

令和元年度修士論文

上半空間における曲面の曲率について

三重大学大学院教育学研究科
教育科学専攻 理数・生活系教育領域

218M025 中村 洋介

令和2年2月4日

序文

本研究を進めるにあたって、深谷賢治著『現代数学への入門-双曲幾何-』を用いて双曲幾何の具体的なモデルを学習した。学習した内容は平面のモデルばかりであったため、上半空間と単位球の計量を導入し、空間に拡張することで、松田雄斗著『回転面の全曲率に関する考察』のように、様々な回転面の全曲率を計算した。実際、非ユークリッド空間であったとしても特異点の無い曲面の全曲率は、ユークリッド空間のときと同じ値になることが知られている。そこで、特異点のある曲面の全曲率も、ユークリッド空間のときと同じ値になるのではないかと考え、本研究に至った。その結果、特異点のあるときもユークリッド空間のときと同じ値になった。

研究を進めていく中で、非ユークリッド空間において計量を定義できない部分に曲線を近づけていくとき、曲率がどのようになるのかが気になった。実際に計算をしていく中で、計量を定義していない部分に近づけると、曲率は0に収束するのではないかと考えた。なぜ0に収束するのか、0に収束しないときはどのようなときかを考えた。

本論文では、それらについて述べ、計算結果とその考察を報告する。

参考文献

- [1] 深谷賢治, (2004), 『現代数学への入門-双曲幾何-』, 岩波書店.
- [2] 松田雄斗, (2019), 『回転面の全曲率に関する考察』, 三重大学大学院教育学研究科修士論文.

謝辞

本研究を行うにあたり、三重大学教育学部数学教育コースの先生方に多くの激励を頂戴しました。とりわけ、森山貴之先生には、課題研究の授業時間外にもたくさんの細部に渡ったご指導やご支援を賜りました。ここに感謝申し上げます。

目次

1	双曲幾何学のモデル	4
2	上半空間内の曲面の曲率	10
2.1	上半平面 \mathfrak{h} における曲線の曲率	10
2.2	上半空間内の曲面のガウス曲率と全曲率	13
3	上半空間内の回転面の全曲率	15
3.1	トーラス型曲面の全曲率	15
3.2	特異点つきトーラス型曲線の全曲率	19
3.3	りんご型曲面の全曲率	29
4	単位球内の曲面の曲率	33
4.1	単位円盤 D^2 における曲線の曲率	34
4.2	単位球内の曲面のガウス曲率と全曲率	36
5	単位球内の回転面の全曲率	37
6	曲線を $z = 0$ に限りなく近づけたときの曲率	42
7	曲線を単位円盤に限りなく近づけたときの曲率	46

1 双曲幾何学のモデル

双曲幾何学のモデルを2つ紹介する.

(a) 上半平面モデル

平面上の点を座標を使って (x, y) と表す. y 座標が正であるような点全体のことを上半平面といい,

$$\mathfrak{h} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y > 0\}$$

と表す. また, 平面 \mathbb{R}^2 をガウス平面 \mathbb{C} とみなすと,

$$\mathfrak{h} = \{z \in \mathbb{C} | \text{Im} z > 0\}$$

である. 曲線 $l : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ (または \mathbb{C}) であって, その像が \mathfrak{h} に含まれるような l を, 以後 \mathfrak{h} の曲線と呼び, $l : [a, b] \rightarrow \mathfrak{h}$ と記し, l を $l(t) = (l_1(t), l_2(t))$ と座標で表す.

定理 1.1. $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ad - bc = 1$ とすると, 1 次分数変換 $\Phi(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ は \mathfrak{h} の点を \mathfrak{h} に写す.

逆に, \mathfrak{h} の点を \mathfrak{h} の点に写す 1 次分数変換は実数 a, b, c, d を用いて, $\Phi(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ と表される.

証明. まず, 前半を証明する. $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ad - bc = 1$ とする. $z \in \mathbb{R}$ のとき, $\Phi(z) \in \mathbb{R}$ であるので, Φ は実軸を実軸に写す. また, $z = x + iy$ とすると,

$$\begin{aligned} \text{Im} \Phi(z) &= \text{Im} \frac{a(x + iy) + b}{c(x + iy) + d} = \text{Im} \frac{(ax + b) + iay}{(cx + d) + icy} \\ &= \frac{ay(cx + d) - cy(ax + b)}{(cx + d)^2 + c^2y^2} = \frac{y(ad - bc)}{(cx + d)^2 + c^2y^2} = \frac{y}{(cx + d)^2 + c^2y^2} > 0. \end{aligned}$$

よって, Φ は \mathfrak{h} を \mathfrak{h} に写す. 次に, 後半を証明する. \mathfrak{h} を \mathfrak{h} に写す 1 次分数変換を

$$\Phi(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad (a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc \neq 0)$$

とする. ここで,

$$a' = \frac{a}{\sqrt{ad - bc}}, \quad b' = \frac{b}{\sqrt{ad - bc}}, \quad c' = \frac{c}{\sqrt{ad - bc}}, \quad d' = \frac{d}{\sqrt{ad - bc}}$$

とおいて, これらが条件 $a', b', c', d' \in \mathbb{R}, a'd' - b'c' = 1$ を満たすことを示す. まず, Φ が実軸を実軸に写すこと, すなわち, 任意の $z \in \mathbb{R}$ に対して,

$$\begin{aligned} \Phi(z) - \overline{\Phi(z)} &= 0 \Leftrightarrow \frac{az + b}{cz + d} - \frac{\overline{az + b}}{\overline{cz + d}} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{z^2(a\bar{c} - \bar{a}c) + z(a\bar{d} + b\bar{c} - \bar{a}d - \bar{b}c) + b\bar{d} - \bar{b}d}{|cz + d|^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow z^2(a\bar{c} - \bar{a}c) + z(a\bar{d} + b\bar{c} - \bar{a}d - \bar{b}c) + b\bar{d} - \bar{b}d = 0. \end{aligned}$$

これが z についての恒等式となるので,

$$\begin{cases} a\bar{c} = \bar{a}c \\ a\bar{d} + b\bar{c} - \bar{a}d - \bar{b}c = 0 \\ b\bar{d} = \bar{b}d \end{cases}$$

である。また、この第2式より、 $a\bar{d} - \bar{b}c - \overline{(a\bar{d} - \bar{b}c)} = 0$ 。よって、 $a\bar{d} - \bar{b}c$ と $\overline{a\bar{d} - \bar{b}c}$ は実数である。

(i) a, b, c, d のいずれも 0 でないとき、

$$\overline{a\bar{d} - \bar{b}c} = \frac{\overline{a\bar{d} \cdot a - \bar{b}c \cdot a}}{a} = \frac{\overline{a\bar{d}} - \overline{\bar{b}c}a}{a} = \frac{\overline{a\bar{d}} - \bar{b}a}{a} = \frac{\overline{a}(\overline{d} - b)}{a} = \frac{|a|^2(\overline{d} - b)}{a^2}.$$

$|a|^2 \in \mathbb{R}$ より、

$$\frac{ad - bc}{a^2} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{a^2}{ad - bc} \in \mathbb{R}.$$

$\frac{a^2}{ad - bc} > 0$ のとき、 $a' = \frac{a}{\sqrt{ad - bc}}$ は実数である。 $\frac{a^2}{ad - bc} < 0$ のとき、 $a' = \frac{a}{\sqrt{ad - bc}}$ は純虚数となるが、あらためて、 $a' = \text{Im} \frac{a}{\sqrt{ad - bc}}$ とおけば、 a' は実数となる。 b', c', d' も同様に実数であることが示せる。また、

$$a'd' - b'c' = \frac{ad - bc}{ad - bc} = 1$$

より、 a', b', c', d' は条件を満たす。

(ii) a, b, c, d の少なくとも 1 つは 0 であるとき、 $ad - bc \neq 0$ であることに注意すると、

$$\begin{cases} a' = 0, b' = \frac{b}{\sqrt{-bc}}, c' = \frac{c}{\sqrt{-bc}}, d' = \frac{d}{\sqrt{-bc}} \\ a' = 0, b' = \frac{b}{\sqrt{-bc}}, c' = \frac{c}{\sqrt{-bc}}, d' = 0 \\ a' = \frac{a}{\sqrt{ad}}, b' = 0, c' = \frac{c}{\sqrt{ad}}, d' = \frac{d}{\sqrt{ad}} \\ a' = \frac{a}{\sqrt{ad}}, b' = 0, c' = 0, d' = \frac{d}{\sqrt{ad}} \end{cases}$$

と場合分けすることができる。いずれの場合も (i) と同様にすると、 $a', b', c', d' \in \mathbb{R}$ 、 $a'd' - b'c' = 1$ が示される。□

定義 1.2. \mathfrak{h} の点を \mathfrak{h} の点に写す 1 次分数変換全体を $PSL(2; \mathbb{R})$ と書く。

定義 1.3. $\Phi_0(z) = -\bar{z}$ とする。 $\Phi \in PSL(2; \mathbb{R})$ であるか、または $\Phi \circ \Phi_0 \in PSL(2; \mathbb{R})$ であるような等長変換全体を $PSL^+(2; \mathbb{R})$ と書く。

定義 1.4. 組 $(\mathfrak{h}, PSL^+(2; \mathbb{R}))$ を上半平面モデルという。

定義 1.5. 上半平面 \mathfrak{h} 上の点 $P(x, y)$ での計量を、 $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ のとき、

$$[\mathbf{v}, \mathbf{w}]_P = \frac{v_1 w_1 + v_2 w_2}{y^2}$$

で定義する。この計量をポアンカレ計量という。

定理 1.6. $PSL(2; \mathbb{R})$ は \mathfrak{h} での計量を保つ。

証明. 点 $P(z = x + iy) \in \mathfrak{h}$ において、 $\Phi(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1$) の P でのヤコビ行列 $(D\Phi)_P$ は、

$$(D\Phi)_P = \begin{pmatrix} \text{Re} \frac{1}{(cz + d)^2} & -\text{Im} \frac{1}{(cz + d)^2} \\ \text{Im} \frac{1}{(cz + d)^2} & \text{Re} \frac{1}{(cz + d)^2} \end{pmatrix}$$

である。このとき、 \mathbf{v}, \mathbf{w} を Φ で写した $(D\Phi)_P \mathbf{v}, (D\Phi)_P \mathbf{w}$ は、

$$(D\Phi)_P \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} \frac{1}{(cz+d)^2} v_1 - \operatorname{Im} \frac{1}{(cz+d)^2} v_2 \\ \operatorname{Im} \frac{1}{(cz+d)^2} v_1 + \operatorname{Re} \frac{1}{(cz+d)^2} v_2 \end{pmatrix},$$

$$(D\Phi)_P \mathbf{w} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} \frac{1}{(cz+d)^2} w_1 - \operatorname{Im} \frac{1}{(cz+d)^2} w_2 \\ \operatorname{Im} \frac{1}{(cz+d)^2} w_1 + \operatorname{Re} \frac{1}{(cz+d)^2} w_2 \end{pmatrix}$$

となる。この2つのベクトルの計量は、

$$\begin{aligned} [(D\Phi)_P \mathbf{v}, (D\Phi)_P \mathbf{w}]_{\Phi(P)} &= \frac{\left(\operatorname{Re} \frac{1}{(cz+d)^2} \right)^2 + \left(\operatorname{Im} \frac{1}{(cz+d)^2} \right)^2}{\left(\operatorname{Im} \left(\frac{az+b}{cz+d} \right) \right)^2} (v_1 w_1 + v_2 w_2) \\ &= \frac{\frac{\{(cx+d)^2 - c^2 y^2\}^2}{\{(cx+d)^2 + c^2 y^2\}^4} + \frac{4c^2 y^2 (cx+d)^2}{\{(cx+d)^2 + c^2 y^2\}^4}}{\frac{y^2}{\{(cx+d)^2 + c^2 y^2\}^2}} (v_1 w_1 + v_2 w_2) \\ &= \frac{\{(cx+d)^2 + c^2 y^2\}^2}{\{(cx+d)^2 + c^2 y^2\}^4} \frac{\{(cx+d)^2 + c^2 y^2\}^2}{y^2} (v_1 w_1 + v_2 w_2) \\ &= \frac{v_1 w_1 + v_2 w_2}{y^2} \\ &= [\mathbf{v}, \mathbf{w}]_P \end{aligned}$$

となるので、計量を保つことがわかる。 □

定理 1.7. $PSL^+(2; \mathbb{R})$ は \mathfrak{h} での計量を保つ。

証明. $\Psi \circ \Phi_0 \in PSL(2; \mathbb{R})$ とする。 $\Phi = \Psi \circ \Phi_0$ とおくと、 $\Phi_0 \circ \Phi_0 = \varepsilon$ より、

$$\Psi = \Phi \circ \Phi_0$$

である。この $\Psi = \Phi \circ \Phi_0$ が \mathfrak{h} での計量を保てば、 $PSL^+(2; \mathbb{R})$ が \mathfrak{h} での計量を保つことが示せる。ここで、 Ψ は Φ と Φ_0 の合成であったから、 Φ_0 が計量を保てば、 Ψ も計量を保つ。

$\Phi_0(z) = -\bar{z}$ より、 $P(x+iy)$ でのヤコビ行列 $(D\Phi_0)_P$ は、

$$(D\Phi_0)_P = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

になり、 \mathbf{v}, \mathbf{w} を Φ_0 で写した $(D\Phi_0)_P \mathbf{v}, (D\Phi_0)_P \mathbf{w}$ は、

$$(D\Phi_0)_P \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -v_1 \\ v_2 \end{pmatrix},$$

$$(D\Phi_0)_P \mathbf{w} = \begin{pmatrix} -w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

となる。この2つのベクトルの計量は、

$$[(D\Phi_0)_P \mathbf{v}, (D\Phi_0)_P \mathbf{w}]_{\Phi_0(P)} = \frac{(-v_1)(-w_1) + v_2 w_2}{y^2} = \frac{v_1 w_1 + v_2 w_2}{y^2} = [\mathbf{v}, \mathbf{w}]_P$$

となるので、計量を保つことがわかる。 □

(b) 円盤モデル

単位円盤

$$D^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$$

を考える.

補題 1.8. 1 次分数変換 Φ が D^2 の点を D^2 に写せば, Φ は D^2 から D^2 への等長変換を定める.

証明. $\varphi(z) = \frac{z-i}{z+i}$ をとり, $\Psi(z) = \varphi^{-1}(\Phi(\varphi(z)))$ とおく. Ψ は \mathfrak{h} を \mathfrak{h} に写す 1 次分数変換であるから, $\Psi \in PSL(2; \mathbb{R})$. 1 次分数変換は等長変換であることより, $d(\Phi(P), \Phi(Q)) = d(P, Q)$. よって, $X, Y \in D^2$ に対して,

$$\begin{aligned} d(\Phi(X), \Phi(Y)) &= d(\varphi(\Psi(\varphi^{-1}(X))), \varphi(\Psi(\varphi^{-1}(Y)))) \\ &= d(\Psi(\varphi^{-1}(X)), \Psi(\varphi^{-1}(Y))) \\ &= d(\varphi^{-1}(X), \varphi^{-1}(Y)) \\ &= d(X, Y) \end{aligned}$$

となり, Φ は D^2 から D^2 への等長変換を定める. □

定義 1.9. D^2 の点を D^2 の点に写す 1 次分数変換全体のなす群を G と呼ぶ.

定義 1.10. 群 G^+ を $G^+ = G \cup \{g(\bar{z}) \mid g \in G\}$ で定める. ここでの $g(\bar{z})$ とは, z を $g(\bar{z})$ に写す写像を表す.

定義 1.11. 組 (\mathfrak{h}, G^+) を円盤モデルという.

定義 1.12. 単位円盤 D^2 の点 $P(x, y)$ での計量を, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ のとき,

$$(\mathbf{v}, \mathbf{w})_P = \frac{4(v_1 w_1 + v_2 w_2)}{(1 - x^2 - y^2)^2}$$

で定義する.

定義 1.13. 曲線 $l: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ の長さ $\text{Leg}(l)$ とは,

$$\text{Leg}(l) = \int_a^b \left| \frac{dl}{dt} \right| dt$$

である. ここで, $\frac{dl}{dt} = \left(\frac{dl_1}{dt}, \frac{dl_2}{dt} \right)$ はベクトルである.

計量によって, $\left| \frac{dl}{dt} \right|$ の値が変わるので, 注意が必要である. たとえば, 上半平面 \mathfrak{h} の曲線 l の長さは,

$$\text{Leg}(l) = \int_a^b \sqrt{\frac{\left(\frac{dl_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dl_2}{dt}\right)^2}{l_2(t)^2}} dt,$$

単位円盤 D^2 の曲線 l の長さは,

$$\text{Leg}(l) = \int_a^b \sqrt{\frac{4\left\{\left(\frac{dl_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dl_2}{dt}\right)^2\right\}}{\{1 - l_1(t)^2 - l_2(t)^2\}^2}} dt$$

となる.

(c) 上半平面モデルと円盤モデル間の関係

上半平面 \mathfrak{h} から単位円盤 D^2 への写像 $\varphi(z) = \frac{z-i}{z+i}$ が計量を保つ写像なのかを調べる.

定理 1.14. 上半平面 \mathfrak{h} から単位円盤 D^2 への写像 $\varphi: \mathfrak{h} \rightarrow D^2$,

$$\varphi(z) = \frac{z-i}{z+i}$$

は計量を保つ.

証明. 点 $P(z = x + iy)$ において, $\varphi(z) = \frac{z-i}{z+i} = \frac{x+i(y-1)}{x+i(y+1)} = \frac{x^2+y^2-1-2ix}{x^2+(y+1)^2}$ より, 上半平面 \mathfrak{h} から単位円盤 D^2 への写像 φ は,

$$\varphi(x, y) = \left(\frac{x^2+y^2-1}{x^2+(y+1)^2}, \frac{-2x}{x^2+(y+1)^2} \right)$$

と考えることができる.

このとき, φ の P でのヤコビ行列 $(D\varphi)_P$ は,

$$(D\varphi)_P = \begin{pmatrix} \frac{4x(y+1)}{\{x^2+(y+1)^2\}^2} & \frac{-2\{x^2-(y+1)^2\}}{\{x^2+(y+1)^2\}^2} \\ \frac{2\{x^2-(y+1)^2\}}{\{x^2+(y+1)^2\}^2} & \frac{4x(y+1)}{\{x^2+(y+1)^2\}^2} \end{pmatrix}$$

である. このとき, \mathbf{v}, \mathbf{w} を φ で写した $(D\varphi)_P \mathbf{v}, (D\varphi)_P \mathbf{w}$ は,

$$(D\varphi)_P \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \frac{4x(y+1)v_1 - 2\{x^2-(y+1)^2\}v_2}{\{x^2+(y+1)^2\}^2} \\ \frac{2\{x^2-(y+1)^2\}v_1 + 4x(y+1)v_2}{\{x^2+(y+1)^2\}^2} \end{pmatrix},$$

$$(D\varphi)_P \mathbf{w} = \begin{pmatrix} \frac{4x(y+1)w_1 - 2\{x^2-(y+1)^2\}w_2}{\{x^2+(y+1)^2\}^2} \\ \frac{2\{x^2-(y+1)^2\}w_1 + 4x(y+1)w_2}{\{x^2+(y+1)^2\}^2} \end{pmatrix}$$

となる. この2つのベクトルの計量は,

$$\begin{aligned} & ((D\varphi)_P \mathbf{v}, (D\varphi)_P \mathbf{w})_{\varphi(P)} \\ &= \frac{1}{\left\{1 - \left(\frac{x^2+y^2-1}{x^2+(y+1)^2}\right)^2 - \left(\frac{-2x}{x^2+(y+1)^2}\right)^2\right\}^2} \frac{4}{\{x^2+(y+1)^2\}^4} [16x^2(y+1)^2 + 4\{x^2-(y+1)^2\}]v_1w_1 \\ & \quad + [-8x(y+1)\{x^2-(y+1)^2\} + 8x(y+1)\{x^2-(y+1)^2\}](v_1w_2 + v_2w_1) + [4\{x^2-(y+1)^2\}^2 + 16x^2(y+1)^2]v_2w_2 \\ &= \frac{64\{x^2+(y+1)^2\}^2(v_1w_1 + v_2w_2)}{16y^2\{x^2+(y+1)^2\}^2} \\ &= \frac{4(v_1w_1 + v_2w_2)}{y^2} \\ &= [\mathbf{v}, \mathbf{w}]_P \end{aligned}$$

となるので, 計量を保つことがわかる. □

定理 1.15. G^+ は D^2 での計量を保つ.

証明. G^+ の任意の元 g は, $PSL^+(2; \mathbb{R})$ の元 Φ を用いて, $g = \varphi \circ \Phi \circ \varphi^{-1}$ と表すことができる. 今, φ と Φ は計量を保つことがわかっているので, φ^{-1} が計量を保つことを示す. φ が計量を保つことより,

$$[\mathbf{v}, \mathbf{w}]_P = ((D\varphi)_P \mathbf{v}, (D\varphi)_P \mathbf{w})_{\varphi(P)}.$$

ここに, $P, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ のかわりに $\varphi^{-1}(P'), (D\varphi^{-1})_{P'} \mathbf{v}, (D\varphi^{-1})_{P'} \mathbf{w}$ をそれぞれ入れると,

$$[(D\varphi^{-1})_{P'} \mathbf{v}, (D\varphi^{-1})_{P'} \mathbf{w}]_{\varphi^{-1}(P')} = ((D\varphi)_{\varphi^{-1}(P')} (D\varphi^{-1})_{P'} \mathbf{v}, (D\varphi)_{\varphi^{-1}(P')} (D\varphi^{-1})_{P'} \mathbf{w})_{\varphi(\varphi^{-1}(P'))}.$$

$\varphi(x, y) = (\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y))$, $\varphi^{-1}(x, y) = (\varphi_1^{-1}(x, y), \varphi_2^{-1}(x, y))$ とする. このとき,

$$\varphi \circ \varphi^{-1}(x, y) = (\varphi_1(\varphi_1^{-1}(x, y), \varphi_2^{-1}(x, y)), \varphi_2((\varphi_1^{-1}(x, y), \varphi_2^{-1}(x, y)))$$

であり, $\varphi_1^{-1}(x, y) = u(x, y)$, $\varphi_2^{-1}(x, y) = v(x, y)$ とおくと,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \varphi_1(\varphi_1^{-1}(x, y), \varphi_2^{-1}(x, y)) &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \frac{\partial}{\partial y} \varphi_1(\varphi_1^{-1}(x, y), \varphi_2^{-1}(x, y)) &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{\partial}{\partial x} \varphi_2(\varphi_1^{-1}(x, y), \varphi_2^{-1}(x, y)) &= \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \frac{\partial}{\partial y} \varphi_2(\varphi_1^{-1}(x, y), \varphi_2^{-1}(x, y)) &= \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned}$$

であるから, $\varphi \circ \varphi^{-1}$ の P' でのヤコビ行列 $(D(\varphi \circ \varphi^{-1}))_{P'}$ は,

$$\begin{aligned} (D(\varphi \circ \varphi^{-1}))_{P'} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \\ &= (D\varphi)_{\varphi^{-1}(P')} (D\varphi^{-1})_{P'} \end{aligned}$$

また, $\varphi \circ \varphi^{-1}(x, y) = (x, y)$ より,

$$(D(\varphi \circ \varphi^{-1}))_{P'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

したがって, $[(D\varphi^{-1})_{P'} \mathbf{v}, (D\varphi^{-1})_{P'} \mathbf{w}]_{\varphi^{-1}(P')} = (\mathbf{v}, \mathbf{w})_{P'}$ となるので, φ^{-1} は D^2 での計量を保つことがわかる. 以上より, G^+ の元 g は D^2 での計量を保つ. \square

ここで, 補題の証明の中で, 次のことが示されたので, 述べておく.

補題 1.16. 逆写像を持つ写像 f が計量を保つとき, f^{-1} も計量を保つ.

2 上半空間内の曲面の曲率

2.1 上半平面 \mathbb{H} における曲線の曲率

ユークリッド平面における曲率と非ユークリッド平面における計量は異なる。そこで、非ユークリッド平面での曲率を求め、違いを見てみる。

定義 2.1. $a, b \in \mathbb{R}$ に対し、 $I = [a, b]$ と定める。 $t \in I$ の写像 $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ による像

$$\gamma(I) = \{\gamma(t) \mid t \in I\}$$

を曲線という。

定義 2.2. $I = [a, b]$ とする。曲線 $\gamma(t)$ の始点と終点が一致する、つまり

$$\gamma(a) = \gamma(b)$$

が成り立つとき、 $\gamma(t)$ を閉曲線という。

以後、曲線 $\gamma(t)$ は C^∞ 級の閉曲線を表すものとする。曲線 $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ を t で 1 回微分したものを、

$$\dot{\gamma}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$$

と表す。以下、断らない限り、 $\dot{\gamma}(t) \neq \mathbf{0}$ とする。今、曲線 $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ の閉区間における曲線の長さを計算すると、

$$\int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt = \int_a^b \sqrt{\frac{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}{y(t)^2}} dt$$

となる。すなわち、これは動点 $\gamma(t)$ が時刻 $t = a$ から $t = b$ まで動いた距離である。初めの時刻 $t = a$ を固定し、 b の代わりに、変数 t を用いて、

$$s = \int_a^b |\dot{\gamma}(u)| du$$

と書くと、 s は時刻 a から t の間に点が動いた距離で t の関数 $s = s(t)$ になる。そこで、変数 s を次のように定義する。

定義 2.3. $a, b \in \mathbb{R}$ に対し、曲線 $\gamma(t)$ の閉区間 $[a, t]$ における曲線の長さを $s = \int_a^b |\dot{\gamma}(u)| du$ とすると、この曲線は

$$\gamma(s) = (x(s), y(s)) \quad (0 \leq s \leq l), \quad l = \int_a^b |\dot{\gamma}(u)| du$$

と表される。このときの変数 s を弧長パラメータという。

弧長パラメータ s による微分を $\gamma'(s)$ と表し、一般のパラメータ t での微分とは区別する。

また、 $\dot{\gamma}(t) \neq \mathbf{0}$ であるから、弧長パラメータ s は t で微分すると、

$$\frac{ds}{dt} = |\dot{\gamma}(t)| > 0$$

である. s で表示された曲線 $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ を s で微分すると,

$$\gamma'(s) = \frac{d\gamma}{ds} = \frac{d\gamma}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{\dot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t)|}$$

となるから, $|\gamma'(s)| \equiv 1$, すなわち, 弧長パラメータ表示された曲線の速度ベクトルの大きさは常に 1 となる.

定義 2.4. 曲線 $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ に対して,

$$\mathbf{e}(s) = \gamma'(s) = (x'(s), y'(s)) \quad \mathbf{n}(s) = (-y'(s), x'(s))$$

とする. $\mathbf{e}(s)$ を $\gamma(s)$ の単位接ベクトル, $\mathbf{n}(s)$ を $\gamma(s)$ の単位法線ベクトルという.

定義 2.5. 曲線 $\gamma(s) = (x(s), y(s)) \in \mathfrak{h}$ に対して,

$$\gamma''(s) - \frac{y'(s)}{y(s)} \gamma'(s) = \kappa(s) \mathbf{n}(s)$$

となるような $\kappa(s)$ が存在する. この $\kappa(s)$ を $\gamma(s)$ の曲率という.

定理 2.6. 上半平面 \mathfrak{h} での曲線のパラメータ表示が弧長パラメータ s で

$$\gamma(s) = (x(s), y(s)) \quad s \in [0, \text{Leg}(l)]$$

で書けるとき, その曲線の曲率 $\kappa(s)$ は,

$$\kappa(s) = \frac{x'(s)y''(s) - x''(s)y'(s)}{y(s)^2}$$

となる.

証明. 弧長 $s = \int_a^t |\dot{\gamma}(\theta)| d\theta = \int_a^t \sqrt{\frac{\dot{x}(\theta)^2 + \dot{y}(\theta)^2}{y(\theta)^2}} d\theta$ とする. $t \in [a, b]$ のとき, $s \in [0, \text{Leg}(l)]$ である. このとき, $\frac{ds}{dt} = |\dot{\gamma}(t)|$ であり, $\gamma'(s) = \frac{d\gamma}{ds} = \frac{d\gamma}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{d\gamma}{dt} \frac{1}{\frac{ds}{dt}} = \frac{\dot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t)|}$ なので, $|\gamma'(s)| = 1$. つまり,

$$\frac{x'(s)^2 + y'(s)^2}{y(s)^2} = 1.$$

この両辺を s で微分すると,

$$\begin{aligned} & \frac{2\{x'(s)x''(s) + y'(s)y''(s)\}y(s)^2 - 2\{x'(s)^2 + y'(s)^2\}y(s)y'(s)}{y(s)^4} = 0 \\ \iff & \frac{\{x'(s)x''(s) + y'(s)y''(s)\}y(s) - \{x'(s)^2 + y'(s)^2\}y'(s)}{y(s)^3} = 0 \\ \iff & \frac{x'(s)\{x''(s)y(s) - x'(s)y'(s)\} + y'(s)\{y''(s)y(s) - y'(s)^2\}}{y(s)^3} = 0 \\ \iff & \frac{x'(s)\left\{x''(s) - \frac{y'(s)}{y(s)}x'(s)\right\} + y'(s)\left\{y''(s) - \frac{y'(s)}{y(s)}y'(s)\right\}}{y(s)^3} = 0 \\ \iff & \left[(x'(s), y'(s)), \left(x''(s) - \frac{y'(s)}{y(s)}x'(s), y''(s) - \frac{y'(s)}{y(s)}y'(s) \right) \right]_{\gamma(s)} = 0 \\ \iff & \left[\gamma'(s), \gamma''(s) - \frac{y'(s)}{y(s)}\gamma'(s) \right]_{\gamma(s)} = 0 \end{aligned}$$

となる。これより、 $\gamma'(s)$ と $\gamma''(s) - \frac{y'(s)}{y(s)}\gamma'(s)$ は直交している。 $\mathbf{n}(s) = (-y'(s), x'(s))$ を考えると、これは $|\mathbf{n}(s)| = 1$ かつ、 $\gamma'(s)$ と直交している。以上より、 $\gamma''(s) - \frac{y'(s)}{y(s)}\gamma'(s) = \kappa(s)\mathbf{n}(s)$ となるものが曲率 $\kappa(s)$ であるから、

$$\begin{aligned}\kappa(s) &= [\kappa(s)\mathbf{n}(s), \mathbf{n}(s)]_{\gamma(s)} \\ &= [\gamma''(s), \mathbf{n}(s)]_{\gamma(s)} - \frac{y'(s)}{y(s)}[\gamma'(s), \mathbf{n}(s)]_{\gamma(s)} \\ &= [\gamma''(s), \mathbf{n}(s)]_{\gamma(s)} \\ &= \frac{x'(s)y''(s) - x''(s)y'(s)}{y(s)^2}\end{aligned}$$

となる。 □

定義 2.7. 弧長パラメータ s でパラメータ表示される曲線 $\gamma(s)$ ($a \leq s \leq b$) に対して、曲率を $\kappa(s)$ とする。 $\kappa(s)$ を $s = a$ から $s = b$ まで積分して得られる値を

$$\mu = \int_a^b \kappa(s) ds$$

を $\gamma(s)$ の全曲率という。また μ を 2π で割った値を $\gamma(s)$ の回転数という。

曲線の向きによって、回転数の正負は変わるが、なめらかな閉曲線の回転数は整数となる。弧長パラメータを考えなくても、一般のパラメータ t のまま曲率を求める方法が次の定理である。

定理 2.8. 上半平面 \mathfrak{h} での曲線のパラメータ表示が一般のパラメータ t で $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$ で書けるとき、その曲線の曲率 $\kappa(t)$ は、

$$\kappa(t) = \frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \ddot{x}(t)\dot{y}(t)}{\{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2\}^{\frac{3}{2}}} y(t)$$

となる。

証明. $\gamma'(s) = \frac{d\gamma}{ds} = \frac{dt}{ds}\dot{\gamma}(t) = \frac{dt}{ds}(\dot{x}(t), \dot{y}(t))$ である。これをさらに s で微分すると、

$$\gamma''(s) = \frac{dt}{ds} \left(\frac{dt}{ds}(\ddot{x}(t), \ddot{y}(t)) \right) + \frac{d^2t}{ds^2}(\dot{x}(t), \dot{y}(t))$$

である。ここで $\mathbf{n}(s) = (-y'(s), x'(s)) = \frac{dt}{ds}(-\dot{y}(t), \dot{x}(t))$ であるから、

$$\begin{aligned}\kappa(s) &= [\gamma''(s), \mathbf{n}(s)]_{\gamma(s)} = \left(\frac{dt}{ds} \right)^3 \left(\frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \ddot{x}(t)\dot{y}(t)}{y(t)^2} \right) \\ &= \frac{1}{|\dot{\gamma}(t)|^3} \left(\frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \ddot{x}(t)\dot{y}(t)}{y(t)^2} \right) \\ &= \frac{y(t)^3}{\{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2\}^{\frac{3}{2}}} \frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \ddot{x}(t)\dot{y}(t)}{y(t)^2} \\ &= \frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \ddot{x}(t)\dot{y}(t)}{\{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2\}^{\frac{3}{2}}} y(t)\end{aligned}$$

となり、示された。 □

これは、ユークリッド空間での曲線のパラメータ表示が一般のパラメータ t で書けているときの曲率の値に、 $y(t)$ を掛けたものになっている。

2.2 上半空間内の曲面のガウス曲率と全曲率

双曲幾何学のモデルは平面で考えるものばかりであった。そこで、空間のモデルを導入する。3次元空間上の点を座標を使って (x, y, z) と表し、 z 座標が正であるような点全体のことを上半空間といい、

$$\mathfrak{h}^+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0\}$$

と表す。空間曲線 $l: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ であって、その像が \mathfrak{h}^+ に含まれるような l を、以後 \mathfrak{h}^+ の空間曲線と呼び、 $l: [a, b] \rightarrow \mathfrak{h}^+$ と記し、 l を $l(t) = (l_1(t), l_2(t), l_3(t))$ と座標で表す。

定義 2.9. 上半空間 \mathfrak{h}^+ の点 $P(x, y, z)$ での計量を、 $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ のとき、

$$[\mathbf{v}, \mathbf{w}]_P^+ = \frac{v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3}{z^2}$$

で定義する。

次に、上半空間 \mathfrak{h}^+ における曲面を考えていく。

定義 2.10. $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ は uv 平面上の領域 D で定義された3回微分可能な関数とする。
ヤコビ行列

$$\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}$$

の階数が D 上で2であるとき、 $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ は空間内に曲面片を定義するという。

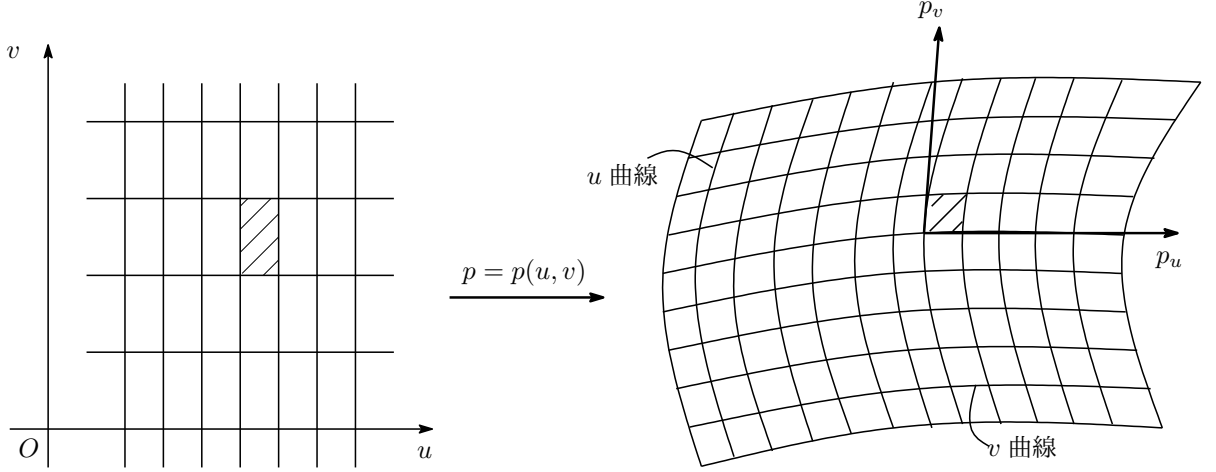
定義 2.11. 空間内の集合 S がいくつかの (無限の) 曲面片の和集合となっているとき、 S を曲面という。

定義 2.12. S が境界をもたないコンパクトな曲面であるとき、これを閉曲面という。

以後、断らない限り、曲面 $p(u, v)$ は閉曲面とする。 uv 平面上の領域 D で定義された

$$p(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

を曲面とする.



$p(u, v)$ において, v を 1 つ固定したときの対応 $u \rightarrow p(u, v)$ によって決まる曲線を u 曲線といい, u を 1 つ固定したときの対応 $v \rightarrow p(u, v)$ によって決まる曲線を v 曲線という. ベクトル $p_u = p_u(u, v)$ は u 曲線の各点における速度ベクトルを, ベクトル $p_v = p_v(u, v)$ は v 曲線の各点における速度ベクトルを表す. また, 点 $p(u, v)$ で曲面に接するベクトルは, p_u, p_v の一次結合で表される. したがって, 点 $p(u, v)$ を通り, これらの接ベクトルに平行な平面

$$\{p(u, v) + \alpha p_u(u, v) + \beta p_v(u, v) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

が曲面の接平面となる. p_u, p_v の両方に垂直な単位ベクトルは

$$\nu = \frac{p_u \times p_v}{|p_u \times p_v|}$$

と表される. この ν を曲面 $p(u, v)$ の単位法線ベクトルという. これらのもとで, 次のような関数を定義する.

定義 2.13. 曲面 $S: p(u, v)$ の接ベクトル $p_u = p_u(u, v), p_v = p_v(u, v)$ の計量で与えられる 3 つの関数

$$E(u, v) = [p_u, p_u]_{p(u, v)}^+, F(u, v) = [p_u, p_v]_{p(u, v)}^+, G(u, v) = [p_v, p_v]_{p(u, v)}^+$$

を第 1 基本量という. また, $p(u, v)$ の 2 回微分 p_{uu}, p_{uv}, p_{vv} と単位法線ベクトル ν の計量で与えられる 3 つの関数

$$L(u, v) = [p_{uu}, \nu]_{p(u, v)}^+, M(u, v) = [p_{uv}, \nu]_{p(u, v)}^+, N(u, v) = [p_{vv}, \nu]_{p(u, v)}^+$$

を第 2 基本量という. 簡単のため, E, F, G, L, M, N と略記する.

定義 2.14. 曲面 $S: p(u, v)$ に対し, 第 1 基本量 E, F, G と第 2 基本量 L, M, N を用いて表される関数

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

を S のガウス曲率という.

定義 2.15. 閉曲面 $S: p(u, v)$ ($u(s_1) \leq u \leq u(s_2), 0 \leq v \leq 2\pi$) に対して, ガウス曲率を K とする. S における K の重積分の値

$$\iint_S K dA$$

を S の全曲率という. ここで, $dA = \sqrt{EG - F^2} du dv$ と表される.

例題 2.16. $\alpha > r > 0$ とする. 半径 r の 2 次元球面 S^2 は,

$$p(u, v) = (r \cos u \cos v, \alpha + r \cos u \sin v, r \sin u) \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq v \leq 2\pi\right)$$

と表される.

$$\begin{aligned} p_u &= (-r \sin u \cos v, -r \sin u \sin v, r \cos u), \\ p_v &= (-r \cos u \sin v, r \cos u \cos v, 0), \\ p_u \times p_v &= (-r^2 \cos^2 u \cos v, -r^2 \cos^2 u \sin v, -r^2 \sin u \cos u), \quad |p_u \times p_v| = \frac{r \cos u}{\sin u}, \\ \nu &= \frac{p_u \times p_v}{|p_u \times p_v|} = (-r \sin u \cos u \cos v, -r \sin u \cos u \sin v, -r \sin^2 u), \\ p_{uu} &= (-r \cos u \cos v, -r \cos u \sin v, -r \sin u), \\ p_{uv} &= (r \sin u \sin v, -r \sin u \cos v, 0), \\ p_{vv} &= (-r \cos u \cos v, -r \cos u \sin v, 0). \end{aligned}$$

よって, 第 1 基本量 E, F, G と第 2 基本量 L, M, N は

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{\sin^2 u}, \quad F = 0, \quad G = \frac{\cos^2 u}{\sin^2 u}, \\ L &= \frac{1}{\sin u}, \quad M = 0, \quad N = \frac{\cos^2 u}{\sin u} \end{aligned}$$

となる. これより, S^2 のガウス曲率は,

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \sin^2 u.$$

また, 面積要素 dA は, $dA = \frac{\cos u}{\sin^2 u} du dv$ であるので, S^2 の全曲率は,

$$\iint_{S^2} K dA = \int_0^{2\pi} dv \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos u du = 4\pi$$

となる.

3 上半空間内の回転面の全曲率

この章以後, 上半平面 \mathfrak{h} は xz 平面で考えるものとする.

3.1 トーラス型曲面の全曲率

定義 3.1. 上半平面 \mathfrak{h} 上の曲線

$$\gamma(u) = (f(u), g(u)) \quad (f(u) > 0, g(u) > 0)$$

を z 軸のまわりに 1 回転してできる曲面 S は,

$$p(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u))$$

で与えられる. この曲面 S を回転面という.

回転軸と交わらないようにして得られる曲面をトーラス型曲面ということとする。これから、全曲率を計算していくわけだが、計算が大変であるので、次の定理を使い、計算していく。

定理 3.2. 上半平面 \mathfrak{h} 上の曲線

$$\gamma(t) = (f(t), g(t)) \quad (f(t) > 0, g(t) > 0)$$

は閉区間 $[t_1, t_2]$ において、 $\dot{\gamma}(t) \neq \mathbf{0}$ であるとする。区間 $[t_1, t_2]$ に対応する弧長 $u = u(t)$ により、この曲線の弧長パラメータ表示が

$$\gamma(u) = (f(u), g(u)) \quad (u(t_1) \leq u \leq u(t_2))$$

であるとする。この曲線を z 軸のまわりに 1 回転してできる曲面は

$$p(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u)) \quad (u(t_1) \leq u \leq u(t_2), 0 \leq v \leq 2\pi)$$

で与えられる。この回転面を S とすると、 S の全曲率は

$$\iint_S K dA = -2\pi \frac{\dot{f}(t_2)}{g(t_2)} \frac{1}{\left. \frac{du}{dt} \right|_{t=t_2}} + 2\pi \frac{\dot{f}(t_1)}{g(t_1)} \frac{1}{\left. \frac{du}{dt} \right|_{t=t_1}}$$

となる。

証明. \mathfrak{h} 上の曲線 $\gamma(u)$ ($u(t_1) \leq u \leq u(t_2)$) の速度ベクトルの大きさは常に 1 であるから、

$$\frac{f'(u)^2 + g'(u)^2}{g(u)^2} = 1.$$

この式の両辺に $g(u)^2$ を掛けて u で微分して整理すると、

$$f'(u)f''(u) + g'(u)g''(u) = g(u)g'(u)$$

を得る。また、

$$\begin{aligned} p_u &= (f'(u) \cos v, f'(u) \sin v, g'(u)), \\ p_v &= (-f(u) \sin v, f(u) \cos v, 0), \\ p_u \times p_v &= (-f(u)g'(u) \cos v, -f(u)g'(u) \sin v, f(u)f'(u)), \quad |p_u \times p_v| = f(u), \\ \nu &= \frac{p_u \times p_v}{|p_u \times p_v|} = (-g'(u) \cos v, -g'(u) \sin v, f'(u)), \\ p_{uu} &= (f''(u) \cos v, f''(u) \sin v, g''(u)), \\ p_{uv} &= (-f'(u) \sin v, f'(u) \cos v, 0), \\ p_{vv} &= -(f(u) \cos v, f(u) \sin v, 0). \end{aligned}$$

よって、第 1 基本量 E, F, G と第 2 基本量 L, M, N は

$$\begin{aligned} E &= \frac{f'(u)^2 + g'(u)^2}{g(u)^2} = 1, \\ F &= \frac{-f(u)f'(u)\sin v \cos v + f(u)f'(u)\sin v \cos v}{g(u)^2} = 0, \\ G &= \frac{f(u)^2 \sin^2 v + f(u)^2 \cos^2 v}{g(u)^2} = \frac{f(u)^2}{g(u)^2}, \\ L &= \frac{-f''(u)g'(u)\cos^2 v - f''(u)g'(u)\sin^2 v + f'(u)g''(u)}{g(u)^2} = \frac{f'(u)g''(u) - f''(u)g'(u)}{g(u)^2}, \\ M &= \frac{f'(u)g'(u)\sin v \cos v - f'(u)g'(u)\sin v \cos v}{g(u)^2} = 0, \\ N &= \frac{f(u)g'(u)\sin^2 v + f(u)g'(u)\cos^2 v}{g(u)^2} = \frac{f(u)g'(u)}{g(u)^2} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $L = \frac{f'(u)g''(u) - f''(u)g'(u)}{g(u)^2}$ の両辺に $g'(u)$ をかけると、

$$L \cdot g'(u) = \frac{f'(u)g'(u)g''(u) - f''(u)g'(u)^2}{g(u)^2}$$

であるから、 $g'(u)^2 = g(u)^2 - f'(u)^2$ と $g'(u)g''(u) = g(u)g'(u) - f'(u)f''(u)$ より、

$$L \cdot g'(u) = \frac{f'(u)(g(u)g'(u) - f'(u)f''(u)) - f''(u)(g(u)^2 - f'(u)^2)}{g(u)^2} = \frac{g'(u)f'(u) - g(u)f''(u)}{g(u)}$$

なので、

$$L = \frac{g'(u)f'(u) - g(u)f''(u)}{g(u)g'(u)}$$

となり、ガウス曲率は、

$$K = \frac{\frac{f(u)(g'(u)f'(u) - g(u)f''(u))}{g(u)^3}}{\frac{f(u)^2}{g(u)^2}} = \frac{g'(u)f'(u) - g(u)f''(u)}{g(u)f(u)}.$$

また、面積要素 $dA = \sqrt{EG - F^2}dudv = \frac{f(u)}{g(u)}dudv$ であるので、 S の全曲率は

$$\begin{aligned} \iint_S K dA &= \iint_S \frac{g'(u)f'(u) - g(u)f''(u)}{g(u)^2} dudv \\ &= - \int_0^{2\pi} dv \int_{u(t_1)}^{u(t_2)} \frac{g(u)f''(u) - g'(u)f'(u)}{g(u)^2} du \\ &= -2\pi \left[\frac{f'(u)}{g(u)} \right]_{u(t_1)}^{u(t_2)} \\ &= -2\pi \left[\frac{\dot{f}(t)}{g(t)} \frac{dt}{du} \right]_{t_1}^{t_2} \\ &= -2\pi \frac{\dot{f}(t_2)}{g(t_2)} \frac{1}{\frac{du}{dt} \Big|_{t=t_2}} + 2\pi \frac{\dot{f}(t_1)}{g(t_1)} \frac{1}{\frac{du}{dt} \Big|_{t=t_1}} \end{aligned}$$

となる。よって、示せた。 □

例題 3.3. $\alpha, \beta > r > 0$ とする. 上半平面 \mathfrak{h} 上の円

$$\gamma(t) = (f(t), g(t)) = (\alpha + r \cos t, \beta + r \sin t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

に対し, $\dot{\gamma}(t) = (-r \sin t, r \cos t)$ である. 閉区間 $[0, t]$ に対応する弧長 $u = u(t)$ により, この円の弧長パラメータ表示が

$$\gamma(u) = (f(u), g(u))$$

であるとする. この円を z 軸のまわりに 1 回転してできるトーラス T は,

$$p(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u))$$

で与えられる. ここで,

$$\dot{f}(t) = -r \sin t, \quad \frac{du}{dt} = \frac{r}{g(t)}$$

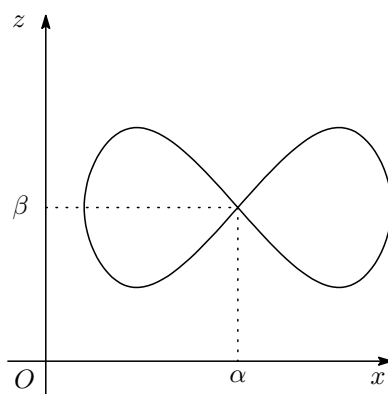
と定理 3.2 より, T の全曲率は

$$\iint_T K dA = -2\pi \frac{\dot{f}(2\pi)}{g(2\pi)} \frac{1}{\left. \frac{du}{dt} \right|_{t=2\pi}} + 2\pi \frac{\dot{f}(0)}{g(0)} \frac{1}{\left. \frac{du}{dt} \right|_{t=0}} = -2\pi \cdot \frac{0}{g(2\pi)} \cdot \frac{1}{\frac{r}{g(2\pi)}} + 2\pi \cdot \frac{0}{g(0)} \cdot \frac{1}{\frac{r}{g(0)}} = 0$$

となる.

例題 3.4. t でパラメータ表示された平面上の曲線 $\left(\frac{\cos t}{1 + \sin^2 t}, \frac{\sin t \cos t}{1 + \sin^2 t} \right)$ をレムニスケートという. α, β は x 軸, z 軸に交わらないように十分大きく取るとする. 上半平面 \mathfrak{h} 上のレムニスケート

$$\gamma(t) = (f(t), g(t)) = \left(\alpha + \frac{\cos t}{1 + \sin^2 t}, \beta + \frac{\sin t \cos t}{1 + \sin^2 t} \right) \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$



に対し, $\dot{\gamma}(t) = \left(-\frac{\sin t(3 - \sin^2 t)}{(1 + \sin^2 t)^2}, \frac{1 - 3\sin^2 t}{(1 + \sin^2 t)^2} \right)$ である. 閉区間 $[0, t]$ に対応する弧長 $u = u(t)$ により, この円の弧長パラメータ表示が

$$\gamma(u) = (f(u), g(u))$$

であるとする. この曲線を z 軸のまわりに 1 回転してできる曲面 S は,

$$p(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u))$$

で与えられる。ここで,

$$\dot{f}(t) = -\frac{\sin t(3 - \sin^2 t)}{(1 + \sin^2 t)^2}, \quad \frac{du}{dt} = \frac{1}{g(t)\sqrt{1 + \sin^2 t}}$$

と定理 3.2 より, S の全曲率は

$$\iint_S K dA = -2\pi \frac{\dot{f}(2\pi)}{g(2\pi)} \frac{1}{\left. \frac{du}{dt} \right|_{t=2\pi}} + 2\pi \frac{\dot{f}(0)}{g(0)} \frac{1}{\left. \frac{du}{dt} \right|_{t=0}} = -2\pi \cdot \frac{0}{g(2\pi)} \cdot \frac{1}{\frac{1}{g(2\pi)}} + 2\pi \cdot \frac{0}{g(0)} \cdot \frac{1}{\frac{1}{g(0)}} = 0$$

となる。

例題 3.5. $0 \leq k < \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} < k \leq 1$ とする。上半平面 \mathfrak{h} 上の曲線 $\gamma(t)$ を

$$\gamma(t) = (f(t), g(t)) = (\alpha + (1 - 2k \sin t) \cos t, \beta + (1 - 2k \sin t) \sin t) \quad \left(-\frac{3}{2}\pi \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

とする。ここで, α, β は x 軸, z 軸に交わらないように十分大きく取るとする。この曲線 $\gamma(t)$ に対し, $\dot{\gamma}(t) = (-\sin t - 2k \cos 2t, \cos t - 2k \sin 2t)$ である。閉区間 $\left[-\frac{3}{2}\pi, t\right]$ に対応する弧長 $u = u(t)$ により, この円の弧長パラメータ表示が

$$\gamma(u) = (f(u), g(u))$$

であるとする。この曲線を z 軸のまわりに 1 回転してできる曲面 S は,

$$p(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u))$$

で与えられる。ここで,

$$\dot{f}(t) = -\sin t - 2k \cos 2t, \quad \frac{du}{dt} = \frac{\sqrt{1 + 4k^2 - 4k \sin t}}{g(t)}$$

と定理 3.2 より, S の全曲率は

$$\iint_S K dA = -2\pi \frac{\dot{f}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{g\left(\frac{\pi}{2}\right)} \frac{1}{\left. \frac{du}{dt} \right|_{t=\frac{\pi}{2}}} + 2\pi \frac{\dot{f}\left(-\frac{3}{2}\pi\right)}{g\left(-\frac{3}{2}\pi\right)} \frac{1}{\left. \frac{du}{dt} \right|_{t=-\frac{3}{2}\pi}} = \frac{-2\pi(2k-1)}{|2k-1|} + \frac{2\pi(2k-1)}{|2k-1|} = 0$$

となる。

3.2 特異点つきトーラス型曲線の全曲率

曲線の中には速度ベクトル $\dot{\gamma}(t)$ が $\mathbf{0}$ となるようなものが一般に存在する。そのような $\dot{\gamma}(t) = \mathbf{0}$ となるような点を特異点ということとする。特異点を含む曲線を回転して得られる曲面の全曲率は, 定理 3.2 を用いて, 計算することができない。しかし, 特異点以外では, 定理 3.2 が成り立つことから, 次のような広義の弧長パラメータを導入し, 特異点を含む曲線を回転してできる曲面の全曲率の計算を考える。

定義 3.6. 曲線 $\gamma(t)$ に対し, $\dot{\gamma}(t_1) = \mathbf{0}$ とする。 $t_1 < \alpha$ に対し, $\lim_{\alpha \rightarrow t_1+0} \int_{\alpha}^t |\dot{\gamma}(\theta)| d\theta$ が収束するとき, $\gamma(t)$ は区間 $(t_1, t]$ で弧長パラメータ表示可能といい, その値を

$$u = \int_{t_1}^t |\dot{\gamma}(\theta)| d\theta = \lim_{\alpha \rightarrow t_1+0} \int_{\alpha}^t |\dot{\gamma}(\theta)| d\theta$$

と定義する. 区間 $[t_1, t)$ においても同様に極限を用いて定義される. このように閉区間以外に拡張された $u = u(t)$ を広義の弧長パラメータという.

定義 3.7. 曲線 $\gamma(t)$ に対し, $\dot{\gamma}(t_1) = \dot{\gamma}(t_2) = \mathbf{0}$ とする. t_1 と t_2 の間に適当な点 c を取ったとき, $\gamma(t)$ が区間 $(t_1, c]$ 及び, $[c, t_2)$ のいずれにおいても弧長パラメータ表示可能であるならば, $\gamma(t)$ は开区間 (t_1, t_2) で弧長パラメータ表示可能といい, 弧長パラメータ $u = u(t)$ を,

$$u = \int_{t_1}^c |\dot{\gamma}(\theta)| d\theta + \int_c^{t_2} |\dot{\gamma}(\theta)| d\theta$$

と定義する.

定理 3.8. 上半平面 \mathfrak{h} 上の曲線

$$\gamma(t) = (f(t), g(t)) \quad (f(t) > 0, g(t) > 0)$$

は点 $t = t_1, t_2$ において $\dot{\gamma}(t) = \mathbf{0}$ であるとする. 开区間 (t_1, t) に対応する広義の弧長 $u = u(t)$ により, この曲線の弧長パラメータ表示が

$$\gamma(u) = (f(u), g(u)) \quad (u(t_1) \leq u \leq u(t_2))$$

であるとする. この曲線を z 軸のまわりに 1 回転してできる曲面は

$$p(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u)) \quad (u(t_1) \leq u \leq u(t_2), 0 \leq v \leq 2\pi)$$

で与えられる. この回転面を S とすると, S の全曲率は

$$\iint_S K dA = -2\pi \lim_{t \rightarrow t_2-0} \frac{\dot{f}(t)}{g(t)} \frac{1}{\frac{du}{dt}} + 2\pi \lim_{t \rightarrow t_1+0} \frac{\dot{f}(t)}{g(t)} \frac{1}{\frac{du}{dt}}$$

となる.

証明. 定理 3.2 の証明と同様にして, $t = t_1, t_2$ のとき $\frac{du}{dt} = 0$ になることに注意して, 広義積分で考えると,

$$\iint_S K dA = -2\pi \left[\frac{\dot{f}(t)}{g(t)} \frac{dt}{du} \right]_{t_1}^{t_2} = -2\pi \lim_{t \rightarrow t_2-0} \frac{\dot{f}(t)}{g(t)} \frac{1}{\frac{du}{dt}} + 2\pi \lim_{t \rightarrow t_1+0} \frac{\dot{f}(t)}{g(t)} \frac{1}{\frac{du}{dt}}$$

が得られる. □

特異点を複数持つ曲線を回転して得られる曲面については, 次の定理のようにする.

定理 3.9. 上半平面 \mathfrak{h} 上の曲線

$$\gamma(t) = (f(t), g(t)) \quad (f(t) > 0, g(t) > 0)$$

は点 $t = t_1, c_1, c_2, \dots, c_{n-1}, c_n, t_2$ において $\dot{\gamma}(t) = \mathbf{0}$ であるとする. 开区間 $(t_1, c_1), (c_1, c_2), \dots, (c_n, t_2)$ に対応する広義の弧長 $u = u_i(t)$ により, この曲線の弧長パラメータ表示が

$$\gamma(u_i) = (f(u_i), g(u_i))$$

であるとする. この曲線を z 軸のまわりに 1 回転してできる曲面は

$$p(u_i, v) = (f(u_i) \cos v, f(u_i) \sin v, g(u_i))$$

で与えられる. この回転面を S とすると, S の全曲率は

$$\begin{aligned} \iint_S K dA &= -2\pi \lim_{t \rightarrow t_2-0} \frac{\dot{f}(t)}{g(t)} \frac{1}{\frac{du_{n+1}}{dt}} + 2\pi \lim_{t \rightarrow c_n+0} \frac{\dot{f}(t)}{g(t)} \frac{1}{\frac{du_{n+1}}{dt}} \\ &\quad - 2\pi \lim_{t \rightarrow c_n-0} \frac{\dot{f}(t)}{g(t)} \frac{1}{\frac{du_n}{dt}} + 2\pi \lim_{t \rightarrow c_{n-1}+0} \frac{\dot{f}(t)}{g(t)} \frac{1}{\frac{du_n}{dt}} - \dots \\ &\quad - 2\pi \lim_{t \rightarrow c_1-0} \frac{\dot{f}(t)}{g(t)} \frac{1}{\frac{du_1}{dt}} + 2\pi \lim_{t \rightarrow t_1+0} \frac{\dot{f}(t)}{g(t)} \frac{1}{\frac{du_1}{dt}} \end{aligned}$$

となる.

証明. 各開区間の広義の弧長による弧長パラメータを考え, 定理 3.8 を用いると, 得られる. \square

定理 3.9 の各開区間における弧長 u_i は t の式で表されるため, 本来は (t_1, t) などとそれぞれ書くべきである. しかし, この記法を採用すると, 記号が増えて紛らわしくなるから, 今後, 定理のように書くこととする. 以下では, 定理 3.8 と定理 3.9 を用いて具体的にいくつかの曲面の全曲率を計算してみる.

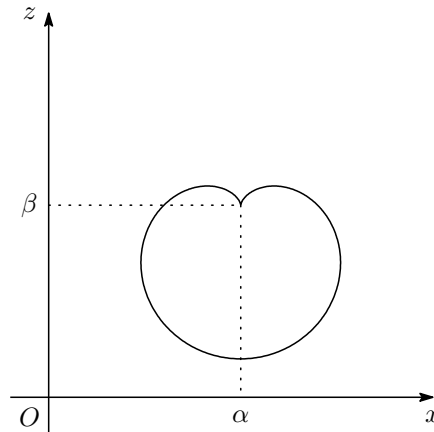
$0 \leq k \leq 1$ とする. 上半平面 \mathfrak{h} 上の曲線 $\gamma(t)$ を

$$\gamma(t) = (\alpha + (1 - 2k \sin t) \cos t, \beta + (1 - 2k \sin t) \sin t) \quad \left(-\frac{3}{2}\pi \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

と定める. この曲線は k が変化することによって, 形が変形していき, $k = \frac{1}{2}$ のときは $t = -\frac{3}{2}\pi, \frac{\pi}{2}$ に対応する点が特異点である. なお, $k \neq \frac{1}{2}$ のときに得られる回転面 $T(k)$ の全曲率は, 例題 3.5 で見た通りである. そこで, $k = \frac{1}{2}$ のときの回転面 $T\left(\frac{1}{2}\right)$ を構成し, 全曲率を計算する.

例題 3.10. 上半平面 \mathfrak{h} 上の曲線 $\gamma(t)$ を

$$\gamma(t) = (f(t), g(t)) = (\alpha + (1 - \sin t) \cos t, \beta + (1 - \sin t) \sin t) \quad \left(-\frac{3}{2}\pi \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right)$$



とする. ここで, α, β は x 軸, z 軸に交わらないように十分大きく取るとする. この曲線 $\gamma(t)$ に対し, $\dot{\gamma}(t) = (-\sin t - \cos 2t, \cos t - \sin 2t)$ である. 开区間 $\left(-\frac{3}{2}\pi, t\right)$ に対応する弧長 $u = u(t)$ により, この円の

弧長パラメータ表示が

$$\gamma(u) = (f(u), g(u))$$

であるとする. この曲線を z 軸のまわりに 1 回転してできる曲面 S は,

$$p(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u))$$

で与えられる. ここで, $-\frac{3}{2}\pi \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ のとき, $0 \leq \frac{t}{2} + \frac{3}{4}\pi \leq \pi$ であるので,

$$\dot{f}(t) = -\sin t - \cos 2t,$$

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{\sqrt{2-2\sin t}}{g(t)} \\ &= \frac{\sqrt{2\left(\cos \frac{t}{2} - \sin \frac{t}{2}\right)^2}}{g(t)} \\ &= \frac{\sqrt{2}\left|\cos \frac{t}{2} - \sin \frac{t}{2}\right|}{g(t)} \\ &= \frac{2\left|\sin\left(\frac{t}{2} + \frac{3}{4}\pi\right)\right|}{g(t)} \\ &= \frac{2\sin\left(\frac{t}{2} + \frac{3}{4}\pi\right)}{g(t)} \end{aligned}$$

と定理 3.8 より, S の全曲率は

$$\begin{aligned} \iint_S K dA &= -2\pi \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \frac{-\sin t - \cos 2t}{2\sin\left(\frac{t}{2} + \frac{3}{4}\pi\right)} + 2\pi \lim_{t \rightarrow -\frac{3}{2}\pi+0} \frac{-\sin t - \cos 2t}{2\sin\left(\frac{t}{2} + \frac{3}{4}\pi\right)} \\ &= -2\pi \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \frac{-\cos t + 2\sin 2t}{\cos\left(\frac{t}{2} + \frac{3}{4}\pi\right)} + 2\pi \lim_{t \rightarrow -\frac{3}{2}\pi+0} \frac{-\cos t + 2\sin 2t}{\cos\left(\frac{t}{2} + \frac{3}{4}\pi\right)} \\ &= -2\pi \cdot 0 + 2\pi \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる.

定義 3.11. 原点を中心とする半径 a の定円に, 半径 b の円 C が外接しながら滑ることなく回転するとき, 円 C 上の定円が描く曲線をエピサイクロイドといい, パラメータ表示は次で与えられる.

$$(x, z) = \left((a+b) \cos t - b \cos \frac{a+b}{b}t, (a+b) \sin t - b \sin \frac{a+b}{b}t, \right)$$

であり, 特に, $a = b$ のとき, カージオイド, $a = 2b$ のときネフロイドという.

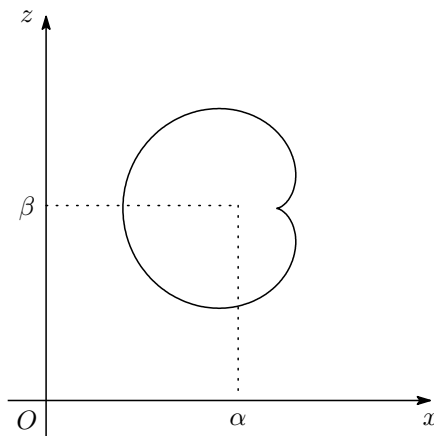
次に, エピサイクロイドを回転して得られる曲面の全曲率について考える. 簡単のため,

$$(a, b) = (1, 1), (2, 1), (3, 1)$$

のときを計算する.

例題 3.12. 上半平面 \mathfrak{h} 上のカージオイドを

$$\gamma(t) = (f(t), g(t)) = (\alpha + 2 \cos t - \cos 2t, \beta + 2 \sin t - \sin 2t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$



とする. ここで, α, β は x 軸, z 軸に交わらないように十分大きく取るとする. この曲線 $\gamma(t)$ に対し, $\dot{\gamma}(t) = (-2 \sin t + 2 \sin 2t, 2 \cos t - 2 \cos 2t)$ であり, $\dot{\gamma}(t) = \mathbf{0}$ となるのは, $t = 0, 2\pi$ のときである. 开区間 $(0, 2\pi)$ に対応する弧長 $u = u(t)$ により, この円の弧長パラメータ表示が

$$\gamma(u) = (f(u), g(u))$$

であるとする. この曲線を z 軸のまわりに 1 回転してできる曲面 S は,

$$p(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u))$$

で与えられる. ここで, $0 \leq t \leq 2\pi$ のとき, $0 \leq \frac{t}{2} \leq \pi$ であるので,

$$\dot{f}(t) = -2 \sin t + 2 \sin 2t, \quad \frac{du}{dt} = \frac{2\sqrt{2(1 - \cos t)}}{g(t)} = \frac{4 \sin \frac{t}{2}}{g(t)}$$

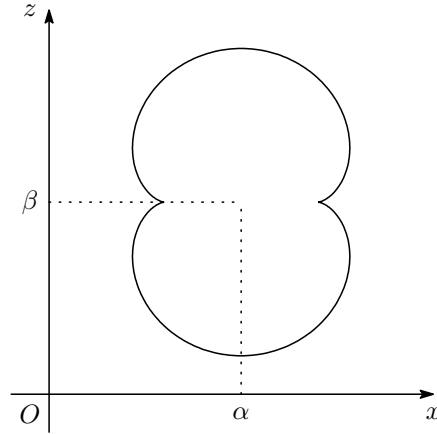
と定理 3.8 より, S の全曲率は

$$\begin{aligned} \iint_S K dA &= -2\pi \lim_{t \rightarrow 2\pi-0} \frac{-2 \sin t + 2 \sin 2t}{4 \sin \frac{t}{2}} + 2\pi \lim_{t \rightarrow +0} \frac{-2 \sin t + 2 \sin 2t}{4 \sin \frac{t}{2}} \\ &= -2\pi \lim_{t \rightarrow 2\pi-0} \frac{-2 \cos t + 4 \cos 2t}{2 \cos \frac{t}{2}} + 2\pi \lim_{t \rightarrow +0} \frac{-2 \cos t + 4 \cos 2t}{2 \cos \frac{t}{2}} \\ &= -2\pi \cdot (-1) + 2\pi \cdot 1 \\ &= 4\pi \end{aligned}$$

となる.

例題 3.13. 上半平面 \mathfrak{h} 上のネフロイドを

$$\gamma(t) = (f(t), g(t)) = (\alpha + 3 \cos t - \cos 3t, \beta + 3 \sin t - \sin 3t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$



とする. ここで, α, β は x 軸, z 軸に交わらないように十分大きく取るとする. この曲線 $\gamma(t)$ に対し, $\dot{\gamma}(t) = (-3\sin t + 3\sin 3t, 3\cos t - 3\cos 3t)$ であり, $\dot{\gamma}(t) = \mathbf{0}$ となるのは, $t = 0, \pi, 2\pi$ のときである. 開区間 $(0, \pi), (\pi, 2\pi)$ にそれぞれ対応する弧長 $u_i = u_i(t)$ により, この円の弧長パラメータ表示が

$$\gamma(u_i) = (f(u_i), g(u_i)) \quad (i = 1, 2)$$

であるとする. この曲線を z 軸のまわりに 1 回転してできる曲面 S は,

$$p(u_i, v) = (f(u_i) \cos v, f(u_i) \sin v, g(u_i))$$

で与えられる.

$$\dot{f}(t) = -3\sin t + 3\sin 3t, \quad \frac{du}{dt} = \frac{3\sqrt{2(1-\cos 2t)}}{g(t)} = \begin{cases} \frac{6\sin t}{g(t)} & (i = 1) \\ \frac{-6\sin t}{g(t)} & (i = 2) \end{cases}$$

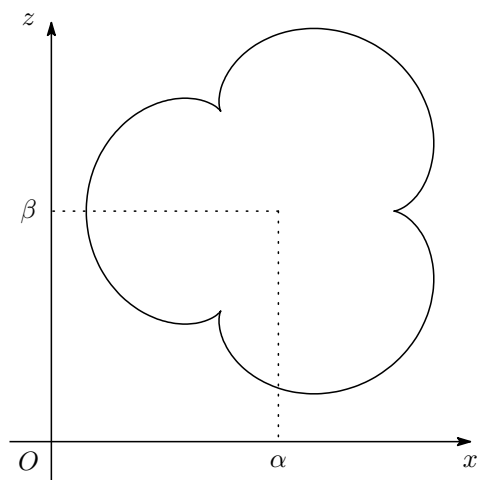
と定理 3.9 より, S の全曲率は

$$\begin{aligned} \iint_S K dA &= -2\pi \lim_{t \rightarrow \pi-0} \frac{-3\sin t + 3\sin 3t}{6\sin t} + 2\pi \lim_{t \rightarrow +0} \frac{-3\sin t + 3\sin 3t}{6\sin t} \\ &\quad - 2\pi \lim_{t \rightarrow 2\pi-0} \frac{-3\sin t + 3\sin 3t}{-6\sin t} + 2\pi \lim_{t \rightarrow \pi+0} \frac{-3\sin t + 3\sin 3t}{-6\sin t} \\ &= -2\pi \lim_{t \rightarrow \pi-0} \frac{-3\cos t + 9\cos 3t}{6\cos t} + 2\pi \lim_{t \rightarrow +0} \frac{-3\cos t + 9\cos 3t}{6\cos t} \\ &\quad - 2\pi \lim_{t \rightarrow 2\pi-0} \frac{-3\cos t + 9\cos 3t}{-6\cos t} + 2\pi \lim_{t \rightarrow \pi+0} \frac{-3\cos t + 9\cos 3t}{-6\cos t} \\ &= -2\pi \cdot 1 + 2\pi \cdot 1 - 2\pi \cdot (-1) + 2\pi \cdot (-1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる.

例題 3.14. 上半平面 \mathfrak{h} 上のエピサイクロイドを

$$\gamma(t) = (f(t), g(t)) = (\alpha + 4\cos t - \cos 4t, \beta + 4\sin t - \sin 4t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$



とする. ここで, α, β は x 軸, z 軸に交わらないように十分大きく取るとする. この曲線 $\gamma(t)$ に対し, $\dot{\gamma}(t) = (-4 \sin t + 4 \sin 4t, 4 \cos t - 4 \cos 4t)$ であり, $\dot{\gamma}(t) = \mathbf{0}$ となるのは, $t = 0, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi, 2\pi$ のときである. 开区間 $\left(0, \frac{2}{3}\pi\right), \left(\frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi\right), \left(\frac{4}{3}\pi, 2\pi\right)$ にそれぞれ対応する弧長 $u_i = u_i(t)$ により, この円の弧長パラメータ表示が

$$\gamma(u_i) = (f(u_i), g(u_i)) \quad (i = 1, 2, 3)$$

であるとする. この曲線を z 軸のまわりに 1 回転してできる曲面 S は,

$$p(u_i, v) = (f(u_i) \cos v, f(u_i) \sin v, g(u_i))$$

で与えられる.

$$\dot{f}(t) = -4 \sin t + 4 \sin 4t, \quad \frac{du}{dt} = \frac{4\sqrt{2(1 - \cos 3t)}}{g(t)} = \begin{cases} \frac{8 \sin \frac{3}{2}t}{g(t)} & (i = 1, 3) \\ -\frac{8 \sin \frac{3}{2}t}{g(t)} & (i = 2) \end{cases}$$

と定理 3.9 より, S の全曲率は

$$\begin{aligned}
\iint_S K dA &= -2\pi \lim_{t \rightarrow \frac{2}{3}\pi - 0} \frac{-4 \sin t + 4 \sin 4t}{8 \sin \frac{3}{2}t} + 2\pi \lim_{t \rightarrow +0} \frac{-4 \sin t + 4 \sin 4t}{8 \sin \frac{3}{2}t} \\
&\quad - 2\pi \lim_{t \rightarrow \frac{4}{3}\pi - 0} \frac{-4 \sin t + 4 \sin 4t}{-8 \sin \frac{3}{2}t} + 2\pi \lim_{t \rightarrow \frac{2}{3}\pi + 0} \frac{-4 \sin t + 4 \sin 4t}{-8 \sin \frac{3}{2}t} \\
&\quad - 2\pi \lim_{t \rightarrow 2\pi - 0} \frac{-4 \sin t + 4 \sin 4t}{8 \sin \frac{3}{2}t} + 2\pi \lim_{t \rightarrow \frac{4}{3}\pi + 0} \frac{-4 \sin t + 4 \sin 4t}{8 \sin \frac{3}{2}t} \\
&= -2\pi \lim_{t \rightarrow \frac{2}{3}\pi - 0} \frac{-4 \cos t + 16 \cos 4t}{12 \cos \frac{3}{2}t} + 2\pi \lim_{t \rightarrow +0} \frac{-4 \cos t + 16 \cos 4t}{12 \cos \frac{3}{2}t} \\
&\quad - 2\pi \lim_{t \rightarrow \frac{4}{3}\pi - 0} \frac{-4 \cos t + 16 \cos 4t}{-12 \cos \frac{3}{2}t} + 2\pi \lim_{t \rightarrow \frac{2}{3}\pi + 0} \frac{-4 \cos t + 16 \cos 4t}{-12 \cos \frac{3}{2}t} \\
&\quad - 2\pi \lim_{t \rightarrow 2\pi - 0} \frac{-4 \cos t + 16 \cos 4t}{12 \cos \frac{3}{2}t} + 2\pi \lim_{t \rightarrow \frac{4}{3}\pi + 0} \frac{-4 \cos t + 16 \cos 4t}{12 \cos \frac{3}{2}t} \\
&= -2\pi \cdot \frac{1}{2} + 2\pi \cdot 1 - 2\pi \cdot \frac{1}{2} + 2\pi \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 2\pi \cdot (-1) + 2\pi \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

となる.

定義 3.15. 原点を中心とする半径 a の定円に, 半径 b の円 C が内接しながら滑ることなく回転するとき, 円 C 上の定円が描く曲線をハイポサイクロイドといい, パラメータ表示は次で与えられる.

$$(x, z) = \left((a-b) \cos t + b \cos \frac{a-b}{b}t, (a-b) \sin t - b \sin \frac{a-b}{b}t, \right)$$

であり, 特に, $a = 4b$ のとき, アステロイドという.

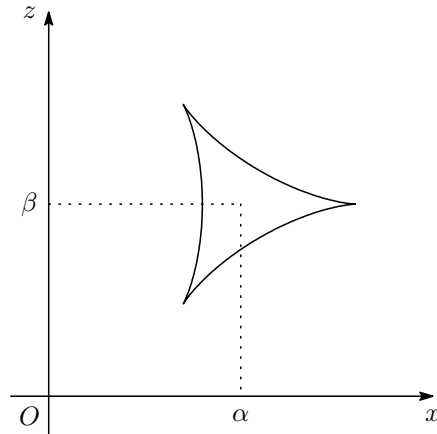
n を 3 以上の自然数として, $a = nb$ のとき, ハイポサイクロイドは等円方程式の解を特異点に持つ. ハイポサイクロイドを回転して得られる曲面の全曲率について考える. 簡単のため,

$$(a, b) = (3, 1), (4, 1)$$

のときを計算する.

例題 3.16. 上半平面 \mathfrak{h} 上のハイポサイクロイドを

$$\gamma(t) = (f(t), g(t)) = (\alpha + 2 \cos t + \cos 2t, \beta + 2 \sin t - \sin 2t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$



とする. ここで, α, β は x 軸, z 軸に交わらないように十分大きく取るとする. この曲線 $\gamma(t)$ に対し, $\dot{\gamma}(t) = (-2 \sin t - 2 \sin 2t, 2 \cos t - 2 \cos 2t)$ であり, $\dot{\gamma}(t) = \mathbf{0}$ となるのは, $t = 0, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi, 2\pi$ のときである. 开区間 $\left(0, \frac{2}{3}\pi\right), \left(\frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi\right), \left(\frac{4}{3}\pi, 2\pi\right)$ にそれぞれ対応する弧長 $u_i = u_i(t)$ により, この円の弧長パラメータ表示が⁸

$$\gamma(u_i) = (f(u_i), g(u_i)) \quad (i = 1, 2, 3)$$

であるとする. この曲線を z 軸のまわりに 1 回転してできる曲面 S は,

$$p(u_i, v) = (f(u_i) \cos v, f(u_i) \sin v, g(u_i))$$

で与えられる.

$$\dot{f}(t) = -2 \sin t - 2 \sin 2t, \quad \frac{du}{dt} = \frac{2\sqrt{2(1 - \cos 3t)}}{g(t)} = \begin{cases} \frac{4 \sin \frac{3}{2}t}{g(t)} & (i = 1, 3) \\ \frac{-4 \sin \frac{3}{2}t}{g(t)} & (i = 2) \end{cases}$$

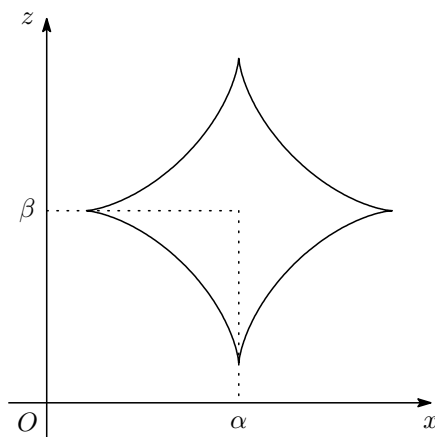
と定理 3.9 より, S の全曲率は

$$\begin{aligned}
\iint_S K dA &= -2\pi \lim_{t \rightarrow \frac{2}{3}\pi - 0} \frac{-2 \sin t - 2 \sin 2t}{4 \sin \frac{3}{2}t} + 2\pi \lim_{t \rightarrow +0} \frac{-2 \sin t - 2 \sin 2t}{4 \sin \frac{3}{2}t} \\
&\quad - 2\pi \lim_{t \rightarrow \frac{4}{3}\pi - 0} \frac{-2 \sin t - 2 \sin 2t}{-4 \sin \frac{3}{2}t} + 2\pi \lim_{t \rightarrow \frac{2}{3}\pi + 0} \frac{-2 \sin t - 2 \sin 2t}{-4 \sin \frac{3}{2}t} \\
&\quad - 2\pi \lim_{t \rightarrow 2\pi - 0} \frac{-2 \sin t - 2 \sin 2t}{4 \sin \frac{3}{2}t} + 2\pi \lim_{t \rightarrow \frac{4}{3}\pi + 0} \frac{-2 \sin t - 2 \sin 2t}{4 \sin \frac{3}{2}t} \\
&= -2\pi \lim_{t \rightarrow \frac{2}{3}\pi - 0} \frac{-2 \cos t - 4 \cos 2t}{6 \cos \frac{3}{2}t} + 2\pi \lim_{t \rightarrow +0} \frac{-2 \cos t - 4 \cos 2t}{6 \cos \frac{3}{2}t} \\
&\quad - 2\pi \lim_{t \rightarrow \frac{4}{3}\pi - 0} \frac{-2 \cos t - 4 \cos 2t}{-6 \cos \frac{3}{2}t} + 2\pi \lim_{t \rightarrow \frac{2}{3}\pi + 0} \frac{-2 \cos t - 4 \cos 2t}{-6 \cos \frac{3}{2}t} \\
&\quad - 2\pi \lim_{t \rightarrow 2\pi - 0} \frac{-2 \cos t - 4 \cos 2t}{6 \cos \frac{3}{2}t} + 2\pi \lim_{t \rightarrow \frac{4}{3}\pi + 0} \frac{-2 \cos t - 4 \cos 2t}{6 \cos \frac{3}{2}t} \\
&= -2\pi \cdot \frac{1}{2} + 2\pi \cdot 1 - 2\pi \cdot \frac{1}{2} + 2\pi \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 2\pi \cdot (-1) + 2\pi \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

となる.

例題 3.17. 上半平面 \mathfrak{h} 上のアステロイドを

$$\gamma(t) = (f(t), g(t)) = (\alpha + 3 \cos t + \cos 3t, \beta + 3 \sin t - \sin 3t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$



とする. ここで, α, β は x 軸, z 軸に交わらないように十分大きく取るとする. この曲線 $\gamma(t)$ に対し, $\dot{\gamma}(t) = (-3 \sin t - 3 \sin 3t, 3 \cos t - 3 \cos 3t)$ であり, $\dot{\gamma}(t) = \mathbf{0}$ となるのは, $t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi, 2\pi$ のときである. 开区間 $(0, \frac{\pi}{2}), (\frac{\pi}{2}, \pi), (\pi, \frac{3}{2}\pi), (\frac{3}{2}\pi, 2\pi)$ にそれぞれ対応する弧長 $u_i = u_i(t)$ により, この円の弧長パラメータ表示が

$$\gamma(u_i) = (f(u_i), g(u_i)) \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

であるとする. この曲線を z 軸のまわりに 1 回転してできる曲面 S は,

$$p(u_i, v) = (f(u_i) \cos v, f(u_i) \sin v, g(u_i))$$

で与えられる.

$$\dot{f}(t) = -3 \sin t - 3 \sin 3t, \quad \frac{du}{dt} = \frac{3\sqrt{2(1 - \cos 4t)}}{g(t)} = \begin{cases} \frac{6 \sin 2t}{g(t)} & (i = 1, 3) \\ \frac{-6 \sin 2t}{g(t)} & (i = 2, 4) \end{cases}$$

と定理 3.9 より, S の全曲率は

$$\begin{aligned} \iint_S K dA &= -2\pi \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \frac{-3 \sin t - 3 \sin 3t}{6 \sin 2t} + 2\pi \lim_{t \rightarrow +0} \frac{-3 \sin t - 3 \sin 3t}{6 \sin 2t} \\ &\quad - 2\pi \lim_{t \rightarrow \pi-0} \frac{-3 \sin t - 3 \sin 3t}{6 \sin 2t} + 2\pi \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}+0} \frac{-3 \sin t - 3 \sin 3t}{6 \sin 2t} \\ &\quad - 2\pi \lim_{t \rightarrow \frac{3}{2}\pi-0} \frac{-3 \sin t - 3 \sin 3t}{6 \sin 2t} + 2\pi \lim_{t \rightarrow \pi+0} \frac{-3 \sin t - 3 \sin 3t}{6 \sin 2t} \\ &\quad - 2\pi \lim_{t \rightarrow 2\pi-0} \frac{-3 \sin t - 3 \sin 3t}{6 \sin 2t} + 2\pi \lim_{t \rightarrow \frac{3}{2}\pi+0} \frac{-3 \sin t - 3 \sin 3t}{6 \sin 2t} \\ &= -2\pi \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \frac{-3 \cos t - 9 \cos 3t}{12 \cos 2t} + 2\pi \lim_{t \rightarrow +0} \frac{-3 \cos t - 9 \cos 3t}{12 \cos 2t} \\ &\quad - 2\pi \lim_{t \rightarrow \pi-0} \frac{-3 \cos t - 9 \cos 3t}{12 \cos 2t} + 2\pi \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}+0} \frac{-3 \cos t - 9 \cos 3t}{12 \cos 2t} \\ &\quad - 2\pi \lim_{t \rightarrow \frac{3}{2}\pi-0} \frac{-3 \cos t - 9 \cos 3t}{12 \cos 2t} + 2\pi \lim_{t \rightarrow \pi+0} \frac{-3 \cos t - 9 \cos 3t}{12 \cos 2t} \\ &\quad - 2\pi \lim_{t \rightarrow 2\pi-0} \frac{-3 \cos t - 9 \cos 3t}{12 \cos 2t} + 2\pi \lim_{t \rightarrow \frac{3}{2}\pi+0} \frac{-3 \cos t - 9 \cos 3t}{12 \cos 2t} \\ &= -2\pi \cdot 0 + 2\pi \cdot (-1) - 2\pi \cdot 1 + 2\pi \cdot 0 - 2\pi \cdot 0 + 2\pi \cdot 1 - 2\pi \cdot (-1) + 2\pi \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる.

3.3 りんご型曲面の全曲率

これまでの回転面は, 回転軸と交わらない曲線で考えるトーラス型曲面であった. 特異点を含む曲線は回転によって, 特異点集合が曲面上に筋となって現れた. これから考える曲面は, 回転面上に特異点集合が点として存在しているような曲面を考える. このとき得られる曲面をりんご型曲面ということとする. 平面曲線が特異点を持たないとき, 次の定理で全曲率を求めることができる.

定理 3.18. 上半平面 \mathfrak{h} 上の曲線

$$\gamma(t) = (f(t), g(t)) \quad (t_1 \leq t \leq t_2, g(t) > 0)$$

に対し, $f(t_1) = f(t_2) = 0$, 他の t では $f(t) > 0$ とする. 閉区間 $[t_1, t_2]$ に対応する弧長 $u = u(t)$ により, この曲線の弧長パラメータ表示が

$$\gamma(u) = (f(u), g(u))$$

であるとする. この曲線を z 軸のまわりに 1 回転してできる曲面は

$$p(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u))$$

で与えられる. この回転面を S とすると, S の全曲率は

$$\iint_S K dA = -2\pi \frac{\dot{f}(t_2)}{g(t_2)} \frac{1}{\frac{du}{dt} \Big|_{t=t_2}} + 2\pi \frac{\dot{f}(t_1)}{g(t_1)} \frac{1}{\frac{du}{dt} \Big|_{t=t_1}}$$

となる.

証明. 定理 3.2 と同様にして示される. □

また, 平面曲線が特異点を持つとき, 次の定理で全曲率を求めることができる.

定理 3.19. 上半平面 \mathfrak{h} 上の曲線

$$\gamma(t) = (f(t), g(t)) \quad (t_1 \leq t \leq t_2, g(t) > 0)$$

に対し, $f(t_1) = f(t_2) = 0$, 他の t では $f(t) > 0$ とし, $\dot{\gamma}(t_2) = \mathbf{0}$ とする. 区間 $[t_1, t]$ に対応する弧長 $u = u(t)$ により, この曲線の弧長パラメータ表示が

$$\gamma(u) = (f(u), g(u))$$

であるとする. この曲線を z 軸のまわりに 1 回転してできる曲面は

$$p(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u))$$

で与えられる. この回転面を S とすると, S の全曲率は

$$\iint_S K dA = -2\pi \lim_{t \rightarrow t_2-0} \frac{\dot{f}(t)}{g(t)} \frac{1}{\frac{du}{dt}} + 2\pi \frac{\dot{f}(t_1)}{g(t_1)} \frac{1}{\frac{du}{dt} \Big|_{t=t_1}}$$

となる. また, 上の条件において, 曲線 $\gamma(t)$ が $\dot{\gamma}(t_1) = \mathbf{0}$ も満たしているならば, 开区間 (t_1, t) に対応する弧長 $u = u(t)$ により, S の全曲率は,

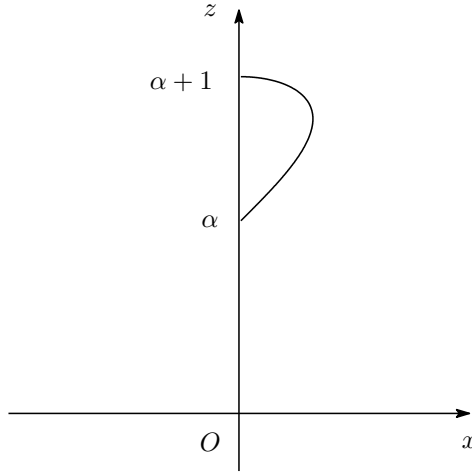
$$\iint_S K dA = -2\pi \lim_{t \rightarrow s_2-0} \frac{\dot{f}(t)}{g(t)} \frac{1}{\frac{du}{dt}} + 2\pi \lim_{t \rightarrow t_2-0} \frac{\dot{f}(t)}{g(t)} \frac{1}{\frac{du}{dt}}$$

となる.

証明. 定理 3.8 と同様にして得られる. □

例題 3.20. 例題 3.4 で考えたレムニスケートを $z = x$ に関して対称移動し, 制限した上半平面 \mathfrak{h} 上の曲線を

$$\gamma(t) = (f(t), g(t)) = \left(\frac{\sin t \cos t}{1 + \sin^2 t}, \alpha + \frac{\cos t}{1 + \sin^2 t} \right) \quad \left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}, \alpha > 0 \right)$$



とする. ただし, α は x 軸に交わらないように十分大きく取るとする. この曲線 $\gamma(t)$ に対して,

$$\dot{\gamma}(t) = \left(\frac{1 - 3\sin^2 t}{(1 + \sin^2 t)^2}, -\frac{\sin t(3 - \sin^2 t)}{(1 + \sin^2 t)^2} \right)$$

であり, 閉区間 $[0, t]$ に対応する弧長 $u = u(t)$ により, このレムニスケートの弧長パラメータ表示が

$$\gamma(u) = (f(u), g(u))$$

であるとする. この曲線を z 軸のまわりに 1 回転してできる曲面 S は

$$p(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u))$$

で与えられる.

$$\dot{f}(t) = \frac{1 - 3\sin^2 t}{(1 + \sin^2 t)^2}, \quad \frac{du}{dt} = \frac{1}{g(t)\sqrt{1 + \sin^2 t}}$$

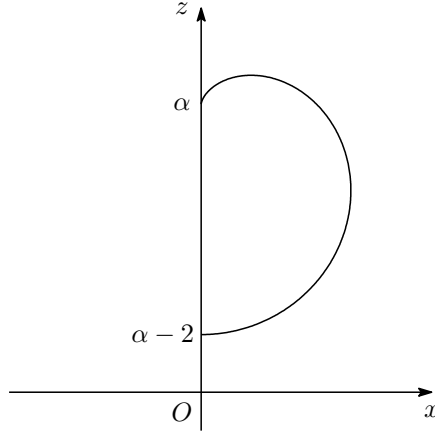
より, 定理 3.18 より, S の全曲率は,

$$\begin{aligned} \iint_S K dA &= -2\pi \frac{\dot{f}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{g\left(\frac{\pi}{2}\right)} \frac{1}{\frac{du}{dt}\Big|_{t=\frac{\pi}{2}}} + 2\pi \frac{\dot{f}(0)}{g(0)} \frac{1}{\frac{du}{dt}\Big|_{t=0}} \\ &= -2\pi \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \sqrt{2} + 2\pi \cdot 1 \cdot 1 \\ &= (2 + \sqrt{2})\pi \end{aligned}$$

となる.

例題 3.21. 上半平面 \mathfrak{h} 上の曲線を

$$\gamma(t) = (f(t), g(t)) = ((1 - \sin t) \cos t, \alpha + (1 - \sin t) \sin t) \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}, \alpha > 0\right)$$



とする. ただし, α は x 軸と交わらないように十分大きく取るとする. この曲線 $\gamma(t)$ に対し,

$$\dot{\gamma}(t) = (-\sin t - \cos 2t, \cos t - \sin 2t)$$

であり, $\dot{\gamma}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \mathbf{0}$ 閉区間 $\left[-\frac{\pi}{2}, t\right)$ に対応する弧長 $u = u(t)$ により, このレムニスケートの弧長パラメータ表示が

$$\gamma(u) = (f(u), g(u))$$

であるとする. この曲線を z 軸のまわりに 1 回転してできる曲面 $T\left(\frac{1}{2}\right)$ は

$$p(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u))$$

で与えられる.

$$\dot{f}(t) = -\sin t - \cos 2t, \quad \frac{du}{dt} = \frac{2 \sin\left(\frac{t}{2} + \frac{3}{4}\pi\right)}{g(t)}$$

より, 定理 3.19 より, $T\left(\frac{1}{2}\right)$ の全曲率は,

$$\begin{aligned} \iint_S K dA &= -2\pi \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0} \frac{\dot{f}(t)}{g(t)} \frac{1}{\frac{du}{dt}} + 2\pi \frac{\dot{f}\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{g\left(-\frac{\pi}{2}\right)} \frac{1}{\frac{du}{dt}} \bigg|_{t=-\frac{\pi}{2}} \\ &= -2\pi \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0} \frac{-\sin t - \cos 2t}{2 \sin\left(\frac{t}{2} + \frac{3}{4}\pi\right)} + 2\pi \cdot 1 \\ &= -2\pi \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0} \frac{-\cos t + 2 \sin 2t}{\cos\left(\frac{t}{2} + \frac{3}{4}\pi\right)} + 2\pi \\ &= 2\pi \end{aligned}$$

となる.

様々な回転面の全曲率を計算したが, どれもユークリッド空間で計算したものと同じ値となる. これは, 参考文献 [2] の定理 2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.5 と, 定理 3.2, 3.8, 3.9, 3.18, 3.19 を比較したとき, 計算式が同じになるため, ユークリッド空間で考えたときの全曲率と上半空間で考えたときの全曲率が一致する.

4 単位球内の曲面の曲率

単位球 D^3 を,

$$D^3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 - x^2 - y^2 - z^2 > 0\}$$

と表す. 平面で考えた際, 上半平面 h は $\varphi(z) = \frac{z-i}{z+i}$ によって, 単位円盤 D^2 に写った. 空間においては, 上半空間 \mathfrak{h}^+ を, 写像

$$\varphi^+(x, y, z) = \left(\frac{x^2 + y^2 + z^2 - 1}{x^2 + y^2 + (z+1)^2}, \frac{2y}{x^2 + y^2 + (z+1)^2}, \frac{-2x}{x^2 + y^2 + (z+1)^2} \right)$$

によって, 単位球 D^3 に写すことができる.

定義 4.1. 単位球 D^3 内の点 $P(x, y, z)$ での計量を, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ のとき,

$$(\mathbf{v}, \mathbf{w})_P^+ = \frac{4(v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3)}{(1 - x^2 - y^2 - z^2)^2}$$

で定義する.

定理 4.2. 上半空間 \mathfrak{h}^+ から単位球 D^3 への写像 φ^+ は計量を保つ.

証明. 上半空間 \mathfrak{h}^+ から単位球 D^3 への写像 φ^+ の $P(x, y, z)$ でのヤコビ行列は,

$$(D\varphi^+)_P = \frac{1}{\{x^2 + y^2 + (z+1)^2\}^2} \begin{pmatrix} 4x(z+1) & 4y(z+1) & -2\{x^2 + y^2 - (z+1)^2\} \\ -4xy & 2\{x^2 - y^2 + (z+1)^2\} & -4y(z+1) \\ 2\{x^2 - y^2 - (z+1)^2\} & 4xy & 4x(z+1) \end{pmatrix}$$

である. このとき, \mathbf{v}, \mathbf{w} を φ^+ で写した $(D\varphi^+)_P \mathbf{v}, (D\varphi^+)_P \mathbf{w}$ は,

$$(D\varphi^+)_P \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 4x(z+1)v_1 + 4y(z+1)v_2 - 2\{x^2 + y^2 - (z+1)^2\}v_3 \\ -4xyv_1 + 2\{x^2 - y^2 + (z+1)^2\}v_2 - 4y(z+1)v_3 \\ 2\{x^2 - y^2 - (z+1)^2\}v_1 + 4xyv_2 + 4x(z+1)v_3 \end{pmatrix},$$

$$(D\varphi^+)_P \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 4x(z+1)w_1 + 4y(z+1)w_2 - 2\{x^2 + y^2 - (z+1)^2\}w_3 \\ -4xyw_1 + 2\{x^2 - y^2 + (z+1)^2\}w_2 - 4y(z+1)w_3 \\ 2\{x^2 - y^2 - (z+1)^2\}w_1 + 4xyw_2 + 4x(z+1)w_3 \end{pmatrix}$$

となる. この2つのベクトルの計量は,

$$\begin{aligned}
& ((D\varphi^+)_P \mathbf{v}, (D\varphi^+)_P \mathbf{w})_{\varphi^+(P)}^+ \\
&= \frac{4}{\left[1 - \frac{(x^2+y^2+z^2-1)^2+4y^2+4x^2}{\{x^2+y^2+(z+1)^2\}^2}\right]^2} \frac{1}{\{x^2+y^2+(z+1)^2\}^4} \\
&\quad \times [\{16x^2(z+1)^2 + 16x^2y^2 + 4\{x^2-y^2-(z+1)^2\}^2\} v_1w_1 \\
&\quad + \{16y^2(z+1)^2 + 4\{x^2-y^2+(z+1)^2\}^2 + 16x^2y^2\} v_2w_2 \\
&\quad + \{4\{x^2+y^2-(z+1)^2\}^2 + 16y^2(z+1)^2 + 16x^2(z+1)^2\} v_3w_3 \\
&\quad + \{16xy(z+1)^2 - 8xy\{x^2-y^2+(z+1)^2\} + 8xy\{x^2-y^2-(z+1)^2\}\} (v_1w_2 + v_2w_1) \\
&\quad + \{-8y(z+1)\{x^2+y^2-(z+1)^2\} - 8y(z+1)\{x^2-y^2+(z+1)^2\} + 16x^2y(z+1)\} (v_2w_3 + v_3w_2) \\
&\quad + \{-8x(z+1)\{x^2+y^2-(z+1)^2\} + 16xy^2(z+1) + 8x(z+1)\{x^2-y^2-(z+1)^2\}\} (v_1w_3 + v_3w_1)] \\
&= \frac{1}{z^2\{x^2+y^2+(z+1)^2\}^2} [\{x^2-y^2-(z+1)^2\}^2 + 4x^2y^2 + 4x^2(z+1)^2] v_1w_1 \\
&\quad + \frac{1}{z^2\{x^2+y^2+(z+1)^2\}^2} [\{x^2-y^2+(z+1)^2\}^2 + 4x^2y^2 + 4y^2(z+1)^2] v_2w_2 \\
&\quad + \frac{1}{z^2\{x^2+y^2+(z+1)^2\}^2} [\{x^2+y^2-(z+1)^2\}^2 + 4y^2(z+1)^2 + 4x^2(z+1)^2] v_3w_3 \\
&= \frac{v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3}{z^2} = [\mathbf{v}, \mathbf{w}]_P^+.
\end{aligned}$$

よって, φ^+ は計量を保つ.

□

4.1 単位円盤 D^2 における曲線の曲率

単位円盤 D^2 における曲線の曲率を考える.

定義 4.3. 曲線 $\gamma(s) = (x(s), y(s)) \in D^2$ に対して,

$$\gamma''(s) + \frac{2\{x'(s)^2 + y'(s)^2\}}{1 - x(s)^2 - y(s)^2} \gamma(s) = \kappa(s) \mathbf{n}(s)$$

となるような $\kappa(s)$ が存在する.

定理 4.4. 単位円盤 D^2 での曲線のパラメータ表示が弧長パラメータ s で

$$\gamma(s) = (x(s), y(s)) \quad s \in [0, \text{Leg}(l)]$$

で書けるとき, その曲線の曲率 $\kappa(s)$ は,

$$\kappa(s) = \frac{4\{x'(s)y''(s) - x''(s)y'(s)\}\{1 - x(s)^2 - y(s)^2\} + 8\{x'(s)^2 + y'(s)^2\}\{x'(s)y(s) - x(s)y'(s)\}}{\{1 - x(s)^2 - y(s)^2\}^3}$$

となる.

証明. 弧長 $s = \int_a^t |\dot{\gamma}(\theta)| d\theta = \int_a^t \sqrt{\frac{4\{\dot{x}(\theta)^2 + \dot{y}(\theta)^2\}}{\{1 - x(\theta)^2 - y(\theta)^2\}^2}} d\theta$ とする. $t \in [a, b]$ のとき, $s \in [0, \text{Leg}(l)]$ である.

このとき, $\frac{ds}{dt} = |\dot{\gamma}(t)|$ であり, $\gamma'(s) = \frac{d\gamma}{ds} = \frac{d\gamma}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{d\gamma}{dt} \frac{1}{\frac{ds}{dt}} = \frac{\dot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t)|}$ なので, $|\gamma'(s)| = 1$. つまり,

$$\frac{4\{x'(s)^2 + y'(s)^2\}}{\{1 - x(s)^2 - y(s)^2\}^2} = 1.$$

この両辺を s で微分すると,

$$\begin{aligned}
& \frac{8(x'x'' + y'y'')(1 - x^2 - y^2) - 4(x'^2 + y'^2) \cdot (-2)(xx' + yy') \cdot 2(1 - x^2 - y^2)}{(1 - x^2 - y^2)^4} = 0 \\
& \iff \frac{(x'x'' + y'y'')(1 - x^2 - y^2) + 2(xx' + yy')(x'^2 + y'^2)}{(1 - x^2 - y^2)^3} = 0 \\
& \iff \frac{x'x'' + y'y'' + 2(xx' + yy') \frac{x'^2 + y'^2}{1 - x^2 - y^2}}{(1 - x^2 - y^2)^2} = 0 \\
& \iff \frac{x' \left(x'' + \frac{2(x'^2 + y'^2)}{1 - x^2 - y^2} x \right) + y' \left(y'' + \frac{2(x'^2 + y'^2)}{1 - x^2 - y^2} y \right)}{(1 - x^2 - y^2)^2} = 0 \\
& \iff \left(\gamma', \gamma'' + \frac{2(x'^2 + y'^2)}{1 - x^2 - y^2} \gamma \right)_{\gamma(s)} = 0
\end{aligned}$$

となる. これより, $\gamma'(s)$ と $\gamma''(s) + \frac{2(x'(s)^2 + y'(s)^2)}{1 - x(s)^2 - y(s)^2} \gamma(s)$ は直交している. $\mathbf{n}(s) = (-y'(s), x'(s))$ を考えると, これは $|\mathbf{n}(s)| = 1$ かつ, $\gamma'(s)$ と直交している. 以上より, $\gamma''(s) + \frac{2(x'(s)^2 + y'(s)^2)}{1 - x(s)^2 - y(s)^2} \gamma(s) = \kappa(s)\mathbf{n}(s)$ となるものが曲率 $\kappa(s)$ であるから,

$$\begin{aligned}
\kappa(s) &= (\kappa(s)\mathbf{n}(s), \mathbf{n}(s))_{\gamma(s)} \\
&= (\gamma''(s), \mathbf{n}(s))_{\gamma(s)} + \frac{2(x'(s)^2 + y'(s)^2)}{1 - x(s)^2 - y(s)^2} (\gamma(s), \mathbf{n}(s))_{\gamma(s)} \\
&= \frac{4\{x'(s)y''(s) - x''(s)y'(s)\}}{\{1 - x(s)^2 - y(s)^2\}^2} + \frac{2(x'(s)^2 + y'(s)^2)}{1 - x(s)^2 - y(s)^2} \frac{4\{x'(s)y(s) - x(s)y'(s)\}}{\{1 - x(s)^2 - y(s)^2\}^2} \\
&= \frac{4\{x'(s)y''(s) - x''(s)y'(s)\}\{1 - x(s)^2 - y(s)^2\} + 8\{x'(s)^2 + y'(s)^2\}\{x'(s)y(s) - x(s)y'(s)\}}{\{1 - x(s)^2 - y(s)^2\}^3}
\end{aligned}$$

となる. □

弧長パラメータを考えなくても, 一般のパラメータ t のまま曲率を求める方法が次の定理である.

定理 4.5. 単位円盤 D^2 での曲線のパラメータ表示が一般のパラメータ t で $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$ で書けるときの, その曲線の曲率 $\kappa(t)$ は,

$$\kappa(t) = \frac{\{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \ddot{x}(t)\dot{y}(t)\}\{1 - x(t)^2 - y(t)^2\}}{2\{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2\}^{\frac{3}{2}}} + \frac{\dot{x}(t)y(t) - x(t)\dot{y}(t)}{\{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2\}^{\frac{1}{2}}}$$

となる.

証明. $\gamma'(s) = \frac{d\gamma}{ds} = \frac{dt}{ds} \dot{\gamma}(t) = \frac{dt}{ds} (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$ である. これをさらに s で微分すると,

$$\gamma''(s) = \frac{dt}{ds} \left(\frac{dt}{ds} (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t)) \right) + \frac{d^2t}{ds^2} (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$$

である. ここで, $\mathbf{n}(s) = (-y'(s), x'(s)) = \frac{dt}{ds}(-\dot{y}(t), \dot{x}(t))$ であるから,

$$\begin{aligned}
\kappa(s) &= (\gamma''(s), \mathbf{n}(s))_{\gamma(s)} + \frac{2\{x'(s)^2 + y'(s)^2\}}{1 - x(s)^2 - y(s)^2} (\gamma(s), \mathbf{n}(s))_{\gamma(s)} \\
&= (\gamma''(s), \mathbf{n}(s))_{\gamma(s)} + \frac{1}{2} \{1 - x'(s)^2 - y'(s)^2\} (\gamma(s), \mathbf{n}(s))_{\gamma(s)} \\
&= \left(\frac{dt}{ds} \right)^3 ((\ddot{x}(t), \ddot{y}(t)), (-\dot{y}(t), \dot{x}(t)))_{\gamma(t)} + \frac{d^2t}{ds} \frac{dt}{ds} ((\dot{x}(t), \dot{y}(t)), (-\dot{y}(t), \dot{x}(t)))_{\gamma(t)} \\
&\quad + \frac{1}{2} \{1 - x(t)^2 - y(t)^2\} \frac{dt}{ds} ((x(t), y(t)), (-\dot{y}(t), \dot{x}(t)))_{\gamma(t)} \\
&= \frac{\{1 - x(t)^2 - y(t)^2\}^3}{8\{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2\}^{\frac{3}{2}}} \frac{4\{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \ddot{x}(t)\dot{y}(t)\}}{\{1 - x(t)^2 - y(t)^2\}^2} \\
&\quad + \frac{1}{2} \{1 - x(t)^2 - y(t)^2\} \frac{\{1 - x(t)^2 - y(t)^2\}}{2\{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2\}^{\frac{1}{2}}} \frac{4\{\dot{x}(t)y(t) - x(t)\dot{y}(t)\}}{\{1 - x(t)^2 - y(t)^2\}^2} \\
&= \frac{\{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \ddot{x}(t)\dot{y}(t)\}\{1 - x(t)^2 - y(t)^2\}}{2\{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2\}^{\frac{3}{2}}} + \frac{\dot{x}(t)y(t) - x(t)\dot{y}(t)}{\{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2\}^{\frac{1}{2}}}
\end{aligned}$$

となる. □

4.2 単位球内の曲面のガウス曲率と全曲率

上半空間の定義と同様にして, 曲面のガウス曲率と全曲率を定義する.

定義 4.6. 曲面 $S: p(u, v)$ の接ベクトル $p_u = p_u(u, v), p_v = p_v(u, v)$ の計量で与えられる 3 つの関数

$$E(u, v) = (p_u, p_u)_{p(u, v)}^+, \quad F(u, v) = (p_u, p_v)_{p(u, v)}^+, \quad G(u, v) = (p_v, p_v)_{p(u, v)}^+$$

を定義する. また, $p(u, v)$ の 2 回微分 p_{uu}, p_{uv}, p_{vv} と単位法線ベクトル ν の計量で与えられる 3 つの関数

$$L(u, v) = (p_{uu}, \nu)_{p(u, v)}^+, \quad M(u, v) = (p_{uv}, \nu)_{p(u, v)}^+, \quad N(u, v) = (p_{vv}, \nu)_{p(u, v)}^+$$

を定義する. 簡単のため, E, F, G, L, M, N と略記する.

上半空間のときと同様に, 定義 2.14, 2.15 のようにガウス曲率, 全曲率を定義する.

例題 4.7. $0 < r < 1$ とする. 半径 r の 2 次元球面 S^2 は,

$$p(u, v) = (r \cos u \cos v, r \cos u \sin v, r \sin u) \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq v \leq 2\pi \right)$$

と表される.

$$\begin{aligned}
p_u &= (-r \sin u \cos v, -r \sin u \sin v, r \cos u), \\
p_v &= (-r \cos u \sin v, r \cos u \cos v, 0), \\
p_u \times p_v &= (-r^2 \cos^2 u \cos v, -r^2 \cos^2 u \sin v, -r^2 \sin u \cos u), \quad |p_u \times p_v| = \frac{2r^2 \cos u}{1-r^2}, \\
\nu &= \frac{p_u \times p_v}{|p_u \times p_v|} = \left(-\frac{1}{2}(1-r^2) \cos u \cos v, -\frac{1}{2}(1-r^2) \cos u \sin v, -\frac{1}{2}(1-r^2) \sin u\right), \\
p_{uu} &= (-r \cos u \cos v, -r \cos u \sin v, -r \sin u), \\
p_{uv} &= (r \sin u \sin v, -r \sin u \cos v, 0), \\
p_{vv} &= (-r \cos u \cos v, -r \cos u \sin v, 0).
\end{aligned}$$

よって, 第 1 基本量 E, F, G と第 2 基本量 L, M, N は

$$\begin{aligned}
E &= \frac{4r^2}{(1-r^2)^2}, \quad F = 0, \quad G = \frac{4r^2 \cos^2 u}{(1-r^2)^2}, \\
L &= \frac{2r}{1-r^2}, \quad M = 0, \quad N = \frac{2r \cos^2 u}{1-r^2}
\end{aligned}$$

となる. これより, S^2 のガウス曲率は,

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{(1-r^2)^2}{4r^2}$$

また, 面積要素 dA は, $dA = \sqrt{EG - F^2} du dv = \frac{4r^2 \cos u}{(1-r^2)^2} du dv$ であるので, S^2 の全曲率は,

$$\iint_{S^2} K dA = \int_0^{2\pi} dv \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos u du = 4\pi$$

となる.

5 単位球内の回転面の全曲率

この章以後, 単位円盤 D^2 は xy 平面で考えるものとする.

定義 5.1. 単位円盤 D^2 上の曲線

$$\gamma(u) = (f(u), g(u)) \quad (1 - f(u)^2 - g(u)^2 > 0)$$

を x 軸のまわりに 1 回転してできる曲面 S は,

$$p(u, v) = (f(u), g(u) \cos v, g(u) \sin v)$$

で与えられる.

上半空間のときと同様にして, 特異点無しトーラス型曲面, 特異点つきトーラス型曲面, りんご型曲面の全曲率を計算していく. その際, 計算が大変であるため, 次の定理を使い, 計算する.

定理 5.2. 単位円盤 D^2 上の曲線

$$\gamma(s) = (f(t), g(t)) \quad (1 - f(t)^2 - g(t)^2 > 0, g(t) > 0)$$

は, 閉区間 $[t_1, t_2]$ において, $\dot{\gamma}(t) \neq 0$ であるとする. 区間 $[t_1, t_2]$ に対応する弧長 $u = u(t)$ により, この曲線の弧長パラメータ表示が,

$$\gamma(u) = (f(u), g(u)) \quad (u(t_1) \leq u \leq u(t_2))$$

であるとする. この曲線を x 軸のまわりに 1 回転してできる曲面は,

$$p(u, v) = (f(u), g(u) \cos v, g(u) \sin v) \quad (u(t_1) \leq u \leq u(t_2), 0 \leq v \leq 2\pi)$$

で与えられる. この回転面を S とすると, S の全曲率は,

$$\iint_S K dA = -2\pi \frac{2\dot{g}(t_2)}{1 - f(t_2)^2 - g(t_2)^2} \frac{1}{\frac{du}{dt} \Big|_{t=t_2}} + 2\pi \frac{2\dot{g}(t_1)}{1 - f(t_1)^2 - g(t_1)^2} \frac{1}{\frac{du}{dt} \Big|_{t=t_1}}$$

となる.

証明. 単位円盤 D^2 上の曲線 $\gamma(u)$ ($u(t_1) \leq u \leq u(t_2)$) の速度ベクトルの大きさは常に 1 であるから,

$$\frac{4\{f'(u)^2 + g'(u)^2\}}{\{1 - f(u)^2 - g(u)^2\}^2} = 1.$$

この式の両辺に $\{1 - f(u)^2 - g(u)^2\}^2$ を掛けて u で微分して整理すると,

$$2\{f'(u)f''(u) + g'(u)g''(u)\} = \{f(u)^2 + g(u)^2 - 1\}\{f(u)f'(u) + g(u)g'(u)\}$$

を得る. また,

$$\begin{aligned} p_u &= (f'(u), g'(u) \cos v, g'(u) \sin v), \\ p_v &= (0, -g(u) \sin v, g(u) \cos v), \\ p_u \times p_v &= (g(u)g'(u), -f'(u)g(u) \cos v, -f'(u)g(u) \sin v), \quad |p_u \times p_v| = g(u), \\ \nu &= \frac{p_u \times p_v}{|p_u \times p_v|} = (g'(u), -f'(u) \cos v, -f'(u) \sin v), \\ p_{uu} &= (f''(u), g''(u) \cos v, g''(u) \sin v), \\ p_{uv} &= (0, -g'(u) \sin v, g'(u) \cos v), \\ p_{vv} &= (0, -g(u) \cos v, -g(u) \sin v). \end{aligned}$$

よって, 第 1 基本量 E, F, G と第 2 基本量 L, M, N は

$$\begin{aligned} E &= \frac{4\{f'(u)^2 + g'(u)^2\}}{\{1 - f(u)^2 - g(u)^2\}^2} = 1, \\ F &= \frac{4\{-g(u)g'(u) \sin v \cos v + g(u)g'(u) \sin v \cos v\}}{\{1 - f(u)^2 - g(u)^2\}^2} = 0, \\ G &= \frac{4\{g(u)^2 \sin^2 v + g(u)^2 \cos^2 v\}}{\{1 - f(u)^2 - g(u)^2\}^2} = \frac{4g(u)^2}{\{1 - f(u)^2 - g(u)^2\}^2}, \\ L &= \frac{4\{f''(u)g'(u) \cos^2 v + f''(u)g'(u) \sin^2 v - f'(u)g''(u)\}}{\{1 - f(u)^2 - g(u)^2\}^2} = \frac{4\{f''(u)g'(u) - f'(u)g''(u)\}}{\{1 - f(u)^2 - g(u)^2\}^2}, \\ M &= \frac{4\{f'(u)g'(u) \sin v \cos v - f'(u)g'(u) \sin v \cos v\}}{\{1 - f(u)^2 - g(u)^2\}^2} = 0, \\ N &= \frac{4\{f'(u)g(u) \sin^2 v + f'(u)g(u) \cos^2 v\}}{\{1 - f(u)^2 - g(u)^2\}^2} = \frac{4f'(u)g(u)}{\{1 - f(u)^2 - g(u)^2\}^2} \end{aligned}$$

となる. ここで, $L = \frac{4\{f''(u)g'(u) - f'(u)g''(u)\}}{\{1 - f(u)^2 - g(u)^2\}^2}$ の両辺に $f'(u)$ をかけると,

$$L \cdot f'(u) = \frac{4\{f'(u)f''(u)g'(u) - f'(u)^2g''(u)\}}{\{1 - f(u)^2 - g(u)^2\}^2}$$

であるから,

$$\begin{aligned} f'(u)^2 &= \frac{\{1 - f(u)^2 - g(u)^2\}^2}{4} - g(u)^2, \\ f'(u)f''(u) &= \frac{\{f(u)^2 + g(u)^2 - 1\}\{f(u)f'(u) + g(u)g'(u)\}}{2} - g'(u)g''(u). \end{aligned}$$

これらより,

$$L \cdot f'(u) = \frac{-2\{f(u)f'(u) + g(u)g'(u)\}g'(u) - \{1 - f(u)^2 - g(u)^2\}g''(u)}{1 - f(u)^2 - g(u)^2}$$

なので,

$$L = \frac{-2\{f(u)f'(u) + g(u)g'(u)\}g'(u) - \{1 - f(u)^2 - g(u)^2\}g''(u)}{\{1 - f(u)^2 - g(u)^2\}f'(u)}$$

となり, ガウス曲率は,

$$\begin{aligned} K &= \frac{\frac{-2\{f(u)f'(u) + g(u)g'(u)\}g'(u) - \{1 - f(u)^2 - g(u)^2\}g''(u)}{\{1 - f(u)^2 - g(u)^2\}f'(u)} \cdot \frac{4f'(u)g(u)}{\{1 - f(u)^2 - g(u)^2\}^2}}{\frac{4g(u)^2}{\{1 - f(u)^2 - g(u)^2\}^2}} \\ &= \frac{-2\{f(u)f'(u) + g(u)g'(u)\}g'(u) - \{1 - f(u)^2 - g(u)^2\}g''(u)}{\{1 - f(u)^2 - g(u)^2\}g(u)}. \end{aligned}$$

また, 面積要素 $dA = \sqrt{EG - F^2}dudv = \frac{2g(u)}{1 - f(u)^2 - g(u)^2}dudv$ であるので, S の全曲率は

$$\begin{aligned} \iint_S K dA &= \iint_S \frac{-4\{f(u)f'(u) + g(u)g'(u)\}g(u) - 2\{1 - f(u)^2 - g(u)^2\}g''(u)}{\{1 - f(u)^2 - g(u)^2\}^2} dudv \\ &= - \int_0^{2\pi} dv \int_{u(t_1)}^{u(t_2)} \frac{-4\{f(u)f'(u) + g(u)g'(u)\}g(u) - 2\{1 - f(u)^2 - g(u)^2\}g''(u)}{\{1 - f(u)^2 - g(u)^2\}^2} du \\ &= -2\pi \left[\frac{2g'(u)}{1 - f(u)^2 - g(u)^2} \right]_{u(t_1)}^{u(t_2)} \\ &= -2\pi \frac{2g'(u(t_2))}{1 - f(u(t_2))^2 - g(u(t_2))^2} + 2\pi \frac{2g'(u(t_1))}{1 - f(u(t_1))^2 - g(u(t_1))^2} \\ &= -2\pi \frac{2\dot{g}(t_2)}{1 - f(t_2)^2 - g(t_2)^2} \frac{dt}{du} \Big|_{t=t_2} + 2\pi \frac{2\dot{g}(t_1)}{1 - f(t_1)^2 - g(t_1)^2} \frac{dt}{du} \Big|_{t=t_1} \\ &= -2\pi \frac{2\dot{g}(t_2)}{1 - f(t_2)^2 - g(t_2)^2} \frac{1}{\frac{du}{dt} \Big|_{t=t_2}} + 2\pi \frac{2\dot{g}(t_1)}{1 - f(t_1)^2 - g(t_1)^2} \frac{1}{\frac{du}{dt} \Big|_{t=t_1}} \end{aligned}$$

となる. よって, 示せた. □

また, 上半空間のときと同様に, 広義の弧長パラメータを考えることで, 次の定理が成り立つ.

定理 5.3. 単位円盤 D^2 上の曲線

$$\gamma(t) = (f(t), g(t)) \quad (1 - f(t)^2 - g(t)^2 > 0, g(t) > 0)$$

は点 $t = t_1, t_2$ において $\dot{\gamma}(t) = \mathbf{0}$ であるとする. 開区間 (t_1, t) に対応する広義の弧長 $u = u(t)$ により, この曲線の弧長パラメータ表示が

$$\gamma(u) = (f(u), g(u)) \quad (u(t_1) \leq u \leq u(t_2))$$

であるとする. この曲線を x 軸のまわりに 1 回転してできる曲面は

$$p(u, v) = (f(u), g(u) \cos v, g(u) \sin v) \quad (u(t_1) \leq u \leq u(t_2), 0 \leq v \leq 2\pi)$$

で与えられる. この回転面を S とすると, S の全曲率は

$$\iint_S K dA = -2\pi \lim_{t \rightarrow t_2-0} \frac{2\dot{g}(t)}{1 - f(t)^2 - g(t)^2} \frac{1}{\frac{du}{dt}} + 2\pi \lim_{t \rightarrow t_1+0} \frac{2\dot{g}(t)}{1 - f(t)^2 - g(t)^2} \frac{1}{\frac{du}{dt}}$$

となる.

証明. 定理 5.2 の証明と同様にして, $t = t_1, t_2$ のとき, $\frac{du}{dt} = 0$ になることに注意して, 広義積分で考えると,

$$\begin{aligned} \iint_S K dA &= -2\pi \left[\frac{2\dot{g}(t)}{1 - f(t)^2 - g(t)^2} \frac{dt}{du} \right]_{t_1}^{t_2} \\ &= -2\pi \lim_{t \rightarrow t_2-0} \frac{2\dot{g}(t)}{1 - f(t)^2 - g(t)^2} \frac{1}{\frac{du}{dt}} + 2\pi \lim_{t \rightarrow t_1+0} \frac{2\dot{g}(t)}{1 - f(t)^2 - g(t)^2} \frac{1}{\frac{du}{dt}} \end{aligned}$$

が得られる. □

定理 5.4. xy 平面上の曲線

$$\gamma(t) = (f(t), g(t)) \quad (1 - f(t)^2 - g(t)^2 > 0)$$

は点 $t = t_1, c_1, c_2, \dots, c_{n-1}, c_n, t_2$ において $\dot{\gamma}(t) = \mathbf{0}$ であるとする. 開区間 $(t_1, c_1), (c_1, c_2), \dots, (c_n, t_2)$ に対応する広義の弧長 $u = u_i(t)$ により, この曲線の弧長パラメータ表示が

$$\gamma(u_i) = (f(u_i), g(u_i))$$

であるとする. この曲線を x 軸のまわりに 1 回転してできる曲面は

$$p(u_i, v) = (f(u_i), g(u_i) \cos v, g(u_i) \sin v)$$

で与えられる. この回転面を S とすると, S の全曲率は

$$\begin{aligned} \iint_S K dA &= -2\pi \lim_{t \rightarrow t_2-0} \frac{2\dot{g}(t)}{1 - f(t)^2 - g(t)^2} \frac{1}{\frac{du_{n+1}}{dt}} + 2\pi \lim_{t \rightarrow c_n+0} \frac{2\dot{g}(t)}{1 - f(t)^2 - g(t)^2} \frac{1}{\frac{du_{n+1}}{dt}} \\ &\quad - 2\pi \lim_{t \rightarrow c_n-0} \frac{2\dot{g}(t)}{1 - f(t)^2 - g(t)^2} \frac{1}{\frac{du_n}{dt}} + 2\pi \lim_{t \rightarrow c_{n-1}+0} \frac{2\dot{g}(t)}{1 - f(t)^2 - g(t)^2} \frac{1}{\frac{du_n}{dt}} - \dots \\ &\quad - 2\pi \lim_{t \rightarrow c_1-0} \frac{2\dot{g}(t)}{1 - f(t)^2 - g(t)^2} \frac{1}{\frac{du_1}{dt}} + 2\pi \lim_{t \rightarrow t_1+0} \frac{2\dot{g}(t)}{1 - f(t)^2 - g(t)^2} \frac{1}{\frac{du_1}{dt}} \end{aligned}$$

となる.

証明. 各開区間の広義の弧長による弧長パラメータを考え, 定理 5.3 を用いると, 得られる. \square

定理 5.5. D^2 上の曲線

$$\gamma(t) = (f(t), g(t)) \quad (t_1 \leq t \leq t_2, 1 - f(t)^2 - g(t)^2 > 0)$$

に対し, $g(t_1) = g(t_2) = 0$, 他の t では $g(t) > 0$ とする. 閉区間 $[t_1, t_2]$ に対応する弧長 $u = u(t)$ により, この曲線の弧長パラメータ表示が

$$\gamma(u) = (f(u), g(u))$$

であるとする. この曲線を x 軸のまわりに 1 回転してできる曲面は

$$p(u, v) = (f(u), f(u) \cos v, g(u) \sin v)$$

で与えられる. この回転面を S とすると, S の全曲率は

$$\iint_S K dA = -2\pi \frac{2\dot{g}(t_2)}{1 - f(t_2)^2 - g(t_2)^2} \frac{1}{\frac{du}{dt} \Big|_{t=t_2}} + 2\pi \frac{2\dot{g}(t_1)}{1 - f(t_1)^2 - g(t_1)^2} \frac{1}{\frac{du}{dt} \Big|_{t=t_1}}$$

となる.

証明. 定理 5.2 と同様にして示される. \square

定理 5.6. D^2 上の曲線

$$\gamma(t) = (f(t), g(t)) \quad (t_1 \leq t \leq t_2, 1 - f(t)^2 - g(t)^2 > 0)$$

に対し, $g(t_1) = g(t_2) = 0$, 他の t では $g(t) > 0$ とし, $\dot{\gamma}(t_2) = \mathbf{0}$ とする. 区間 $[t_1, t)$ に対応する弧長 $u = u(t)$ により, この曲線の弧長パラメータ表示が

$$\gamma(u) = (f(u), g(u))$$

であるとする. この曲線を z 軸のまわりに 1 回転してできる曲面は

$$p(u, v) = (f(u), f(u) \cos v, g(u) \sin v)$$

で与えられる. この回転面を S とすると, S の全曲率は

$$\iint_S K dA = -2\pi \lim_{t \rightarrow t_2-0} \frac{2\dot{g}(t)}{1 - f(t)^2 - g(t)^2} \frac{1}{\frac{du}{dt}} + 2\pi \frac{2\dot{g}(t_1)}{1 - f(t_1)^2 - g(t_1)^2} \frac{1}{\frac{du}{dt} \Big|_{t=t_1}}$$

となる. また, 上の条件において, 曲線 $\gamma(t)$ が $\dot{\gamma}(t_1) = \mathbf{0}$ も満たしているならば, 开区間 (t_1, t) に対応する弧長 $u = u(t)$ により, S の全曲率は,

$$\iint_S K dA = -2\pi \lim_{t \rightarrow t_2-0} \frac{2\dot{g}(t)}{1 - f(t)^2 - g(t)^2} \frac{1}{\frac{du}{dt}} + 2\pi \lim_{t \rightarrow t_2-0} \frac{2\dot{g}(t)}{1 - f(t)^2 - g(t)^2} \frac{1}{\frac{du}{dt}}$$

となる.

証明. 定理 5.4 と同様にして示される. \square

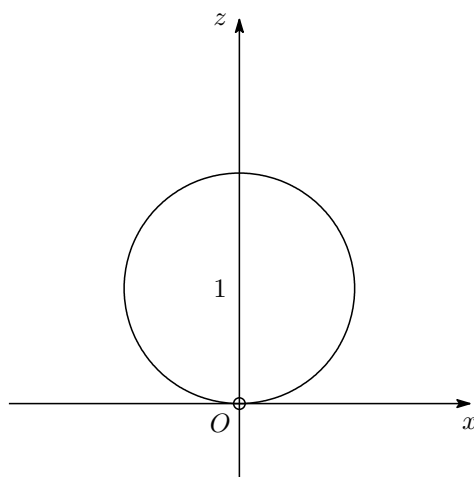
定理 5.2, 5.3, 5.4, 5.5, 5.6 は, 参考文献 [2] の定理 2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.5 を比較したとき, 計算式が同じになるため, ユークリッド空間で考えたときの全曲率と単位球で考えたときの全曲率は一致するため, 計算は省略する. 以上から, ユークリッド幾何学のときと非ユークリッド空間の全曲率は特異点の有無に関わらず, 同じになることがわかった.

6 曲線を $z = 0$ に限りなく近づけたときの曲率

上半平面 \mathfrak{h} は定義として, $z > 0$ で考えていた. ここで, 曲線のパラメータ表示を上手く取り, 曲線を $z = 0$ に限りなく近づけたときの曲線の曲率を求めてみる.

例題 6.1. 中心が $(0, 1)$, 半径が 1 の円は

$$\gamma(t) = (\cos t, 1 + \sin t) \quad \left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{3}{2}\pi \right)$$



とパラメータ表示することができる. この曲線 $\gamma(t)$ に対して,

$$\dot{\gamma}(t) = (-\sin t, \cos t), \quad \ddot{\gamma}(t) = (-\cos t, -\sin t)$$

より, 定理 2.8 を用いると, 曲率 $\kappa(t)$ は,

$$\kappa(t) = \frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{(\sin^2 t + \cos^2 t)^{\frac{3}{2}}} y(t) = 1 + \sin t$$

となる. このとき t を右から $-\frac{\pi}{2}$ に近づけると,

$$\lim_{t \rightarrow -\frac{\pi}{2}+0} \kappa(t) = \lim_{t \rightarrow -\frac{\pi}{2}+0} (1 + \sin t) = 1 - 1 = 0,$$

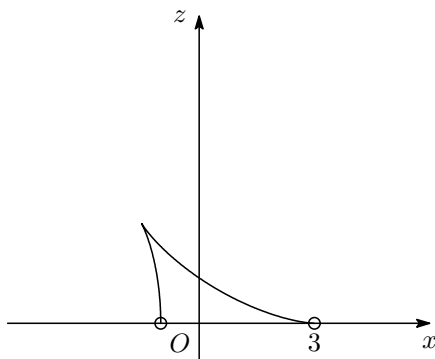
また, t を左から $\frac{3}{2}\pi$ に近づけると,

$$\lim_{t \rightarrow \frac{3}{2}\pi+0} \kappa(t) = \lim_{t \rightarrow \frac{3}{2}\pi+0} (1 + \sin t) = 1 - 1 = 0$$

となる.

例題 6.2. ハイポサイクロイド $\gamma(t)$ を

$$\gamma(t) = (2 \cos t + \cos 2t, 2 \sin t - \sin 2t) \quad (0 < t < \pi)$$



とする. この曲線 $\gamma(t)$ に対して,

$$\dot{\gamma}(t) = (-2 \sin t - 2 \sin 2t, 2 \cos t - 2 \cos 2t), \quad \ddot{\gamma}(t) = (-2 \cos t - 4 \cos 2t, -2 \sin t + 4 \sin 2t)$$

であるので, 定理 2.8 を用いると,

$$\begin{aligned} \kappa(t) &= \frac{-4(1 - \cos t \cos 2t + \sin t \sin 2t)}{\{8(1 - \cos t \cos 2t + \sin t \sin 2t)\}^{\frac{3}{2}}} (2 \sin t - \sin 2t) \\ &= \frac{\sin 2t - 2 \sin t}{8 |\sin \frac{3}{2}t|} \end{aligned}$$

となる. このとき t を右から 0 に近づけると,

$$\lim_{t \rightarrow +0} \kappa(t) = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\sin 2t - 2 \sin t}{8 \sin \frac{3}{2}t} = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{2 \cos 2t - 2 \cos t}{12 \cos \frac{3}{2}t} = \frac{2 - 2}{12} = 0.$$

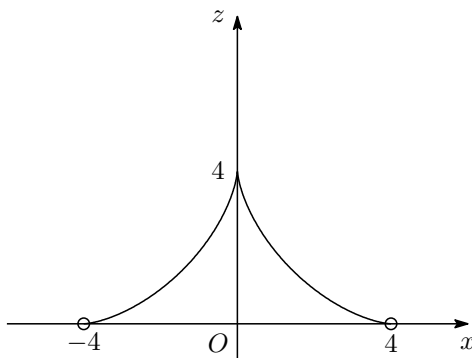
また, t を左から π に近づけると,

$$\lim_{t \rightarrow \pi-0} \kappa(t) = \lim_{t \rightarrow \pi-0} \frac{\sin 2t - 2 \sin t}{-8 \sin \frac{3}{2}t} = \frac{0 - 0}{8} = 0$$

となる.

例題 6.3. アステロイド $\gamma(t)$ を

$$\gamma(t) = (3 \cos t + \cos 3t, 3 \sin t - \sin 3t) \quad (0 < t < \pi)$$



とする. この曲線 $\gamma(t)$ に対して,

$$\dot{\gamma}(t) = (-3 \sin t - 3 \sin 3t, 3 \cos t - 3 \cos 3t), \quad \ddot{\gamma}(t) = (-3 \cos t - 9 \cos 3t, -3 \sin t + 9 \sin 3t)$$

であるので, 定理 2.8 を用いると,

$$\begin{aligned} \kappa(t) &= \frac{-18(1 - \cos t \cos 3t + \sin t \sin 3t)}{\{18(1 - \cos t \cos 3t + \sin t \sin 3t)\}^{\frac{3}{2}}} (3 \sin t - \sin 3t) \\ &= \frac{\sin 3t - 3 \sin t}{6|\sin 2t|} \end{aligned}$$

となる. このとき t を右から 0 に近づけると,

$$\lim_{t \rightarrow +0} \kappa(t) = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\sin 3t - 3 \sin t}{6 \sin 2t} = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{3 \cos 3t - 3 \cos t}{12 \cos 2t} = \frac{3 - 3}{12} = 0.$$

また, t を左から π に近づけると,

$$\lim_{t \rightarrow \pi-0} \kappa(t) = \lim_{t \rightarrow \pi-0} \frac{\sin 3t - 3 \sin t}{-6 \sin 2t} = \lim_{t \rightarrow \pi-0} \frac{3 \cos 3t - 3 \cos t}{-12 \cos 2t} = \frac{-3 + 3}{-12} = 0$$

となる. t を $\frac{\pi}{2}$ に近づけると,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}+0} \kappa(t) &= \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}+0} \frac{\sin 3t - 3 \sin t}{-6 \sin 2t} = \infty, \\ \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \kappa(t) &= \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \frac{\sin 3t - 3 \sin t}{6 \sin 2t} = -\infty \end{aligned}$$

である.

ふつう, 特異点での曲率は, 例題 6.3 の t を $\frac{\pi}{2}$ に近づけたときのように, 発散するはずである. 例題 6.2 において, $t = 0$ の点は, 特異点であるが, 曲率は 0 に収束している. また, 例題 6.3 においても, $t = 0, \pi$ の点は特異点であるが, 曲率は 0 に収束している.

定理 6.4. \mathfrak{h} 上の曲線

$$\gamma(t) = (f(t), g(t))$$

に対し, $f(t), g(t)$ が 2 次以上のべき級数の形で書けるとする. このとき, ある t_1 に対して, $\dot{\gamma}(t_1) = \mathbf{0}, g(t_1) = 0$ が成り立つとき,

$$\lim_{t \rightarrow t_1} \kappa(t) \equiv 0$$

が成り立つ.

証明. $f(t) = t^m, g(t) = t^n$ ($m, n \in \mathbb{N}$) とする. このとき,

$$\begin{aligned} \dot{f}(t) &= mt^{m-1}, \dot{g}(t) = nt^{n-1}, \\ \ddot{f}(t) &= m(m-1)t^{m-2}, \ddot{g}(t) = n(n-1)t^{n-2} \end{aligned}$$

であり, $\dot{\gamma}(t) = \mathbf{0}$ となるのは, $t = 0$ のときである. このとき, 曲率 $\kappa(t)$ は,

$$\kappa(t) = \frac{t^n \{mn(n-1)t^{m+n-3} - mn(m-1)t^{m+n-3}\}}{(m^2t^{2m-2} + n^2t^{2n-2})^{\frac{3}{2}}} = \frac{mn(n-m)t^{m+2n-3}}{(m^2t^{2m-2} + n^2t^{2n-2})^{\frac{3}{2}}}$$

である.

(i) $1 < m < n$ のとき,

この曲率 $\kappa(t)$ の分母の最低次の次数は $3m - 3$, 分子の最高次の次数は $m + 2n - 3$ である. $1 < m < n$ であることより, $0 < 3m - 3 < m + 2n - 3$ なので,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \kappa(t) = 0$$

が成り立つ.

(ii) $m = n$ のとき,

$\kappa(t)$ の分子の $n - m$ が 0 になるため,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \kappa(t) = 0$$

が成り立つ.

(iii) $m > n > 1$ のとき,

この曲率 $\kappa(t)$ の分母の最低次の次数は $3n - 3$, 分子の最高次の次数は $m + 2n - 3$ である. $m > n > 1$ であることより, $m + 2n - 3 > 3n - 3 > 0$ なので,

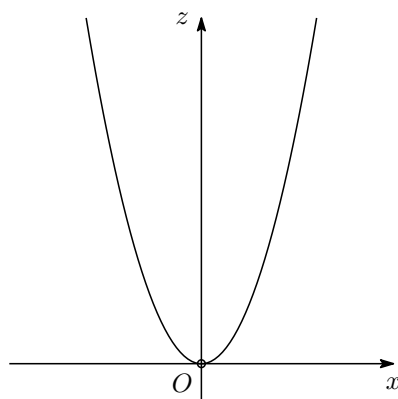
$$\lim_{t \rightarrow 0} \kappa(t) = 0$$

が成り立つ. これは $f(t), g(t)$ が 2 次以上のべき級数の形で書けているときも上と同じように, 最高次の次数を見ることで同様に示すことができる. \square

では, $f(t), g(t)$ のどちらかが 2 次以上のべき級数の形でないとき, 曲率はどのようなのだろうか.

例題 6.5. 放物線 $\gamma(t)$ を

$$\gamma(t) = (t, t^2) \quad (t \neq 0)$$



とする. この曲線 $\gamma(t)$ に対して,

$$\dot{\gamma}(t) = (1, 2t), \quad \ddot{\gamma}(t) = (0, 2)$$

であるので, 定理 2.8 を用いると, 曲率 $\kappa(t)$ は,

$$\kappa(t) = \frac{2t^2}{(1 + 4t^2)^{\frac{3}{2}}}$$

となる. このとき t を右から 0 に近づけると,

$$\lim_{t \rightarrow +0} \kappa(t) = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{2t^2}{(1+4t^2)^{\frac{3}{2}}} = 0.$$

また, t を左から 0 に近づけると,

$$\lim_{t \rightarrow -0} \kappa(t) = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{2t^2}{(1+4t^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

である.

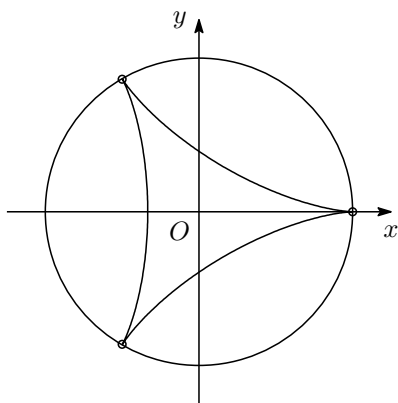
計量が定義されていない部分に近づけると, 曲率は 0 になりそうである. 計量が定義されていない部分に近づけたときに, 0 にならないような曲線 $\gamma(t)$ を見つける.

7 曲線を単位円盤に限りなく近づけたときの曲率

単位円盤 D^2 は定義として, 単位円盤の内部で考えており, 単位円盤上では計量が定義されていなかった. ここで, 曲線のパラメータ表示を上手に取り, 曲線を単位円盤に限りなく近づけたときの曲線の曲率を求めてみる.

例題 7.1. 単位円盤 D^2 上のハイポサイクロイドを

$$\gamma(t) = \left(\frac{2}{3} \cos t + \frac{1}{3} \cos 2t, \frac{2}{3} \sin t - \frac{1}{3} \sin 2t \right) \quad \left(0 < t < \frac{2}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi < t < \frac{4}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi < t < 2\pi \right)$$



とする. この曲線 $\gamma(t)$ に対して,

$$\dot{\gamma}(t) = \left(-\frac{2}{3} \sin t - \frac{2}{3} \sin 2t, \frac{2}{3} \cos t - \frac{2}{3} \cos 2t \right), \quad \ddot{\gamma}(t) = \left(-\frac{2}{3} \cos t - \frac{4}{3} \cos 2t, -\frac{2}{3} \sin t + \frac{4}{3} \sin 2t \right)$$

であるので, 定理 4.5 を用いると,

$$\begin{aligned} \kappa(t) &= -\frac{1}{6} \left| \sin \frac{3}{2}t \right| - \frac{1}{3} \left| \sin \frac{3}{2}t \right| \\ &= -\frac{1}{2} \left| \sin \frac{3}{2}t \right| \end{aligned}$$

となる. このとき, t を右から 0 に近づけると,

$$\lim_{t \rightarrow +0} \kappa(t) = \lim_{t \rightarrow +0} -\frac{1}{2} \left| \sin \frac{3}{2}t \right| = 0.$$

また, t を左から $\frac{2}{3}\pi$ に近づけると,

$$\lim_{t \rightarrow \frac{2}{3}\pi - 0} \kappa(t) = \lim_{t \rightarrow \frac{2}{3}\pi - 0} -\frac{1}{2} \left| \sin \frac{3}{2}t \right| = 0.$$

同様にして, 計算していくと,

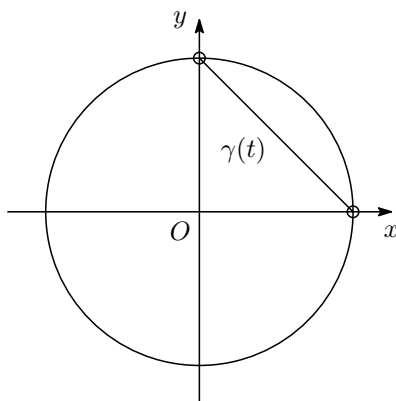
$$\lim_{t \rightarrow \frac{2}{3}\pi + 0} \kappa(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \frac{4}{3}\pi - 0} \kappa(t) = 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow \frac{4}{3}\pi + 0} \kappa(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow 2\pi - 0} \kappa(t) = 0$$

が得られる.

例題 7.2. 単位円盤 D^2 上の直線を

$$\gamma(t) = (t, -t + 1) \quad (0 < t < 1)$$



とする. この直線 $\gamma(t)$ に対して,

$$\dot{\gamma}(t) = (1, -1), \quad \ddot{\gamma}(t) = (0, 0)$$

であるので, 定理 4.5 を用いると,

$$\kappa(t) = \frac{-t + 1 - t \cdot (-1)}{\{1^2 + (-1)^2\}^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

となる. このとき, 曲率は一定となり, 単位円盤に限りなく近いときの直線の曲率が 0 とならない.

例題 7.3. 一般の直線 $\gamma(t)$ を

$$\gamma(t) = (t, at + b)$$

とし, a, b は $a^2 - b^2 + 1 > 0$ を満たすとする. このとき, 直線は単位円盤と 2 点で交わる. この直線 $\gamma(t)$ に対して,

$$\dot{\gamma}(t) = (1, a), \quad \ddot{\gamma}(t) = (0, 0)$$

であるので, 定理 4.5 を用いると,

$$\kappa(t) = \frac{at + b - at}{(1^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{b}{\sqrt{1 + a^2}}$$

となる. このとき, 曲率は一定となり, $b \neq 0$ のとき, 直線の曲率は 0 とならず, 単位円盤に限りなく近いときの曲率も 0 にならない.