1 + \alpha_1, \\ 0 &= \beta_2 + 2\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2, \\ 0 &= \beta_3 + \alpha_1 (2\beta_2 + \beta_1^2) + 3\alpha_2 \beta_1 + \alpha_3, \quad \dots \end{aligned}$$

となり、順次に

$$\begin{aligned} \beta_1 &= -\alpha_1, \\ \beta_2 &= 2\alpha_1^2 - \alpha_2, \\ \beta_3 &= -\alpha_1 \{2(2\alpha_1^2 - \alpha_2) + \alpha_1^2\} - 3\alpha_2(-\alpha_1) - \alpha_3 \\ &= -5\alpha_1^3 + 5\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3, \quad \dots \end{aligned}$$

のように (2.11) の係数が決定される。

次に、(2.11) が収束することを証明する。(2.10) は $|\xi| = r < \rho$ において収束するので、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n \xi^{n+1} = 0$ であるから、ある定数 M が存在し、すべての自然数 n について

$$\begin{aligned} |\alpha_n r^{n+1}| &< M \\ |\alpha_n| &< \frac{M}{r^{n+1}} \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで、(2.10) の係数 α_n を $-\frac{M}{r^{n+1}}$ に置き換えた関数

$$\zeta = \xi - \frac{M}{r^2} \xi^2 - \frac{M}{r^3} \xi^3 + \dots \quad (2.13)$$

について考える。これを ξ について解いた

$$\xi = \zeta + \beta'_1 \zeta^2 + \beta'_2 \zeta^3 + \dots \quad (2.14)$$

の係数 β'_n は先と同様にして

$$\begin{aligned}\beta'_1 &= \frac{M}{r^2}, \\ \beta'_2 &= 2 \left(\frac{M}{r^2} \right)^2 + \frac{M}{r^3}, \\ \beta'_3 &= 5 \left(\frac{M}{r^2} \right)^3 + 5 \left(\frac{M}{r^2} \right) \left(\frac{M}{r^3} \right) + \frac{M}{r^4}, \quad \dots\end{aligned}$$

のように決められる。これより、

$$\begin{aligned}|\beta_1| &\leq |\alpha_1| < \beta'_1 \\ |\beta_2| &\leq 2|\alpha_1|^2 + |\alpha_2| < \beta'_2 \\ |\beta_3| &\leq 5|\alpha_1|^3 + 5|\alpha_1||\alpha_2| + |\alpha_3| < \beta'_3, \quad \dots\end{aligned}$$

という関係が成り立つので、(2.14) は (2.11) の優級数といえる。よって (2.14) が収束することを示せばよい。
そこで、(2.13) を考える。

$$\begin{aligned}\zeta &= \xi - \frac{M}{r^2}\xi^2 - \frac{M}{r^3}\xi^3 + \dots \\ &= \xi - \frac{M}{r^2}\xi^2 \left(\frac{1}{1 - \frac{\xi}{r}} \right) \\ &= \frac{\xi(r^2 - r\xi - M\xi)}{r(r - \xi)}\end{aligned}$$

これを変形することで

$$(M + r)\xi^2 - (r^2 + r\zeta)\xi + r^2\zeta = 0$$

という ξ についての 2 次方程式が得られる。これを解くと、

$$\xi = \frac{(r^2 + r\zeta) \pm \sqrt{(r^2 + r\zeta)^2 - 4(M + r)r^2\zeta}}{2(M + r)}$$

が得られる。ただし、 $\zeta = 0$ の場合により、

$$\xi = \frac{(r^2 + r\zeta) - \sqrt{(r^2 + r\zeta)^2 - 4(M + r)r^2\zeta}}{2(M + r)}$$

が選択できる。 $\zeta = 0$ で微分可能なので (2.14) のように展開でき、(2.14) は収束円内において収束するといえる。よって (2.11) の収束性が示せた。また $\zeta = \eta^{\frac{1}{m}}$ により、(2.11) から (2.9) が導けた。

以上を踏まえて次の命題にまとめる。

【命題 2.3】 代数的微分方程式

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \quad (2.15)$$

が動く分岐点を持たないとすると次のいずれかに帰着する。

- (イ) リッカチの方程式 (2.6)
- (ロ) 楕円関数の方程式 (2.2)
- (ハ) 代数的に求積できる。

2.3 Painlevé 方程式

2 階の代数的微分方程式

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = R\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right), \quad (2.16)$$

について考える.

(2.16) の解の特異点が極しかないとき, Painlevé 性を持つといい, 次のことが知られている.

【定理 2.2】 (Painlevé, Gambier)

(2.16) が Painlevé 性を持つならば, 次のいずれかに帰着される.

- (イ) 線形方程式
- (ロ) 楕円関数の方程式
- (ハ) 求積できる
- (ニ) 以下で与えられる 6 つの方程式

$$\begin{aligned} \text{P}_I \quad & \frac{d^2 y}{dx^2} = 6y^2 + x \\ \text{P}_{II} \quad & \frac{d^2 y}{dx^2} = 2y^3 + xy + \alpha \\ \text{P}_{III} \quad & \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{y} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \frac{1}{x} (\alpha y^2 + \beta) + \gamma y^3 + \frac{\delta}{y} \\ \text{P}_{IV} \quad & \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{2y} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + \frac{3}{2} y^3 + 4xy^2 + 2(x^2 - \alpha)y + \frac{\beta}{y} \\ \text{P}_V \quad & \frac{d^2 y}{dx^2} = \left(\frac{1}{2y} + \frac{1}{y-1} \right) \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \frac{(y-1)^2}{x^2} \left(\alpha y + \frac{\beta}{y} \right) + \gamma \frac{y}{x} + \delta \frac{y(y+1)}{y-1} \\ \text{P}_{VI} \quad & \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y-1} + \frac{1}{y-x} \right) \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y-x} \right) \frac{dy}{dx} \\ & \quad + \frac{y(y-1)(y-x)}{x^2(x-1)^2} \left\{ \alpha + \beta \frac{x}{y^2} + \gamma \frac{x-1}{(y-1)^2} + \delta \frac{x(x-1)}{(y-x)^2} \right\} \end{aligned}$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ は複素定数である.

《定義 2.3》 上の 6 つの方程式を Painlevé 方程式という.

P.Painlevé が Painlevé 方程式を導くときに用いた「 α -method」は次のようなものである.

【定理 2.3】 $F(x, y, z; \alpha), G(x, y, z; \alpha)$ は, x の解析関数を係数とする y, z の有理関数で, α については $\alpha = 0$ で正則であるとする. 十分小さい $\varepsilon > 0$ に対して, $0 < |\alpha| < \varepsilon$ ならば, 微分方程式系

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y, z; \alpha), \quad \frac{dz}{dx} = G(x, y, z; \alpha) \quad (2.17)$$

は動く分岐点を持たないものとする. このとき

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y, z; 0), \quad \frac{dz}{dx} = G(x, y, z; 0) \quad (2.18)$$

も動く分岐点を持たない. さらに (2.17) の解 $(y(x; \alpha), z(x; \alpha))$ が x についてある領域で 1 価ならば, これを α のべき級数に展開したとき, その係数もまた, $(y(x; 0), z(x; 0))$ が正則である限り, その領域で 1 価となる.

証明 F, G が $(x_0, y_0, z_0; 0)$ の近傍で正則であるとし,

$$y(x_0) = y_0, \quad z(x_0) = z_0$$

を満たす (2.17) の解を $(y(x; \alpha), z(x; \alpha))$, 同じ初期条件で決まる (2.18) の解を $(Y(x), Z(x))$ とする. 解 $(y(x; \alpha), z(x; \alpha))$ は, パラメータに関する正則性についての定理から

$$\begin{aligned} y(x; \alpha) &= y(x; 0) + y_1(x)\alpha + \cdots \\ &= Y(x) + y_1(x)\alpha + \cdots \\ z(x; \alpha) &= z(x; 0) + z_1(x)\alpha + \cdots \\ &= Z(x) + z_1(x)\alpha + \cdots \end{aligned}$$

のように, α についてべき級数に展開できる. また, x_0 から出て x_0 へ戻る閉曲線 γ を, $(Y(x), Z(x))$ は γ に沿って狭義解析接続可能, F, G は $x \in \gamma$ ならば $(x, Y(x), Z(x); 0)$ で正則となるようにとる. このとき, 任意の γ に沿って解析接続すると,

$$(y^\gamma(x; \alpha), z^\gamma(x; \alpha)) = (y(x; \alpha), z(x; \alpha))$$

となる. ここで $(y^\gamma(x; \alpha), z^\gamma(x; \alpha))$ とは, $(y(x; \alpha), z(x; \alpha))$ を γ に沿って解析接続して得られる分枝である.

$$\begin{aligned} y^\gamma(x; \alpha) &= Y^\gamma(x) + y_1^\gamma(x)\alpha + \cdots \\ z^\gamma(x; \alpha) &= Z^\gamma(x) + z_1^\gamma(x)\alpha + \cdots \end{aligned}$$

としたとき, 任意の γ について

$$\begin{aligned} (Y^\gamma(x), Z^\gamma(x)) &= (Y(x), Z(x)), \\ (y_1^\gamma(x), z_1^\gamma(x)) &= (y_1(x), z_1(x)), \quad \cdots \end{aligned}$$

が成り立つ. 以上で示せた.

以上の証明を 4 次に置き換えることで, 定理 2.3 を拡張して 4 次の常微分方程式に適用できることがいえる.

3 $P_1^{(2,1)}$ の非 Painlevé 性の証明

モノドロミー保存変形から得られる方程式は、Painlevé 性を持つと信じられてきた。しかし、B.Dobrovin と A.Kapaev の論文により反例が見つかった。下村俊氏が研究した方程式

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + 120 \left(\frac{dy}{dx} \right)^3 \frac{d^2 y}{dx^2} - 120x \frac{dy}{dx} \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{200}{3} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - \frac{40}{3} y \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{200}{9} x = 0 \quad (P_1^{(2,1)})$$

の一般解は

$$y(x) = a_0 - (x - b)^{\frac{1}{3}} + \mathcal{O}\left((x - b)^{\frac{5}{3}}\right)$$

という形をしており動く分岐点を持つのだが、B.Dobrovin と A.Kapaev はこの方程式 $P_1^{(2,1)}$ は Painlevé 性を持たないにも関わらず、線形方程式のモノドロミー保存変形から得られることを示した。

ここでは、 $P_1^{(2,1)}$ が Painlevé 性を満たさないという事実を α -method を用いて再確認する。まず次の補題から始める。

【補題 3.1】 定数 C_1, C_2 に対し、微分方程式

$$\left(\frac{dz}{dt} \right)^2 = -12z^5 + 2C_1 z + 2C_2 \quad (3.1)$$

は Painlevé 性を持たない。

証明 $z = \alpha^{-2}u, t = \alpha^3 s$ とおくと、(3.1) は次のようになる。

$$\left(\frac{dz}{dt} \right)^2 = -12u^5 + 2C_1 \alpha^8 u + 2C_2 \alpha^{10}$$

ここで $\alpha \rightarrow 0$ とすると

$$\left(\frac{dz}{dt} \right)^2 = -12u^5 \quad (3.2)$$

が得られるが、この方程式の一般解は γ を任意定数とすると、

$$u = \sqrt[3]{\frac{4}{9(2\sqrt{-3}s + \gamma)^2}}$$

であるから (3.2) は動く分岐点を持ち、Painlevé 性を持たない。故に定理 2.3 より、(3.1) も Painlevé 性を持たないことが示せた。

$P_1^{(2,1)}$ の非 Painlevé 性の証明 $y = \alpha\varphi, x = \alpha^3 t$ とおくと、 $P_1^{(2,1)}$ は

$$\frac{d^4 \varphi}{dt^4} + 120 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^3 \frac{d^2 \varphi}{dt^2} - 120\alpha^7 t \frac{d\varphi}{dt} \frac{d^2 \varphi}{dt^2} - \frac{200}{3} \alpha^7 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 - \frac{40}{3} \alpha^7 \varphi \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \frac{200}{9} \alpha^{14} t = 0 \quad (3.3)$$

となる。ここで $\alpha \rightarrow 0$ とすると

$$\frac{d^4 \varphi}{dt^4} + 120 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^3 \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = 0 \quad (3.4)$$

が得られる。この方程式が Painlevé 性を持たないことを示せばよい。

$z = \frac{d\varphi}{dt}$ とおくと (3.4) は

$$\frac{d^3 z}{dt^3} = -120z^3 \frac{dz}{dt}. \quad (3.5)$$

さらに $w = \frac{dz}{dt}$ とおくと

$$\begin{aligned} \frac{d^2 z}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{dz}{dt} \right) = \frac{dz}{dt} \frac{d}{dz} \left(\frac{dz}{dt} \right) = w \frac{dw}{dz}, \\ \frac{d^3 z}{dt^3} &= \frac{d}{dt} \left(w \frac{dw}{dz} \right) = \frac{dz}{dt} \frac{d}{dz} \left(w \frac{dw}{dz} \right) = w \left\{ \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 + w \frac{d^2 w}{dz^2} \right\} \end{aligned}$$

より, (3.5) は

$$w \left\{ \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 + w \frac{d^2 w}{dz^2} \right\} = -120z^3 w$$

となる. 故に $w = 0$ または $\left(\frac{dw}{dz} \right)^2 + w \frac{d^2 w}{dz^2} = -120z^3$ が得られる. 後者の両辺を z で積分すると

$$w \frac{dw}{dz} = -30z^4 + C_1$$

さらに積分すると

$$\frac{1}{2} w^2 = -6z^5 + C_1 z + C_2 \quad (3.6)$$

となる (ただし C_1, C_2 は任意定数). ここで $w = \frac{dz}{dt}$ に注意すると (3.6) は (3.1) と同じ方程式である. 故に (3.6) は Painlevé 性を持たない. 従って (3.4) も Painlevé 性を持たない. このことから定理 2.3 により, $P_1^{(2,1)}$ は Painlevé 性を持たないことがわかる.

参考文献

- [1] B.Dobrovin and A.Kapaev, On an isomonodromy deformation equation without the Painlevé property, Russ. J. Math. Phys. **21**(2014), 9-35.
- [2] R.Fuchs, Über lineare homogene Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit drei im Endlichen gelegene wesentlich singulären Stellen, Math. Ann. **63**(1907), 301-321.
- [3] R.Garnier, Sur des équations différentielles du troisième ordre dont l'intégrale générale est uniforme et sur une classe d'équations nouvelles d'ordre supérieur dont l'intégrale générale a ses points critiques fixes, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. **29**(1912), 1-126.
- [4] 木村俊房, 常微分方程式 II, 岩波書店 (岩波講座基礎数学),(1977).
- [5] T.Miwa, Painlevé property of monodromypreserving deformation equations and the analyticity of tau functions, Pobl. RIMS, Kyoto Univ. f 17(1981), 703-721.
- [6] 岡本和夫, パンルヴェ方程式序説, 上智大学理工学部数学教室 (上智大学講究録),(1985).
- [7] 齋藤利弥, 常微分方程式論, 第 II 版, 朝倉書店,(1979).
- [8] S.Simomura, Pole loci of solutions of a degenerate system Nonlinearity **14**(2001), 193-203.
- [9] 谷口健二・時弘哲治, 複素解析, 裳華房 (理工系の数理),(2013).
- [10] 柳原二郎, 級数, 朝倉書店 (応用数学力学講座),(1962).