

修士論文

特異点をもつトーラス型曲面の全曲率

三重大学大学院教育学研究科

教育科学専攻 理数・生活系教育領域

218M027 森谷 浩司
(幾何学専攻)

令和2年2月13日

序文

実平面上に表示された特異点をもつ閉曲線に対し、その回転面の全曲率を『トーラス型』と『リンゴ型』に分けて松田は求めている。(松田雄斗, (2019), 『回転面の全曲率に関する考察』, 三重大学大学院教育学研究科修士論文) [9]. 滑らかなトーラス型曲面の全曲率は 0 となるのだが、滑らかでないような、つまり特異点(速度ベクトルが $\mathbf{0}$ となるような点)を持つような閉曲線の回転面の全曲率は 0 とは限らない事が報告されている。例えばカージオイドでは、特異点を 12 時方向に持つ場合を基準として平面上で θ 回転させたものの回転面を考えると、その全曲率は $4\pi \cos \theta$ である。一方で、貼り合わせによって閉曲面を構成するという位相幾何学的な視点 [4] から考えると、先ほどのカージオイドの例のような特異点の方向の違いによる形の違いはない。滑らかな閉曲面においては「Gauss-Bonnet の定理」が微分幾何学と位相幾何学を橋渡ししているが、特異点を持つ閉曲面の場合には成り立っていないことになる。

また、実平面上に構成された閉曲線については田中・竹内の研究(竹内洋介, (2017), 『複素数を用いた平面曲線の全曲率の考察』, 三重大学大学院教育学研究科修士論文.) [5]、(田中健雄, (2017), 『曲線の変形における全曲率の変化』, 三重大学大学院教育学研究科修士論文.) [6]、(竹内洋介, 田中健雄, 新田貴士, (2017), 『特異点が存在する曲線と曲面の全曲率について』, 三重大学教育学部紀要第 69 巻.) [7] があり、回転数との関係を探っている。

本研究では田中・竹内にならって、松田の研究の一般化として、田中・竹内の研究した曲線を回転させてできたトーラス型曲面の全曲率をより体系的に求めることを目的としている。一般化するため、閉曲線を、実平面上ではなく複素平面上での表示にすることとした。パラメータ t に対し $z = e^{it}$ とし、その複素数 z のべき乗を用いて曲線 $\gamma(t)$ を表すとすると、 t による一階微分が $\dot{\gamma}(t) = iz \prod_{k=1}^n (z - e^{i\alpha_k})$ となると、閉曲線 $\gamma(t)$ の回転面の全曲率は $\iint_S K dA = 4\pi \sum_{k=1}^n \cos \frac{2\beta + \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n + (n+2)\alpha_k - (n-1-2k)\pi}{2}$ になるという結果が得られた。これにより、松田の結果がトーラス型については一般化できた。

目次

序文	i
1 準備	1
1.1 平面の曲線	1
1.2 空間の曲線	4
1.3 曲面	5
1.4 回転面の全曲率	8
2 複素平面上に表示された閉曲線に対する回転面の全曲率	10
2.1 $\dot{\gamma}(t) = c(z - e^{i\alpha})iz$ 型の回転面の全曲率	11
2.2 $\dot{\gamma}(t) = c(z - e^{i\alpha_1})(z - e^{i\alpha_2})iz$ 型の回転面の全曲率	13
2.3 $\dot{\gamma}(t) = c(z - e^{i\alpha_1})(z - e^{i\alpha_2})(z - e^{i\alpha_3})iz$ 型の回転面の全曲率	16
2.4 $\dot{\gamma}(t) = ciz \prod_{k=1}^n (z - e^{i\alpha_k})$ 型の回転面の全曲率	20
2.5 全曲率とガウス曲率の関係	25
参考文献	30

1 準備

この章では準備として平面の曲線、空間の曲線、曲面について定義すると共に、それについての定理を紹介する。

1.1 平面の曲線

まず最初に平面上の曲線、弧長パラメータ、曲率などの定義を行う。

定義 1. 平面 \mathbb{R}^2 の滑らかな曲線 γ とは、 $a, b \in \mathbb{R}$ によって定まる閉区間 $I = [a, b]$ の任意の要素 t に対して、 \mathbb{R}^2 の点 $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ が定まるものであり、 $\gamma(t)$ が t について少なくとも二階微分可能であるときをいう。このとき t を曲線 γ のパラメータという。また、滑らかな曲線の和となっているものを区分的に滑らかな曲線という。単に曲線という場合にはこの区分的に滑らかな曲線であることを意味するものとする。

定義 2. \mathbb{R}^2 の正則曲線 γ とは、 \mathbb{R}^2 中の曲線であって、正則性の仮定

$$\text{任意の } t \in I \text{ について } \gamma'(t) \neq \mathbf{0}$$

を満たすものをいう。

定義 3. $I = [a, b]$ とする。曲線 $\gamma(t)$ の始点と終点が一致する、すなわち

$$\gamma(a) = \gamma(b)$$

が成り立つとき、 $\gamma(t)$ を閉曲線という。

以後、曲線 $\gamma(t)$ は C^∞ 級の閉曲線を表すものとする。曲線 $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ をパラメータ t で 1 回微分したものを

$$\dot{\gamma}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$$

と表す。また、特に断りがない限り、 $\dot{\gamma}(t) \neq \mathbf{0}$ とする。ここで、曲線 $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ の閉区間 $[a, b]$ における長さを求めると

$$\int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt = \int_a^b \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} dt$$

となる。これは動点 $\gamma(t)$ が時刻 $t = a$ から $t = b$ までに動いた距離であるともいえる。初めの時刻 $t = a$ を固定し、 b の代わりに変数 t を用いて

$$s = \int_a^t |\dot{\gamma}(t)| dt$$

と書くと、 s は時刻 a から t の間に動点が動いた距離となり、 t の関数 $s = s(t)$ となる。 $\dot{\gamma}(t) \neq \mathbf{0}$ であるから微分積分学の基本定理より

$$\frac{ds}{dt} = |\dot{\gamma}(t)| > 0$$

である。よって、閉区間 $[a, b]$ 間の曲線 γ の長さを l とすると、 $s(t)$ は閉区間 $[a, b]$ から閉区間 $[0, l]$ への単調増加関数となり、 $[0, l] \rightarrow [a, b]$ で逆関数 $t = t(s)$ が存在する。逆関数定理から、この逆関数 $t(s)$ も s で微分可能であるので、これを用いて

$$\gamma(s) = \gamma(t(s)) \quad (0 \leq s \leq l)$$

というように曲線を新しいパラメータ s で表示することができる。そこで変数 s を次のように定義する。

定義 4. 正則曲線 $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ ($t \in I$) の閉区間 $[a, t]$ に対応する部分の長さを

$$s(t) = \int_a^t |\dot{\gamma}(t)| dt$$

とすると、この曲線は

$$\gamma(s) = (x(t(s)), y(t(s))) \quad (0 \leq s \leq l), \quad l = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt$$

とパラメータ s を用いて表示することができる。このパラメータ s を弧長パラメータという。

以下、一般のパラメータと弧長パラメータを区別するため、一般パラメータは変数 t を用い、弧長パラメータは変数 s を用いることとする。弧長パラメータ s による微分を $\gamma'(s)$ と表し、一般のパラメータ t での微分と区別する。つまり、特に断りない場合は次の意味となる。

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{dx}{dt}, \quad \dot{y} = \frac{dy}{dt}, \quad \dot{\gamma}(t) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right), \\ x' &= \frac{dx}{ds}, \quad y' = \frac{dy}{ds}, \quad \gamma'(s) = \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds} \right). \end{aligned}$$

$\dot{\gamma}(t) \neq \mathbf{0}$ であるから、弧長パラメータ s は t で微分すると、微分積分学の基本定理より

$$\frac{ds}{dt} = |\dot{\gamma}(t)| > 0$$

であった。 s で表示された曲線 $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ を微分すると、合成関数の微分法より

$$\gamma'(s) = \frac{d\gamma}{ds} = \frac{d\gamma}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{\dot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t)|}$$

となるから、 $|\gamma'(s)| \equiv 1$ である。すなわち弧長パラメータ表示された曲線の速度ベクトルの大きさは常に 1 となる。このことから、正則曲線 $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ ($s \in I$) に対して、 s が曲線 γ の弧長パラメータであると、任意の $s \in I$ に対して $|\gamma'(s)| = 1$ を満たすものであるとも言える。

定義 5. 曲線 $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ に対し、単位接ベクトル $\mathbf{e}(s)$ 、 $\gamma(s)$ の単位法線ベクトル $\mathbf{n}(s)$ を

$$\begin{aligned}\mathbf{e}(s) &= \gamma'(s) = (x'(s), y'(s)) \\ \mathbf{n}(s) &= (-y'(s), x'(s))\end{aligned}$$

で定める。 $\mathbf{e}(s)$ は速度ベクトルとも呼ばれる。

この単位法線ベクトル $\mathbf{n}(s)$ は、単位接ベクトル $\mathbf{e}(s)$ を進行方向左向きに 90° 回転して得られるベクトルである。ここで

$$\mathbf{e}'(s) = \gamma''(s)$$

を考える。 $|\gamma'(s)| = 1$ つまり $|\mathbf{e}(s)| = 1$ であったから

$$\mathbf{e}(s) \cdot \mathbf{e}(s) = 1$$

となる。この両辺を s で微分することにより

$$\mathbf{e}(s) \cdot \mathbf{e}'(s) = 0$$

が得られ、 $\mathbf{e}'(s)$ は $\mathbf{e}(s)$ に直交することがわかる。(この $\mathbf{e}'(s)$ を加速度ベクトルと呼ぶ。) $\mathbf{e}'(s)$ も $\mathbf{n}(s)$ も $\mathbf{e}(s)$ と直交することから、 $\mathbf{e}'(s)$ と $\mathbf{n}(s)$ は平行の関係となる。そこで次のような定数 $\kappa(s)$ を定義する。

定義 6. 曲線 $\gamma(s)$ に対し、

$$\mathbf{e}'(s) = \kappa(s)\mathbf{n}(s)$$

となるような定数 $\kappa(s)$ が存在する。この定数 $\kappa(s)$ を $\gamma(s)$ の曲率という。

単位法線ベクトル $\mathbf{n}(s)$ は、 $\mathbf{e}(s)$ を進行方向左向きに 90° 回転して得られるベクトルであったから、曲率 $\kappa(s)$ が正であれば、曲線 $\gamma(s)$ は進行方向に対して左向きに曲がっていることを意味し、曲率 $\kappa(s)$ が負であれば進行方向に対して右向きに曲がっていることを意味している。

定義 7. 曲線 $\gamma(s)$ ($a \leq s \leq b$) に対し、曲率を $\kappa(s)$ とする。 $\kappa(s)$ を $s = a$ から $s = b$ まで積分して得られる定数

$$\mu = \int_a^b \kappa(s) ds$$

を $\gamma(s)$ の全曲率という。またこの両辺を 2π で割った値を $\gamma(s)$ の回転数という。

曲線の向きによって回転数の正負は変わるが、正則な閉曲線の回転数は整数となる。

1.2 空間の曲線

ここでは空間内での曲線について定義する。平面の曲線と同様に、空間の曲線、およびその弧長パラメータを次のように定義する。また、空間での曲率も定義する。

定義 8. 空間 \mathbb{R}^3 の滑らかな曲線 γ とは、 $a, b \in \mathbb{R}$ によって定まる閉区間 $I = [a, b]$ の任意の要素 t に対して、 \mathbb{R}^3 の点 $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ が定まるものであり、 $\gamma(t)$ が t について少なくとも二階微分可能であるときをいう。このとき t を曲線 γ のパラメータという。また、滑らかな曲線の和となっているものを区分的に滑らかな曲線という。単に曲線という場合にはこの区分的に滑らかな曲線であることを意味するものとする。

定義 9. \mathbb{R}^3 の正則曲線 γ とは、 \mathbb{R}^3 中の曲線であって、正則性の仮定

$$\text{任意の } t \in I \text{ について } \dot{\gamma}(t) \neq \mathbf{0}$$

を満たすものをいう。

定義 10. 正則曲線 $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ ($t \in I$) の閉区間 $[a, t]$ における長さを

$$s(t) = \int_a^t |\dot{\gamma}(t)| dt$$

とすると、この曲線は

$$\gamma(s) = (x(t(s)), y(t(s)), z(t(s))) \quad (0 \leq s \leq l), \quad l = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt$$

とパラメータ s を用いて表示することができる。このパラメータ s を弧長パラメータという。

$l = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt$ とする。弧長パラメータ s で表示された曲線 $\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s))$ ($0 \leq s \leq l$) の速度ベクトル

$$\mathbf{e}_1(s) = \dot{\gamma}(s) = (x'(s), y'(s), z'(s))$$

の大きさは平面の曲線のとおり長さは常に 1 である。すなわち

$$\mathbf{e}_1(s) \cdot \mathbf{e}_1(s) = 1$$

となる。この両辺を s で微分することにより

$$\mathbf{e}_1(s) \cdot \mathbf{e}'_1(s) = 0$$

であるから、 $\mathbf{e}'_1(s)$ は $\mathbf{e}_1(s)$ に垂直である。

平面の曲線の場合は曲線の進行方向に対して右向き、左向きといった向きを考えることができた。しかし空間の場合は右や左といった向きを考えることができない。そのため、空間の曲線の曲率は以下のように定義する。

定義 11. 正則曲線 $\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s))$ と速度ベクトル $\mathbf{e}_1(s) = \gamma'(s)$ に対し、加速度ベクトル $\mathbf{e}'_1(s)$ の大きさ

$$|\mathbf{e}'_1(s)| = \sqrt{\mathbf{e}'_1(s) \cdot \mathbf{e}'_1(s)} = \sqrt{x''(s)^2 + y''(s)^2 + z''(s)^2}$$

を曲線 $\gamma(s)$ の曲率といい、 $\kappa(s)$ と書く。

1.3 曲面

特に断りがない限り、曲面とは平面 \mathbb{R}^2 のある領域 D の任意の要素 (u, v) に対して、空間 \mathbb{R}^3 の点 $S(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ が定まり、 $S(u, v)$ が u, v の 2 変数関数として少なくとも二階偏微分可能であるようなものとする。ここでは、曲面が持つ情報である第 1 基本量、第 2 基本量、曲率などを定義し、曲面論で重要な定理である Gauss-Bonnet の定理を紹介する。

定義 12. $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ は uv 平面上の領域 D で定義された 3 回微分可能な関数とする。Jacobi 行列

$$\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}$$

の階数が D 上で 2 であるとき、 $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ は空間内に曲面片を定義するという。

定義 13. 空間内の集合 S がいくつかの (無限の) 曲面片の和集合になっているとき、 S を曲面という。

定義 14. S が境界をもたないコンパクトな曲面であるとき、これを閉曲面という。

uv 平面上の領域 D で定義された $\mathbb{P}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ を曲面とする。以下、特に断りがない限りにおいては曲面 $\mathbb{P}(u, v)$ は閉曲面とする。 $\mathbb{P}(u, v)$ において、 v を固定したまま u を変化させるときの対応 $u \mapsto \mathbb{P}(u, v)$ によって決まる曲線を u 曲線といい、 u を固定したまま v を変化させるときの対応 $v \mapsto \mathbb{P}(u, v)$ によって決まる曲線を v 曲線という。 $\mathbb{P}(u, v)$ の u による偏微分 $\mathbb{P}_u = \mathbb{P}_u(u, v)$ は u 曲線の各点における速度ベクトルを表す。同様に、 $\mathbb{P}(u, v)$ の v における偏微分 $\mathbb{P}_v = \mathbb{P}_v(u, v)$ は v 曲線の各点における速度ベクトルを表す。また、点 $\mathbb{P}(u, v)$ で曲面に接するベクトルは $\mathbb{P}_u, \mathbb{P}_v$ の 1 次結合で表される。したがって点 $\mathbb{P}(u, v)$ を通り、これらの接ベクトルに平行な平面

$$\{ \mathbb{P}(u, v) + \alpha \mathbb{P}_u(u, v) + \beta \mathbb{P}_v(u, v) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \}$$

が曲面の接平面となる。ただし、 $\mathbb{P}_u \neq \mathbf{0}$ 、 $\mathbb{P}_v \neq \mathbf{0}$ である。

定義 15. 曲面 $S : \mathbb{P}(u, v)$ に対して、点 $\mathbb{P}(u, v)$ を始点とし、曲面に垂直な単位ベクトルを単位法ベクトルという。単位法ベクトルは $\mathbb{P}_u, \mathbb{P}_v$ の両方に垂直な単位ベクトルである。特に

$$\frac{\mathbb{P}_u \times \mathbb{P}_v}{|\mathbb{P}_u \times \mathbb{P}_v|}$$

となるものを $\nu(u, v)$ で表す。

定義 16. 曲面 $S : \mathbb{P}(u, v)$ に対して、 $\nu(u, v)$ は単位ベクトルなので、その始点を原点にもってきたベクトルを $\hat{\nu}(u, v)$ と書くことにすると、ベクトル $\nu(u, v)$ の終点は単位球面

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

上の点である。この対応 $(u, v) \rightarrow \hat{\nu}(u, v)$ のことを曲面 S のガウス写像という。

定義 17. 曲面 $S : \mathbb{P}(u, v)$ に対して、

$$E(u, v) = \mathbb{P}_u \cdot \mathbb{P}_u$$

$$F(u, v) = \mathbb{P}_u \cdot \mathbb{P}_v$$

$$G(u, v) = \mathbb{P}_v \cdot \mathbb{P}_v$$

とおいて、これらを曲面 S の第 1 基本量という。

定義 18. 曲面 $S : \mathbb{P}(u, v)$ に対して、

$$L(u, v) = \mathbb{P}_{uu} \cdot \nu$$

$$M(u, v) = \mathbb{P}_{uv} \cdot \nu$$

$$N(u, v) = \mathbb{P}_{vv} \cdot \nu$$

とおいて、曲面 S の第 2 基本量という。

以降、簡単のため、 E, F, G などと略記することとする。

定義 19. 曲面 S 上の点 p_0 と、点 p_0 におけるこの曲面の法ベクトル ν があるとする。点 p_0 における曲面 S の任意の接ベクトル X に対して、 X と ν で定まる平面を法平面という。法平面と曲面 S の交わりとしてできる平面曲線 C の、点 p_0 における平面曲線としての曲率のことを、 p_0 における X 方向の S の法曲率という。

定義 20. 曲面 S 上の点 p_0 に対して、方向 X を動かしたときの p_0 における S の法曲率の最大値と最小値を、 p_0 における S の主曲率という。主曲率を実現する方向のことを主方向という。

定義 21. 曲面 S 上の点 p_0 に対して、 κ_1, κ_2 を p_0 における S の主曲率とする。このとき、主曲率の積

$$K = \kappa_1 \kappa_2$$

を p_0 における S のガウス曲率という。

定理 22. 曲面 $S : \mathbb{P}(u, v)$ に対し、第 1 基本量 E, F, G と第 2 基本量 L, M, N を用いることで、ガウス曲率 K は次のようにあらわされる。

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}.$$

定理 23. 曲面 $S : \mathbb{P}(u, v)$ ($(u, v) \in D$) に対して、

$$\begin{aligned} S \text{ の面積} &= \int_D \left\| \frac{\partial S}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial S}{\partial v}(u, v) \right\| dudv \\ &= \int_D \sqrt{EG - F^2} dudv \end{aligned}$$

である。

定義 24. 閉曲面 $S : \mathbb{P}(u, v)$ ($u(s_1) \leq u \leq u(s_2), 0 \leq v \leq 2\pi$) に対し、Gauss 曲率を K とする。 S 上における K の重積分の値

$$\iint_S K dA$$

を S の全曲率という。ここで dA は面積要素であり、 $dA = \sqrt{EG - F^2} dudv$ と表される。

定義 25. xz 平面上の曲線

$$\gamma(s) = (f(u), g(u)) \quad (f(u) \geq 0)$$

を、 z 軸を回転の軸として 1 回転してできる曲面 S は

$$\mathbb{P}(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u))$$

で与えられる。この曲面 S を回転面という。 $f(u) \geq 0$ は自己交叉しない曲面を考えているための条件である。

定義 26. 閉曲面 S を有限個の三角形に分割し、分割によってできた頂点、辺、面の総数をそれぞれ v, e, f とする。 $v - e + f$ を S の Euler 標数といい、 $\chi(S)$ と書く。

Euler 標数については、2次元球面 S^2 は $\chi(S^2) = 2$ 、種数 1 のトーラス T は $\chi(T) = 0$ である。一般に種数 g のトーラスの場合、その Euler 標数は $2 - 2g$ となることが知られている。この Euler 標数と全曲率に関して、次の定理が成り立つ。

定理 27. (Gauss-Bonnet の定理)

閉曲面 S を有限個の三角形に分割したとき、その分割に対し、頂点、辺、面の数をそれぞれ v 、 e 、 f とし、Euler 標数を $\chi(S) = v - e + f$ とする。このとき

$$\iint_S K dA = 2\pi\chi(S)$$

が成り立つ。

1.4 回転面の全曲率

実平面上に表示された閉曲線に対する回転面の全曲率に関しては松田の公式 (松田雄斗, (2019), 『回転面の全曲率に関する考察』, 三重大学大学院教育学研究科修士論文) [9] が存在している。ここでは定理の紹介のみを行う。証明については『回転面の全曲率に関する考察』[9] を見られよ。

定義 28. 曲線 $\gamma(t)$ に対し、 $\dot{\gamma}(t_1) = \mathbf{0}$ とする。 $t_1 < \alpha$ に対し、 $\lim_{\alpha \rightarrow t_1+0} \int_{\alpha}^t |\dot{\gamma}(t)| dt$ が収束するとき、 $\gamma(t)$ は区間 $(t_1, t]$ で弧長パラメータ表示可能といい、その値を

$$s = \int_{t_1}^t |\dot{\gamma}(t)| dt = \lim_{\alpha \rightarrow t_1+0} \int_{\alpha}^t |\dot{\gamma}(t)| dt$$

と定義する。区間 $[t_1, t)$ においても同様に極限を用いて定義される。このように閉区間以外に拡張された $s = s(t)$ を広義の弧長パラメータという。

定義 29. 曲線 $\gamma(t)$ に対し、 $\dot{\gamma}(t_1) = \dot{\gamma}(t_2) = \mathbf{0}$ とする。 t_1 と t_2 の間に適当な点 c をとったとき、 $\gamma(t)$ が区間 $(t_1, c]$ および $[c, t_2)$ のいずれにおいても弧長パラメータ表示可能であるならば、 $\gamma(t)$ は开区間 (t_1, t_2) で弧長パラメータ表示可能といい、弧長パラメータ $s = s(t)$ を

$$s = \int_{t_1}^c |\dot{\gamma}(t)| dt + \int_c^{t_2} |\dot{\gamma}(t)| dt$$

と定義する。

定理 30. xz 平面上の曲線

$$\gamma(s) = (f(t), g(t)) \quad (f(t) > 0)$$

は点 $t = t_1, t_2$ において $\dot{\gamma}(t) = \mathbf{0}$ であるとする。开区間 (t_1, t) に対応する広義の弧長 $s = s(t)$ により、この曲線の弧長パラメータ表示が

$$\gamma(s) = (f(s), g(s)) \quad (s(t_1) \leq s \leq s(t_2))$$

であるとする. この曲線を z 軸の周りに 1 回転してできる回転面 S の全曲率は

$$\iint_S K dA = -2\pi \lim_{t \rightarrow t_2-0} \dot{f}(t) \frac{1}{\frac{ds}{dt}} + 2\pi \lim_{t \rightarrow t_1+0} \dot{f}(t) \frac{1}{\frac{ds}{dt}}$$

となる.

定理 31. 松田の公式 (松田雄斗, (2019), 『回転面の全曲率に関する考察』, 三重大学大学院教育学研究科修士論文, p14, 定理 2.3) [9]

xz 平面上の曲線

$$\gamma(t) = (f(t), g(t)) \quad (f(t) > 0)$$

は点 $t = t_1, c_1, c_2, \dots, c_{n-1}, c_n, t_2$ において $\dot{\gamma}(t) = \mathbf{0}$ であるとする. 开区間 $(t_1, c_1), (c_1, c_2), \dots, (c_n, t_2)$ に対応する広義の弧長 $s_i = s_i(t)$ により, この曲線の弧長パラメータ表示が

$$\gamma(s_i) = (f(s_i), g(s_i))$$

であるとする. この曲線を z 軸の周りに 1 回転してできる回転面 S の全曲率は

$$\begin{aligned} \iint_S K dA &= -2\pi \lim_{t \rightarrow t_2-0} \dot{f}(t) \frac{1}{\frac{ds_{n+1}}{dt}} + 2\pi \lim_{t \rightarrow c_n+0} \dot{f}(t) \frac{1}{\frac{ds_{n+1}}{dt}} \\ &\quad - 2\pi \lim_{t \rightarrow c_n-0} \dot{f}(t) \frac{1}{\frac{ds_n}{dt}} + 2\pi \lim_{t \rightarrow c_{n-1}+0} \dot{f}(t) \frac{1}{\frac{ds_n}{dt}} - \dots \\ &\quad - 2\pi \lim_{t \rightarrow c_1-0} \dot{f}(t) \frac{1}{\frac{ds_1}{dt}} + 2\pi \lim_{t \rightarrow t_1+0} \dot{f}(t) \frac{1}{\frac{ds_1}{dt}} \end{aligned}$$

となる.

2 複素平面上に表示された閉曲線に対する回転面の全曲率

本研究の目的は複素平面上に表示された閉曲線を、虚軸まわりに回転させてできる回転面の全曲率を求めることである。本研究では回転軸と交わらないようなトーラス型曲面の全曲率のみを扱っている。

以下では複素数 z を一般パラメータ t を用いて $z = e^{it}$ で表す。この z のべき乗を用いて閉曲線 $\gamma(t)$ を定める。そして閉曲線 $\gamma(t)$ の t による一階微分 $\dot{\gamma}(t)$ がどのような形に因数分解されるかによって場合分けし、回転面の全曲率を求めていく。

本題に入る前に、これから利用することになる補題を2つ準備しておく。

補題 32. z を大きさ1、偏角 t の複素数、つまり $z = e^{it}$ とすると

$$|z - e^{i\alpha}| = 2 \left| \sin \frac{t - \alpha}{2} \right| \quad (1)$$

が成り立つ。ただし、 $\alpha \in \mathbb{R}$ であるとする。

証明.

$$\begin{aligned} |z - e^{i\alpha}| &= |e^{it} - e^{i\alpha}| \\ &= \left\{ (e^{it} - e^{i\alpha})(\overline{e^{it} - e^{i\alpha}}) \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= \left\{ (e^{it} - e^{i\alpha})(e^{-it} - e^{-i\alpha}) \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(1 - e^{i(\alpha-t)} - e^{i(t-\alpha)} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left\{ 2 - (e^{i(t-\alpha)} + \overline{e^{i(t-\alpha)}}) \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= \left\{ 2 - 2\operatorname{Re}(e^{i(t-\alpha)}) \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= [2 \{1 - \cos(t - \alpha)\}]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[2 \left\{ 1 - \left(1 - 2\sin^2 \frac{t - \alpha}{2} \right) \right\} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(4\sin^2 \frac{t - \alpha}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= 2 \left| \sin \frac{t - \alpha}{2} \right|. \end{aligned}$$

□

補題 33. z を大きさ1、偏角 t の複素数とし、 C を積分定数とすると

$$\int z^n dt = \frac{1}{in} z^n + C \quad (2)$$

が成り立つ。

証明.

$$\begin{aligned}\int z^n dt &= \int e^{int} dt \\ &= \frac{1}{in} e^{int} + C \\ &= \frac{1}{in} z^n + C.\end{aligned}$$

□

ここからは複素平面上で表示された閉曲線の回転面に対する全曲率を考えていく. その中でも特異点を含むものに限定する. $z = e^{it}$ であるので z は大きさが 1、偏角が t である. z は t によって定まる単位円周上の点であり、周期 2π を持つ周期関数である. この z のべきを使って $\gamma(t)$ を表現することで、べきによる変換によって単位円から写される像を考えることができる. 例えば $\gamma(t) = z^2 + z + R$ といった形がある. 本研究では閉曲線が回転軸と交わらない場合のみを考えているので R は十分大きな正の数とする. z の周期性から $\gamma(t)$ が周期性をもつ閉曲線であることが保証される.

以下、分類に際しては $\gamma(t)$ の形よりも $\dot{\gamma}(t)$ の形の方が重要である. そのため、 $\dot{\gamma}(t)$ がどのような形に因数分解されるのかによって閉曲線 $\gamma(t)$ を分類していく

2.1 $\dot{\gamma}(t) = c(z - e^{i\alpha})iz$ 型の回転面の全曲率

$\gamma(t)$ が z の 2 次式で表されている場合を考える. すなわち、

$$\gamma(t) = az^2 + bz + R$$

という形であるとする. ここで、 a, b は複素数とし、 R は十分に大きな正の数とする. この式の t による一階微分 $\dot{\gamma}(t)$ は

$$\begin{aligned}\dot{\gamma}(t) &= \frac{d}{dt} \gamma(t) \\ &= \frac{d}{dz} \gamma(t) \cdot \frac{dz}{dt} \\ &= (2az + b)iz \\ &= 2a \left(z + \frac{b}{2a} \right) iz\end{aligned}$$

となる. $\left| \frac{b}{2a} \right| \neq 1$ である場合は特異点を持たない. 特異点を含む場合を考えたいので以下では $\left| \frac{b}{2a} \right| = 1$ 、つまり方程式 $\dot{\gamma}(t) = \mathbf{0}$ が解を持つ場合を考える. このとき、 $z = -\frac{b}{2a}$ で $\dot{\gamma}(t) = \mathbf{0}$ となり特異点を持つ. t の値が α のとき特異点であるとするれば、 $\dot{\gamma}(t)$ は

$$\dot{\gamma}(t) = c(z - e^{i\alpha})iz$$

と因数分解されることになる。ただし、 c は複素数であり、 $2a$ を置き直したものである。

このように $\dot{\gamma}(t)$ が因数分解される場合の回転面の全曲率は次のようになる。

定理 34. $z = e^{it}$ としたとき、 z の 2 次式で表される閉曲線 $\gamma(t)$ に対し、

$$\gamma(t) = c(z - e^{i\alpha})iz$$

であるならば、 $\gamma(t)$ を虚軸まわりに 1 回転させてできる回転面 S の全曲率は

$$\iint_S K dA = -4\pi \cos(\beta + 2\alpha)$$

である。ただし、 $c \in \mathbb{C}$ であり、 c の偏角は β であるとする。

証明.

$$\begin{aligned} |\dot{\gamma}(t)| &= |c(z - e^{i\alpha})iz| \\ &= |c| \cdot |z - e^{i\alpha}| \cdot |i| \cdot |z| \\ &= 2|c| \cdot \left| \sin \frac{t - \alpha}{2} \right|. \end{aligned}$$

また、 $\dot{\gamma}(t)$ の実部 $\operatorname{Re}(\dot{\gamma}(t))$ は

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\dot{\gamma}(t)) &= \operatorname{Re}\{c(z - e^{i\alpha})iz\} \\ &= \operatorname{Re}\{|c|e^{i\beta}(e^{it} - e^{i\alpha})e^{\frac{\pi}{2}i}e^{it}\} \\ &= \operatorname{Re}\{|c|e^{i(\beta+2t+\frac{\pi}{2})} - |c|e^{i(\beta+\alpha+t+\frac{\pi}{2})}\} \\ &= |c| \cos\left(2t + \beta + \frac{\pi}{2}\right) - |c| \cos\left(t + \alpha + \beta + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= -2|c| \sin \frac{3t + \alpha + 2\beta + \pi}{2} \sin \frac{t - \alpha}{2} \end{aligned}$$

となる。これは xy 平面上で考えれば x 成分の一階微分の値となっているので定理.31 (松田の公式) の中で $\dot{f}(t)$ に対応する値である。また、 $\frac{ds}{dt} = |\dot{\gamma}(t)|$ であった。以上のことから $\alpha < t < \alpha + 2\pi$ のとき、定理.31 (松田の公式) より

$$\begin{aligned} \iint_S K dA &= -2\pi \lim_{t \rightarrow \alpha + 2\pi - 0} \frac{-2|c| \cos \frac{3t + \alpha + 2\beta}{2} \sin \frac{t - \alpha}{2}}{2|c| \left| \sin \frac{t - \alpha}{2} \right|} \\ &\quad + 2\pi \lim_{t \rightarrow \alpha + 0} \frac{-2|c| \cos \frac{3t + \alpha + 2\beta}{2} \sin \frac{t - \alpha}{2}}{2|c| \left| \sin \frac{t - \alpha}{2} \right|} \\ &= 2\pi \cos \frac{3(\alpha + 2\pi) + \alpha + 2\beta}{2} - 2\pi \cos(\beta + 2\alpha) \\ &= 2\pi \cos(\beta + 2\alpha + 3\pi) - 2\pi \cos(\beta + 2\alpha) \\ &= -4\pi \cos(\beta + 2\alpha). \end{aligned}$$

□

2.2 $\gamma(t) = c(z - e^{i\alpha_1})(z - e^{i\alpha_2})iz$ 型の回転面の全曲率

ここでは $\gamma(t)$ が z の 3 次式で表されている場合を考える。すなわち、

$$\gamma(t) = a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + R$$

という形であり、これを前節と同じように t で一階微分し、因数分解したものが

$$\dot{\gamma}(t) = c(z - e^{i\alpha_1})(z - e^{i\alpha_2})iz$$

になる場合の回転面の全曲率について考える。まず 1 つの補題を準備しておく。

補題 35. $A - B - C + D = 0$ の条件のもとでは次の等式が成り立つ。

$$\sin A + \sin B + \sin C + \sin D = 4 \sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{A-B}{2} \cos \frac{A-C}{2}.$$

証明.

$$\begin{aligned} e^{i\alpha} e^{i\beta} e^{i\gamma} &= (\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta + i \sin \beta)(\cos \gamma + i \sin \gamma) \\ &= \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma + i(\sin \alpha \cos \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma) \\ &\quad - (\cos \alpha \sin \beta \sin \gamma + \sin \alpha \cos \beta \sin \gamma + \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma) - i \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \\ &= \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma - \sin \alpha \cos \beta \sin \gamma - \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma \\ &\quad + i(\sin \alpha \cos \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma). \end{aligned}$$

また、

$$\begin{aligned} e^{i\alpha} e^{i\beta} e^{i\gamma} &= e^{i(\alpha+\beta+\gamma)} \\ &= \cos(\alpha + \beta + \gamma) + i \sin(\alpha + \beta + \gamma) \end{aligned}$$

であるから、虚部を比較して

$$\sin(\alpha + \beta + \gamma) = \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$$

となる。このことから、

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta + \gamma) &= \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \\ \sin(\alpha - \beta + \gamma) &= \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma - \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \\ \sin(\alpha + \beta - \gamma) &= \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma - \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma + \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \\ \sin(\alpha - \beta - \gamma) &= \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma - \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma - \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma. \end{aligned}$$

よって、

$$\sin(\alpha + \beta + \gamma) + \sin(\alpha - \beta + \gamma) + \sin(\alpha + \beta - \gamma) + \sin(\alpha - \beta - \gamma) = 4 \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma.$$

ここで、

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = A \\ \alpha - \beta + \gamma = B \\ \alpha + \beta - \gamma = C \\ \alpha - \beta - \gamma = D \end{cases}$$

つまり、

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix}$$

とおく。拡大係数行列を変形して連立方程式を解くと、

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & A \\ 1 & -1 & 1 & B \\ 1 & 1 & -1 & C \\ 1 & -1 & -1 & D \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{B+C}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{A-B}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{A-C}{2} \\ 0 & 0 & 0 & A-B-C+D \end{pmatrix}$$

となり、 $A - B - C + D = 0$ のとき、

$$\sin A + \sin B + \sin C + \sin D = 4 \sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{A-B}{2} \cos \frac{A-C}{2}$$

が成り立つことが示された。 □

定理. $z = e^{it}$ としたとき、 z の 3 次式で表される閉曲線 $\gamma(t)$ に対し、

$$\dot{\gamma}(t) = c(z - e^{i\alpha_1})(z - e^{i\alpha_2})iz \quad (\alpha_1 < \alpha_2)$$

であるならば、 $\gamma(t)$ を虚軸まわりに 1 回転させてできる回転面 S の全曲率は

$$\iint_S K dA = -4\pi \sin \frac{2\beta + 5\alpha_1 + \alpha_2}{2} + 4\pi \sin \frac{2\beta + \alpha_1 + 5\alpha_2}{2}$$

である。ただし、 $c \in \mathbb{C}$ であり、 c の偏角は β であるとする。

証明.

$$\begin{aligned} |\dot{\gamma}(t)| &= |c(z - e^{i\alpha_1})(z - e^{i\alpha_2})iz| \\ &= 4|c| \left| \sin \frac{t - \alpha_1}{2} \right| \left| \sin \frac{t - \alpha_2}{2} \right|. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \operatorname{Re}(\dot{\gamma}(t)) \\
&= \operatorname{Re}\{c(z - e^{i\alpha_1})(z - e^{i\alpha_2})iz\} \\
&= \operatorname{Re}\{|c|e^{i\beta}(e^{it} - e^{i\alpha_1})(e^{it} - e^{i\alpha_2})e^{\frac{\pi}{2}i}e^{it}\} \\
&= |c|\operatorname{Re}\left\{e^{i(\beta+t+\frac{\pi}{2})}\left(e^{2it} - e^{i(\alpha_1+t)} - e^{i(\alpha_2+t)} + e^{i(\alpha_1+\alpha_2)}\right)\right\} \\
&= |c|\operatorname{Re}\left\{e^{i(3t+\beta+\frac{\pi}{2})} - e^{i(2t+\beta+\alpha_1+\frac{\pi}{2})} - e^{i(2t+\beta+\alpha_2+\frac{\pi}{2})} + e^{i(t+\beta+\alpha_1+\alpha_2+\frac{\pi}{2})}\right\} \\
&= |c|\left\{\cos\left(3t + \beta + \frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(2t + \beta + \alpha_1 + \frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(2t + \beta + \alpha_2 + \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(t + \beta + \alpha_1 + \alpha_2 + \frac{\pi}{2}\right)\right\} \\
&= |c|\{\sin(3t + \beta + \pi) + \sin(2t + \beta + \alpha_1) + \sin(2t + \beta + \alpha_2) + \sin(t + \beta + \alpha_1 + \alpha_2 - \pi)\}.
\end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
A &= 3t + \beta + \pi \\
B &= 2t + \beta + \alpha_1 \\
C &= 2t + \beta + \alpha_2 \\
D &= t + \beta + \alpha_1 + \alpha_2 - \pi
\end{aligned}$$

とすると、 $A - B - C + D = 0$ が成り立つので補題.35 より上式は次のようになる。

$$\begin{aligned}
& 4|c|\sin\frac{4t+2\beta+\alpha_1+\alpha_2}{2}\cos\frac{t-\alpha_1+\pi}{2}\cos\frac{t-\alpha_2+\pi}{2} \\
&= 4|c|\sin\frac{4t+2\beta+\alpha_1+\alpha_2}{2}\left(-\sin\frac{t-\alpha_1}{2}\right)\left(-\sin\frac{t-\alpha_2}{2}\right) \\
&= 4|c|\sin\frac{4t+2\beta+\alpha_1+\alpha_2}{2}\sin\frac{t-\alpha_1}{2}\sin\frac{t-\alpha_2}{2}.
\end{aligned}$$

曲面を $\alpha_1 < t < \alpha_2$ と $\alpha_2 < t < \alpha_1 + 2\pi$ に分けて全曲率を求める。それぞれの場合の曲面を S_1 と S_2 とする。

(i) $\alpha_1 < t < \alpha_2$ のとき、定理.31 (松田の公式) を用いて曲面 S_1 の全曲率を求めると

$$\begin{aligned}
\iint_{S_1} K dA &= -2\pi \lim_{t \rightarrow \alpha_2 - 0} \frac{4|c|\sin\frac{4t+2\beta+\alpha_1+\alpha_2}{2}\sin\frac{t-\alpha_1}{2}\sin\frac{t-\alpha_2}{2}}{4|c|\left|\sin\frac{t-\alpha_1}{2}\right|\left|\sin\frac{t-\alpha_2}{2}\right|} \\
&\quad + 2\pi \lim_{t \rightarrow \alpha_1 + 0} \frac{4|c|\sin\frac{4t+2\beta+\alpha_1+\alpha_2}{2}\sin\frac{t-\alpha_1}{2}\sin\frac{t-\alpha_2}{2}}{4|c|\left|\sin\frac{t-\alpha_1}{2}\right|\left|\sin\frac{t-\alpha_2}{2}\right|} \\
&= 2\pi \sin\frac{4\alpha_2+2\beta+\alpha_1+\alpha_2}{2} - 2\pi \sin\frac{4\alpha_1+2\beta+\alpha_1+\alpha_2}{2} \\
&= 2\pi \sin\frac{2\beta+\alpha_1+5\alpha_2}{2} - 2\pi \sin\frac{2\beta+5\alpha_1+\alpha_2}{2}.
\end{aligned}$$

(ii) 同様にして $\alpha_2 < t < \alpha_1 + 2\pi$ のとき、

$$\begin{aligned} \iint_{S_2} K dA &= -2\pi \lim_{t \rightarrow \alpha_1 + 2\pi - 0} \frac{4|c| \sin \frac{4t + 2\beta + \alpha_1 + \alpha_2}{2} \sin \frac{t - \alpha_1}{2} \sin \frac{t - \alpha_2}{2}}{4|c| \left| \sin \frac{t - \alpha_1}{2} \right| \left| \sin \frac{t - \alpha_2}{2} \right|} \\ &\quad + 2\pi \lim_{t \rightarrow \alpha_2 + 0} \frac{4|c| \sin \frac{4t + 2\beta + \alpha_1 + \alpha_2}{2} \sin \frac{t - \alpha_1}{2} \sin \frac{t - \alpha_2}{2}}{4|c| \left| \sin \frac{t - \alpha_1}{2} \right| \left| \sin \frac{t - \alpha_2}{2} \right|} \\ &= -2\pi \sin \frac{4(\alpha_1 + 2\pi) + 2\beta + \alpha_1 + \alpha_2}{2} + 2\pi \sin \frac{4\alpha_2 + 2\beta + \alpha_1 + \alpha_2}{2} \\ &= -2\pi \sin \frac{2\beta + 5\alpha_1 + \alpha_2}{2} + 2\pi \sin \frac{2\beta + \alpha_1 + 5\alpha_2}{2}. \end{aligned}$$

以上 (i)、(ii) より曲面 S の全曲率は

$$\begin{aligned} \iint_S K dA &= \iint_{S_1} K dA + \iint_{S_2} K dA \\ &= 2\pi \sin \frac{2\beta + \alpha_1 + 5\alpha_2}{2} - 2\pi \sin \frac{2\beta + 5\alpha_1 + \alpha_2}{2} - 2\pi \sin \frac{2\beta + 5\alpha_1 + \alpha_2}{2} + 2\pi \sin \frac{2\beta + \alpha_1 + 5\alpha_2}{2} \\ &= -4\pi \sin \frac{2\beta + 5\alpha_1 + \alpha_2}{2} + 4\pi \sin \frac{2\beta + \alpha_1 + 5\alpha_2}{2}. \end{aligned}$$

□

2.3 $\gamma(t) = c(z - e^{i\alpha_1})(z - e^{i\alpha_2})(z - e^{i\alpha_3})iz$ 型の回転面の全曲率

ここでは $\gamma(t)$ が z の 4 次式で表されている場合を考える。すなわち、

$$\gamma(t) = a_4 z^4 + a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + R$$

であり、これを t で一階微分し、因数分解したものが

$$\dot{\gamma}(t) = c(z - e^{i\alpha_1})(z - e^{i\alpha_2})(z - e^{i\alpha_3})iz$$

になる場合の回転面の全曲率について考える。

補題 36. $\begin{cases} E = -A + B + C \\ F = -A + B + D \\ G = -A + C + D \\ H = -2A + B + C + D \end{cases}$ の条件の元では次の等式が成り立つ。

$$\begin{aligned} &\sin A + \sin B + \sin C + \sin D + \sin E + \sin F + \sin G + \sin H \\ &= 8 \sin \frac{-A + B + C + D}{2} \cos \frac{A - B}{2} \cos \frac{A - C}{2} \cos \frac{A - D}{2}. \end{aligned}$$

証明.

$$\begin{aligned}
e^{i\alpha} e^{i\beta} e^{i\gamma} e^{i\delta} &= (\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta + i \sin \beta)(\cos \gamma + i \sin \gamma)(\cos \delta + i \sin \delta) \\
&= \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \cos \delta \\
&\quad + i(\sin \alpha \cos \beta \cos \gamma \cos \delta + \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma \cos \delta + \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma \cos \delta + \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \sin \delta) \\
&\quad - (\cos \alpha \cos \beta \sin \gamma \sin \delta + \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma \sin \delta + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma \cos \delta \\
&\quad + \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma \sin \delta + \sin \alpha \cos \beta \sin \gamma \cos \delta + \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma \cos \delta) \\
&\quad - i(\cos \alpha \sin \beta \sin \gamma \sin \delta + \sin \alpha \cos \beta \sin \gamma \sin \delta + \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma \sin \delta + \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \cos \delta) \\
&\quad + \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \sin \delta \\
&= \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \cos \delta - \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma \sin \delta - \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma \sin \delta - \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma \cos \delta \\
&\quad - \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma \sin \delta - \sin \alpha \cos \beta \sin \gamma \cos \delta - \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma \cos \delta + \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \sin \delta \\
&\quad + i(\sin \alpha \cos \beta \cos \gamma \cos \delta + \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma \cos \delta + \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma \cos \delta + \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \sin \delta \\
&\quad - \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma \sin \delta - \sin \alpha \cos \beta \sin \gamma \sin \delta - \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma \sin \delta - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \cos \delta).
\end{aligned}$$

また、

$$\begin{aligned}
e^{i\alpha} e^{i\beta} e^{i\gamma} e^{i\delta} &= e^{i(\alpha+\beta+\gamma+\delta)} \\
&= \cos(\alpha + \beta + \gamma + \delta) + i \sin(\alpha + \beta + \gamma + \delta)
\end{aligned}$$

であるから、虚部を比較して

$$\begin{aligned}
&\sin(\alpha + \beta + \gamma + \delta) \\
&= \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma \cos \delta + \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma \cos \delta + \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma \cos \delta + \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \sin \delta \\
&\quad - \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma \sin \delta - \sin \alpha \cos \beta \sin \gamma \sin \delta - \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma \sin \delta - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \cos \delta
\end{aligned}$$

となる。ここで各項を

$$\begin{cases}
\sin \alpha \cos \beta \cos \gamma \cos \delta = a_1 \\
\cos \alpha \sin \beta \cos \gamma \cos \delta = a_2 \\
\cos \alpha \cos \beta \sin \gamma \cos \delta = a_3 \\
\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \sin \delta = a_4 \\
\cos \alpha \sin \beta \sin \gamma \sin \delta = a_5 \\
\sin \alpha \cos \beta \sin \gamma \sin \delta = a_6 \\
\sin \alpha \sin \beta \cos \gamma \sin \delta = a_7 \\
\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \cos \delta = a_8
\end{cases}$$

と置き直す。すると、

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha + \beta + \gamma + \delta) &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - a_5 - a_6 - a_7 - a_8 \\
\sin(\alpha - \beta + \gamma + \delta) &= a_1 - a_2 + a_3 + a_4 + a_5 - a_6 + a_7 + a_8 \\
\sin(\alpha + \beta - \gamma + \delta) &= a_1 + a_2 - a_3 + a_4 + a_5 + a_6 - a_7 + a_8 \\
\sin(\alpha + \beta + \gamma - \delta) &= a_1 + a_2 + a_3 - a_4 + a_5 + a_6 + a_7 - a_8 \\
\sin(\alpha - \beta - \gamma + \delta) &= a_1 - a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + a_6 + a_7 - a_8 \\
\sin(\alpha - \beta + \gamma - \delta) &= a_1 - a_2 + a_3 - a_4 - a_5 + a_6 - a_7 + a_8 \\
\sin(\alpha + \beta - \gamma - \delta) &= a_1 + a_2 - a_3 - a_4 - a_5 - a_6 + a_7 + a_8 \\
\sin(\alpha - \beta - \gamma - \delta) &= a_1 - a_2 - a_3 - a_4 + a_5 - a_6 - a_7 - a_8
\end{aligned}$$

となる。よって辺々足し合わせて

$$\begin{aligned} & \sin(\alpha + \beta + \gamma + \delta) + \sin(\alpha - \beta + \gamma + \delta) + \sin(\alpha + \beta - \gamma + \delta) + \sin(\alpha + \beta + \gamma - \delta) \\ & + \sin(\alpha - \beta - \gamma + \delta) + \sin(\alpha - \beta + \gamma - \delta) + \sin(\alpha + \beta - \gamma - \delta) + \sin(\alpha - \beta - \gamma - \delta) \\ & = 8a_1 \\ & = 8 \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma \cos \delta \end{aligned}$$

となる。ここで

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha + \beta + \gamma + \delta = A \\ \alpha - \beta + \gamma + \delta = B \\ \alpha + \beta - \gamma + \delta = C \\ \alpha + \beta + \gamma - \delta = D \\ \alpha - \beta - \gamma + \delta = E \\ \alpha - \beta + \gamma - \delta = F \\ \alpha + \beta - \gamma - \delta = G \\ \alpha - \beta - \gamma - \delta = H \end{array} \right.$$

として連立方程式を考えると、解が存在するための条件は

$$\left\{ \begin{array}{l} A - B - C + E = 0 \\ A - B - D + F = 0 \\ A - C - D + G = 0 \\ 2A - B - C - D + H = 0 \end{array} \right.$$

となり、このとき

$$\begin{aligned} & \sin A + \sin B + \sin C + \sin D + \sin E + \sin F + \sin G + \sin H \\ & = 8 \sin \frac{-A + B + C + D}{2} \cos \frac{A - B}{2} \cos \frac{A - C}{2} \cos \frac{A - D}{2} \end{aligned}$$

が成り立つ。 □

定理 37. $z = e^{it}$ としたとき、 z の 3 次式で表される閉曲線 $\gamma(t)$ に対し、

$$\gamma(t) = c(z - e^{i\alpha_1})(z - e^{i\alpha_2})(z - e^{i\alpha_3})iz$$

であるならば、 $\gamma(t)$ を虚軸まわりに 1 回転させてできる回転面 S の全曲率は

$$\iint_S K dA = 4\pi \left\{ \cos \frac{2\beta + 6\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}{2} - \cos \frac{2\beta + \alpha_1 + 6\alpha_2 + \alpha_3}{2} + \cos \frac{2\beta + \alpha_1 + \alpha_2 + 6\alpha_3}{2} \right\}$$

である。ただし、 $c \in \mathbb{C}$ であり、 c の偏角は β であるとする。

証明.

$$\begin{aligned} |\dot{\gamma}(t)| &= |c(z - e^{i\alpha_1})(z - e^{i\alpha_2})(z - e^{i\alpha_3})iz| \\ &= 8|c| \left| \sin \frac{t - \alpha_1}{2} \right| \left| \sin \frac{t - \alpha_2}{2} \right| \left| \sin \frac{t - \alpha_3}{2} \right|. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \operatorname{Re}(\gamma(t)) \\
&= \operatorname{Re}\{c(z - e^{i\alpha_1})(z - e^{i\alpha_2})(z - e^{i\alpha_3})iz\} \\
&= \operatorname{Re}\{|c|e^{i\beta}(e^{it} - e^{i\alpha_1})(e^{it} - e^{i\alpha_2})(e^{it} - e^{i\alpha_3})e^{\frac{\pi}{2}i}e^{it}\} \\
&= |c|\operatorname{Re}\{e^{i(\beta+t+\frac{\pi}{2})}(e^{3it} - e^{i(\alpha_1+2t)} - e^{i(\alpha_2+2t)} - e^{i(\alpha_3+2t)} \\
&\quad + e^{i(\alpha_1+\alpha_2+t)} + e^{i(\alpha_1+\alpha_3+t)} + e^{i(\alpha_2+\alpha_3+t)} - e^{i(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)})\} \\
&= |c|\operatorname{Re}\{e^{i(4t+\beta+\frac{\pi}{2})} - e^{i(3t+\beta+\alpha_1+\frac{\pi}{2})} - e^{i(3t+\beta+\alpha_2+\frac{\pi}{2})} - e^{i(3t+\beta+\alpha_3+\frac{\pi}{2})} \\
&\quad + e^{i(2t+\beta+\alpha_1+\alpha_2+\frac{\pi}{2})} + e^{i(2t+\beta+\alpha_1+\alpha_3+\frac{\pi}{2})} + e^{i(2t+\beta+\alpha_2+\alpha_3+\frac{\pi}{2})} - e^{i(2-t+\beta+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\frac{\pi}{2})}\} \\
&= |c|\left\{\cos\left(4t + \beta + \frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(3t + \beta + \alpha_1 + \frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(3t + \beta + \alpha_2 + \frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(3t + \beta + \alpha_3 + \frac{\pi}{2}\right) \right. \\
&\quad + \cos\left(2t + \beta + \alpha_1 + \alpha_2 + \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(2t + \beta + \alpha_1 + \alpha_3 + \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(2t + \beta + \alpha_2 + \alpha_3 + \frac{\pi}{2}\right) \\
&\quad \left. + \cos\left(t + \beta + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \frac{\pi}{2}\right)\right\} \\
&= |c|\{\sin(4t + \beta - \pi) + \sin(3t + \beta + \alpha_1) + \sin(3t + \beta + \alpha_2) + \sin(3t + \beta + \alpha_3) \\
&\quad + \sin(2t + \beta + \alpha_1 + \alpha_2 + \pi) + \sin(2t + \beta + \alpha_1 + \alpha_3 + \pi) + \sin(2t + \beta + \alpha_2 + \alpha_3 + \pi) \\
&\quad + \sin(t + \beta + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)\}.
\end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
A &= 4t + \beta - \pi \\
B &= 3t + \beta + \alpha_1 \\
C &= 3t + \beta + \alpha_2 \\
D &= 3t + \beta + \alpha_3 \\
E &= 2t + \beta + \alpha_1 + \alpha_2 + \pi \\
F &= 2t + \beta + \alpha_1 + \alpha_3 + \pi \\
G &= 2t + \beta + \alpha_2 + \alpha_3 + \pi \\
H &= t + \beta + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3
\end{aligned}$$

とすると、補題.36 の条件を満たすので上式は次のようになる。

$$\begin{aligned}
& 8|c| \sin \frac{5t+2\beta+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}{2} \cos \frac{t-\alpha_1-\pi}{2} \cos \frac{t-\alpha_2-\pi}{2} \cos \frac{t-\alpha_3-\pi}{2} \\
&= 8|c| \cos \frac{5t+2\beta+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}{2} \sin \frac{t-\alpha_1}{2} \sin \frac{t-\alpha_2}{2} \sin \frac{t-\alpha_3}{2}.
\end{aligned}$$

曲面を $\alpha_1 < t < \alpha_2$ と $\alpha_2 < t < \alpha_3$ と $\alpha_3 < t < \alpha_1 + 2\pi$ に分けて全曲率を求める。それぞれの場合の曲面を S_1 と S_2 と S_3 とする。 $\alpha_1 < t < \alpha_2$ のとき、定理.31 (松田の公式) を用いて曲面 S_1 の全曲率を求めると

$$\begin{aligned}
\iint_{S_1} K dA &= -2\pi \lim_{t \rightarrow \alpha_2 - 0} \frac{8|c| \cos \frac{5t+2\beta+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}{2} \sin \frac{t-\alpha_1}{2} \sin \frac{t-\alpha_2}{2} \sin \frac{t-\alpha_3}{2}}{8|c| \left| \sin \frac{t-\alpha_1}{2} \right| \left| \sin \frac{t-\alpha_2}{2} \right| \left| \sin \frac{t-\alpha_3}{2} \right|} \\
&\quad + 2\pi \lim_{t \rightarrow \alpha_1 + 0} \frac{8|c| \cos \frac{5t+2\beta+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}{2} \sin \frac{t-\alpha_1}{2} \sin \frac{t-\alpha_2}{2} \sin \frac{t-\alpha_3}{2}}{8|c| \left| \sin \frac{t-\alpha_1}{2} \right| \left| \sin \frac{t-\alpha_2}{2} \right| \left| \sin \frac{t-\alpha_3}{2} \right|} \\
&= -2\pi \cos \frac{2\beta + \alpha_1 + 6\alpha_2 + \alpha_3}{2} + 2\pi \cos \frac{2\beta + 6\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}{2}.
\end{aligned}$$

同様にして曲面 S_2 、 S_3 の全曲率は

$$\begin{aligned}
\iint_{S_2} K dA &= -2\pi \lim_{t \rightarrow \alpha_3 - 0} \frac{8|c| \cos \frac{5t+2\beta+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}{2} \sin \frac{t-\alpha_1}{2} \sin \frac{t-\alpha_2}{2} \sin \frac{t-\alpha_3}{2}}{8|c| \left| \sin \frac{t-\alpha_1}{2} \right| \left| \sin \frac{t-\alpha_2}{2} \right| \left| \sin \frac{t-\alpha_3}{2} \right|} \\
&\quad + 2\pi \lim_{t \rightarrow \alpha_2 + 0} \frac{8|c| \cos \frac{5t+2\beta+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}{2} \sin \frac{t-\alpha_1}{2} \sin \frac{t-\alpha_2}{2} \sin \frac{t-\alpha_3}{2}}{8|c| \left| \sin \frac{t-\alpha_1}{2} \right| \left| \sin \frac{t-\alpha_2}{2} \right| \left| \sin \frac{t-\alpha_3}{2} \right|} \\
&= 2\pi \cos \frac{2\beta + \alpha_1 + \alpha_2 + 6\alpha_3}{2} - 2\pi \cos \frac{2\beta + \alpha_1 + 6\alpha_2 + \alpha_3}{2}. \\
\iint_{S_3} K dA &= -2\pi \lim_{t \rightarrow \alpha_2 - 0} \frac{8|c| \cos \frac{5t+2\beta+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}{2} \sin \frac{t-\alpha_1}{2} \sin \frac{t-\alpha_2}{2} \sin \frac{t-\alpha_1+2\pi}{2}}{8|c| \left| \sin \frac{t-\alpha_1}{2} \right| \left| \sin \frac{t-\alpha_2}{2} \right| \left| \sin \frac{t-\alpha_3}{2} \right|} \\
&\quad + 2\pi \lim_{t \rightarrow \alpha_3 + 0} \frac{8|c| \cos \frac{5t+2\beta+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}{2} \sin \frac{t-\alpha_1}{2} \sin \frac{t-\alpha_2}{2} \sin \frac{t-\alpha_3}{2}}{8|c| \left| \sin \frac{t-\alpha_1}{2} \right| \left| \sin \frac{t-\alpha_2}{2} \right| \left| \sin \frac{t-\alpha_3}{2} \right|} \\
&= -2\pi \cos \frac{2\beta + 6\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 10\pi}{2} + 2\pi \cos \frac{2\beta + 6\alpha_1 + \alpha_2 + 6\alpha_3}{2} \\
&= 2\pi \cos \frac{2\beta + 6\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}{2} + 2\pi \cos \frac{2\beta + 6\alpha_1 + \alpha_2 + 6\alpha_3}{2}.
\end{aligned}$$

よって曲面 S の全曲率は

$$\begin{aligned}
\iint_S K dA &= \iint_{S_1} K dA + \iint_{S_2} K dA + \iint_{S_3} K dA \\
&= 4\pi \left(\cos \frac{2\beta + 6\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}{2} - \cos \frac{2\beta + \alpha_1 + 6\alpha_2 + \alpha_3}{2} + \cos \frac{2\beta + \alpha_1 + \alpha_2 + 6\alpha_3}{2} \right).
\end{aligned}$$

□

2.4 $\gamma(t) = \text{ciz} \prod_{k=1}^n (z - e^{i\alpha_k})$ 型の回転面の全曲率

ここでは n 個の特異点を持つ一般の閉曲線を考える． z の $(n+1)$ 次の多項式

$$\gamma(t) = \sum_{k=0}^{n+1} a_k z^k$$

で表示される曲線 $\gamma(t)$ の t による一階微分 $\dot{\gamma}(t)$ が

$$\dot{\gamma}(t) = \text{ciz} \prod_{k=1}^n (z - e^{i\alpha_k})$$

と因数分解される場合、つまり、曲線 $\gamma(t)$ が $t = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ において特異点を持つ場合を考える．しかし一般の場合はこれまで見てきた 2 次、3 次、4 次の式の場合のように計算することは困難である．そこで今回はこれまでとは違ったアプローチを行う．

複素数で表示された閉曲線の回転面の全曲率を求めるために

$$\frac{\text{Re}(\dot{\gamma}(t))}{|\dot{\gamma}(t)|}$$

を求めてから極限を考えるという手順を行ってきたが、 $\dot{\gamma}(t)$ の偏角を θ とすれば

$$\operatorname{Re}(\dot{\gamma}(t)) = |\dot{\gamma}(t)| \cos \theta$$

であるから、

$$\frac{\operatorname{Re}(\dot{\gamma}(t))}{|\dot{\gamma}(t)|} = \frac{|\dot{\gamma}(t)| \cos \theta}{|\dot{\gamma}(t)|} = \cos \theta$$

となり、偏角 θ の情報、つまり特異点となる t の値のみわかれば全曲率が計算できることになる。そのことを以下で示す。

定理 38. $\gamma(t) = cz \prod_{k=1}^n (z - e^{i\alpha_k})$ ならば、回転面の全曲率は

$$\iint_S K dA = 4\pi \sum_{k=1}^n \cos \frac{2\beta + \sum_{j=1}^n \alpha_j + (n+2)\alpha_k - (n-1-2k)\pi}{2}.$$

証明. $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n < 2\pi$ とする。

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}(t) &= cz \prod_{k=1}^n (z - e^{i\alpha_k}) \\ &= cz^{n+1} \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{e^{i\alpha_k}}{z}\right) \\ &= cz^{n+1} \prod_{k=1}^n (1 - e^{i(\alpha_k - t)}). \end{aligned}$$

$1 - e^{i(\alpha - t)}$ の偏角 $\arg(1 - e^{i(\alpha - t)})$ は、 $\alpha > t$ のときは $\frac{\alpha - t - \pi}{2}$ 、 $\alpha < t$ のときは $\frac{\alpha - t + \pi}{2}$ である。
 $\alpha_1 < t < \alpha_2$ での $\dot{\gamma}(t)$ の偏角 $\arg(\dot{\gamma}(t))$ は、

$$\begin{aligned} \arg(\dot{\gamma}(t)) &= \arg c + \arg i + \arg z^{n+1} + \sum_{k=1}^n \arg(1 - e^{i(\alpha_k - t)}) \\ &= \beta + \frac{\pi}{2} + (n+1)t + \frac{\alpha_1 - t + \pi}{2} + \frac{\alpha_2 - t - \pi}{2} + \cdots + \frac{\alpha_n - t - \pi}{2} \\ &= \frac{2\beta + 2(n+1)t + \sum_{j=1}^n \alpha_j - nt - (n-3)\pi}{2} \\ &= \frac{2\beta + \sum_{j=1}^n \alpha_j + (n+2)t - (n-3)\pi}{2} \end{aligned}$$

となる。このことから区間 (α_1, α_2) の回転面 S_1 の全曲率は

$$\begin{aligned}
\iint_{S_1} K dA &= -2\pi \lim_{t \rightarrow \alpha_2 - 0} \cos \frac{2\beta + \sum_{j=1}^n \alpha_j + (n+2)t - (n-3)\pi}{2} \\
&\quad + 2\pi \lim_{t \rightarrow \alpha_1 + 0} \cos \frac{2\beta + \sum_{j=1}^n \alpha_j + (n+2)t - (n-3)\pi}{2} \\
&= -2\pi \cos \frac{2\beta + \sum_{j=1}^n \alpha_j + (n+2)\alpha_2 - (n-3)\pi}{2} \\
&\quad + 2\pi \cos \frac{2\beta + \sum_{j=1}^n \alpha_j + (n+2)\alpha_1 - (n-3)\pi}{2}. \\
&= 2\pi \cos \frac{2\beta + \sum_{j=1}^n \alpha_j + (n+2)\alpha_2 - (n-5)\pi}{2} \\
&\quad + 2\pi \cos \frac{2\beta + \sum_{j=1}^n \alpha_j + (n+2)\alpha_1 - (n-3)\pi}{2}.
\end{aligned}$$

同様に $\alpha_2 < t < \alpha_3$ での $\gamma(t)$ の偏角 $\arg(\gamma(t))$ は

$$\begin{aligned}
\arg(\gamma(t)) &= \arg c + \arg i + \arg z^{n+1} + \sum_{k=1}^n \arg(1 - e^{i(\alpha_k)}) \\
&= \beta + \frac{\pi}{2} + (n+1)t + \frac{\alpha_1 - t + \pi}{2} + \frac{\alpha_2 - t + \pi}{2} + \cdots + \frac{\alpha_n - t - \pi}{2} \\
&= \frac{2\beta + \sum_{j=1}^n \alpha_j + (n+2)t - (n-5)\pi}{2}
\end{aligned}$$

であるから、区間 (α_2, α_3) の回転面 S_2 の全曲率は

$$\begin{aligned}
\iint_{S_2} K dA &= -2\pi \lim_{t \rightarrow \alpha_3 - 0} \cos \frac{2\beta + \sum_{j=1}^n \alpha_j + (n+2)t - (n-5)\pi}{2} \\
&\quad + 2\pi \lim_{t \rightarrow \alpha_2 + 0} \cos \frac{2\beta + \sum_{j=1}^n \alpha_j + (n+2)t - (n-5)\pi}{2} \\
&= 2\pi \cos \frac{2\beta + \sum_{j=1}^n \alpha_j + (n+2)\alpha_3 - (n-7)\pi}{2} \\
&\quad + 2\pi \cos \frac{2\beta + \sum_{j=1}^n \alpha_j + (n+2)\alpha_2 - (n-5)\pi}{2}
\end{aligned}$$

となる。同様に上の事を一般化して、 $1 \leq k \leq n-1$ のときの区間 (α_k, α_{k+1}) の回転面 S_k の全曲率は

$$\begin{aligned}
\iint_{S_k} K dA &= -2\pi \lim_{t \rightarrow \alpha_{k+1} - 0} \cos \frac{2\beta + \sum_{j=1}^n \alpha_j + (n+2)t - (n-1-2k)\pi}{2} \\
&\quad + 2\pi \lim_{t \rightarrow \alpha_k + 0} \cos \frac{2\beta + \sum_{j=1}^n \alpha_j + (n+2)t - (n-1-2k)\pi}{2} \\
&= -2\pi \cos \frac{2\beta + \sum_{j=1}^n \alpha_j + (n+2)\alpha_{k+1} - (n-1-2k)\pi}{2} \\
&\quad + 2\pi \cos \frac{2\beta + \sum_{j=1}^n \alpha_j + (n+2)\alpha_k - (n-1-2k)\pi}{2} \\
&= 2\pi \cos \frac{2\beta + \sum_{j=1}^n \alpha_j + (n+2)\alpha_{k+1} - \{n-1-2(k+1)\}\pi}{2} \\
&\quad + 2\pi \cos \frac{2\beta + \sum_{j=1}^n \alpha_j + (n+2)\alpha_k - (n-1-2k)\pi}{2}
\end{aligned}$$

である。 $k = n$ のときの、区間 $(\alpha_n, \alpha_1 + 2\pi)$ での回転面 S_n の全曲率については

$$\iint_{S_n} K dA = -2\pi \lim_{t \rightarrow \alpha_1 + 2\pi - 0} \cos(\arg(\dot{\gamma}(t))) + 2\pi \lim_{t \rightarrow \alpha_n + 0} \cos(\arg(\dot{\gamma}(t)))$$

となる。 $\alpha_n < t < \alpha_1 + 2\pi$ のとき、 $\alpha_i - t$ ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) は負値なので、

$$\begin{aligned} \arg(\dot{\gamma}(t)) &= \arg c + \arg i + \arg z^{n+1} + \sum_{k=1}^n \arg(1 - e^{i(\alpha_k)}) \\ &= \beta + \frac{\pi}{2} + (n+1)t + \frac{\alpha_1 - t + \pi}{2} + \frac{\alpha_2 - t + \pi}{2} + \dots + \frac{\alpha_n - t + \pi}{2} \\ &= \frac{2\beta + 2(n+1)t + \sum_{j=1}^n \alpha_j - nt + (n+1)\pi}{2} \\ &= \frac{2\beta + \sum_{j=1}^n \alpha_j + (n+2)t + (n+1)\pi}{2}. \end{aligned}$$

ゆえに、

$$\begin{aligned} \iint_{S_n} K dA &= -2\pi \lim_{t \rightarrow \alpha_1 + 2\pi - 0} \cos \frac{2\beta + \sum_{j=1}^n \alpha_j + (n+2)t + (n+1)\pi}{2} \\ &\quad + 2\pi \lim_{t \rightarrow \alpha_n + 0} \cos \frac{2\beta + \sum_{j=1}^n \alpha_j + (n+2)t + (n+1)\pi}{2} \end{aligned}$$

となる。この第一項と第二項を取り出してそれぞれ計算すると、第一項については

$$\begin{aligned} &-2\pi \lim_{t \rightarrow \alpha_1 + 2\pi - 0} \cos \frac{2\beta + \sum_{j=1}^n \alpha_j + (n+2)t + (n+1)\pi}{2} \\ &= -2\pi \cos \frac{2\beta + \sum_{j=1}^n \alpha_j + (n+2)(\alpha_1 + 2\pi) + (n+1)\pi}{2} \\ &= -2\pi \cos \frac{2\beta + \sum_{j=1}^n \alpha_j + (n+2)\alpha_1 + (3n+5)\pi}{2} \\ &= -2\pi \cos \left\{ \frac{2\beta + \sum_{j=1}^n \alpha_j + (n+2)\alpha_1 + (3n+5)\pi}{2} - 2(n+1)\pi \right\} \\ &= -2\pi \cos \frac{2\beta + \sum_{j=1}^n \alpha_j + (n+2)\alpha_1 - (n-1)\pi}{2} \\ &= 2\pi \cos \frac{2\beta + \sum_{j=1}^n \alpha_j + (n+2)\alpha_1 - (n-1-2 \cdot 1)\pi}{2} \end{aligned}$$

となり、第二項については、

$$\begin{aligned} &2\pi \lim_{t \rightarrow \alpha_n + 0} \cos \frac{2\beta + \sum_{j=1}^n \alpha_j + (n+2)t + (n+1)\pi}{2} \\ &= 2\pi \cos \frac{2\beta + \sum_{j=1}^n \alpha_j + (n+2)\alpha_n + (n+1)\pi}{2} \\ &= 2\pi \cos \frac{2\beta + \sum_{j=1}^n \alpha_j + (n+2)\alpha_n - (n-1-2n)\pi}{2} \end{aligned}$$

となる。

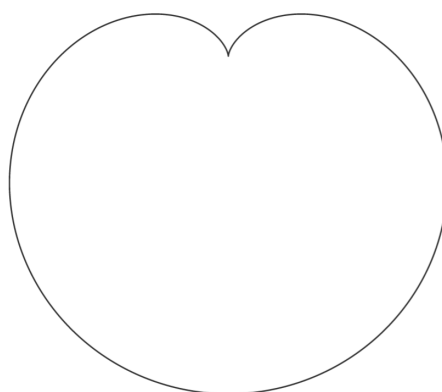
以上のことから、閉曲線 $\gamma(t)$ の y 軸まわりでの回転面 S の全曲率は

$$\begin{aligned}
 \iint_{S_n} K dA &= \sum_{k=1}^n \iint_{S_k} K dA \\
 &= 2\pi \cos \frac{2\beta + \sum_{j=1}^n \alpha_j + (n+2)\alpha_2 - (n-1-2 \cdot 2)\pi}{2} \\
 &\quad + 2\pi \cos \frac{2\beta + \sum_{j=1}^n \alpha_j + (n+2)\alpha_1 - (n-1-2 \cdot 1)\pi}{2} \\
 &\quad + 2\pi \cos \frac{2\beta + \sum_{j=1}^n \alpha_j + (n+2)\alpha_3 - (n-1-2 \cdot 3)\pi}{2} \\
 &\quad + 2\pi \cos \frac{2\beta + \sum_{j=1}^n \alpha_j + (n+2)\alpha_2 - (n-1-2 \cdot 2)\pi}{2} \\
 &\quad + \cdots \\
 &\quad + 2\pi \cos \frac{2\beta + \sum_{j=1}^n \alpha_j + (n+2)\alpha_n - (n-1-2n)\pi}{2} \\
 &\quad + 2\pi \cos \frac{2\beta + \sum_{j=1}^n \alpha_j + (n+2)\alpha_{n-1} - \{n-1-2(n-1)\}\pi}{2} \\
 &\quad + 2\pi \cos \frac{2\beta + \sum_{j=1}^n \alpha_j + (n+2)\alpha_1 - (n-1-2 \cdot 1)\pi}{2} \\
 &\quad + 2\pi \cos \frac{2\beta + \sum_{j=1}^n \alpha_j + (n+2)\alpha_n - (n-1-2n)\pi}{2} \\
 &= 4\pi \sum_{k=1}^n \cos \frac{2\beta + \sum_{j=1}^n \alpha_j + (n+2)\alpha_k - (n-1-2k)\pi}{2}.
 \end{aligned}$$

□

例 39. 次はカージオイドの表示の一つである.

$$(f(t), g(t)) = ((1 - \sin t) \cos(t + \theta) + R, (1 - \sin t) \sin(t + \theta))$$



図は $\theta = 0$ の場合 このとき $t = \frac{\pi}{2}$ で特異点を持つ
これを、特異点を中心として θ 回転させたものが

$$(f(t), g(t)) = ((1 - \sin t) \cos(t + \theta) + R, (1 - \sin t) \sin(t + \theta))$$

これを複素数で表示しなおす. $z = e^{it}$ であれば $\sin t = \frac{z - \bar{z}}{2i}$ であることを利用して

$$\begin{aligned}\gamma(t) &= (1 - \sin t) \cos(t + \theta) + R + i(1 - \sin t) \sin(t + \theta) \\ &= (1 - \sin t) \{ \cos(t + \theta) + i \sin(t + \theta) \} + R \\ &= (1 - \sin t) e^{i(t+\theta)} + R \\ &= \left(1 - \frac{z - \bar{z}}{2i} \right) z e^{i\theta} + R \\ &= \frac{i}{2} e^{i\theta} (z^2 - 2iz - 1) + R \\ &= \frac{i}{2} e^{i\theta} (z - 1)^2 + R.\end{aligned}$$

よって

$$\dot{\gamma}(t) = ie^{i\theta}(z - e^{\frac{\pi}{2}i})iz$$

となり, $c = ie^{i\theta}$ とすると $\arg c = \beta = \frac{\pi}{2} + \theta$ であるから, このカージョイドの回転面の全曲率は定理.38 より

$$\begin{aligned}\iint_{S_n} K dA &= -4\pi \cos(\beta + 2\alpha) \\ &= -4\pi \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) \\ &= -4\pi \sin \theta.\end{aligned}$$

2.5 全曲率とガウス曲率の関係

xy 平面上の曲線 $\gamma(t) = (f(t), g(t))$ の回転面を考えると, 曲線上の点 t における回転面上でのガウス曲率 K は弧長パラメータ s を用いて

$$K = -\frac{f''(s)}{f(s)}$$

となることを松田は示している (松田雄斗, (2019), 『回転面の全曲率に関する考察』, 三重大学大学院教育学研究科修士論文) [9]. 証明については『回転面の全曲率に関する考察』[9] を見られよ. ここではこの結果を用いて回転面の全曲率を再度観察する. そのために次の定理を準備する.

定理 40. xy 平面上の曲線 $\gamma(t) = (f(t), g(t))$ の回転面上の点 t でのガウス曲率 K は

$$K(t) = \frac{\dot{g}(t) \left(\dot{f}(t)\ddot{g}(t) - \ddot{f}(t)\dot{g}(t) \right)}{f(t) \left(\{\dot{f}(t)\}^2 + \{\dot{g}(t)\}^2 \right)^2}.$$

証明.

$$\begin{aligned}
 f'(s) &= \frac{df}{ds} \\
 &= \frac{df}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} \\
 &= \dot{f}(t) \cdot \frac{1}{\frac{ds}{dt}} \\
 &= \frac{\dot{f}(t)}{\sqrt{\{\dot{f}(t)\}^2 + \{\dot{g}(t)\}^2}}.
 \end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned}
 f''(s) &= \frac{d}{ds} f'(s) \\
 &= \frac{ds}{dt} \left(\frac{\dot{f}(t)}{\sqrt{\{\dot{f}(t)\}^2 + \{\dot{g}(t)\}^2}} \right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\{\dot{f}(t)\}^2 + \{\dot{g}(t)\}^2}} \left(\frac{\ddot{f}(t)\sqrt{\{\dot{f}(t)\}^2 + \{\dot{g}(t)\}^2} - \dot{f}(t) \left(\{\dot{f}(t)\}^2 + \{\dot{g}(t)\}^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\dot{f}(t)\ddot{f}(t) + \dot{g}(t)\ddot{g}(t) \right)}{\{\dot{f}(t)\}^2 + \{\dot{g}(t)\}^2} \right) \\
 &= \frac{\ddot{f}(t) \left(\{\dot{f}(t)\}^2 + \{\dot{g}(t)\}^2 \right) - \dot{f}(t) \left(\dot{f}(t)\ddot{f}(t) + \dot{g}(t)\ddot{g}(t) \right)}{\left(\{\dot{f}(t)\}^2 + \{\dot{g}(t)\}^2 \right)^2} \\
 &= -\frac{\dot{g}(t) \left(\dot{f}(t)\ddot{g}(t) - \ddot{f}(t)\dot{g}(t) \right)}{\left(\{\dot{f}(t)\}^2 + \{\dot{g}(t)\}^2 \right)^2}.
 \end{aligned}$$

以上より

$$\begin{aligned}
 K &= -\frac{f''(s)}{f(s)} \\
 &= \frac{\dot{g}(t) \left(\dot{f}(t)\ddot{g}(t) - \ddot{f}(t)\dot{g}(t) \right)}{f(t) \left(\{\dot{f}(t)\}^2 + \{\dot{g}(t)\}^2 \right)^2}.
 \end{aligned}$$

□

この定理.40 を例.39 のカージオイドに適用する. まず $\theta = 0$ の場合を考える. 一階微分と二階微分を求めると次のようになる.

$$\begin{aligned}
 f(t) &= (1 - \sin t) \cos t + R & g(t) &= (1 - \sin t) \sin t \\
 \dot{f}(t) &= -\sin t - \cos 2t & \dot{g}(t) &= \cos t - \sin 2t \\
 \ddot{f}(t) &= -\cos t + 2 \sin 2t & \ddot{g}(t) &= -\sin t - 2 \cos 2t
 \end{aligned}$$

ここで t の値によってガウス曲率 K の符号がどのように変化するかを考える.

$$K = \frac{\dot{g}(t) \left(\dot{f}(t)\ddot{g}(t) - \ddot{f}(t)\dot{g}(t) \right)}{f(t) \left(\{\dot{f}(t)\}^2 + \{\dot{g}(t)\}^2 \right)^2}.$$

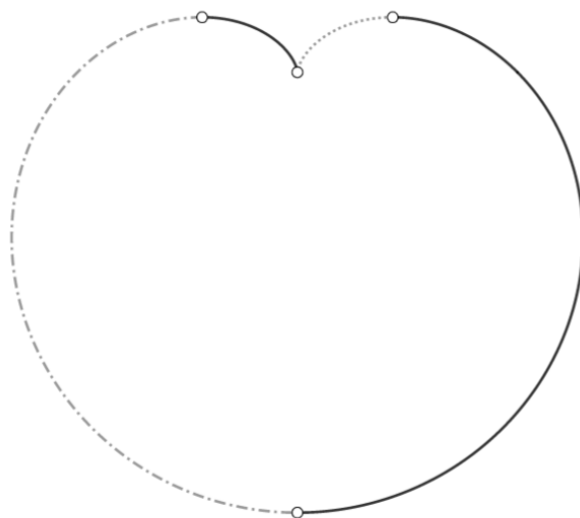
であったが、必ず $f(t) > 0$ となるように R を十分大きな正の数として取っているため、特異点以外では右辺の分母は常に正である。よってガウス曲率 K の符号は右辺の分子の符号にのみ依存している。右辺の分子は

$$\begin{aligned} & \dot{g}(t) \left(\dot{f}(t)\ddot{g}(t) - \ddot{f}(t)\dot{g}(t) \right) \\ &= (\cos t - \sin 2t) \{ (-\sin t - \cos 2t)(-\sin t - 2\cos 2t) - (-\cos t + 2\sin 2t)(\cos t - \sin 2t) \} \\ &= \cos t(1 - 2\sin t)(3 - 3\sin t) \\ &= 6\cos t \left(\frac{1}{2} - \sin t \right) (1 - \sin t) \end{aligned}$$

であるから、ガウス曲率 K の符号は

$$\begin{aligned} & 0 \leq t < \frac{\pi}{6} \text{ で正、} \\ & \frac{\pi}{6} < t < \frac{\pi}{2} \text{ で負、} \\ & \frac{\pi}{2} < t < \frac{5}{6}\pi \text{ で正、} \\ & \frac{5}{6}\pi < t < 2\pi \text{ で負} \end{aligned}$$

の値を取ることがわかる。このことを踏まえ、ガウス曲率が正の部分を実線で、負の部分で破線で表したものが次の図である。



例.39 から特異点が 12 時方向に存在するカージオイドの回転面の全曲率は 0 であるが、図を見るとガウス曲率が正の部分と負の部分が左右対称に表れており、全曲率を求める際にお互いに打ち消しあって 0 になっていることがわかる。

また、ガウス曲率 K の式の分子には $\dot{g}(t)$ が含まれており、 $\dot{g}(t) = 0$ となる点が正負の境目になっていることがわかる。これはグラフで表したときの極になっている。

続いて θ を正の方へ少しだけ動かした場合を考える。これまでと同様に考えると

$$\begin{aligned} f(t) &= (1 - \sin t) \cos(t + \theta) + R & g(t) &= (1 - \sin t) \sin(t + \theta) \\ \dot{f}(t) &= -\sin(t + \theta) - \cos(2t + \theta) & \dot{g}(t) &= \cos(t + \theta) - \sin(2t + \theta) \\ \ddot{f}(t) &= -\cos(t + \theta) + 2\sin(2t + \theta) & \ddot{g}(t) &= -\sin(t + \theta) - 2\cos(2t + \theta) \end{aligned}$$

となる。 $\dot{g}(t) (\dot{f}(t)\ddot{g}(t) - \ddot{f}(t)\dot{g}(t))$ の符号を調べるために $\dot{g}(t)$ と $(\dot{f}(t)\ddot{g}(t) - \ddot{f}(t)\dot{g}(t))$ に分けて考える。

$$\begin{aligned} & \dot{f}(t)\ddot{g}(t) - \ddot{f}(t)\dot{g}(t) \\ &= \{-\sin(t + \theta) - \cos(2t + \theta)\} \{-\sin(t + \theta) - 2\cos(2t + \theta)\} \\ & \quad - \{-\cos(t + \theta) + 2\sin(2t + \theta)\} \{\cos(t + \theta) - \sin(2t + \theta)\} \\ &= \sin^2(t + \theta) + 3\sin(t + \theta)\cos(2t + \theta) + \cos^2(2t + \theta) \\ & \quad + \cos^2(t + \theta) - 3\cos(t + \theta)\sin(2t + \theta) + 2\sin^2(2t + \theta) \\ &= 3(1 - \sin t). \end{aligned}$$

$0 \leq t < 2\pi$ であるから $(\dot{f}(t)\ddot{g}(t) - \ddot{f}(t)\dot{g}(t))$ は $t = \frac{\pi}{2}$ 以外では常に正である。

$$\begin{aligned} \dot{g}(t) &= \cos(t + \theta) - \sin(2t + \theta) \\ &= \sin(t + \theta + \frac{\pi}{2}) - \sin(2t + \theta) \\ &= 2\cos \frac{(t + \theta + \frac{\pi}{2}) + (2t + \theta)}{2} \sin \frac{(t + \theta + \frac{\pi}{2}) - (2t + \theta)}{2} \\ &= 2\cos \frac{6t + 4\theta + \pi}{4} \sin \frac{-2t + \pi}{4}. \end{aligned}$$

$\sin \frac{-2t + \pi}{4}$ 部分については $0 \leq t < 2\pi$ であるから $-\frac{3}{4}\pi < \frac{-2t + \pi}{4} \leq \frac{\pi}{4}$ である。よって

$$\begin{aligned} & 0 \leq t < \frac{\pi}{2} \text{ で正、} \\ & \frac{\pi}{2} < t < 2\pi \text{ で負} \end{aligned}$$

である。

$\cos \frac{6t + 4\theta + \pi}{4}$ 部分については $\theta + \frac{\pi}{4} \leq \frac{6t + 4\theta + \pi}{4} < \theta + \frac{13}{4}\pi$ である。ここでは θ を正の方へ少しだけ動かした場合を考えるので $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ として考えると、

- (i) $\theta + \frac{\pi}{4} \leq \frac{6t + 4\theta + \pi}{4} \leq \frac{\pi}{2}$ 、つまり $0 \leq t < \frac{\pi - 4\theta}{6}$ では正
- (ii) $\frac{\pi}{2} < \frac{6t + 4\theta + \pi}{4} < \frac{3}{2}\pi$ 、つまり $\frac{\pi - 4\theta}{6} < t < \frac{5\pi - 4\theta}{6}$ では負
- (iii) $\frac{3}{2}\pi < \frac{6t + 4\theta + \pi}{4} < \frac{5}{2}\pi$ 、つまり $\frac{5\pi - 4\theta}{6} < t < \frac{9\pi - 4\theta}{6}$ では正
- (iv) $\frac{5}{2}\pi < t < 2\pi$ 、つまり $\frac{9\pi - 4\theta}{6} < t < 2\pi$ では負

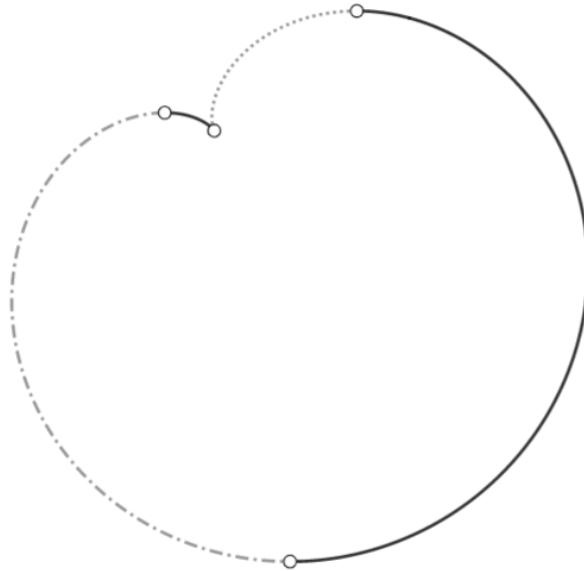
である。

以上の事から $\dot{g}(t) (\dot{f}(t)\ddot{g}(t) - \ddot{f}(t)\dot{g}(t))$ の符号は

$$\begin{aligned} 0 \leq t < \frac{\pi - 4\theta}{6} & \text{では正、} \\ \frac{\pi - 4\theta}{6} < t < \frac{\pi}{2} & \text{では負、} \\ \frac{\pi}{2} < t < \frac{5\pi - 4\theta}{6} & \text{では正、} \\ \frac{5\pi - 4\theta}{6} < t < \frac{9\pi - 4\theta}{6} & \text{では負、} \\ \frac{9\pi - 4\theta}{6} < t < 2\pi & \text{では正} \end{aligned}$$

となる。

また、 $t = \frac{\pi - 4\theta}{6}, \frac{5\pi - 4\theta}{6}, \frac{9\pi - 4\theta}{6}$ のとき $\dot{g}(t) = 0$ 、つまりこれらの点は極となっている。以上のことを踏まえ、ガウス曲率が正の部分を実線で、負の部分で破線で表したものが次の図である。



この図の右側の実線部分の回転面は球の右半分と同相であると考えられる。一方、左側の破線部分の回転面は、先ほど考えた右側の実線部分回転面のガウス曲率と逆符号である。よってこの2つの部分を合わせた部分の全曲率は0になっている。残った左側の実線部分と右側の破線部分では、ガウス写像を考えた場合に破線部分の方が広い部分に写ることが見て取れる。そのため全体では全曲率が負になると考えられる。実際、例.39で導いた式

$$\iint_{S_n} K dA = -4\pi \sin \theta$$

においては $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ で考えると全曲率は負になっている。

参考文献

- [1] 梅原雅顕, 山田光太郎, (2002), 『曲線と曲面-微分幾何的アプローチ-』, 裳華房.
- [2] 梅原雅顕, 佐治健太郎, 山田光太郎, (2017), 『特異点をもつ曲線と曲面の微分幾何学』, 丸善出版.
- [3] 小林昭七, (2015), 『曲線と曲面の微分幾何 (改訂版)』, 裳華房.
- [4] 瀬山士郎, (1988), 『トポロジー:柔らかい幾何学』, 日本評論社.
- [5] 竹内洋介, (2017), 『複素数を用いた平面曲線の全曲率の考察』, 三重大学大学院教育学研究科修士論文.
- [6] 田中健雄, (2017), 『曲線の変形における全曲率の変化』, 三重大学大学院教育学研究科修士論文.
- [7] 竹内洋介, 田中健雄, 新田貴士, (2017), 『特異点が存在する曲線と曲面の全曲率について』, 三重大学教育学部紀要第 69 巻.
- [8] 中内伸光, (2005), 『じっくり学ぶ曲線と曲面-微分幾何学初歩-』, 共立出版
- [9] 松田雄斗, (2018), 『回転面の全曲率に関する考察』, 三重大学大学院教育学研究科修士論文.

謝辞

本論文執筆にあたり、指導教官の新田貴士教授からは多大な助言を賜りました。思うように進まない研究を温かく見守って下さったのみならず、多くの励ましのお言葉を下さったこと、厚く感謝を申し上げます。また、副査を引き受けて下さった川向洋之教授、森山貴之准教授におかれましては、解析学要論、幾何学要論への参加を快く受け入れていただいたのみならず、様々なアドバイスいただけたこと、感謝の意を表します。

竹内洋介先輩、田中健雄先輩、松田雄斗先輩の先行研究なくしては本研究は成り立ちませんでした。特に松田雄斗先輩には大変お世話になりました。ありがとうございました。

学部卒業生の幾何学ゼミナールのみなさんや、同期の大学院生のみなさんからは大きな刺激を受け、励みとさせていただきましたし、示唆を受けました。とりわけ川瀬朋大さんは修士論文以外の研究でもたくさんの時間をともにさせていただきました。みなさま、本当にありがとうございました。