

上半空間における半円柱のチェバ・メネラウスの定理

谷口寛*1 · 森山貴之*2

Ceva's theorem and Menelaus's theorem on a half cylinder in the upper half space

Yutaka TANIGUCHI and Takayuki MORIYAMA

要旨

本論文は谷口の修士論文 [3] の一部をまとめたものである。森山はこの修士論文の指導にあたった。双曲幾何モデルの1つである上半平面モデルを拡張して得られる空間について考察した。その結果として、ユークリッド空間と上半平面の直積空間内の曲面である半円柱におけるチェバ・メネラウスの定理を証明した。

序文

双曲幾何モデルには上半平面モデルのほかにも双曲面モデルや円盤モデル, 射影モデルがあるが, それらは幾何学的に等しく, 等長写像によりひとつのモデルで示されたことは他のモデルでも示される [1]. また, ユークリッド空間とは異なり, 非ユークリッド空間である双曲幾何モデルにおけるチェバ・メネラウスの定理は双曲線関数を用いて表されることが知られている [2]. そこで, 上半平面の拡張として上半平面とユークリッド空間との直積空間である上半空間を考察した。ここで, ポアンカレ計量とユークリッド計量との直積を計量として定めることで, 上半空間の半円柱におけるチェバ・メネラウスの定理を示した。

1 上半空間におけるチェバ・メネラウスの定理

1.1 上半平面モデル

\mathbb{R}^2 の部分集合 \mathfrak{h}^2 を

$$\mathfrak{h} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$$

と定め, 上半平面と呼ぶ。また, $(x, y) \in \mathfrak{h}^2$ の上に次の計量 $\langle \cdot \rangle$ を定義した組 $(\mathfrak{h}^2, \langle \cdot \rangle)$ を上半平面モデルという。

定義 1.1. $v = (v_1, v_2)$, $w = (w_1, w_2)$ に対し, \mathfrak{h}^2 の点 $P = (x, y)$ における計量 $\langle \cdot \rangle$ を

$$\langle v, w \rangle_P = \frac{v_1 w_1 + v_2 w_2}{y^2}$$

とする。このような計量をポアンカレ計量と呼ぶ。

定義 1.2. 曲線 $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ の閉区間 $[a, b]$ における長さを

$$\int_a^b |\dot{\gamma}(s)| ds = \int_a^b \sqrt{\frac{\dot{x}(s)^2 + \dot{y}(s)^2}{y(s)^2}} ds$$

とする。

定義 1.3. $a, b \in \mathbb{R}$ に対し, 曲線 $\gamma(s)$ の閉区間 $[a, b]$ における長さを $t = \int_a^s |\dot{\gamma}(u)| du$ とすると, この曲線は

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)) \quad (0 \leq t \leq l), \quad l = \int_a^b |\dot{\gamma}(s)| ds$$

と表される。このときの変数 t を弧長パラメータという。

一般のパラメータ s での微分を $\dot{\gamma}(s)$ と表し, 弧長パラメータ t による微分を $\gamma'(t)$ と表す。

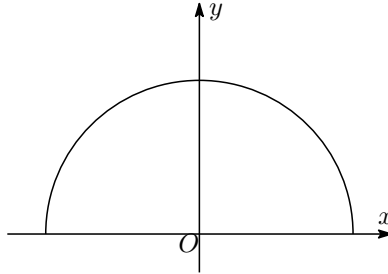
*1 三重大学教育学部研究科

*2 三重大学教育学部研究科

定義 1.4. $P, Q \in \mathfrak{h}^2$ に対して, その間の距離 $d(P, Q)$ を次の式で定義する:

$$d(P, Q) = \inf\{\text{Leg}(l) \mid l: [a, b] \rightarrow \mathfrak{h}^2, l(a) = P, l(b) = Q\}$$

この 2 点間の距離を実現する曲線 l を測地線と呼ぶ. 上半空間モデルにおいては x 軸に直交する半円 $\gamma(t) = \left(\tanh t, \frac{1}{\cosh t}\right)$, $t \in [-\infty, \infty]$ が測地線となることが知られている.



1.2 上半空間モデル

3次元ベクトル空間

$$\mathfrak{h}^3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0\}$$

の上に次の計量 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を定義した組 $(\mathfrak{h}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ を上半空間 $\mathbb{R} \times \mathfrak{h}^2$ とかくことにする.

定義 1.5. $v = (v_1, v_2, v_3), w = (w_1, w_2, w_3) \in \mathfrak{h}^3$ に対し, 点 $P = (x, y, z)$ における計量 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を

$$\langle v, w \rangle_P = v_1 w_1 + \frac{v_2 w_2 + v_3 w_3}{z^2}$$

とする.

定義 1.6. 上半空間 $\mathbb{R} \times \mathfrak{h}^2$ 上の曲線 $\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s))$, $(z(s) > 0)$ の閉区間 $[a, b]$ における長さを

$$\int_a^b |\dot{\gamma}(s)|_{\gamma(s)} ds = \int_a^b \sqrt{\dot{x}(s)^2 + \frac{\dot{y}(s)^2 + \dot{z}(s)^2}{z(s)^2}} ds$$

とする. また曲線の長さを扱う場合は省略して $\int_a^b |\dot{\gamma}(s)| ds$ とかく.

定義 1.7. $a, b \in \mathbb{R}$ に対し, 曲線 $\gamma(s)$ の閉区間 $[a, b]$ における長さを $l = \int_a^b |\dot{\gamma}(u)| du$ とすると, この曲線は

$$\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)) \quad (0 \leq t \leq l), \quad l = \int_a^b |\dot{\gamma}(u)| du$$

と表される. このときの変数 t を弧長パラメータという.

1.3 上半空間における測地線

定理 1.8. 弧長パラメータ t を用いて, 曲線 γ を $\gamma(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t))$ と表すと, 次が成り立つ:

$$\gamma \text{ が測地線である. } \Leftrightarrow \begin{cases} u_1'' = 0 & (1) \\ u_2'' u_3 - 2u_2' u_3' = 0 & (2) \\ u_3'' u_3 + u_2'^2 - u_3'^2 = 0 & (3) \end{cases}$$

証明. 弧長パラメータ t を用いて, 2 点 P, Q を結ぶ曲線 γ が $\gamma(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t)), t \in [t_1, t_2]$ と表せるとする. $P = \gamma(t_1), Q = \gamma(t_2)$ とする. このとき, $\gamma(t)$ の長さ l は

$$l = \int_{t_1}^{t_2} |\gamma'(t)| dt$$

で与えられる. P, Q を結ぶ曲線 γ を少し動かしたものを $\tilde{\gamma}$ とする.

$$\tilde{\gamma}(t) = (\tilde{u}_1(t), \tilde{u}_2(t), \tilde{u}_3(t)), \tilde{u}_i(t) = u_i(t) + \lambda v_i(t), v_i(t_1) = v_i(t_2) = 0 \quad (i = 1, 2, 3).$$

λ を 0 の近くで動かすことで滑らかに γ を変形することができる. $\tilde{\gamma}(t)$ の長さ \tilde{l} は

$$\tilde{l} = \int_{t_1}^{t_2} |\tilde{\gamma}'(t)| dt$$

と表される. 今, γ を P, Q を結ぶ最短の線とすると, $l \leq \tilde{l}$. ここで, $\tilde{l} = \tilde{l}(\lambda)$ を λ の関数とみると, $\lambda = 0$ のとき $\tilde{l} = l$ であるから, $\tilde{l}(\lambda)$ は $\lambda = 0$ で最小になる. したがって,

$$\frac{d\tilde{l}}{d\lambda}(0) = 0$$

が測地線が満たす方程式となる. $\gamma(t) = \gamma$ のように (t) を省略して表すと, この方程式は以下のように計算できる.

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d\tilde{l}}{d\lambda}(0) = \frac{d}{d\lambda} \left[\int_{t_1}^{t_2} |\tilde{\gamma}'| dt \right]_{\lambda=0} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{d\lambda} \left[|\tilde{\gamma}'| \right]_{\lambda=0} dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2|\tilde{\gamma}'|} \left(2v_1'(u_1' + \lambda v_1') + \frac{1}{\tilde{u}_3^4} \left(2v_2'(u_2' + \lambda v_2') + 2v_3'(u_3' + \lambda v_3') \right) \tilde{u}_3^2 - (\tilde{u}_2'^2 + \tilde{u}_3'^2) 2v_3'(u_3' + \lambda v_3') \right) dt \Big|_{\lambda=0} \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{|\tilde{\gamma}'|} \left(\lambda \left(v_1'^2 + \frac{1}{\tilde{u}_3^2} (v_2'^2 + v_3'^2) - \frac{v_3'^2}{\tilde{u}_3^4} (\tilde{u}_2'^2 + \tilde{u}_3'^2) \right) + v_1' u_1' + \frac{1}{\tilde{u}_3^2} (v_2' u_2' + v_3' u_3') - \frac{v_3 u_3}{\tilde{u}_3^4} (\tilde{u}_2'^2 + \tilde{u}_3'^2) \right) dt \Big|_{\lambda=0} \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left(v_1' u_1' + \frac{1}{u_3^2} (v_2' u_2' + v_3' u_3') - \frac{v_3}{u_3^3} (u_2'^2 + u_3'^2) \right) dt. \quad (\#) \end{aligned}$$

ここで, $f_1 = (u_1')'$, $f_2 = \left(\frac{u_2'}{u_3^2} \right)'$, $f_3 = \left(\frac{u_3'}{u_3^2} \right)'$ とおき, $v_i(t_1) = v_i(t_2) = 0$ ($i = 1, 2, 3$) に注意して部分積分を行うと,

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \left(v_1' u_1' + \frac{1}{u_3^2} (v_2' u_2' + v_3' u_3') \right) dt &= \left[u_1' v_1 + \frac{1}{u_3^2} (u_2' v_2 + u_3' v_3) \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} (f_1 v_1 + f_2 v_2 + f_3 v_3) dt \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} (f_1 v_1 + f_2 v_2 + f_3 v_3) dt. \end{aligned}$$

よって (#) は次のようになる.

$$\int_{t_1}^{t_2} (f_1 v_1 + f_2 v_2 + f_3 v_3 + \frac{v_3}{u_3^3} (u_2'^2 + u_3'^2)) dt = 0.$$

この式は, $v_i(t_1) = v_i(t_2) = 0$ ($i = 1, 2, 3$) なる任意の v_i について成り立つ. よって,

$$\begin{aligned} &\begin{cases} f_1 = 0 \\ f_2 = 0 \\ f_3 + \frac{1}{u_3^3} (u_2'^2 + u_3'^2) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} u_1'' = 0 \\ u_2'' u_3 - 2u_2' u_3' = 0 \\ u_3'' u_3 + u_2'^2 - u_3'^2 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

が成り立つ. □

定理 1.9. $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ とする.

$$\gamma_1(t) = \left(at + b, c \tanh t, c \frac{1}{\cosh t} \right), \quad \gamma_2(t) = (at + b, c, d), \quad \gamma_3(t) = (at + b, c, e^{dt})$$

は $\mathbb{R} \times \mathfrak{h}^2$ 上の測地線である. ただしパラメータの取替えを除く.

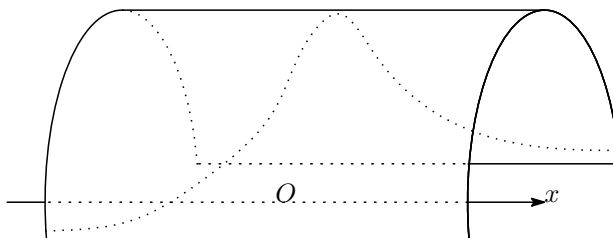
証明. それぞれ定理 1.8 で求めた測地線の方程式に代入することで示される. □

1.4 半円柱上のメネラウスの定理

半円柱

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R} \mid y^2 + z^2 = 1, z > 0\}$$

上に存在する測地線 $\gamma(t) = \left(at + b, \tanh t, \frac{1}{\cosh t} \right)$ について取り上げる. このとき, S 上の測地線は $\mathbb{R} \times \mathfrak{h}^2$ 上の測地線であり, 逆に $\mathbb{R} \times \mathfrak{h}^2$ の測地線が S 上にあればそれは S の測地線である. この測地線を用いて, 曲面 S 上に 3 角形をつくり, メネラウスの定理について考える.



補題 1.10. 測地線 $\gamma(t) = \left(at + b, \tanh t, \frac{1}{\cosh t} \right)$ 上の 2 点 $A = \gamma(t_1), B = \gamma(t_2)$ の間の距離 \overline{AB} は

$$\overline{AB} = \sqrt{a^2 + 1} |t_2 - t_1|.$$

証明. $t_1 < t_2$ とする. $\gamma(t)$ を t で微分すると,

$$\gamma'(t) = \left(a, \frac{1}{\cosh^2 t}, -\frac{\sinh t}{\cosh^2 t} \right).$$

よって,

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \int_{t_1}^{t_2} |\gamma'(t)| dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{a^2 + \frac{1}{\cosh^2 t} \left(\left(\frac{1}{\cosh^2 t} \right)^2 + \left(-\frac{\sinh t}{\cosh^2 t} \right)^2 \right)} dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{a^2 + \cosh^2 t \frac{1}{\cosh^2 t}} dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{a^2 + 1} dt = \sqrt{a^2 + 1} (t_2 - t_1). \end{aligned}$$

$t_1 > t_2$ であるときも同様に示される. □

補題 1.11. S 上に 3 点 A, B, C があり, この 3 点が 1 つの測地線 γ 上にあるとする. すなわち $\gamma(t) = \left(at + b, \frac{1}{\tanh t}, \cosh t \right)$, $A = \gamma(t_1), B = \gamma(t_2), C = \gamma(t_3)$ と表せるとき, A, B, C の x 座標をそれぞれ x_1, x_2, x_3 とかくと, 次が成り立つ.

$$\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{x_3 - x_2}{t_3 - t_2} = \frac{x_1 - x_3}{t_1 - t_3}.$$

逆にこの式が成り立つとき, 3点 A, B, C はひとつの測地線上にある.

証明. A, B の x 座標は $x_1 = at_1 + b, x_2 = at_2 + b$ で与えられるから,

$$\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{at_2 + b - (at_1 + b)}{t_2 - t_1} = a$$

となる. 他も同様にして,

$$\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{x_3 - x_2}{t_3 - t_2} = \frac{x_1 - x_3}{t_1 - t_3} = a.$$

これで前半は示された. 次に後半の証明を行う. x 座標を無視して y, z 座標のみに注目する. つまり射影 $:\mathbb{R} \times \mathfrak{h}^2 \rightarrow \mathfrak{h}^2$ により, S は \mathfrak{h}^2 の半単位円にうつる. これを $S_{\mathfrak{h}^2}$ とかく. 3点 A, B, C が S 上にあるとすると, 対応する $S_{\mathfrak{h}^2}$ の点は単位半円上にあるから,

$$\begin{aligned} A &= \left(x_1, \tanh t_1, \frac{1}{\cosh t_1} \right), \\ B &= \left(x_2, \tanh t_2, \frac{1}{\cosh t_2} \right), \\ C &= \left(x_3, \tanh t_3, \frac{1}{\cosh t_3} \right) \end{aligned}$$

とできる. このとき, 実数 a を用いて

$$\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{x_3 - x_2}{t_3 - t_2} = \frac{x_1 - x_3}{t_1 - t_3} = a$$

とかけるとすると,

$$\begin{aligned} x_2 - x_1 &= a(t_2 - t_1), \\ x_3 - x_2 &= a(t_3 - t_2), \\ x_1 - x_3 &= a(t_1 - t_3). \end{aligned}$$

また, $b \in \mathbb{R}$ で

$$x_1 = at_1 + b$$

を満たすものが存在することより,

$$\begin{aligned} x_2 - (at_1 + b) &= a(t_2 - t_1) \\ \Leftrightarrow x_2 &= at_2 + b \end{aligned}$$

とすることができる. 同様にして

$$x_3 = at_3 + b$$

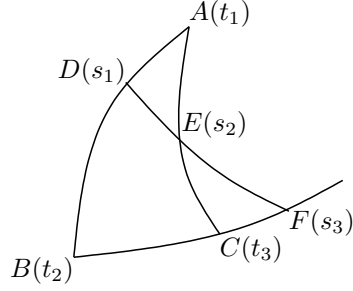
が示される. 以上より, A, B, C は1つの測地線

$$\gamma(t) = \left(at + b, \tanh t, \frac{1}{\cosh t} \right)$$

上にあることが分かる. これで命題は示された. □

定理 1.12. (半円柱 S におけるメネラウスの定理) 曲面 S 上の三角形 ABC に対し, 測地線 AB, CA, BC 上にそれぞれ点 D, E, F があり, これらは点 A, B, C とは異なるとする. このとき,

$$3 \text{ 点 } D, E, F \text{ が一つの測地線上にある} \Leftrightarrow \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} \cdot \frac{\overline{BF}}{\overline{FC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = 1.$$



証明. 曲面 P 上の 6 点 A, B, C, D, E, F に対応する $P_{\mathbb{H}^2}$ の点は $t_1, t_2, t_3, s_1, s_2, s_3$ をパラメータにもち, それぞれ x 座標を $x_1, x_2, x_3, X_1, X_2, X_3$ とする. A, B, D を通る測地線を $\gamma_1(t) = \left(a_1 t + b_1, \tanh t, \frac{1}{\cosh t} \right)$, A, C, E を通る測地線を $\gamma_2(t) = \left(a_2 t + b_2, \tanh t, \frac{1}{\cosh t} \right)$, B, C, F を通る測地線を $\gamma_3(t) = \left(a_3 t + b_3, \tanh t, \frac{1}{\cosh t} \right)$ とおく. このとき, 命題 1.11 より, 3 点 D, E, F が 1 つの測地線上にあることと

$$\frac{X_2 - X_1}{s_2 - s_1} = \frac{X_3 - X_2}{s_3 - s_2} = \frac{X_1 - X_3}{s_1 - s_3}$$

が成り立つことは同値である. A で γ_1 と γ_2 が交わることより,

$$\begin{aligned} a_1 t_1 + b_1 &= a_2 t_1 + b_2, \\ b_2 - b_1 &= a_1 t_1 - a_2 t_1. \end{aligned}$$

このことより,

$$\begin{aligned} X_2 - X_1 &= a_2 s_2 + b_2 - (a_1 s_1 + b_1) \\ &= a_2 (s_2 - t_1) + a_1 (t_1 - s_1). \end{aligned}$$

同様にして,

$$\begin{aligned} X_3 - X_2 &= a_3 (s_3 - t_3) + a_2 (t_3 - s_2), \\ X_1 - X_3 &= a_1 (s_1 - t_2) + a_3 (t_2 - s_3). \end{aligned}$$

よって,

$$\frac{X_2 - X_1}{s_2 - s_1} = \frac{X_3 - X_2}{s_3 - s_2} = \frac{X_1 - X_3}{s_1 - s_3} = m$$

とすると, $a_2(s_2 - t_1) + a_1(t_1 - s_1) = m(s_2 - s_1) = m(s_2 - t_1) + m(t_1 - s_1)$ より,

$$\frac{t_1 - s_1}{s_2 - t_1} = \frac{a_2 - m}{m - a_1}$$

を得る. 同様にして,

$$\begin{aligned} \frac{t_3 - s_2}{s_3 - t_3} &= \frac{a_3 - m}{m - a_2}, \\ \frac{t_2 - s_3}{s_1 - t_2} &= \frac{a_1 - m}{m - a_3}. \end{aligned}$$

よって, 命題 1.10 より,

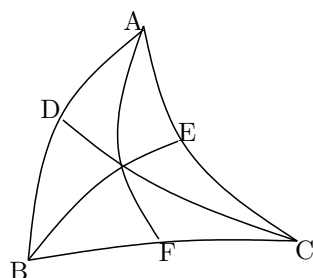
$$\begin{aligned} \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} \cdot \frac{\overline{BF}}{\overline{FC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} &= \frac{\sqrt{a_1^2 + 1} |t_1 - s_1|}{\sqrt{a_1^2 + 1} |s_1 - t_2|} \cdot \frac{\sqrt{a_3^2 + 1} |t_2 - s_3|}{\sqrt{a_3^2 + 1} |s_3 - t_3|} \cdot \frac{\sqrt{a_2^2 + 1} |t_3 - s_2|}{\sqrt{a_2^2 + 1} |s_2 - t_1|} \\ &= \left| \frac{a_2 - m}{m - a_1} \cdot \frac{a_1 - m}{m - a_3} \cdot \frac{a_3 - m}{m - a_2} \right| \\ &= |-1| = 1 \text{ となる.} \end{aligned}$$

□

1.5 半円柱上のチェバの定理

定理 1.13. (半円柱 S におけるチェバの定理) 三角形 ABC に対し, 測地線 AB, CA, BC 上にそれぞれ点 D, E, F があって, これらはいずれも点 A, B, C とは異なるとする. このとき,

$$3 \text{ つの測地線 } AF, BE, CD \text{ が } 1 \text{ 点で交わる} \Leftrightarrow \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} \cdot \frac{\overline{BF}}{\overline{FC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = 1$$



証明. 3 つの測地線 AF, BE, CD の交点を H とする. 三角形 ABF と D, H, C についてメネラウスの定理より,

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} \cdot \frac{\overline{BC}}{\overline{CF}} \cdot \frac{\overline{FH}}{\overline{HA}} = 1 \Leftrightarrow \frac{\overline{FH}}{\overline{HA}} = \frac{\overline{DB}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{CF}}{\overline{AD}}$$

となる. 三角形 AFC と B, H, E についても同様に

$$\frac{\overline{AH}}{\overline{HF}} \cdot \frac{\overline{FB}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = 1 \Leftrightarrow \frac{\overline{AH}}{\overline{HF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{FB}} \cdot \frac{\overline{EA}}{\overline{CE}}$$

が示される. 以上により,

$$1 = \frac{\overline{FH}}{\overline{HA}} \cdot \frac{\overline{AH}}{\overline{HF}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} \cdot \frac{\overline{BF}}{\overline{FC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}}$$

□

この定理によって $\mathbb{R} \times \mathfrak{h}^2$ である上半空間内の曲面 S におけるチェバ・メネラウスの定理はユークリッド幾何におけるものと一致することが示された.

参考文献

- [1] 深谷賢治著 双曲幾何 (現代数学への入門) (岩波書店) 2004 年
- [2] 中岡稔著 双曲幾何学入門-線形代数の応用 (数理化学ライブラリ) (サイエンス社) 1993 年
- [3] 谷口寛著 拡張されたポアンカレ計量を持つ空間における曲面の考察 (三重大学教育学研究科修士論文) 2020 年