

# 特異点をもつ回転面の全曲率について

松田 雄斗 森谷 浩司 中西 舞 新田 貴士 \*1

## Total curvatures of rotating surfaces with singularities

Yuto Matsuda , Koji Moritani , Mai Nakanishi , and Takashi Nitta

### Abstract

We calculate total curvatures of rotating surfaces with singularities, called torus-type and apple-type.

### 要旨

滑らかな閉曲面においてはオイラー標数と全曲率の関係として「Gauss-Bonnet の定理」が成立し、微分幾何学と位相幾何学とを橋渡ししているが、特異点を含むような一般の場合には成立しない。本論文では特異点をもつ閉曲面の全曲率について、トーラス型、リング型の2つの場合について計算し、Gauss-Bonnet の定理が成り立たない例を与えている。1章では準備として曲線、曲面、曲率などについて定義し、本論文に關係する定理を書いている。2章では回転面のうち、特異点が線状になって現れるトーラス型曲面と、特異点が1点もしくは2点で現れるリング型曲面を考え、それらの回転面の全曲率の計算に対する定理を与えた後、いくつかの例を挙げている。3章ではトーラス型の場合の一般化を行い、閉曲線を複素数を用いて表示することにより、特異点を与える方向と全曲率との關係を示した。そして4章ではリング型曲面について一般化し、全曲率が表す図形的な意味についてまとめている。

### 序文

滑らかなトーラス型曲面のオイラー標数は0であり、その全曲率は0である。この場合には Gauss-Bonnet の定理  $\iint_S K dA = 2\pi\chi(S)$ 、つまり全曲率がオイラー標数の  $2\pi$  倍になるという關係が成り立っている。そして滑らかでないトーラス型曲面の場合には定理の關係が一般には成り立たないとされている。しかし紙を引き延ばしたり縮めたりするような位相幾何学的な曲面の構成方法を考える場合、特異点が存在したとしても形の違いはないと考えられ、定理が成立しそうに思われる。そこで本研究ではどのような場合に定理の關係が成り立たないのかを、全曲率を計算することで調べた。またそれに際し、一般パラメータから弧長パラメータへの変換をせずに全曲率を計算する方法を与えた。その結果、例えばカージオイドに対する回転面の場合には、その特異点の存在する方向によって全曲率が変化することがわかった。具体的には特異点を12時方向に持つ場合を基準とし、平面上で特異点を中心に  $\theta$  回転させたものの回転面を考えると、その全曲率は  $4\pi \cos \theta$  となり、 $\theta \neq n\pi$  の場合には Gauss-Bonnet の定理が成り立たないという結果を得た。

また、リング型曲面においては、特異点のまわりの部分を円錐の側面とみなすことで、特異点のない場合（つまり球面）との關係性を発見した。球面の全曲率は  $4\pi$  であるが、リング型曲面の全曲率の場合には円錐の側面積と底面積の比が現れていることが明らかとなった。

\*1 本論文は全て松田、森谷、中西の仕事であり、彼らの論文をまとめたものである。新田は論文指導にあたった。

# 1 準備

この章では平面上の曲線、空間内の曲線、曲面を定義し、それらについての定理を書く。

## 1.1 平面の曲線

**定義 1.** 平面  $\mathbb{R}^2$  の滑らかな曲線  $\gamma$  とは、 $a, b \in \mathbb{R}$  によって定まる閉区間  $I = [a, b]$  から  $\mathbb{R}^2$  への写像で点  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$  が定まるものであり、 $\gamma(t)$  が  $t$  について少なくとも二階微分可能であるときをいう。このとき  $t$  を曲線  $\gamma$  のパラメータという。また、滑らかな曲線の和となっているものを区分的に滑らかな曲線という。単に曲線という場合にはこの区分的に滑らかな曲線であることを意味するものとする。

曲線  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$  をパラメータ  $t$  で 1 回微分したものを  $\dot{\gamma}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$  と表す。また、特に断りが無い限り、 $\dot{\gamma}(t) \neq \mathbf{0}$  とする。ここで、曲線  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$  の閉区間  $[a, b]$  における長さは  $\int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt = \int_a^b \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} dt$  となる。これは動点  $\gamma(t)$  が時刻  $t = a$  から  $t = b$  までに動いた距離であるともいえる。初めの時刻  $t = a$  を固定し、 $b$  の代わりに変数  $t$  を用いて  $s = \int_a^t |\dot{\gamma}(t)| dt$  と書くと、 $s$  は時刻  $a$  から  $t$  の間に動点が動いた距離となり、 $t$  の関数  $s = s(t)$  となる。 $\dot{\gamma}(t) \neq \mathbf{0}$  であるから微分積分学の基本定理より  $\frac{ds}{dt} = |\dot{\gamma}(t)| > 0$  である。よって、閉区間  $[a, b]$  間の曲線  $\gamma$  の長さを  $l$  とすると、 $s(t)$  は閉区間  $[a, b]$  から閉区間  $[0, l]$  への狭義の単調増加関数となり、 $[0, l] \rightarrow [a, b]$  で逆関数  $t = t(s)$  が存在する。逆関数定理から、この逆関数  $t(s)$  も  $s$  で微分可能であるので、これを用いて  $\gamma(s) = \gamma(t(s))$  ( $0 \leq s \leq l$ ) というように曲線を新しいパラメータ  $s$  で表示することができる。そこで変数  $s$  を次のように定義する。

**定義 2.** 正則曲線  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$  ( $t \in I$ ) の閉区間  $[a, t]$  に対応する部分の長さを  $s(t) = \int_a^t |\dot{\gamma}(t)| dt$  とすると、この曲線は  $\gamma(s) = (x(t(s)), y(t(s)))$  ( $0 \leq s \leq l$ ),  $l = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt$  とパラメータ  $s$  を用いて表示することができる。このパラメータ  $s$  を弧長パラメータという。

以下、一般のパラメータと弧長パラメータを区別するため、一般パラメータは変数  $t$  を用い、弧長パラメータは変数  $s$  を用いることとする。 $s$  による微分を  $\gamma'(s)$  と表し、 $t$  での微分  $\dot{\gamma}(t)$  と区別する。さて、 $s$  で表示された曲線  $\gamma(s) = (x(s), y(s))$  を微分すると、合成関数の微分法より  $\gamma'(s) = \frac{d\gamma}{ds} = \frac{d\gamma}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{\dot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t)|}$  となるから、 $|\gamma'(s)| \equiv 1$  である。

**定義 3.** 曲線  $\gamma(s) = (x(s), y(s))$  に対し、単位接ベクトル  $e(s)$ 、 $\gamma(s)$  の単位法線ベクトル  $n(s)$  を

$$e(s) = \gamma'(s) = (x'(s), y'(s)), \quad n(s) = (-y'(s), x'(s))$$

で定める。 $e(s)$  は速度ベクトルとも呼ばれる。

$e'(s) = \gamma''(s)$  を考える。 $|\gamma'(s)| = 1$  つまり  $e(s) \cdot e(s) = 1$  であつたから  $e(s) \cdot e'(s) = 0$  が得られ、 $e'(s)$  は  $e(s)$  に直交することがわかる。(この  $e'(s)$  を加速度ベクトルと呼ぶ。)  $e'(s)$  も  $n(s)$  も  $e(s)$  と直交することから、 $e'(s)$  と  $n(s)$  は平行の関係となる。そこで次のような定数  $\kappa(s)$  を定義する。

**定義 4.** 曲線  $\gamma(s)$  に対し、 $e'(s) = \kappa(s)n(s)$  となるような定数  $\kappa(s)$  が存在する。この定数  $\kappa(s)$  を  $\gamma(s)$  の曲率という。

## 1.2 空間の曲線

ここでは空間内での曲線について定義する．平面の曲線と同様に，空間の曲線、およびその弧長パラメータを次のように定義する．また、空間での曲率も定義する．

**定義 5.** 空間  $\mathbb{R}^3$  内の滑らかな曲線  $\gamma$  とは、 $a, b \in \mathbb{R}$  によって定まる閉区間  $I = [a, b]$  の任意の要素  $t$  から  $\mathbb{R}^3$  の点  $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$  への写像であり、 $\gamma(t)$  が  $t$  について少なくとも二階微分可能であるときをいう．このとき  $t$  を曲線  $\gamma$  のパラメータという．また、滑らかな曲線の和となっているものを区分的に滑らかな曲線という．単に曲線という場合にはこの区分的に滑らかな曲線であることを意味するものとする．

**定義 6.** 正則曲線  $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$  ( $t \in I$ ) の閉区間  $[a, l]$  における長さを  $s(t) = \int_a^t |\dot{\gamma}(t)| dt$  とすると、この曲線は  $\gamma(s) = (x(t(s)), y(t(s)), z(t(s)))$  ( $0 \leq s \leq l$ )、 $l = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt$  とパラメータ  $s$  を用いて表示することができる．このパラメータ  $s$  を弧長パラメータという．

**定義 7.** 正則曲線  $\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s))$  と速度ベクトル  $\mathbf{e}_1(s) = \gamma'(s)$  に対し、加速度ベクトル  $\mathbf{e}'_1(s)$  の大きさ

$$|\mathbf{e}'_1(s)| = \sqrt{\mathbf{e}'_1(s) \cdot \mathbf{e}'_1(s)} = \sqrt{x''(s)^2 + y''(s)^2 + z''(s)^2}$$

を曲線  $\gamma(s)$  の曲率といい、 $\kappa(s)$  と書く．

## 1.3 曲面

ここでは、曲面が持つ情報である第 1 基本量、第 2 基本量、曲率などを定義し、曲面論で重要な定理である Gauss-Bonnet の定理を紹介する．

**定義 8.**  $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$  は  $uv$  平面上の領域  $D$  で定義された 3 回微分可能な関数とする．Jacobi 行列

$$\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}$$

の階数が  $D$  上で 2 であるとき、 $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$  は空間内に曲面片を定義するという．空間内の集合  $S$  がいくつかの (無限の) 曲面片の和集合になっているとき、 $S$  を曲面という． $S$  が境界をもたないコンパクトな曲面であるとき、これを閉曲面という．

$uv$  平面上の領域  $D$  で定義された  $\mathbb{P}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$  を曲面とする． $\mathbb{P}(u, v)$  の  $u$  による偏微分を  $\mathbb{P}_u = \mathbb{P}_u(u, v)$  と、 $v$  における偏微分を  $\mathbb{P}_v = \mathbb{P}_v(u, v)$  と表す．

**定義 9.** 曲面  $S : \mathbb{P}(u, v)$  に対して、点  $\mathbb{P}(u, v)$  を始点とし、曲面に垂直な単位ベクトルを単位法ベクトルという．単位法ベクトルは  $\mathbb{P}_u, \mathbb{P}_v$  の両方に垂直な単位ベクトルである．特に

$$\frac{\mathbb{P}_u \times \mathbb{P}_v}{|\mathbb{P}_u \times \mathbb{P}_v|}$$

となるものを  $\nu(u, v)$  で表す．

**定義 10.** 曲面  $S: \mathbb{P}(u, v)$  に対して、次を曲面  $S$  の第 1 基本量という.

$$E(u, v) = \mathbb{P}_u \cdot \mathbb{P}_u, \quad F(u, v) = \mathbb{P}_u \cdot \mathbb{P}_v, \quad G(u, v) = \mathbb{P}_v \cdot \mathbb{P}_v$$

また、曲面  $S: \mathbb{P}(u, v)$  に対して、次を曲面  $S$  の第 2 基本量という.

$$L(u, v) = \mathbb{P}_{uu} \cdot \nu, \quad M(u, v) = \mathbb{P}_{uv} \cdot \nu, \quad N(u, v) = \mathbb{P}_{vv} \cdot \nu$$

**定義 11.** 曲面  $S$  上の点  $p_0$  と、点  $p_0$  におけるこの曲面の法ベクトル  $\nu$  があるとする. 点  $p_0$  における曲面  $S$  の任意の接ベクトル  $X$  に対して、 $X$  と  $\nu$  で定まる平面を法平面という. 法平面と曲面  $S$  の交わりとしてできる平面曲線  $C$  の、点  $p_0$  における平面曲線としての曲率のことを、 $p_0$  における  $X$  方向の  $S$  の法曲率という. 方向  $X$  を動かしたときの  $p_0$  における  $S$  の法曲率の最大値と最小値を、 $p_0$  における  $S$  の主曲率という.  $\kappa_1$ 、 $\kappa_2$  を  $p_0$  における  $S$  の主曲率とすると、主曲率の積  $K$  を  $p_0$  における  $S$  のガウス曲率という.

**定理 12.** 曲面  $S: \mathbb{P}(u, v)$  に対し、第 1 基本量  $E, F, G$  と第 2 基本量  $L, M, N$  を用いることで、ガウス曲率  $K$  は次のようにあらわされる.

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}.$$

**定義 13.** 閉曲面  $S: \mathbb{P}(u, v)$  ( $u(s_1) \leq u \leq u(s_2)$ ,  $0 \leq v \leq 2\pi$ ) に対し、Gauss 曲率を  $K$  とする.  $S$  上における  $K$  の重積分の値

$$\iint_S K dA$$

を  $S$  の全曲率という. ここで  $dA$  は面積要素であり、 $dA = \sqrt{EG - F^2} du dv$  と表される.

**定義 14.** 閉曲面  $S$  を有限個の三角形に分割し、分割によってできた頂点、辺、面の総数をそれぞれ  $v, e, f$  とする.  $v - e + f$  を  $S$  の Euler 標数といい、 $\chi(S)$  と書く.

Euler 標数については、2次元球面  $S^2$  は  $\chi(S^2) = 2$ 、種数 1、つまり穴が 1 つのトーラス  $T$  は  $\chi(T) = 0$  である. 一般に種数  $g$  のトーラスの場合、その Euler 標数は  $2 - 2g$  となることが知られている. この Euler 標数と全曲率に関して、次の定理が成り立つ.

**定理 15. (Gauss-Bonnet の定理)**

閉曲面  $S$  を有限個の三角形に分割したとき、その分割に対し、頂点、辺、面の数をそれぞれ  $v, e, f$  とし、Euler 標数を  $\chi(S) = v - e + f$  とする. このとき次が成り立つ.

$$\iint_S K dA = 2\pi\chi(S)$$

## 2 回転面の全曲率の計算

ここではトーラス型、リング型という 2 つの形の回転面を考える. トーラス型は回転軸と交わらないように配された閉曲線を回転させたときに現れる回転面である. また、リング型は曲線の始点と終点の 2 点のみが回転軸の上にあるような状態に配した上で曲線を回転させたときに現れる回転面である.

## 2.1 トーラス型曲面の全曲率

回転面の全曲率は平面上の曲線を弧長パラメータ表示して回転面を構成し、定義に従って積分を行うことで得られる量であるが、弧長パラメータに変換することは簡単でないことがある。ところが、実は計算上必要なのは弧長パラメータ  $s$  そのものではなく、その  $t$  による微分  $\frac{ds}{dt}$  である。ここではそれを示す。

**定義 16.**  $xz$  平面上の曲線  $\gamma(u) = (f(u), g(u))$  ( $f(u) \geq 0$ ) を、 $z$  軸を回転の軸として 1 回転してできる曲面  $S$  は次で与えられる。

$$\mathbb{P}(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u)).$$

この曲面  $S$  を回転面という。ここでは自己交叉しない曲面を考えるため、 $f(u) \geq 0$  として考えている。

**定理 17.**  $xz$  平面上の曲線  $\gamma(t) = (f(t), g(t))$  ( $f(t) > 0$ ) は閉区間  $[t_1, t_2]$  において  $\dot{\gamma}(t) \neq \mathbf{0}$  であるとする。区間  $[t_1, t_2]$  に対応する弧長  $s = s(t)$  により、この曲線の弧長パラメータ表示が

$$\gamma(s) = (f(s), g(s)) \quad (s(t_1) \leq s \leq s(t_2))$$

となるとき、この曲線を  $z$  軸の周りに 1 回転してできる回転面  $S$  の全曲率は

$$\iint_S K dA = -2\pi f(s_2) \frac{1}{\left. \frac{du}{ds} \right|_{s=s_2}} + 2\pi f(s_1) \frac{1}{\left. \frac{du}{ds} \right|_{s=s_1}}.$$

証明は [10] を見られよ。

## 2.2 特異点つきトーラス型曲面の全曲率

特異点を含む曲線を回転して得られる曲面の全曲率は、定理 17 を用いて計算することができない。しかしその他の点では定理が成り立つことから、次のような広義の弧長パラメータを導入し、特異点を含む曲線を回転してできる曲面の全曲率の計算を考える。

**定義 18.** 曲線  $\gamma(t)$  に対し、 $\dot{\gamma}(t_1) = \mathbf{0}$  とする。  $t_1 < \alpha$  に対し、  $\lim_{\alpha \rightarrow t_1+0} \int_{\alpha}^t |\dot{\gamma}(t)| dt$  が収束するとき、 $\gamma(t)$  は区間  $(t_1, t]$  で弧長パラメータ表示可能といい、その値を

$$s = \int_{t_1}^t |\dot{\gamma}(t)| dt = \lim_{\alpha \rightarrow t_1+0} \int_{\alpha}^t |\dot{\gamma}(t)| dt$$

と定義する。区間  $[t_1, t)$  においても同様に極限を用いて定義される。このように閉区間以外に拡張された  $s = s(t)$  を広義の弧長パラメータという。

**定義 19.** 曲線  $\gamma(t)$  に対し、 $\dot{\gamma}(t_1) = \dot{\gamma}(t_2) = \mathbf{0}$  とする。  $t_1$  と  $t_2$  の間に適当な点  $c$  をとったとき、 $\gamma(t)$  が区間  $(t_1, c]$  および  $[c, t_2)$  のいずれにおいても弧長パラメータ表示可能であるならば、 $\gamma(t)$  は开区間  $(t_1, t_2)$  で弧長パラメータ表示可能といい、弧長パラメータ  $s = s(t)$  を次で定義する。

$$s = \int_{t_1}^c |\dot{\gamma}(t)| dt + \int_c^{t_2} |\dot{\gamma}(t)| dt.$$

**定理 20.**  $xz$  平面上の曲線  $\gamma(s) = (f(t), g(t))$  ( $f(t) > 0$ ) は点  $t = t_1, t_2$  において  $\dot{\gamma}(t) = \mathbf{0}$  であるとする。開区間  $(t_1, t_2)$  に対応する広義の弧長  $s = s(t)$  により、この曲線の弧長パラメータ表示が

$$\gamma(s) = (f(s), g(s)) \quad (s(t_1) \leq s \leq s(t_2))$$

であるとする。この曲線を  $z$  軸の周りに 1 回転してできる回転面  $S$  の全曲率は次となる。

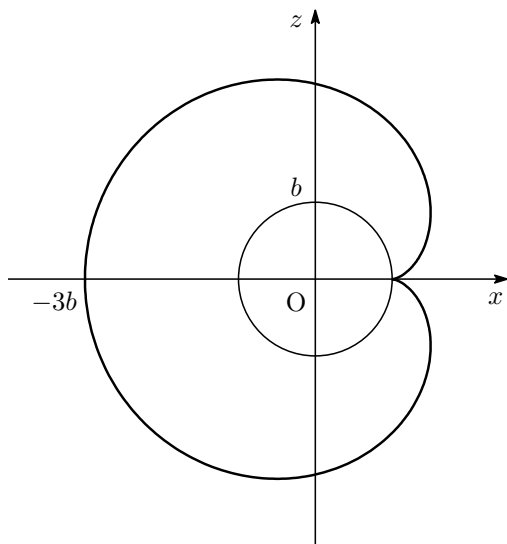
$$\iint_S K dA = -2\pi \lim_{t \rightarrow t_2-0} \dot{f}(t) \frac{1}{\frac{ds}{dt}} + 2\pi \lim_{t \rightarrow t_1+0} \dot{f}(t) \frac{1}{\frac{ds}{dt}}.$$

**定理 21.** 松田の公式 [10]  $xz$  平面上の曲線  $\gamma(t) = (f(t), g(t))$  ( $f(t) > 0$ ) は点  $t = t_1, c_1, c_2, \dots, c_{n-1}, c_n, t_2$  において  $\dot{\gamma}(t) = \mathbf{0}$  であるとする。開区間  $(t_1, c_1), (c_1, c_2), \dots, (c_n, t_2)$  に対応する広義の弧長  $s_i = s_i(t)$  により、この曲線の弧長パラメータ表示が  $\gamma(s_i) = (f(s_i), g(s_i))$  であるとする。この曲線を  $z$  軸の周りに 1 回転してできる回転面  $S$  の全曲率は次となる。

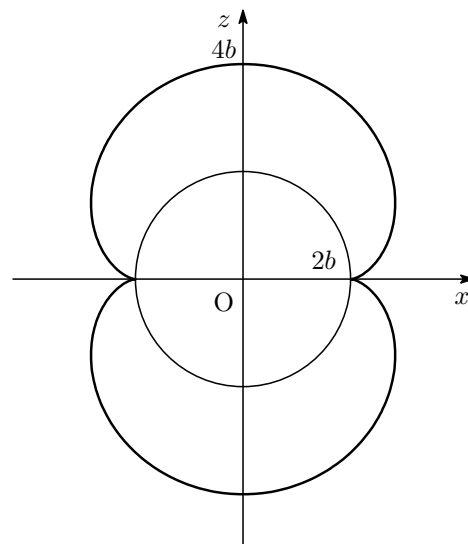
$$\begin{aligned} \iint_S K dA = & -2\pi \lim_{t \rightarrow t_2-0} \dot{f}(t) \frac{1}{\frac{ds_{n+1}}{dt}} + 2\pi \lim_{t \rightarrow c_n+0} \dot{f}(t) \frac{1}{\frac{ds_{n+1}}{dt}} \\ & - 2\pi \lim_{t \rightarrow c_n-0} \dot{f}(t) \frac{1}{\frac{ds_n}{dt}} + 2\pi \lim_{t \rightarrow c_{n-1}+0} \dot{f}(t) \frac{1}{\frac{ds_n}{dt}} - \dots \\ & - 2\pi \lim_{t \rightarrow c_1-0} \dot{f}(t) \frac{1}{\frac{ds_1}{dt}} + 2\pi \lim_{t \rightarrow t_1+0} \dot{f}(t) \frac{1}{\frac{ds_1}{dt}}. \end{aligned}$$

**定義 22. (epicycloid)** 原点を中心とする半径  $a$  の定円に、半径  $b$  の円  $C$  が外接しながら滑ることなく回転するとき、円  $C$  上の定点がえがく曲線をエピサイクロイドといい、パラメータ表示は次で与えられる。

$$(x, z) = \left( (a+b) \cos t - b \cos \frac{a+b}{b} t, (a+b) \sin t - b \sin \frac{a+b}{b} t \right).$$



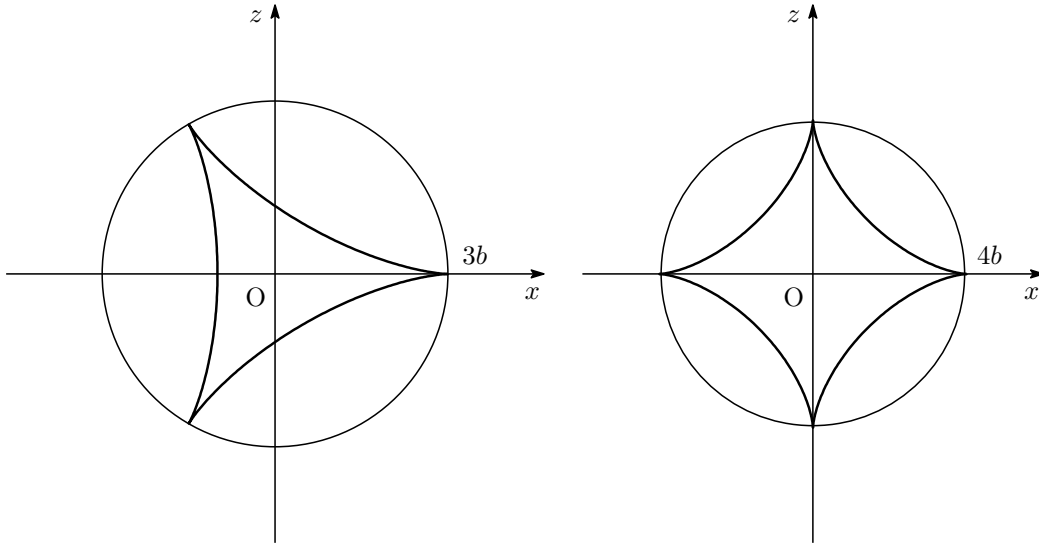
$a = b$  (カージオイド)



$a = 2b$  (ネフロイド)

**定義 23. (hypocycloid)** 原点を中心とする半径  $a$  の定円に、半径  $b$  の円  $C$  が内接しながら滑ることなく回転するとき、円  $C$  上の定点がえがく曲線をハイポサイクロイドといい、パラメータ表示は次で与えられる。

$$(x, z) = \left( (a-b) \cos t + b \cos \frac{a-b}{b} t, (a-b) \sin t - b \sin \frac{a-b}{b} t \right).$$



$a = 3b$

$a = 4b$  (アステロイド)

以下では定理.20、定理.21 を使っていくつかの回転面の全曲率を計算する。ただし、そのまま回転させるのではなく、平面上で原点を中心に  $\theta$  回転させた後、軸まわりに回転させることで回転面を構成していく。

**例 24.**  $xz$  平面上の点  $((1 - \sin t) \cos t, (1 - \sin t) \sin t)$  を、原点を中心に  $\theta$  回転してうつる点は

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1 - \sin t) \cos t \\ (1 - \sin t) \sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 - \sin t) \cos(t + \theta) \\ (1 - \sin t) \sin(t + \theta) \end{pmatrix}$$

である。  $xz$  平面上の曲線  $\gamma(t)$  を、回転軸と交わらないように十分大きな数  $R$  を用いて

$$\gamma(t) = (R + (1 - \sin t) \cos(t + \theta), (1 - \sin t) \sin(t + \theta)) \quad \left( -\frac{3}{2}\pi \leq t \leq \frac{\pi}{2} \right)$$

と定める。これは 12 時方向に特異点を持つカーゴイドである。  $\gamma(t)$  を  $t$  で微分すると

$$\dot{\gamma}(t) = (-\sin(t + \theta) - \cos(2t + \theta), \cos(t + \theta) - \sin(2t + \theta)).$$

$\dot{\gamma}(t) = \mathbf{0}$  となるのは  $t = -\frac{3}{2}\pi, \frac{\pi}{2}$  のときである。開区間  $\left(-\frac{3}{2}\pi, t\right)$  に対応する弧長  $s = s(t)$  により、この曲線の弧長パラメータ表示が  $\gamma(s) = (f(s), g(s))$  であるとする。この曲線を  $z$  軸のまわりに 1 回転してできる曲面  $S$  は  $\mathbb{P}(s, v) = (f(s) \cos v, f(s) \sin v, g(s))$  で与えられる。  $-\frac{3}{2}\pi \leq t \leq \frac{\pi}{2}$  のとき、  $0 \leq \frac{t}{2} + \frac{3}{4}\pi \leq \pi$  に注意すると

$$\frac{ds}{dt} = 2 \left| \sin \left( \frac{t}{2} + \frac{3}{4}\pi \right) \right| = 2 \sin \left( \frac{t}{2} + \frac{3}{4}\pi \right)$$

であるから、定理.20 より  $S$  の全曲率は

$$\begin{aligned} \iint_S K dA &= -2\pi \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \frac{-\sin(t+\theta) - \cos(2t+\theta)}{2 \sin\left(\frac{t}{2} + \frac{3}{4}\pi\right)} + 2\pi \lim_{t \rightarrow -\frac{3}{2}\pi+0} \frac{-\sin(t+\theta) - \cos(2t+\theta)}{2 \sin\left(\frac{t}{2} + \frac{3}{4}\pi\right)} \\ &= -2\pi \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \frac{-\cos(t+\theta) + 2 \sin(2t+\theta)}{\cos\left(\frac{t}{2} + \frac{3}{4}\pi\right)} + 2\pi \lim_{t \rightarrow -\frac{3}{2}\pi+0} \frac{-\cos(t+\theta) + 2 \sin(2t+\theta)}{\cos\left(\frac{t}{2} + \frac{3}{4}\pi\right)} = -4\pi \sin \theta. \end{aligned}$$

例 25. 例.24 同様にいくつかの回転面の全曲率の計算結果をまとめる. 全て平面上で  $\theta$  回転させてから軸周りで回転させたものである.

ネフロイド  $\gamma(t) = (R + 3 \cos(t + \theta) - \cos(3t + \theta), 3 \sin(t + \theta) - \sin(3t + \theta))$  ( $0 \leq t \leq 2\pi$ ) は 0,

エピサイクロイド  $\gamma(t) = (R + 4 \cos(t + \theta) - \cos(4t + \theta), 4 \sin(t + \theta) - \sin(4t + \theta))$  ( $0 \leq t \leq 2\pi$ ) は 0,

ハイポサイクロイド  $\gamma(t) = (R + 2 \cos(t + \theta) + \cos(2t - \theta), 2 \sin(t + \theta) - \sin(2t - \theta))$  ( $0 \leq t \leq 2\pi$ ) は 0,

アステロイド  $\gamma(t) = (R + 3 \cos(t + \theta) + \cos(3t - \theta), 3 \sin(t + \theta) - \sin(3t - \theta))$  ( $0 \leq t \leq 2\pi$ ) は 0 となった.

### 2.3 リンゴ型曲面の全曲率

これまでに見た曲面は、回転軸と交わらないように構成したため、トーラス型曲面となった. さらに特異点を含む平面曲線の場合は回転によって、特異点集合が曲面上に筋となって現れてきた.

次に回転面上に特異点が点として存在しているような曲面 (リンゴ型曲面) を考えたい. それには端点のみが  $z$  軸と接するような  $xz$  平面上の曲線を考え、それを回転して得ればよい. このようにして得られる曲面の全曲率を計算する.

平面曲線が特異点をもたないときは、次の定理が成り立つ.

定理 26.  $xz$  平面上の曲線  $\gamma(t) = (f(t), g(t))$  ( $t_1 \leq t \leq t_2$ ) に対し、 $f(t_1) = f(t_2) = 0$ , 他の  $t$  では  $f(t) > 0$  とする. 閉区間  $[t_1, t_2]$  に対応する弧長  $s = s(t)$  により、この曲線の弧長パラメータ表示が  $\gamma(s) = (f(s), g(s))$  であるとする. この曲線を  $z$  軸の周りに 1 回転してできる曲面は  $\mathbb{P}(s, v) = (f(s) \cos v, f(s) \sin v, g(s))$  で与えられる. この回転面を  $S$  とすると、 $S$  の全曲率は

$$\iint_S K dA = -2\pi \dot{f}(t_2) \frac{1}{\frac{ds}{dt} \Big|_{t=t_2}} + 2\pi \dot{f}(t_1) \frac{1}{\frac{ds}{dt} \Big|_{t=t_1}}.$$

平面曲線が特異点をもつときは、次の定理が成り立つ.

定理 27.  $xz$  平面上の曲線  $\gamma(t) = (f(t), g(t))$  ( $t_1 \leq t \leq t_2$ ) に対し、 $f(t_1) = f(t_2) = 0$ , 他の  $t$  では  $f(t) > 0$  とし、 $\dot{\gamma}(t_2) = \mathbf{0}$  とする. 区間  $[t_1, t)$  に対応する弧長  $s = s(t)$  により、この曲線の弧長パラメータ表示が  $\gamma(s) = (f(s), g(s))$  であるとする. この曲線を  $z$  軸の周りに 1 回転してできる曲面は  $\mathbb{P}(s, v) = (f(s) \cos v, f(s) \sin v, g(s))$  で与えられる. この回転面を  $S$  とすると、 $S$  の全曲率は

$$\iint_S K dA = -2\pi \lim_{t \rightarrow t_2-0} \dot{f}(t) \frac{1}{\frac{ds}{dt}} + 2\pi \dot{f}(t_1) \frac{1}{\frac{ds}{dt} \Big|_{t=t_1}}$$

となる. また上の条件において、曲線  $\gamma(t)$  が  $\dot{\gamma}(t_1) = \mathbf{0}$  も満たしているならば、开区間  $(t_1, t)$  に対応する弧長



$s = s(t)$  により, 全曲率は

$$\iint_S K dA = -2\pi \lim_{t \rightarrow t_2-0} \dot{f}(t) \frac{1}{\frac{ds}{dt}} + 2\pi \lim_{t \rightarrow t_1+0} \dot{f}(t) \frac{1}{\frac{ds}{dt}}.$$

例 28. レムニスケートを直線  $z = x$  に関して対称移動し, 制限した  $xz$  平面上の曲線

$$\gamma(t) = (f(t), g(t)) = \left( \frac{\sin t \cos t}{1 + \sin^2 t}, \frac{\cos t}{1 + \sin^2 t} \right) \quad \left( \pi \leq t \leq \frac{3}{2}\pi \right)$$

を  $z$  軸の周りに 1 回転してできる曲面  $S$  の全曲率は

$$\iint_S K dA = -2\pi \dot{f} \left( \frac{3}{2}\pi \right) \frac{1}{\frac{ds}{dt} \Big|_{t=\frac{3}{2}\pi}} + 2\pi \dot{f}(\pi) \frac{1}{\frac{ds}{dt} \Big|_{t=\pi}} = (2 + \sqrt{2})\pi.$$

例 29.  $\gamma(t) = (f(t), g(t)) = ((1 - \sin t) \cos t, (1 - \sin t) \sin t) \quad \left( -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2} \right)$

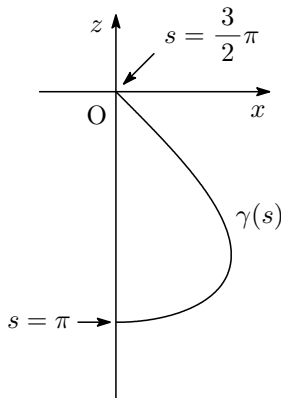
を  $z$  軸のまわりに 1 回転してできる曲面  $T \left( \frac{1}{2} \right)$  の全曲率は

$$\iint_{T(\frac{1}{2})} K dA = -2\pi \dot{f} \left( \frac{\pi}{2} \right) \frac{1}{\frac{ds}{dt} \Big|_{s=\frac{\pi}{2}}} + 2\pi \dot{f} \left( -\frac{\pi}{2} \right) \frac{1}{\frac{ds}{dt} \Big|_{s=-\frac{\pi}{2}}} = 2\pi.$$

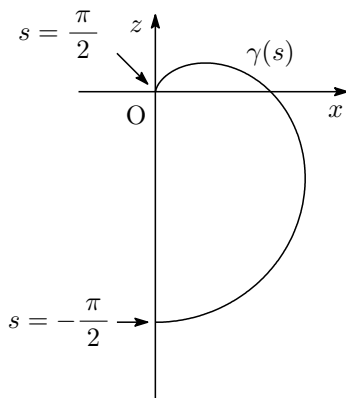
例 30.  $\gamma(t) = (f(t), g(t)) = (16 \sin^3 t, 13 \cos t - 5 \cos 2t - 2 \cos 3t - \cos 4t) \quad (0 \leq t \leq \pi)$

を  $z$  軸のまわりに 1 回転してできる曲面  $H$  の全曲率は

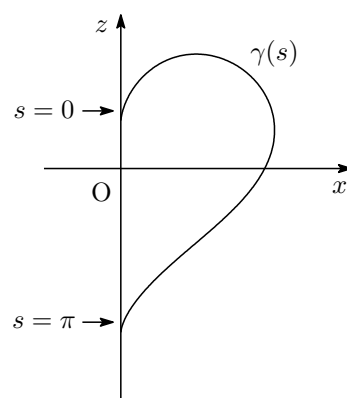
$$\iint_H K dA = -2\pi \lim_{s \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \dot{f}(s) \frac{1}{\frac{ds}{du}} + 2\pi \lim_{s \rightarrow +0} \dot{f}(s) \frac{1}{\frac{ds}{du}} = 0.$$



例 2.23



例 2.24



例 2.25

### 3 複素平面上に表示された閉曲線に対する回転面の全曲率

ここでは特異点を持つ閉曲線を虚軸まわりに回転させてできる回転面の全曲率を考え、例.24、例.25 を一般化する。なお、ここでは回転軸と交わらないようなトーラス型曲面の全曲率のみを扱っている。以下では複素数  $z$  を一般パラメータ  $t$  を用いて  $z = e^{it}$  で表し、その  $z$  のべき乗を用いて閉曲線  $\gamma(t)$  を定めることとする。

補題 31.  $z$  を大きさ 1、偏角  $t$  の複素数、つまり  $z = e^{it}$  とすると次が成り立つ。ただし、 $\alpha \in \mathbb{R}$  とする。

$$|z - e^{i\alpha}| = 2 \left| \sin \frac{t - \alpha}{2} \right| \quad (1)$$

証明.

$$|z - e^{i\alpha}| = \left\{ (z - e^{i\alpha}) \overline{(z - e^{i\alpha})} \right\}^{\frac{1}{2}} = \left\{ 2 - (e^{i(t-\alpha)} + \overline{e^{i(t-\alpha)}}) \right\}^{\frac{1}{2}} = [2 \{1 - \cos(t - \alpha)\}]^{\frac{1}{2}} = 2 \left| \sin \frac{t - \alpha}{2} \right|.$$

□

$z$  は  $t$  によって定まる、大きさが 1、偏角が  $t$  の単位円周上の点であり、周期  $2\pi$  を持つ周期関数である。この  $z$  のべきを使って  $\gamma(t)$  を表現することで、べきによる変換によって単位円から写される像を考えることができ、 $z$  の周期性から  $\gamma(t)$  は周期性をもつ閉曲線となる。例えば  $\gamma(t) = z^2 + z + R$  といった形がある。本研究では閉曲線が回転軸と交わらない場合のみを考えているので  $R$  は十分大きな正の数とする。

### 3.1 $\dot{\gamma}(t) = c(z - e^{i\alpha})iz$ 型の回転面の全曲率

$\gamma(t)$  が  $z$  の 2 次式で表されている場合を考える。すなわち、 $\gamma(t) = az^2 + bz + R$  という形であるとする。ここで、 $a, b$  は複素数とし、 $R$  は十分に大きな正の数とする。すると

$$\dot{\gamma}(t) = \frac{d}{dt}\gamma(t) = \frac{d}{dz}\gamma(t) \cdot \frac{dz}{dt} = (2az + b)iz = 2a \left( z + \frac{b}{2a} \right) iz$$

となる。特異点を含む場合を考えたいので以下では  $\left| \frac{b}{2a} \right| = 1$  の場合を考える。このとき、 $z = -\frac{b}{2a}$  で  $\dot{\gamma}(t) = \mathbf{0}$  となり特異点を持つ。  $t = \alpha$  で特異点を持つとすると  $\gamma(t) = c(z - e^{i\alpha})iz$  と因数分解されることになる。ただし、 $c$  は複素数であり、 $2a$  を置き直したものである。

定理 32.  $z = e^{it}$  とする。  $z$  の 2 次式で表される閉曲線  $\gamma(t)$  に対し、  $\dot{\gamma}(t) = c(z - e^{i\alpha})iz$  と因数分解されるならば、  $\gamma(t)$  を虚軸まわりに 1 回転させてできる回転面  $S$  の全曲率は

$$\iint_S K dA = -4\pi \cos(\beta + 2\alpha)$$

である。ただし、 $c \in \mathbb{C}$  であり、 $c$  の偏角は  $\beta$  であるとする。

証明.

$$|\dot{\gamma}(t)| = |c(z - e^{i\alpha})iz| = |c| \cdot |z - e^{i\alpha}| \cdot |i| \cdot |z| = 2|c| \cdot \left| \sin \frac{t - \alpha}{2} \right|.$$

また、 $\dot{\gamma}(t)$  の実部  $\operatorname{Re}(\dot{\gamma}(t))$  は

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\dot{\gamma}(t)) &= \operatorname{Re}\{c(z - e^{i\alpha})iz\} \\ &= \operatorname{Re}\{|c|e^{i\beta}(e^{it} - e^{i\alpha})e^{\frac{\pi}{2}i}e^{it}\} \\ &= |c| \cos\left(2t + \beta + \frac{\pi}{2}\right) - |c| \cos\left(t + \alpha + \beta + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= -2|c| \sin \frac{3t + \alpha + 2\beta + \pi}{2} \sin \frac{t - \alpha}{2}. \end{aligned}$$

これは  $xy$  平面上で考えれば  $x$  成分の一階微分の値となっているので定理.21 (松田の公式) の中での  $\dot{f}(t)$  に対応する値である. また、 $\frac{ds}{dt} = |\dot{\gamma}(t)|$  であるから  $\alpha < t < \alpha + 2\pi$  のとき、定理.21 (松田の公式) より

$$\begin{aligned} \iint_S K dA &= -2\pi \lim_{t \rightarrow \alpha + 2\pi - 0} \frac{-2|c| \cos \frac{3t + \alpha + 2\beta}{2} \sin \frac{t - \alpha}{2}}{2|c| \left| \sin \frac{t - \alpha}{2} \right|} \\ &\quad + 2\pi \lim_{t \rightarrow \alpha + 0} \frac{-2|c| \cos \frac{3t + \alpha + 2\beta}{2} \sin \frac{t - \alpha}{2}}{2|c| \left| \sin \frac{t - \alpha}{2} \right|} \\ &= -4\pi \cos(\beta + 2\alpha). \end{aligned}$$

□

### 3.2 $\gamma(t) = ciz \prod_{k=1}^n (z - e^{i\alpha_k})$ 型の回転面の全曲率

ここでは  $n$  個の特異点を持つ一般の閉曲線を考える.  $z$  の  $(n+1)$  次の多項式  $\gamma(t) = \sum_{k=0}^{n+1} a_k z^k$  で表示される曲線  $\gamma(t)$  の  $t$  による一階微分  $\dot{\gamma}(t)$  が  $\dot{\gamma}(t) = ciz \prod_{k=1}^n (z - e^{i\alpha_k})$  と因数分解される場合、つまり、曲線  $\gamma(t)$  が  $t = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  において特異点を持つ場合を考える.

複素数で表示された閉曲線の回転面の全曲率を求めるために前節では  $\frac{\operatorname{Re}(\dot{\gamma}(t))}{|\dot{\gamma}(t)|}$  を求めてから極限を考えるという手順を行ったが、 $\dot{\gamma}(t)$  の偏角を  $\theta$  とすれば  $\operatorname{Re}(\dot{\gamma}(t)) = |\dot{\gamma}(t)| \cos \theta$  であるから、

$$\frac{\operatorname{Re}(\dot{\gamma}(t))}{|\dot{\gamma}(t)|} = \frac{|\dot{\gamma}(t)| \cos \theta}{|\dot{\gamma}(t)|} = \cos \theta$$

となり、偏角  $\theta$  の情報、つまり特異点となる  $t$  の値のみわかれば全曲率が計算できることになる.

**定理 33.**  $\gamma(t) = ciz \prod_{k=1}^n (z - e^{i\alpha_k})$  ならば、回転面の全曲率は

$$\iint_S K dA = 4\pi \sum_{k=1}^n \cos \frac{2\beta + \sum_{j=1}^n \alpha_j + (n+2)\alpha_k - (n-1-2k)\pi}{2}.$$

**証明.**  $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < 2\pi$  とする.

$$\dot{\gamma}(t) = ciz \prod_{k=1}^n (z - e^{i\alpha_k}) = ciz^{n+1} \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{e^{i\alpha_k}}{z}\right) = ciz^{n+1} \prod_{k=1}^n (1 - e^{i(\alpha_k - t)}).$$

$1 - e^{i(\alpha - t)}$  の偏角  $\arg(1 - e^{i(\alpha - t)})$  は、 $\alpha > t$  のときは  $\frac{\alpha - t - \pi}{2}$ 、 $\alpha < t$  のときは  $\frac{\alpha - t + \pi}{2}$  である.  
 $\alpha_1 < t < \alpha_2$  での  $\dot{\gamma}(t)$  の偏角  $\arg(\dot{\gamma}(t))$  は、

$$\begin{aligned} \arg(\dot{\gamma}(t)) &= \arg c + \arg i + \arg z^{n+1} + \sum_{k=1}^n \arg(1 - e^{i(\alpha_k - t)}) \\ &= \beta + \frac{\pi}{2} + (n+1)t + \frac{\alpha_1 - t + \pi}{2} + \frac{\alpha_2 - t - \pi}{2} + \dots + \frac{\alpha_n - t - \pi}{2} \\ &= \frac{2\beta + \sum_{j=1}^n \alpha_j + (n+2)t - (n-3)\pi}{2} \end{aligned}$$

となる。このことから区間  $(\alpha_1, \alpha_2)$  の回転面  $S_1$  の全曲率は

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} K dA &= -2\pi \lim_{t \rightarrow \alpha_2 - 0} \cos \frac{2\beta + \sum_{j=1}^n \alpha_j + (n+2)t - (n-3)\pi}{2} \\ &\quad + 2\pi \lim_{t \rightarrow \alpha_1 + 0} \cos \frac{2\beta + \sum_{j=1}^n \alpha_j + (n+2)t - (n-3)\pi}{2} \\ &= 2\pi \cos \frac{2\beta + \sum_{j=1}^n \alpha_j + (n+2)\alpha_2 - (n-5)\pi}{2} \\ &\quad + 2\pi \cos \frac{2\beta + \sum_{j=1}^n \alpha_j + (n+2)\alpha_1 - (n-3)\pi}{2}. \end{aligned}$$

同様に上の事を一般化して、 $1 \leq k \leq n-1$  のときの区間  $(\alpha_k, \alpha_{k+1})$  の回転面  $S_k$  の全曲率は

$$\begin{aligned} \iint_{S_k} K dA &= -2\pi \lim_{t \rightarrow \alpha_2 - 0} \cos \frac{2\beta + \sum_{j=1}^n \alpha_j + (n+2)t - (n-1-2k)\pi}{2} \\ &\quad + 2\pi \lim_{t \rightarrow \alpha_1 + 0} \cos \frac{2\beta + \sum_{j=1}^n \alpha_j + (n+2)t - (n-1-2k)\pi}{2} \\ &= 2\pi \cos \frac{2\beta + \sum_{j=1}^n \alpha_j + (n+2)\alpha_{k+1} - \{n-1-2(k+1)\}\pi}{2} \\ &\quad + 2\pi \cos \frac{2\beta + \sum_{j=1}^n \alpha_j + (n+2)\alpha_k - (n-1-2k)\pi}{2} \end{aligned}$$

である。  $k = n$  のときの、区間  $(\alpha_n, \alpha_1 + 2\pi)$  での回転面  $S_n$  の全曲率については

$$\iint_{S_n} K dA = -2\pi \lim_{t \rightarrow \alpha_1 + 2\pi - 0} \cos(\arg(\dot{\gamma}(t))) + 2\pi \lim_{t \rightarrow \alpha_n + 0} \cos(\arg(\dot{\gamma}(t)))$$

となる。  $\alpha_n < t < \alpha_1 + 2\pi$  のとき、  $\alpha_i - t$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ) は負値なので、

$$\begin{aligned} \arg(\dot{\gamma}(t)) &= \arg c + \arg i + \arg z^{n+1} + \sum_{k=1}^n \arg(1 - e^{i(\alpha_k)}) \\ &= \frac{2\beta + \sum_{j=1}^n \alpha_j + (n+2)t + (n+1)\pi}{2}. \end{aligned}$$

ゆえに、

$$\begin{aligned} \iint_{S_n} K dA &= -2\pi \lim_{t \rightarrow \alpha_1 + 2\pi - 0} \cos \frac{2\beta + \sum_{j=1}^n \alpha_j + (n+2)t + (n+1)\pi}{2} \\ &\quad + 2\pi \lim_{t \rightarrow \alpha_n + 0} \cos \frac{2\beta + \sum_{j=1}^n \alpha_j + (n+2)t + (n+1)\pi}{2} \end{aligned}$$

となる。この第一項と第二項を取り出してそれぞれ計算すると、

$$\begin{aligned} &-2\pi \lim_{t \rightarrow \alpha_1 + 2\pi - 0} \cos \frac{2\beta + \sum_{j=1}^n \alpha_j + (n+2)t + (n+1)\pi}{2} \\ &= 2\pi \cos \frac{2\beta + \sum_{j=1}^n \alpha_j + (n+2)\alpha_1 - (n-1-2 \cdot 1)\pi}{2} \\ &\quad 2\pi \lim_{t \rightarrow \alpha_n + 0} \cos \frac{2\beta + \sum_{j=1}^n \alpha_j + (n+2)t + (n+1)\pi}{2} \\ &= 2\pi \cos \frac{2\beta + \sum_{j=1}^n \alpha_j + (n+2)\alpha_n - (n-1-2n)\pi}{2} \end{aligned}$$

となる。以上のことから、閉曲線  $\gamma(t)$  の  $y$  軸まわりでの回転面  $S$  の全曲率は

$$\iint_{S_n} K dA = \sum_{k=1}^n \iint_{S_k} K dA = 4\pi \sum_{k=1}^n \cos \frac{2\beta + \sum_{j=1}^n \alpha_j + (n+2)\alpha_k - (n-1-2k)\pi}{2}.$$

□

例 34. 例.24 を定理.33 を用いて改めて計算する。

$$(f(t), g(t)) = ((1 - \sin t) \cos(t + \theta) + R, (1 - \sin t) \sin(t + \theta))$$

$z = e^{it}$  であれば  $\sin t = \frac{z - \bar{z}}{2i}$  であることを利用して複素数で表示しなおし、 $\gamma(t)$  と  $\dot{\gamma}(t)$  を求めると

$$\gamma(t) = \frac{i}{2} e^{i\theta} (z - 1)^2 + R, \quad \dot{\gamma}(t) = i e^{i\theta} (z - e^{\frac{\pi}{2}i}) i z.$$

ここで、 $c = i e^{i\theta}$  とすると  $\arg c = \beta = \frac{\pi}{2} + \theta$  であるから、このカージョイドの回転面の全曲率は定理.33 より

$$\iint_{S_n} K dA = -4\pi \cos(\beta + 2\alpha) = -4\pi \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = -4\pi \sin \theta.$$

## 4 特異点を 2 個持つリンゴ型曲面の全曲率

ここではガウス-ボンネの定理を、北極と南極に特異点のある回転面に拡張して証明し、3 章の例.28、例.29、例.30 を一般化する。さらにその例を 4 種類挙げる。

### 4.1 特異点を 2 個持つリンゴ型曲面におけるガウス-ボンネの定理の証明の拡張

ここでは北極と南極に特異点がある、リンゴ型の曲面を考える。

定理 35. (ガウス-ボンネの定理の拡張) 曲面上の測地三角形  $\triangle ABC$  の内角を  $\angle A, \angle B, \angle C$  とすると、次が成り立つ:

$$\angle A + \angle B + \angle C = \pi + \iint_{\triangle ABC} K dA.$$

これを用いてリンゴ型曲面におけるガウス-ボンネの定理を考えていく。リンゴ型を  $xy$  平面で 2 つに分割し、さらにその各々を 3 等分して、この曲面と  $z$  軸の交点 (つまり、特異点の位置) が  $A_k (k = 1, 2, \dots, 6)$  となるように  $z$  軸正の部分に測地三角形  $\triangle A_k B_k C_k (k = 1, 2, 3)$  を、 $z$  軸負の部分に測地三角形  $\triangle A_k B_k C_k (k = 4, 5, 6)$  をつくる。 $xy$  平面上の 3 点はそれぞれ  $2\pi$ 、つまり  $\sum_{k=1}^6 (\angle B_k + \angle C_k) = 6\pi$  に注意すると  $\iint_{\triangle ABC} K dA = \angle A + \angle B + \angle C - \pi$  より

$$\sum_{k=1}^6 \iint_{\triangle ABC} K d = \sum_{k=1}^6 (\angle A_k + \angle B_k + \angle C_k) - 6\pi = \sum_{k=1}^6 \angle A_k + 6\pi - 6\pi = \sum_{k=1}^6 \angle A_k$$

ここで、 $A_1 + A_2 + A_3$  はリンゴ型の上側にできる扇形の中心角であり、 $A_4 + A_5 + A_6$  はリンゴの下側にできる扇形の中心角である。よって以下がわかる。

$xz$  平面上の曲線

$$\gamma(t) = (f(t), g(t)) \quad (f(t) > 0)$$

は閉区間  $[t_1, t_2]$  において  $\dot{\gamma}(s) \neq \mathbf{0}$  であるとする. 区間  $[t_1, t_2]$  に対応する弧長  $s = s(t)$  により, この曲線の弧長パラメータ表示が

$$\gamma(s) = (f(s), g(s)) \quad (s(t_1) \leq s \leq s(t_2))$$

であるとする. この曲線を  $z$  軸の周りに 1 回転してできる曲面は

$$\mathbb{P}(s, v) = (f(s) \cos v, f(s) \sin v, g(s)) \quad (s(t_1) \leq s \leq s(t_2), -\frac{\pi}{2} \leq v \leq \frac{\pi}{2})$$

で与えられる. この回転面を  $S$  とすると,  $S$  の全曲率は

$$\iint_S K dA = -2\pi [f'(s)]_{s(t_1)}^{s(t_2)} = -2\pi \left[ \dot{f}(t) \frac{1}{\frac{ds}{dt}} \right]_{t_1}^{t_2}$$

となる. このとき,  $f(t) = a(t) \cos t, g(t) = a(t) \sin t$  とすると,

$$\dot{\gamma}(t) = (\dot{a}(t) \cos t - a(t) \sin t, \dot{a}(t) \sin t + a(t) \cos t), \quad |\dot{\gamma}(t)| = \sqrt{a(t)^2 + \dot{a}(t)^2}$$

となり,

$$\begin{aligned} \iint_S K dA &= -2\pi \left[ \dot{f}(t) \frac{1}{\frac{ds}{dt}} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= -2\pi \left[ (\dot{a}(t) \cos t - a(t) \sin t) \frac{1}{\sqrt{a^2(t) + \dot{a}^2(t)}} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

よって,  $|\dot{\gamma}(t)| \neq 0$  のとき,

$$\iint_S K dA = 2\pi \left( \frac{a(\frac{\pi}{2})}{\sqrt{a^2(\frac{\pi}{2}) + \dot{a}^2(\frac{\pi}{2})}} + \frac{a(-\frac{\pi}{2})}{\sqrt{a^2(-\frac{\pi}{2}) + \dot{a}^2(-\frac{\pi}{2})}} \right)$$

が得られる. また,  $|\dot{\gamma}(t)| = 0$  のとき,

$$\iint_S K dA = 2\pi \left( \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{a(t)}{\sqrt{a^2(t) + \dot{a}^2(t)}} + \lim_{t \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \frac{a(t)}{\sqrt{a^2(t) + \dot{a}^2(t)}} \right)$$

が得られる.

$\gamma(t) = (a(t) \cos t, a(t) \sin t)$  より,

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}(t) &= \dot{a}(t)(\cos t, \sin t) + a(t)(-\sin t, \cos t) \\ \dot{\gamma}\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \left(-a\left(\frac{\pi}{2}\right), \dot{a}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right), \quad \dot{\gamma}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \left(a\left(-\frac{\pi}{2}\right), -\dot{a}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right). \end{aligned}$$

$s = \frac{\pi}{2}$  のとき, この点の周りにできる扇形の半径は,  $\sqrt{a^2(\frac{\pi}{2}) + \dot{a}^2(-\frac{\pi}{2})}$  であり, この扇形を側面としてできる円錐の底面の円の半径は  $a\left(\frac{\pi}{2}\right)$  である. よって, この扇形の面積は元の円の  $\frac{a(\frac{\pi}{2})}{\sqrt{a^2(\frac{\pi}{2}) + \dot{a}^2(\frac{\pi}{2})}}$  倍にあたる.

元の円の面積は  $2\pi$  であるから, この扇形の面積は,  $2\pi \frac{a(\frac{\pi}{2})}{\sqrt{a^2(\frac{\pi}{2}) + \dot{a}^2(\frac{\pi}{2})}}$  である.  $t = -\frac{\pi}{2}$  のときも同様に考

えると、このときの扇形の面積は  $2\pi \frac{a(-\frac{\pi}{2})}{\sqrt{a^2(-\frac{\pi}{2}) + \dot{a}^2(-\frac{\pi}{2})}}$  である。よって、この曲面の面積は、ガウス-ボンネの定理と同様にして、 $2\pi \left( \frac{a(\frac{\pi}{2})}{\sqrt{a^2(\frac{\pi}{2}) + \dot{a}^2(\frac{\pi}{2})}} + \frac{a(-\frac{\pi}{2})}{\sqrt{a^2(-\frac{\pi}{2}) + \dot{a}^2(-\frac{\pi}{2})}} \right)$  となり、これがこの定理の意味である。

## 4.2 様々な例

以下、4つの例を挙げておく。

**例 36.**  $a(t) = r - \sin^n t$  ( $n \geq 1, r > 1$ ) のとき

$\dot{a}(t) = -n \sin^{n-1} t \cos t$  であるので、 $n$  の偶奇によって場合分けを行う。

(1)  $n$  が偶数のとき、 $a(\frac{\pi}{2}) = r - 1, \dot{a}(\frac{\pi}{2}) = 0, a(-\frac{\pi}{2}) = r - 1, \dot{a}(-\frac{\pi}{2}) = 0$ 。

$$\text{よって、} \iint_S K dA = 2\pi \left( \frac{r-1}{\sqrt{(r-1)^2}} + \frac{r-1}{\sqrt{(r-1)^2}} \right) = 2\pi(1+1) = 4\pi$$

(2)  $n$  が奇数のとき、 $a(\frac{\pi}{2}) = r - 1, \dot{a}(\frac{\pi}{2}) = 0, a(-\frac{\pi}{2}) = r + 1, \dot{a}(-\frac{\pi}{2}) = 0$ 。よって、

$$\iint_S K dA = 2\pi \left( \frac{r-1}{\sqrt{(r-1)^2}} + \frac{r+1}{\sqrt{(r+1)^2}} \right) = 2\pi(1+1) = 4\pi。$$

(1), (2) より、 $n$  の偶奇に関わらず、常に  $\iint_S K dA = 4\pi$ 。

**例 37.** 例.36 で  $r = 1$  の場合、つまり、 $a(t) = 1 - \sin^n t$  ( $n \geq 1$ ) のとき  $\dot{a}(t) = -n \sin^{n-1} t \cos t$  であるので、

$$\iint_S K dA = 2\pi \left[ \frac{(n+1) \sin^{n+1} t - n \sin^{n-1} t - \sin t}{\sqrt{(1-n^2) \sin^{2n} t + n^2 \sin^{2n-2} t - 2 \sin^n t + 1}} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$\sin t = p$  とすると、 $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1, \sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$  となるので、

$$\begin{aligned} & \iint_S K dA \\ &= 2\pi \left[ \frac{(n+1)p^{n+1} - np^{n-1} - p}{\sqrt{(1-n^2)p^{2n} + n^2 p^{2n-2} - 2p^n + 1}} \right]_{-1}^1 \\ &= -2\pi \left[ \frac{p\sqrt{1-p}(1+p+\dots+p^{n-3} + (n+1)p^{n-2} + (n+1)p^{n-1})}{\sqrt{(-1+p+\dots+p^{n-3} - p^{n-2} - p^{n-1} + p^n + p^{n+1} + \dots + p^{2n-3} + (1-n^2)p^{2n-2} + (1-n^2)p^{2n-1})}} \right]_{-1}^1 \end{aligned}$$

(1)  $n$  が偶数のとき  $\iint_S K dA = 2\pi(0-0) = 0$

(2)  $n$  が奇数のとき  $\iint_S K dA = -2\pi \left( 0 - \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right) = -2\pi$

(1), (2) より、 $\iint_S K dA$  の値は  $n$  の偶奇に依存し、 $n$  が偶数ならば  $0$ 、 $n$  が奇数ならば  $-2\pi$  となる。

例 38.  $\iint_S K dA$  の値が  $\pi$  の整数倍にならない場合, 例えば,  $a(t) = 2 - t$  のとき  $\dot{a}(t) = -1$  であるので,

$$a\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 - \frac{\pi}{2}, \dot{a}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1, a\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2 + \frac{\pi}{2}, \dot{a}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

よって,  $\iint_S K dA = 2\pi \left( \frac{2 - \frac{\pi}{2}}{\sqrt{(2 - \frac{\pi}{2})^2 + 1}} + \frac{2 + \frac{\pi}{2}}{\sqrt{(2 + \frac{\pi}{2})^2 + 1}} \right) = 2\pi \left( \frac{4 - \pi}{\sqrt{(4 - \pi)^2 + 4}} + \frac{4 + \pi}{\sqrt{(4 + \pi)^2 + 4}} \right)$

したがって,  $\iint_S K dA = 2\pi \left( \frac{4 - \pi}{\sqrt{(4 - \pi)^2 + 4}} + \frac{4 + \pi}{\sqrt{(4 + \pi)^2 + 4}} \right)$  となる.

例 39. ひょうたん型の場合

$a(t) = 1 - \cos 2t (= 2 \sin^2 t)$  のとき  $\dot{a}(t) = 2 \sin 2t = 4 \sin t \cos t$  であるので,

$$\begin{aligned} \iint_S K dA &= -2\pi \left[ \frac{4 \sin t - 6 \sin^3 t}{\sqrt{16 \sin^2 t - 12 \sin^4 t}} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= -2\pi \left( \left[ -\frac{2 - 3 \sin^2 t}{\sqrt{4 - 3 \sin^2 t}} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^0 + \left[ \frac{2 - 3 \sin^2 t}{\sqrt{4 - 3 \sin^2 t}} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \right) = 8\pi \end{aligned}$$

## あとがき

本論文は松田の修士論文『回転面の全曲率に関する考察』[10]、森谷の修士論文『特異点をもつトーラス型曲面の全曲率』[11]、中西の卒業論文『ハート型のタピオカの全曲率の研究』[9]を1つにまとめたものであり、2章では松田の、3章では森谷の、4章では中西の研究成果をまとめたものである。詳しくはそれぞれを見ていただきたい。

## 参考文献

- [1] 梅原雅顕, 山田光太郎, (2002), 『曲線と曲面-微分幾何的アプローチ-』, 裳華房.
- [2] 梅原雅顕, 佐治健太郎, 山田光太郎, (2017), 『特異点をもつ曲線と曲面の微分幾何学』, 丸善出版.
- [3] 小林昭七, (2015), 『曲線と曲面の微分幾何 (改訂版)』, 裳華房.
- [4] 瀬山士郎, (1988), 『トポロジー:柔らかな幾何学』, 日本評論社.
- [5] 竹内洋介, (2017), 『複素数を用いた平面曲線の全曲率の考察』, 三重大学大学院教育学研究科修士論文.
- [6] 田中健雄, (2017), 『曲線の変形における全曲率の変化』, 三重大学大学院教育学研究科修士論文.
- [7] 竹内洋介, 田中健雄, 新田貴士, (2017), 『特異点が存在する曲線と曲面の全曲率について』, 三重大学教育学部紀要第 69 巻.
- [8] 中内伸光, (2005), 『じっくり学ぶ曲線と曲面-微分幾何学初歩-』, 共立出版
- [9] 中西舞, (2019), 『ハート型のタピオカの全曲率の研究』, 三重大学教育学部卒業論文.
- [10] 松田雄斗, (2018), 『回転面の全曲率に関する考察』, 三重大学大学院教育学研究科修士論文.
- [11] 森谷浩司, (2019), 『特異点をもつトーラス型曲面の全曲率』, 三重大学大学院教育学研究科修士論文.