$t = 0$ 近傍の I 型パンルヴェ方程式の解の評価

川向　洋之・川瀬　朋大・齋藤　千依

要　旨

複素領域で定義された形式的常微分方程式

$$x' = \sum_{\substack{k+l+m\geq 1\\ k,l,m\geq 0}} a_{klm}t^k x^l y^m, \quad y' = \sum_{\substack{k+l+m\geq 1\\ k,l,m\geq 0}} b_{klm}t^k x^l y^m, \quad ('= d/dt) \tag{0.1}$$

に対し、形式的変換

$$x = X + t\sum_{\substack{k+l+m\geq 1\\ k,l,m\geq 0}} p_{klm}t^k X^l Y^m, \quad y = Y + t\sum_{\substack{k+l+m\geq 1\\ k,l,m\geq 0}} q_{klm}t^k X^l Y^m \tag{0.2}$$

で、(0.1) を $X' = 0, Y' = 0$ にするものが存在する。特に (0.1) の右辺が収束するならば、変換 (0.2) も収束することが知られている。このことを利用し、$t = 0$ 付近で定義された I 型パンルヴェ方程式 $x'' = 6x^2 + t$ の解を評価する。

1　序　文

物理的な現象を数式で表したとき、多くの場合、微分方程式が現れる。しかし、その方程式の解は、大抵の 場合、我々のよく知っている関数では記述できない。そこで数理物理の世界によく現れる関数で、比較的性質 の良いものを数多く見つけておくことは意味のあることだろう。このような考えから、フランスの ポール・パンルヴェは、次の方程式

$$x'' = R(t, x, x') \quad ('= d/dt)$$

（ただし $R(t, x, x')$ は t の解析関数を係数とする x と x' の有理式）を考え、この方程式の解の特異点で、その位置が初期条件に依存するものは極しかない（この性質をパンルヴェ性と言う）ものを分類し、次の方程式を発見した。

$$\begin{aligned}
x'' &= 6x^2 + t,\\
x'' &= 2x^3 + tx + \alpha,\\
x'' &= \frac{1}{x}(x')^2 - \frac{1}{t}x' + \frac{1}{t}(\alpha x^2 + \beta) + \gamma x^3 + \frac{\delta}{t},\\
x'' &= \frac{1}{2x}(x')^2 + \frac{3}{2}x^3 + 4tx^2 + 2(t^2 - \alpha)x + \frac{\beta}{x},\\
x'' &= \left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{x-1}\right)(x')^2 - \frac{1}{t}x' + \frac{(x-1)^2}{t^2}\left(\alpha x + \frac{\beta}{x}\right) + \gamma\,\frac{x}{t} + \delta\,\frac{x(x+1)}{x-1},\\
x'' &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-t}\right)(x')^2 - \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} + \frac{1}{x-t}\right)x'\\
&\qquad + \frac{x(x-1)(x-t)}{t^2(t-1)^2}\left(\alpha + \beta\frac{t}{x^2} + \gamma\frac{t-1}{(x-1)^2} + \delta\frac{t(t-1)}{(x-t)^2}\right).
\end{aligned}$$

ただし $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ は複素パラメータである。この方程式は、発見当時、物理的な応用などがなかったため、次第に忘れ去られていくことになるが、1970 年代に入ると、ソリトン理論などの数理物理の世界で再発見され、盛んに研究されるようになった。

このノートでは、木村 [1] の p49 - p59 で紹介されている定理を用いて次のことを示す。

【定理 1】　$t=0$ で $x(0)=\alpha, x'(0)=\beta$ となる I 型パンルヴェ方程式 $x''=6x^2+t$ の解は、

$$|x(t)| \leq \frac{1-\sqrt{1-24|\alpha||t|^2-24|\beta||t|^3-24|t|^5}}{12|t|^2}$$

を満たす。ただし t はルートの中が正となる範囲を動くものとする。

2　形式的常微分方程式と形式的変換

定理 1 を示すため、形式的常微分方程式と、形式的変換に関する定理を 1 つ紹介しておく。

【定理 2】（木村 [1],p49 - p.59）複素領域で定義された形式的常微分方程式

$$x' = \sum_{\substack{k+l+m\geq 1\\ k,l,m\geq 0}} a_{klm}t^k x^l y^m, \quad y' = \sum_{\substack{k+l+m\geq 1\\ k,l,m\geq 0}} b_{klm}t^k x^l y^m, \quad ('=d/dt) \tag{2.1}$$

に対し、形式的変換

$$x = X + t\sum_{\substack{k+l+m\geq 1\\ k,l,m\geq 0}} p_{klm}t^k X^l Y^m, \quad y = Y + t\sum_{\substack{k+l+m\geq 1\\ k,l,m\geq 0}} q_{klm}t^k X^l Y^m \tag{2.2}$$

で、(2.1) を $X'=0, Y'=0$ にするものが存在する。特に (2.1) の右辺が収束するならば、変換 (2.2) も収束する。

この定理の証明は木村 [1] に載っているが、後々の説明のため、証明を与えておく。

$\varphi = X + t\sum_{\substack{k+l+m\geq 1\\ k,l,m\geq 0}} p_{klm}t^k X^l Y^m, \psi = Y + t\sum_{\substack{k+l+m\geq 1\\ k,l,m\geq 0}} q_{klm}t^k X^l Y^m$　として (2.2) を (2.1) に代入すると

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial X}X' + \frac{\partial\varphi}{\partial Y}Y' &= \sum_{\substack{k+l+m\geq 1\\ k,l,m\geq 0}} a_{klm}t^k\varphi^l\psi^m,\\ \frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial X}X' + \frac{\partial\psi}{\partial Y}Y' &= \sum_{\substack{k+l+m\geq 1\\ k,l,m\geq 0}} b_{klm}t^k\varphi^l\psi^m.\end{aligned}$$

これから

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \sum_{\substack{k+l+m\geq 1\\ k,l,m\geq 0}} a_{klm}t^k\varphi^l\psi^m, \quad \frac{\partial\psi}{\partial t} = \sum_{\substack{k+l+m\geq 1\\ k,l,m\geq 0}} b_{klm}t^k\varphi^l\psi^m \tag{2.3}$$

を満たす φ, ψ の存在が言えれば $X'=0, Y'=0$ とできることが分かる。従って φ, ψ の存在を示そう。(2.3) を t, X, Y のべき級数で表し $t^k X^l Y^m$ の係数を見ると

$$\begin{aligned}(k+1)p_{klm} = a_{klm} + (&\text{“}p_{KLM}, q_{KLM}, a_{KLM}, b_{KLM}\text{（ただし }K,L,M\text{ は}\\ &K+L+M<k+l+m\text{ となるもの全体）を変数とする正整数係数の多項式”}),\\ (k+1)q_{klm} = b_{klm} + (&\text{“}p_{KLM}, q_{KLM}, a_{KLM}, b_{KLM}\text{（ただし }K,L,M\text{ は}\\ &K+L+M<k+l+m\text{ となるもの全体）を変数とする正整数係数の多項式”})\end{aligned}$$

となる。この漸化式を満たすように p_{klm}, q_{klm} を決め、これらを (2.2) に代入すれば、(2.3) を満たす φ, ψ が得られる。

次に (2.1) の右辺が収束するとき (2.2) も収束することを示そう。

$$F(t,x,y) = \sum_{\substack{k+l+m\geq 1\\ k,l,m\geq 0}} A_{klm} t^k x^l y^m, \quad G(t,x,y) = \sum_{\substack{k+l+m\geq 1\\ k,l,m\geq 0}} B_{klm} t^k x^l y^m$$

を、それぞれ (2.1) の第 1 式の右辺、(2.1) の第 2 式の右辺の優級数とする。また、与えられた k,l,m に対して、$p_{KLM}, q_{KLM}, a_{KLM}, b_{KLM}$（ただし K,L,M は $K+L+M<k+l+m$ となるもの全体）を変数とする正整数係数の多項式 $P(p_{KLM}, q_{KLM}, a_{KLM}, b_{KLM}), Q(p_{KLM}, q_{KLM}, a_{KLM}, b_{KLM})$ を

$$(k+1)p_{klm} = a_{klm} + P(p_{KLM}, q_{KLM}, a_{KLM}, b_{KLM}),$$
$$(k+1)q_{klm} = b_{klm} + Q(p_{KLM}, q_{KLM}, a_{KLM}, b_{KLM})$$

で定める。このとき

$$\tilde{X} - X = t\,F(t,\tilde{X},\tilde{Y}), \quad \tilde{Y} - Y = t\,G(t,\tilde{X},\tilde{Y}) \tag{2.4}$$

を満たす形式解

$$\tilde{X} = X + t \sum_{\substack{k+l+m\geq 1\\ k,l,m\geq 0}} \tilde{p}_{klm} t^k X^l Y^m, \quad \tilde{Y} = Y + t \sum_{\substack{k+l+m\geq 1\\ k,l,m\geq 0}} \tilde{q}_{klm} t^k X^l Y^m \tag{2.5}$$

が存在して、係数 $\tilde{p}_{klm}, \tilde{q}_{klm}$ は、漸化式

$$\tilde{p}_{klm} = A_{klm} + P(\tilde{p}_{KLM}, \tilde{q}_{KLM}, A_{KLM}, B_{KLM}), \quad \tilde{q}_{klm} = B_{klm} + Q(\tilde{p}_{KLM}, \tilde{q}_{KLM}, A_{KLM}, B_{KLM})$$

を満たす。さらに $P(p_{KLM}, q_{KLM}, a_{KLM}, b_{KLM}), Q(p_{KLM}, q_{KLM}, a_{KLM}, b_{KLM})$ が正整数係数の多項式であることから、(2.5) は (2.2) の優級数となる。

ところで、陰関数定理より、(2.4) の解 $\tilde{X} = \Phi(t,X,Y), \tilde{Y} = \Psi(t,X,Y)$ で、$(t,X,Y) = (0,0,0)$ で正則で $\Phi(0,0,0) = 0, \Psi(0,0,0) = 0$ となるものが存在する。そしてこの $\Phi(t,X,Y), \Psi(t,X,Y)$ の $(t,X,Y) = (0,0,0)$ でのテイラー展開は (2.5) の右辺と一致するはずである。このことから (2.5) の収束性が従う。さらに (2.5) は (2.2) の優級数だったので、(2.2) の収束性が言える。

3　定理の証明

$y = x'$ と置くと I 型パンルヴェ方程式は

$$x' = y,\ y' = 6x^2 + t \tag{3.1}$$

と同値である。この方程式を $X' = 0,\ Y' = 0$ にする変換 (2.2) を考えよう。定理 2 より、このような変換 (2.2) は必ず存在する。また、定理 2 の証明から、(2.2) の優級数として

$$\tilde{X} - X = t\tilde{Y}, \quad \tilde{Y} - Y = t\,(6\tilde{X}^2 + t) \tag{3.2}$$

の解

$$\tilde{X} = \frac{1 - \sqrt{1 - 24Xt^2 - 24Yt^3 - 24t^5}}{12t^2}, \quad \tilde{Y} = \frac{1 - 12Xt^2 - \sqrt{1 - 24Xt^2 - 24Yt^3 - 24t^5}}{12t^3} \tag{3.3}$$

を $t=0$ でテイラー展開したものが取れる。((3.2) の解は (3.3) と

$$\tilde{X} = \frac{1 + \sqrt{1 - 24Xt^2 - 24Yt^3 - 24t^5}}{12t^2}, \quad \tilde{Y} = \frac{1 - 12Xt^2 + \sqrt{1 - 24Xt^2 - 24Yt^3 - 24t^5}}{12t^3}$$

の 2 つあるが、後者は $\lim_{t\to 0} \tilde{X} = X,\ \lim_{t\to 0} \tilde{Y} = Y$ でないので不適)。ここで $X(0) = \alpha,\ Y(0) = \beta$ となる $X' = 0,\ Y' = 0$ の 解 $X = \alpha,\ Y = \beta$ を取り、この解を変換 (2.2) で写したものを考えよう．つまり

$$x = \alpha + t \sum_{\substack{k+l+m \geq 1 \\ k,l,m \geq 0}} p_{klm} t^k \alpha^l \beta^m, \quad y = \beta + t \sum_{\substack{k+l+m \geq 1 \\ k,l,m \geq 0}} q_{klm} t^k \alpha^l \beta^m \tag{3.4}$$

を考える。すると x, y は $x(0) = \alpha, y(0) = \beta$ となる (3.1) の解となる。さらに (2.2) の優級数は (3.3) を $t = 0$でテイラー展開したものなので

$$|\,x(t)\,| \leq |\,\alpha\,| + |\,t\,| \sum_{\substack{k+l+m \geq 1 \\ k,l,m \geq 0}} |\,p_{klm}\,|\,|\,t\,|^k\,|\,\alpha\,|^l\,|\,\beta\,|^m \leq \frac{1 - \sqrt{1 - 24\,|\,\alpha\,|\,|\,t\,|^2 - 24\,|\,\beta\,|\,|\,t\,|^3 - 24\,|\,t\,|^5}}{12\,|\,t\,|^2}$$

が分かる。定理 1 はこのことから従う。

参考文献

[1] 木村 俊房『常微分方程式 II』（岩波基礎数学講座），1977 年
[2] 岡本 和夫『パンルヴェ方程式』（上智大学数学教室），1985 年

On estimate of a solution around *t* = 0 of the first Painlevé equation

Hiroyuki KAWAMUKO, Tomohiro KAWASE and Chiyori SAITO

Abstract

We considered a formal differential system

$$x' = \sum_{\substack{k+l+m \geq 1 \\ k,l,m \geq 0}} a_{klm} t^k x^l y^m, \quad y' = \sum_{\substack{k+l+m \geq 1 \\ k,l,m \geq 0}} b_{klm} t^k x^l y^m, \quad ('= d/dt) \tag{0.1}$$

defined on complex domain. It is known that there exists a formal transformation of the form

$$x = X + t \sum_{\substack{k+l+m \geq 1 \\ k,l,m \geq 0}} p_{klm} t^k X^l Y^m, \quad y = Y + t \sum_{\substack{k+l+m \geq 1 \\ k,l,m \geq 0}} q_{klm} t^k X^l Y^m \tag{0.2}$$

such that the system (0.1) is formally transformed into the system $X' = 0,\ Y' = 0$. Moreover, if the right-hand side of (0.1) converges, the formal power series (0.2) converges. We estimated a solution around $t = 0$ of the first Painlevé equation $x'' = 6x^2 + t$ by using this fact.