三重大学教育学部研究紀要　第72巻　自然科学（2021）41－56頁

上半空間における回転面の全曲率について

中村洋介[*1]・森山貴之[*2]

The total curvatures of rotating surfaces on the upper half space

Yosuke NAKAMURA and Takayuki MORIYAMA

要旨

本論文は中村の修士論文 [3] の一部をまとめたものである. 森山はこの修士論文の指導にあたった. 双曲幾何の上半空間について特異点のある曲線の回転面の考察をした. その結果として, 特異点のある曲線の回転面の全曲率は, ユークリッド空間で計算したものと同じ値になることがわかった.

序文

双曲幾何モデルには上半平面モデルや円盤モデルがあるが, それらは幾何学的に等しく, 等長写像によりひとつのモデルで示されたことは他のモデルでも示される [1]. また, ユークリッド空間での特異点のある曲線の回転面の全曲率は, 特異点の位置によって値が変わることが知られている [2]. そこで, 非ユークリッド空間である上半空間と単位球に計量を導入して, 特異点のある曲線の回転面の全曲率を計算した.

1　上半空間内の曲面のガウス曲率と全曲率

双曲幾何学のモデルは平面で考えるものばかりであった. そこで, 空間のモデルを導入する. 3 次元空間上の点を座標を使って (x, y, z) と表し, z 座標が正であるような点全体のことを**上半空間**といい,

$$\mathfrak{h}^+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0\}$$

と表す. 空間曲線 $l\colon [a, b] \to \mathbb{R}^3$ であって, その像が $\mathfrak{h}^+$ に含まれるような l を, 以後 $\mathfrak{h}^+$ の空間曲線と呼び, $l\colon [a, b] \to \mathfrak{h}^+$ と記し, l を $l(t) = (l_1(t), l_2(t), l_3(t))$ と座標で表す.

定義 1.1. 上半空間 $\mathfrak{h}^+$ の点 $P(x, y, z)$ での計量を, $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ のとき,

$$[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}]^+_P = \frac{v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3}{z^2}$$

で定義する.

定義 1.2. $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ は uv 平面上の領域 D で定義された 3 回微分可能な関数とする.
ヤコビ行列

$$\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}$$

の階数が D 上で 2 であるとき, $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ は空間内に**曲面片**を定義するという.

定義 1.3. 空間内の集合 S がいくつかの (無限の) 曲面片の和集合となっているとき, S を**曲面**という.

定義 1.4. S が境界をもたないコンパクトな曲面であるとき, これを**閉曲面**という.

以後, 断らない限り, 曲面 $p(u, v)$ は閉曲面とする. uv 平面上の領域 D で定義された

$$p(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

[*1] 三重大学教育学研究科
[*2] 三重大学教育学研究科

を曲面とする． $p(u,v)$ において, v を 1 つ固定したときの対応 $u \to p(u,v)$ によって決まる曲線を u 曲線といい, u を 1 つ固定したときの対応 $v \to p(u,v)$ によって決まる曲線を v 曲線という. ベクトル $p_u = p_u(u,v)$ は u 曲線の各点における速度ベクトルを, ベクトル $p_v = p_v(u,v)$ は v 曲線の各点における速度ベクトルを表す. また, 点 $p(u,v)$ で曲面に接するベクトルは, p_u, p_v の一次結合で表される. したがって, 点 $p(u,v)$ を通り, これらの接ベクトルに平行な平面

$$\{p(u,v) + \alpha p_u(u,v) + \beta p_v(u,v) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

が曲面の接平面となる. p_u, p_v の両方に垂直な単位ベクトルは

$$\nu = \frac{p_u \times p_v}{|p_u \times p_v|}$$

と表される. この ν を曲面 $p(u,v)$ の単位法線ベクトルという. これらのもとで, 次のような関数を定義する.

定義 1.5. 曲面 S: $p(u,v)$ の接ベクトル $p_u = p_u(u,v), p_v = p_v(u,v)$ の計量で与えられる 3 つの関数

$$E(u,v) = [p_u, p_u]^+_{p(u,v)},\ F(u,v) = [p_u, p_v]^+_{p(u,v)},\ G(u,v) = [p_v, p_v]^+_{p(u,v)}$$

を**第 1 基本量**という. また, $p(u,v)$ の 2 回微分 p_{uu}, p_{uv}, p_{vv} と単位法線ベクトル ν の計量で与えられる 3 つの関数

$$L(u,v) = [p_{uu}, \nu]^+_{p(u,v)},\ M(u,v) = [p_{uv}, \nu]^+_{p(u,v)},\ N(u,v) = [p_{vv}, \nu]^+_{p(u,v)}$$

を**第 2 基本量**という. 簡単のため, E, F, G, L, M, N と略記する.

定義 1.6. 曲面 S: $p(u,v)$ に対し, 第 1 基本量 E, F, G と第 2 基本量 L, M, N を用いて表される関数

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

を S の**ガウス曲率**という.

定義 1.7. 閉曲面 S: $p(u,v)$ $(u(s_1) \leq u \leq u(s_2), 0 \leq v \leq 2\pi)$ に対して, ガウス曲率を K とする. S 上における K の重積分の値

$$\iint_S K dA$$

を S の**全曲率**という. ここで, dA は**面積要素**といい, $dA = \sqrt{EG - F^2} dudv$ と表される.

2　上半空間内の回転面の全曲率

この章以後, 上半平面 $\mathfrak{h}$ は xz 平面で考えるものとする.

2.1　トーラス型曲面の全曲率

定義 2.1. 上半平面 $\mathfrak{h}$ 上の曲線

$$\gamma(u) = (f(u), g(u)) \quad (f(u) > 0, g(u) > 0)$$

を z 軸のまわりに 1 回転してできる曲面 S は,

$$p(u,v) = (f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u))$$

で与えられる. この曲面 S を**回転面**という.

回転軸と交わらないようにして得られる曲面を**トーラス型曲面**ということとする. これから, 全曲率を計算していくわけだが, 計算が大変であるので, 次の定理を使い, 計算していく.

定理 2.2. 上半平面 $\mathfrak{h}$ 上の曲線

$$\gamma(t) = (f(t), g(t)) \quad (f(t) > 0, g(t) > 0)$$

は閉区間 $[t_1, t_2]$ において, $\dot{\gamma}(t) \neq \mathbf{0}$ であるとする. 区間 $[t_1, t_2]$ に対応する弧長 $u = u(t)$ により, この曲線の弧長パラメータ表示が

$$\gamma(u) = (f(u), g(u)) \quad (u(t_1) \leq u \leq u(t_2))$$

であるとする. この曲線を z 軸のまわりに 1 回転してできる曲面は

$$p(u, v) = (f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u)) \quad (u(t_1) \leq u \leq u(t_2), 0 \leq v \leq 2\pi)$$

で与えられる. この回転面を S とすると, S の全曲率は

$$\iint_S K dA = -2\pi \frac{\dot{f}(t_2)}{g(t_2)} \frac{1}{\left.\dfrac{du}{dt}\right|_{t=t_2}} + 2\pi \frac{\dot{f}(t_1)}{g(t_1)} \frac{1}{\left.\dfrac{du}{dt}\right|_{t=t_1}}$$

となる.

証明. $\mathfrak{h}$ 上の曲線 $\gamma(u)$ $(u(t_1) \leq u \leq u(t_2))$ の速度ベクトルの大きさは常に 1 であるから,

$$\frac{f'(u)^2 + g'(u)^2}{g(u)^2} = 1.$$

この式の両辺に $g(u)^2$ を掛けて u で微分して整理すると,

$$f'(u)f''(u) + g'(u)g''(u) = g(u)g'(u)$$

を得る. また,

$p_u = (f'(u)\cos v, f'(u)\sin v, g'(u))$, $p_v = (-f(u)\sin v, f(u)\cos v, 0)$,
$p_u \times p_v = (-f(u)g'(u)\cos v, -f(u)g'(u)\sin v, f(u)f'(u))$, $|p_u \times p_v| = f(u)$,
$\nu = \frac{p_u \times p_v}{|p_u \times p_v|} = (-g'(u)\cos v, -g'(u)\sin v, f'(u))$,
$p_{uu} = (f''(u)\cos v, f''(u)\sin v, g''(u))$, $p_{uv} = (-f'(u)\sin v, f'(u)\cos v, 0)$, $p_{vv} = -(f(u)\cos v, f(u)\sin v, 0)$.

よって, 第 1 基本量 E, F, G と第 2 基本量 L, M, N は

$$\begin{aligned}
E &= \frac{f'(u)^2 + g'(u)^2}{g(u)^2} = 1, \\
F &= \frac{-f(u)f'(u)\sin v\cos v + f(u)f'(u)\sin v\cos v}{g(u)^2} = 0, \\
G &= \frac{f(u)^2\sin^2 v + f(u)^2\cos^2 v}{g(u)^2} = \frac{f(u)^2}{g(u)^2}, \\
L &= \frac{-f''(u)g'(u)\cos^2 v - f''(u)g'(u)\sin^2 v + f'(u)g''(u)}{g(u)^2} = \frac{f'(u)g''(u) - f''(u)g'(u)}{g(u)^2}, \\
M &= \frac{f'(u)g'(u)\sin v\cos v - f'(u)g'(u)\sin v\cos v}{g(u)^2} = 0, \\
N &= \frac{f(u)g'(u)\sin^2 v + f(u)g'(u)\cos^2 v}{g(u)^2} = \frac{f(u)g'(u)}{g(u)^2}
\end{aligned}$$

となる. ここで, $L = \dfrac{f'(u)g''(u) - f''(u)g'(u)}{g(u)^2}$ の両辺に $g'(u)$ をかけると,

$$L \cdot g'(u) = \frac{f'(u)g'(u)g''(u) - f''(u)g'(u)^2}{g(u)^2}$$

であるから, $g'(u)^2 = g(u)^2 - f'(u)^2$ と $g'(u)g''(u) = g(u)g'(u) - f'(u)f''(u)$ より,

$$L \cdot g'(u) = \frac{f'(u)(g(u)g'(u) - f'(u)f''(u)) - f''(u)(g(u)^2 - f'(u)^2)}{g(u)^2} = \frac{g'(u)f'(u) - g(u)f''(u)}{g(u)}$$

なので,

$$L = \frac{g'(u)f'(u) - g(u)f''(u)}{g(u)g'(u)}$$

となり, ガウス曲率は,

$$K = \frac{\frac{f(u)(g'(u)f'(u) - g(u)f'(u))}{g(u)^3}}{\frac{f(u)^2}{g(u)^2}} = \frac{g'(u)f'(u) - g(u)f''(u)}{g(u)f(u)}.$$

また, 面積要素 $dA = \sqrt{EG - F^2}dudv = \dfrac{f(u)}{g(u)}dudv$ であるので, S の全曲率は

$$\begin{aligned}
\iint_S KdA &= \iint_S \frac{g'(u)f'(u) - g(u)f''(u)}{g(u)^2}dudv \\
&= -\int_0^{2\pi} dv \int_{u(t_1)}^{u(t_2)} \frac{g(u)f''(u) - g'(u)f'(u)}{g(u)^2}du \\
&= -2\pi \left[\frac{f'(u)}{g(u)}\right]_{u(t_1)}^{u(t_2)} \\
&= -2\pi \left[\frac{\dot{f}(t)}{g(t)}\frac{dt}{du}\right]_{t_1}^{t_2} \\
&= -2\pi \frac{\dot{f}(t_2)}{g(t_2)} \frac{1}{\left.\dfrac{du}{dt}\right|_{t=t_2}} + 2\pi \frac{\dot{f}(t_1)}{g(t_1)} \frac{1}{\left.\dfrac{du}{dt}\right|_{t=t_1}}
\end{aligned}$$

となる. よって, 示せた. □

2.2　特異点つきトーラス型曲線の全曲率

曲線の中には速度ベクトル $\dot{\gamma}(t)$ が $\mathbf{0}$ となるようなものが一般に存在する. そのような $\dot{\gamma}(t) = \mathbf{0}$ となるような点を**特異点**ということとする. 特異点を含む曲線を回転して得られる曲面の全曲率は, 定理 2.2 を用いて, 計算することができない. しかし, 特異点以外では, 定理 2.2 が成り立つことから, 次のような広義の弧長パラメータを導入し, 特異点を含む曲線を回転してできる曲面の全曲率の計算を考える.

定義 2.3. 曲線 $\gamma(t)$ に対し, $\dot{\gamma}(t_1) = \mathbf{0}$ とする. $t_1 < \alpha$ に対し, $\displaystyle\lim_{\alpha \to t_1+0} \int_\alpha^t |\dot{\gamma}(\theta)|d\theta$ が収束するとき, $\gamma(t)$ は区間 $(t_1, t]$ で**弧長パラメータ表示可能**といい, その値を

$$u = \int_{t_1}^t |\dot{\gamma}(\theta)|d\theta = \lim_{\alpha \to t_1+0} \int_\alpha^t |\dot{\gamma}(\theta)|d\theta$$

と定義する. 区間 $[t_1, t)$ においても同様に極限を用いて定義される. このように閉区間以外に拡張された $u = u(t)$ を**広義の弧長パラメータ**という.

定義 2.4. 曲線 $\gamma(t)$ に対し,$\dot{\gamma}(t_1) = \dot{\gamma}(t_2) = \mathbf{0}$ とする. t_1 と t_2 の間に適当な点 c を取ったとき, $\gamma(t)$ が区間 $(t_1, c]$ 及び, $[c, t_2)$ のいずれにおいても弧長パラメータ表示可能であるならば, $\gamma(t)$ は開区間 (t_1, t_2) で**弧長パラメータ表示可能**といい, 弧長パラメータ $u = u(t)$ を,

$$u = \int_{t_1}^c |\dot{\gamma}(\theta)|d\theta + \int_c^{t_2} |\dot{\gamma}(\theta)|d\theta$$

と定義する.

定理 2.5. 上半平面 $\mathfrak{h}$ 上の曲線

$$\gamma(t) = (f(t), g(t)) \quad (f(t) > 0, g(t) > 0)$$

は点 $t = t_1, t_2$ において $\dot{\gamma}(t) = \mathbf{0}$ であるとする. 開区間 (t_1, t) に対応する広義の弧長 $u = u(t)$ により, この曲線の弧長パラメータ表示が

$$\gamma(u) = (f(u), g(u)) \quad (u(t_1) \leq u \leq u(t_2))$$

であるとする. この曲線を z 軸のまわりに 1 回転してできる曲面は

$$p(u, v) = (f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u)) \quad (u(t_1) \leq u \leq u(t_2), 0 \leq v \leq 2\pi)$$

で与えられる. この回転面を S とすると, S の全曲率は

$$\iint_S K dA = -2\pi \lim_{t \to t_2 - 0} \frac{\dot{f}(t)}{g(t)} \frac{1}{\dfrac{du}{dt}} + 2\pi \lim_{t \to t_1 + 0} \frac{\dot{f}(t)}{g(t)} \frac{1}{\dfrac{du}{dt}}$$

となる.

証明. 定理 2.2 の証明と同様にして, $t = t_1, t_2$ のとき $\dfrac{du}{dt} = 0$ になることに注意して, 広義積分で考えると,

$$\iint_S K dA = -2\pi \left[\frac{\dot{f}(t)}{g(t)} \frac{dt}{du} \right]_{t_1}^{t_2} = -2\pi \lim_{t \to t_2 - 0} \frac{\dot{f}(t)}{g(t)} \frac{1}{\dfrac{du}{dt}} + 2\pi \lim_{t \to t_1 + 0} \frac{\dot{f}(t)}{g(t)} \frac{1}{\dfrac{du}{dt}}$$

が得られる. □

特異点を複数持つ曲線を回転して得られる曲面については, 次の定理のようにする.

定理 2.6. 上半平面 $\mathfrak{h}$ 上の曲線

$$\gamma(t) = (f(t), g(t)) \quad (f(t) > 0, g(t) > 0)$$

は点 $t = t_1, c_1, c_2, \cdots, c_{n-1}, c_n, t_2$ において $\dot{\gamma}(t) = \mathbf{0}$ であるとする. 開区間 $(t_1, c_1), (c_1, c_2), \cdots, (c_n, t_2)$ に対応する広義の弧長 $u = u_i(t)$ により, この曲線の弧長パラメータ表示が

$$\gamma(u_i) = (f(u_i), g(u_i))$$

であるとする. この曲線を z 軸のまわりに 1 回転してできる曲面は

$$p(u_i, v) = (f(u_i)\cos v, f(u_i)\sin v, g(u_i))$$

で与えられる. この回転面を S とすると, S の全曲率は

$$\begin{aligned}\iint_S K dA = & -2\pi \lim_{t \to t_2 - 0} \frac{\dot{f}(t)}{g(t)} \frac{1}{\dfrac{du_{n+1}}{dt}} + 2\pi \lim_{t \to c_n + 0} \frac{\dot{f}(t)}{g(t)} \frac{1}{\dfrac{du_{n+1}}{dt}} - 2\pi \lim_{t \to c_n - 0} \frac{\dot{f}(t)}{g(t)} \frac{1}{\dfrac{du_n}{dt}} \\ & + 2\pi \lim_{t \to c_{n-1} + 0} \frac{\dot{f}(t)}{g(t)} \frac{1}{\dfrac{du_n}{dt}} - \cdots - 2\pi \lim_{t \to c_1 - 0} \frac{\dot{f}(t)}{g(t)} \frac{1}{\dfrac{du_1}{dt}} + 2\pi \lim_{t \to t_1 + 0} \frac{\dot{f}(t)}{g(t)} \frac{1}{\dfrac{du_1}{dt}}\end{aligned}$$

となる.

証明. 各開区間の広義の弧長による弧長パラメータを考え, 定理 2.5 を用いると, 得られる. □

定理 2.6 の各開区間における弧長 u_i は t の式で表されるため, 本来は (t_1, t) などとそれぞれ書くべきである. しかし, この記法を採用すると, 記号が増えて紛らわしくなるから, 今後, 定理のように書くこととする. 以下では, 定理 2.5 と定理 2.6 を用いて具体的にいくつかの曲面の全曲率を計算してみる.
$0 \leq k \leq 1$ とする. 上半平面 $\mathfrak{h}$ 上の曲線 $\gamma(t)$ を

$$\gamma(t) = (\alpha + (1-2k\sin t)\cos t, \beta + (1-2k\sin t)\sin t) \quad \left(-\frac{3}{2}\pi \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

と定める. この曲線は k が変化することによって, 形が変形していき, $k = \dfrac{1}{2}$ のときは $t = -\dfrac{3}{2}\pi, \dfrac{\pi}{2}$ に対応する点が特異点である. なお, $k \neq \dfrac{1}{2}$ のときに得られる回転面 $T(k)$ の全曲率は, 例題 **??** で見た通りである. そこで, $k = \dfrac{1}{2}$ のときの回転面 $T\left(\dfrac{1}{2}\right)$ を構成し, 全曲率を計算する.

例 2.7. 上半平面 $\mathfrak{h}$ 上の曲線 $\gamma(t)$ を

$$\gamma(t) = (f(t), g(t)) = (\alpha + (1-\sin t)\cos t, \beta + (1-\sin t)\sin t) \quad \left(-\frac{3}{2}\pi \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

とする. ここで, α, β は x 軸, z 軸に交わらないように十分大きく取るとする. この曲線 $\gamma(t)$ に対し, $\dot{\gamma}(t) = (-\sin t - \cos 2t, \cos t - \sin 2t)$ である. 開区間 $\left(-\dfrac{3}{2}\pi, t\right)$ に対応する弧長 $u = u(t)$ により, この円の弧長パラメータ表示が

$$\gamma(u) = (f(u), g(u))$$

であるとする. この曲線を z 軸のまわりに 1 回転してできる曲面 S は,

$$p(u, v) = (f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u))$$

で与えられる. ここで, $-\dfrac{3}{2}\pi \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$ のとき, $0 \leq \dfrac{t}{2} + \dfrac{3}{4}\pi \leq \pi$ であるので,

$$\dot{f}(t) = -\sin t - \cos 2t, \frac{du}{dt} = \frac{2\sin\left(\dfrac{t}{2} + \dfrac{3}{4}\pi\right)}{g(t)}$$

と定理 2.5 より, S の全曲率は

$$\begin{aligned}\iint_S K dA &= -2\pi \lim_{t \to \frac{\pi}{2} - 0} \frac{-\sin t - \cos 2t}{2\sin\left(\dfrac{t}{2} + \dfrac{3}{4}\pi\right)} + 2\pi \lim_{t \to -\frac{3}{2}\pi + 0} \frac{-\sin t - \cos 2t}{2\sin\left(\dfrac{t}{2} + \dfrac{3}{4}\pi\right)} \\ &= -2\pi \cdot 0 + 2\pi \cdot 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

となる.

例 2.8. 上半平面 $\mathfrak{h}$ 上のカージオイドを

$$\gamma(t) = (f(t), g(t)) = (\alpha + 2\cos t - \cos 2t, \beta + 2\sin t - \sin 2t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

とする. ここで, α, β は x 軸, z 軸に交わらないように十分大きく取るとする. この曲線 $\gamma(t)$ に対し, $\dot{\gamma}(t) = (-2\sin t + 2\sin 2t, 2\cos t - 2\cos 2t)$ であり, $\dot{\gamma}(t) = \mathbf{0}$ となるのは, $t = 0, 2\pi$ のときである. 開区間 $(0, 2\pi)$ に対応する弧長 $u = u(t)$ により, この円の弧長パラメータ表示が

$$\gamma(u) = (f(u), g(u))$$

であるとする. この曲線を z 軸のまわりに 1 回転してできる曲面 S は,

$$p(u, v) = (f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u))$$

で与えられる．ここで，$0 \leq t \leq 2\pi$ のとき，$0 \leq \dfrac{t}{2} \leq \pi$ であるので，

$$\dot{f}(t) = -2\sin t + 2\sin 2t,\ \ \frac{du}{dt} = \frac{4\sin\dfrac{t}{2}}{g(t)}$$

と定理 2.5 より，S の全曲率は

$$\begin{aligned}\iint_S KdA &= -2\pi \lim_{t\to 2\pi-0} \frac{-2\sin t + 2\sin 2t}{4\sin\dfrac{t}{2}} + 2\pi \lim_{t\to +0} \frac{-2\sin t + 2\sin 2t}{4\sin\dfrac{t}{2}} \\ &= -2\pi\cdot(-1) + 2\pi\cdot 1 \\ &= 4\pi\end{aligned}$$

となる．

例 2.9. 上半平面 $\mathfrak{h}$ 上のネフロイドを

$$\gamma(t) = (f(t), g(t)) = (\alpha + 3\cos t - \cos 3t, \beta + 3\sin t - \sin 3t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

とする．ここで，α, β は x 軸，z 軸に交わらないように十分大きく取るとする．この曲線 $\gamma(t)$ に対し，$\dot{\gamma}(t) = (-3\sin t + 3\sin 3t, 3\cos t - 3\cos 3t)$ であり，$\dot{\gamma}(t) = \mathbf{0}$ となるのは，$t = 0, \pi, 2\pi$ のときである．開区間 $(0,\pi), (\pi, 2\pi)$ にそれぞれ対応する弧長 $u_i = u_i(t)$ により，この円の弧長パラメータ表示が

$$\gamma(u_i) = (f(u_i), g(u_i)) \quad (i = 1, 2)$$

であるとする．この曲線を z 軸のまわりに 1 回転してできる曲面 S は，

$$p(u_i, v) = (f(u_i)\cos v, f(u_i)\sin v, g(u_i))$$

で与えられる．

$$\dot{f}(t) = -3\sin t + 3\sin 3t,\ \ \frac{du}{dt} = \begin{cases} \dfrac{6\sin t}{g(t)} & (i=1) \\ \dfrac{-6\sin t}{g(t)} & (i=2) \end{cases}$$

と定理 2.6 より，S の全曲率は

$$\begin{aligned}\iint_S KdA &= -2\pi \lim_{t\to \pi-0} \frac{-3\sin t + 3\sin 3t}{6\sin t} + 2\pi \lim_{t\to +0} \frac{-3\sin t + 3\sin 3t}{6\sin t} \\ &\quad - 2\pi \lim_{t\to 2\pi-0} \frac{-3\sin t + 3\sin 3t}{-6\sin t} + 2\pi \lim_{t\to \pi+0} \frac{-3\sin t + 3\sin 3t}{-6\sin t} \\ &= -2\pi\cdot 1 + 2\pi\cdot 1 - 2\pi\cdot(-1) + 2\pi\cdot(-1) \\ &= 0\end{aligned}$$

となる．

例 2.10. 上半平面 $\mathfrak{h}$ 上のエピサイクロイドを

$$\gamma(t) = (f(t), g(t)) = (\alpha + 4\cos t - \cos 4t, \beta + 4\sin t - \sin 4t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

とする．ここで，α, β は x 軸，z 軸に交わらないように十分大きく取るとする．この曲線 $\gamma(t)$ に対し，$\dot{\gamma}(t) = (-4\sin t + 4\sin 4t, 4\cos t - 4\cos 4t)$ であり，$\dot{\gamma}(t) = \mathbf{0}$ となるのは，$t = 0, \dfrac{2}{3}\pi, \dfrac{4}{3}\pi, 2\pi$ のときである．開区間 $\left(0, \dfrac{2}{3}\pi\right), \left(\dfrac{2}{3}\pi, \dfrac{4}{3}\pi\right), \left(\dfrac{4}{3}\pi, 2\pi\right)$ にそれぞれ対応する弧長 $u_i = u_i(t)$ により，この円の弧長パラメータ表示が

$$\gamma(u_i) = (f(u_i), g(u_i)) \quad (i = 1, 2, 3)$$

であるとする．この曲線を z 軸のまわりに 1 回転してできる曲面 S は，

$$p(u_i, v) = (f(u_i)\cos v, f(u_i)\sin v, g(u_i))$$

で与えられる．

$$\dot{f}(t) = -4\sin t + 4\sin 4t, \ \ \frac{du}{dt} = \begin{cases} \dfrac{8\sin\dfrac{3}{2}t}{g(t)} & (i=1,3) \\ \dfrac{-8\sin\dfrac{3}{2}t}{g(t)} & (i=2) \end{cases}$$

と定理 2.6 より，S の全曲率は

$$\begin{aligned}\iint_S KdA &= -2\pi \lim_{t\to\frac{2}{3}\pi-0}\frac{-4\sin t + 4\sin 4t}{8\sin\dfrac{3}{2}t} + 2\pi\lim_{t\to+0}\frac{-4\sin t + 4\sin 4t}{8\sin\dfrac{3}{2}t} - 2\pi\lim_{t\to\frac{4}{3}\pi-0}\frac{-4\sin t + 4\sin 4t}{-8\sin\dfrac{3}{2}t} \\ &\quad + 2\pi\lim_{t\to\frac{2}{3}\pi+0}\frac{-4\sin t + 4\sin 4t}{-8\sin\dfrac{3}{2}t} - 2\pi\lim_{t\to 2\pi-0}\frac{-4\sin t + 4\sin 4t}{8\sin\dfrac{3}{2}t} + 2\pi\lim_{t\to\frac{4}{3}\pi+0}\frac{-4\sin t + 4\sin 4t}{8\sin\dfrac{3}{2}t} \\ &= -2\pi\cdot\frac{1}{2} + 2\pi\cdot 1 - 2\pi\cdot\frac{1}{2} + 2\pi\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) - 2\pi\cdot(-1) + 2\pi\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= 0\end{aligned}$$

となる．

例 2.11. 上半平面 $\mathfrak{h}$ 上のハイポサイクロイドを

$$\gamma(t) = (f(t), g(t)) = (\alpha + 2\cos t + \cos 2t, \beta + 2\sin t - \sin 2t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

とする．ここで，α, β は x 軸，z 軸に交わらないように十分大きく取るとする．この曲線 $\gamma(t)$ に対し，$\dot{\gamma}(t) = (-2\sin t - 2\sin 2t, 2\cos t - 2\cos 2t)$ であり，$\dot{\gamma}(t) = \mathbf{0}$ となるのは，$t = 0, \dfrac{2}{3}\pi, \dfrac{4}{3}\pi, 2\pi$ のときである．開区間 $\left(0, \dfrac{2}{3}\pi\right), \left(\dfrac{2}{3}\pi, \dfrac{4}{3}\pi\right), \left(\dfrac{4}{3}\pi, 2\pi\right)$ にそれぞれ対応する弧長 $u_i = u_i(t)$ により，この円の弧長パラメータ表示が

$$\gamma(u_i) = (f(u_i), g(u_i)) \quad (i = 1, 2, 3)$$

であるとする．この曲線を z 軸のまわりに 1 回転してできる曲面 S は，

$$p(u_i, v) = (f(u_i)\cos v, f(u_i)\sin v, g(u_i))$$

で与えられる．

$$\dot{f}(t) = -2\sin t - 2\sin 2t, \ \ \frac{du}{dt} = \begin{cases} \dfrac{4\sin\dfrac{3}{2}t}{g(t)} & (i=1,3) \\ \dfrac{-4\sin\dfrac{3}{2}t}{g(t)} & (i=2) \end{cases}$$

と定理 2.6 より，S の全曲率は

$$\begin{aligned}\iint_S KdA &= -2\pi \lim_{t\to\frac{2}{3}\pi-0}\frac{-2\sin t - 2\sin 2t}{4\sin\dfrac{3}{2}t} + 2\pi\lim_{t\to+0}\frac{-2\sin t - 2\sin 2t}{4\sin\dfrac{3}{2}t} - 2\pi\lim_{t\to\frac{4}{3}\pi-0}\frac{-2\sin t - 2\sin 2t}{-4\sin\dfrac{3}{2}t} \\ &\quad + 2\pi\lim_{t\to\frac{2}{3}\pi+0}\frac{-2\sin t - 2\sin 2t}{-4\sin\dfrac{3}{2}t} - 2\pi\lim_{t\to 2\pi-0}\frac{-2\sin t - 2\sin 2t}{4\sin\dfrac{3}{2}t} + 2\pi\lim_{t\to\frac{4}{3}\pi+0}\frac{-2\sin t - 2\sin 2t}{4\sin\dfrac{3}{2}t} \\ &= -2\pi\cdot\frac{1}{2} + 2\pi\cdot 1 - 2\pi\cdot\frac{1}{2} + 2\pi\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) - 2\pi\cdot(-1) + 2\pi\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= 0\end{aligned}$$

となる．

例 2.12. 上半平面 $\mathfrak{h}$ 上のアステロイドを

$$\gamma(t) = (f(t), g(t)) = (\alpha + 3\cos t + \cos 3t, \beta + 3\sin t - \sin 3t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

とする．ここで，α, β は x 軸，z 軸に交わらないように十分大きく取るとする．この曲線 $\gamma(t)$ に対し，$\dot{\gamma}(t) = (-3\sin t - 3\sin 3t, 3\cos t - 3\cos 3t)$ であり，$\dot{\gamma}(t) = \mathbf{0}$ となるのは，$t = 0, \dfrac{\pi}{2}, \pi, \dfrac{3}{2}\pi, 2\pi$ のときである．開区間 $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right), \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right), \left(\pi, \dfrac{3}{2}\pi\right), \left(\dfrac{3}{2}\pi, 2\pi\right)$ にそれぞれ対応する弧長 $u_i = u_i(t)$ により，この円の弧長パラメータ表示が

$$\gamma(u_i) = (f(u_i), g(u_i)) \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

であるとする．この曲線を z 軸のまわりに 1 回転してできる曲面 S は，

$$p(u_i, v) = (f(u_i)\cos v, f(u_i)\sin v, g(u_i))$$

で与えられる．

$$\dot{f}(t) = -3\sin t - 3\sin 3t, \ \frac{du}{dt} = \begin{cases} \dfrac{6\sin 2t}{g(t)} & (i = 1, 3) \\ \dfrac{-6\sin 2t}{g(t)} & (i = 2, 4) \end{cases}$$

と定理 2.6 より，S の全曲率は

$$\begin{aligned}
\int\!\!\int_S K dA = &-2\pi \lim_{t\to\frac{\pi}{2}-0} \frac{-3\sin t - 3\sin 3t}{6\sin 2t} + 2\pi \lim_{t\to+0} \frac{-3\sin t - 3\sin 3t}{6\sin 2t} - 2\pi \lim_{t\to\pi-0} \frac{-3\sin t - 3\sin 3t}{6\sin 2t} \\
&+ 2\pi \lim_{t\to\frac{\pi}{2}+0} \frac{-3\sin t - 3\sin 3t}{6\sin 2t} - 2\pi \lim_{t\to\frac{3}{2}\pi-0} \frac{-3\sin t - 3\sin 3t}{6\sin 2t} + 2\pi \lim_{t\to\pi+0} \frac{-3\sin t - 3\sin 3t}{6\sin 2t} \\
&- 2\pi \lim_{t\to 2\pi-0} \frac{-3\sin t - 3\sin 3t}{6\sin 2t} + 2\pi \lim_{t\to\frac{3}{2}\pi+0} \frac{-3\sin t - 3\sin 3t}{6\sin 2t} \\
= &-2\pi\cdot 0 + 2\pi\cdot(-1) - 2\pi\cdot 1 + 2\pi\cdot 0 - 2\pi\cdot 0 + 2\pi\cdot 1 - 2\pi\cdot(-1) + 2\pi\cdot 0 \\
= &\ 0
\end{aligned}$$

となる．

2.3 りんご型曲面の全曲率

これまでの回転面は, 回転軸と交わらない曲線で考えるトーラス型曲面であった. 特異点を含む曲線は回転によって, 特異点集合が曲面上に筋となって現れた. これから考える曲面は, 回転面上に特異点集合が点として存在しているような曲面を考える. このとき得られる曲面を**りんご型曲面**ということとする. 平面曲線が特異点を持たないとき, 次の定理で全曲率を求めることができる.

定理 2.13. 上半平面 $\mathfrak{h}$ 上の曲線

$$\gamma(t) = (f(t), g(t)) \quad (t_1 \leq t \leq t_2, g(t) > 0)$$

に対し，$f(t_1) = f(t_2) = 0$, 他の t では $f(t) > 0$ とする．閉区間 $[t_1, t_2]$ に対応する弧長 $u = u(t)$ により，この曲線の弧長パラメータ表示が

$$\gamma(u) = (f(u), g(u))$$

であるとする．この曲線を z 軸のまわりに 1 回転してできる曲面は

$$p(u, v) = (f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u))$$

で与えられる. この回転面を S とすると, S の全曲率は

$$\iint_S KdA = -2\pi\frac{\dot{f}(t_2)}{g(t_2)}\frac{1}{\left.\dfrac{du}{dt}\right|_{t=t_2}} + 2\pi\frac{\dot{f}(t_1)}{g(t_1)}\frac{1}{\left.\dfrac{du}{dt}\right|_{t=t_1}}$$

となる.

証明. 定理 2.2 と同様にして示される. □

また, 平面曲線が特異点を持つとき, 次の定理で全曲率を求めることができる.

定理 2.14. 上半平面 $\mathfrak{h}$ 上の曲線

$$\gamma(t) = (f(t), g(t)) \quad (t_1 \leq t \leq t_2, g(t) > 0)$$

に対し, $f(t_1) = f(t_2) = 0$, 他の t では $f(t) > 0$ とし, $\dot{\gamma}(t_2) = \mathbf{0}$ とする. 区間 $[t_1, t)$ に対応する弧長 $u = u(t)$ により, この曲線の弧長パラメータ表示が

$$\gamma(u) = (f(u), g(u))$$

であるとする. この曲線を z 軸のまわりに 1 回転してできる曲面は

$$p(u, v) = (f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u))$$

で与えられる. この回転面を S とすると, S の全曲率は

$$\iint_S KdA = -2\pi\lim_{t\to t_2-0}\frac{\dot{f}(t)}{g(t)}\frac{1}{\dfrac{du}{dt}} + 2\pi\frac{\dot{f}(t_1)}{g(t_1)}\frac{1}{\left.\dfrac{du}{dt}\right|_{t=t_1}}$$

となる. また, 上の条件において, 曲線 $\gamma(t)$ が $\dot{\gamma}(t_1) = \mathbf{0}$ も満たしているならば, 開区間 (t_1, t) に対応する弧長 $u = u(t)$ により, S の全曲率は,

$$\iint_S KdA = -2\pi\lim_{t\to s_2-0}\frac{\dot{f}(t)}{g(t)}\frac{1}{\dfrac{du}{dt}} + 2\pi\lim_{t\to t_2-0}\frac{\dot{f}(t)}{g(t)}\frac{1}{\dfrac{du}{dt}}$$

となる.

証明. 定理 2.5 と同様にして得られる. □

例 2.15. 例題 **??** で考えたレムニスケートを $z = x$ に関して対称移動し, 制限した上半平面 $\mathfrak{h}$ 上の曲線を

$$\gamma(t) = (f(t), g(t)) = \left(\frac{\sin t\cos t}{1+\sin^2 t}, \alpha + \frac{\cos t}{1+\sin^2 t}\right) \quad \left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}, \alpha > 0\right)$$

とする. ただし, α は x 軸に交わらないように十分大きく取るとする. この曲線 $\gamma(t)$ に対して,

$$\dot{\gamma}(t) = \left(\frac{1-3\sin^2 t}{(1+\sin^2 t)^2}, -\frac{\sin t(3-\sin^2 t)}{(1+\sin^2 t)^2}\right)$$

であり, 閉区間 $[0, t]$ に対応する弧長 $u = u(t)$ により, このレムニスケートの弧長パラメータ表示が

$$\gamma(u) = (f(u), g(u))$$

であるとする. この曲線を z 軸のまわりに 1 回転してできる曲面 S は

$$p(u, v) = (f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u))$$

で与えられる.

$$\dot{f}(t) = \frac{1 - 3\sin^2 t}{(1 + \sin^2 t)^2}, \ \frac{du}{dt} = \frac{1}{g(t)\sqrt{1 + \sin^2 t}}$$

より, 定理 2.13 より, S の全曲率は,

$$\iint_S K dA = -2\pi \frac{\dot{f}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{g\left(\frac{\pi}{2}\right)} \frac{1}{\left.\frac{du}{dt}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}} + 2\pi \frac{\dot{f}(0)}{g(0)} \frac{1}{\left.\frac{du}{dt}\right|_{t=0}} = -2\pi \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \sqrt{2} + 2\pi \cdot 1 \cdot 1 = (2 + \sqrt{2})\pi$$

となる.

例 2.16. 上半平面 $\mathfrak{h}$ 上の曲線を

$$\gamma(t) = (f(t), g(t)) = ((1 - \sin t)\cos t, \alpha + (1 - \sin t)\sin t) \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}, \alpha > 0\right)$$

とする. ただし, α は x 軸と交わらないように十分大きく取るとする. この曲線 $\gamma(t)$ に対し,

$$\dot{\gamma}(t) = (-\sin t - \cos 2t, \cos t - \sin 2t)$$

であり, $\dot{\gamma}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \mathbf{0}$ 閉区間 $\left[-\frac{\pi}{2}, t\right)$ に対応する弧長 $u = u(t)$ により, このレムニスケートの弧長パラメータ表示が

$$\gamma(u) = (f(u), g(u))$$

であるとする. この曲線を z 軸のまわりに 1 回転してできる曲面 $T\left(\frac{1}{2}\right)$ は

$$p(u, v) = (f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u))$$

で与えられる.

$$\dot{f}(t) = -\sin t - \cos 2t, \ \frac{du}{dt} = \frac{2\sin\left(\frac{t}{2} + \frac{3}{4}\pi\right)}{g(t)}$$

より, 定理 2.14 より, $T\left(\frac{1}{2}\right)$ の全曲率は,

$$\begin{aligned}
\iint_S K dA &= -2\pi \lim_{t \to \frac{\pi}{2} - 0} \frac{\dot{f}(t)}{g(t)} \frac{1}{\frac{du}{dt}} + 2\pi \frac{\dot{f}\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{g\left(-\frac{\pi}{2}\right)} \frac{1}{\left.\frac{du}{dt}\right|_{t=-\frac{\pi}{2}}} \\
&= -2\pi \lim_{t \to \frac{\pi}{2} - 0} \frac{-\sin t - \cos 2t}{2\sin\left(\frac{t}{2} + \frac{3}{4}\pi\right)} + 2\pi \cdot 1 \\
&= 2\pi
\end{aligned}$$

となる.

3 単位球内の曲面の曲率

単位球を導入し, 単位球内での回転面の全曲率も同様にして考えていく. 単位球 D^3 を,

$$D^3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 - x^2 - y^2 - z^2 > 0\}$$

と表す.

定義 3.1. 単位球 D^3 内の点 $P(x,y,z)$ での計量を, $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ のとき,

$$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})^+_P = \frac{4(v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3)}{(1 - x^2 - y^2 - z^2)^2}$$

で定義する.

上半空間の定義と同様にして, 曲面のガウス曲率と全曲率を定義する.

定義 3.2. 曲面 S: $p(u,v)$ の接ベクトル $p_u = p_u(u,v), p_v = p_v(u,v)$ の計量で与えられる 3 つの関数

$$E(u,v) = (p_u, p_u)^+_{p(u,v)},\ F(u,v) = (p_u, p_v)^+_{p(u,v)},\ G(u,v) = (p_v, p_v)^+_{p(u,v)}$$

を定義する. また, $p(u,v)$ の 2 回微分 p_{uu}, p_{uv}, p_{vv} と単位法線ベクトル ν の計量で与えられる 3 つの関数

$$L(u,v) = (p_{uu}, \nu)^+_{p(u,v)},\ M(u,v) = (p_{uv}, \nu)^+_{p(u,v)},\ N(u,v) = (p_{vv}, \nu)^+_{p(u,v)}$$

を定義する. 簡単のため, E, F, G, L, M, N と略記する.

上半空間のときと同様に, 定義 1.6, 1.7 のようにガウス曲率, 全曲率を定義する.

4　単位球内の回転面の全曲率

この章以後, 単位円盤 D^2 は xy 平面で考えるものとする.

定義 4.1. 単位円盤 D^2 上の曲線

$$\gamma(u) = (f(u), g(u)) \quad (1 - f(u)^2 - g(u)^2 > 0)$$

を x 軸のまわりに 1 回転してできる曲面 S は,

$$p(u,v) = (f(u), g(u)\cos v, g(u)\sin v)$$

で与えられる.

上半空間のときと同様にして, 特異点無しトーラス型曲面, 特異点つきトーラス型曲面, りんご型曲面の全曲率を考えるにあたって, 以下の定理を導入する.

定理 4.2. 単位円盤 D^2 上の曲線

$$\gamma(s) = (f(t), g(t)) \quad (1 - f(t)^2 - g(t)^2 > 0, g(t) > 0)$$

は, 閉区間 $[t_1, t_2]$ において, $\dot{\gamma}(t) \neq 0$ であるとする. 区間 $[t_1, t_2]$ に対応する弧長 $u = u(t)$ により, この曲線の弧長パラメータ表示が,

$$\gamma(u) = (f(u), g(u)) \quad (u(t_1) \leq u \leq u(t_2))$$

であるとする. この曲線を x 軸のまわりに 1 回転してできる曲面は,

$$p(u,v) = (f(u), g(u)\cos v, g(u)\sin v) \quad (u(t_1) \leq u \leq u(t_2), 0 \leq v \leq 2\pi)$$

で与えられる. この回転面を S とすると, S の全曲率は,

$$\iint_S K dA = -2\pi \frac{2\dot{g}(t_2)}{1 - f(t_2)^2 - g(t_2)^2} \frac{1}{\left.\dfrac{du}{dt}\right|_{t=t_2}} + 2\pi \frac{2\dot{g}(t_1)}{1 - f(t_1)^2 - g(t_1)^2} \frac{1}{\left.\dfrac{du}{dt}\right|_{t=t_1}}$$

となる.

証明. 単位円盤 D^2 上の曲線 $\gamma(u)$ $(u(t_1) \leq u \leq u(t_2))$ の速度ベクトルの大きさは常に 1 であるから,

$$\frac{4\{f'(u)^2 + g'(u)^2\}}{\{1 - f(u)^2 - g(u)^2\}^2} = 1.$$

この式の両辺に $\{1 - f(u)^2 - g(u)^2\}^2$ を掛けて u で微分して整理すると,

$$2\{f'(u)f''(u) + g'(u)g''(u)\} = \{f(u)^2 + g(u)^2 - 1\}\{f(u)f'(u) + g(u)g'(u)\}$$

を得る. また,

$p_u = (f'(u), g'(u)\cos v, g'(u)\sin v)$, $p_v = (0, -g(u)\sin v, g(u)\cos v)$,
$p_u \times p_v = (g(u)g'(u), -f'(u)g(u)\cos v, -f'(u)g(u)\sin v)$, $|p_u \times p_v| = g(u)$,
$\nu = \frac{p_u \times p_v}{|p_u \times p_v|} = (g'(u), -f'(u)\cos v, -f'(u)\sin v)$,
$p_{uu} = (f''(u), g''(u)\cos v, g''(u)\sin v)$, $p_{uv} = (0, -g'(u)\sin v, g'(u)\cos v)$, $p_{vv} = (0, -g(u)\cos v, -g(u)\sin v)$.

よって, 第 1 基本量 E, F, G と第 2 基本量 L, M, N は

$$\begin{aligned}
E &= \frac{4\{f'(u)^2 + g'(u)^2\}}{\{1 - f(u)^2 - g(u)^2\}^2} = 1, \\
F &= \frac{4\{-g(u)g'(u)\sin v\cos v + g(u)g'(u)\sin v\cos v\}}{\{1 - f(u)^2 - g(u)^2\}^2} = 0, \\
G &= \frac{4\{g(u)^2\sin^2 v + g(u)^2\cos^2 v\}}{\{1 - f(u)^2 - g(u)^2\}^2} = \frac{4g(u)^2}{\{1 - f(u)^2 - g(u)^2\}^2}, \\
L &= \frac{4\{f''(u)g'(u)\cos^2 v + f''(u)g'(u)\sin^2 v - f'(u)g''(u)}{\{1 - f(u)^2 - g(u)^2\}^2} = \frac{4\{f''(u)g'(u) - f'(u)g''(u)\}}{\{1 - f(u)^2 - g(u)^2\}^2}, \\
M &= \frac{4\{f'(u)g'(u)\sin v\cos v - f'(u)g'(u)\sin v\cos v}{\{1 - f(u)^2 - g(u)^2\}^2} = 0, \\
N &= \frac{4\{f'(u)g(u)\sin^2 v + f'(u)g(u)\cos^2 v}{\{1 - f(u)^2 - g(u)^2\}^2} = \frac{4f'(u)g(u)}{\{1 - f(u)^2 - g(u)^2\}^2}
\end{aligned}$$

となる. ここで, $L = \dfrac{4\{f''(u)g'(u) - f'(u)g''(u)\}}{\{1 - f(u)^2 - g(u)^2\}^2}$ の両辺に $f'(u)$ をかけると,

$$L \cdot f'(u) = \frac{4\{f'(u)f''(u)g'(u) - f'(u)^2 g''(u)\}}{\{1 - f(u)^2 - g(u)^2\}^2}$$

であるから,

$$f'(u)^2 = \frac{\{1 - f(u)^2 - g(u)^2\}^2}{4} - g(u)^2,$$

$$f'(u)f''(u) = \frac{\{f(u)^2 + g(u)^2 - 1\}\{f(u)f'(u) + g(u)g'(u)\}}{2} - g'(u)g''(u).$$

これらより,

$$L \cdot f'(u) = \frac{-2\{f(u)f'(u) + g(u)g'(u)\}g'(u) - \{1 - f(u)^2 - g(u)^2\}g''(u)}{1 - f(u)^2 - g(u)^2}$$

なので,

$$L = \frac{-2\{f(u)f'(u) + g(u)g'(u)\}g'(u) - \{1 - f(u)^2 - g(u)^2\}g''(u)}{\{1 - f(u)^2 - g(u)^2\}f'(u)}$$

となり, ガウス曲率は,

$$\begin{aligned}
K &= \frac{\frac{-2\{f(u)f'(u)+g(u)g'(u)\}g'(u) - \{1-f(u)^2-g(u)^2\}g''(u)}{\{1-f(u)^2-g(u)^2\}f'(u)} \frac{4f'(u)g(u)}{\{1-f(u)^2-g(u)^2\}^2}}{\frac{4g(u)^2}{\{1-f(u)^2-g(u)^2\}^2}} \\
&= \frac{-2\{f(u)f'(u) + g(u)g'(u)\}g'(u) - \{1 - f(u)^2 - g(u)^2\}g''(u)}{\{1 - f(u)^2 - g(u)^2\}g(u)}.
\end{aligned}$$

また, 面積要素 $dA=\sqrt{EG-F^2}dudv=\dfrac{2g(u)}{1-f(u)^2-g(u)^2}dudv$ であるので, S の全曲率は

$$
\begin{aligned}
\iint_S KdA &= \iint_S \frac{-4\{f(u)f'(u)+g(u)g'(u)\}g(u)-2\{1-f(u)^2-g(u)^2\}g''(u)}{\{1-f(u)^2-g(u)^2\}^2}dudv \\
&= -\int_0^{2\pi} dv \int_{u(t_1)}^{u(t_2)} \frac{-4\{f(u)f'(u)+g(u)g'(u)\}g(u)-2\{1-f(u)^2-g(u)^2\}g''(u)}{\{1-f(u)^2-g(u)^2\}^2}du \\
&= -2\pi\left[\frac{2g'(u)}{1-f(u)^2-g(u)^2}\right]_{u(t_1)}^{u(t_2)} \\
&= -2\pi\left[\frac{2\dot{g}(t)}{1-f(t)^2-g(t)^2}\frac{dt}{du}\right]_{t_1}^{t_2} \\
&= -2\pi\frac{2\dot{g}(t_2)}{1-f(t_2)^2-g(t_2)^2}\frac{1}{\left.\dfrac{du}{dt}\right|_{t=t_2}} + 2\pi\frac{2\dot{g}(t_1)}{1-f(t_1)^2-g(t_1)^2}\frac{1}{\left.\dfrac{du}{dt}\right|_{t=t_1}}
\end{aligned}
$$

となる. よって, 示せた. □

また, 上半空間のときと同様に, 広義の弧長パラメータを考えることで, 次の定理が成り立つ.

定理 4.3. 単位円盤 D^2 上の曲線

$$\gamma(t)=(f(t),g(t)) \quad (1-f(t)^2-g(t)^2>0, g(t)>0)$$

は点 $t=t_1,t_2$ において $\dot{\gamma}(t)=\mathbf{0}$ であるとする. 開区間 (t_1,t) に対応する広義の弧長 $u=u(t)$ により, この曲線の弧長パラメータ表示が

$$\gamma(u)=(f(u),g(u)) \quad (u(t_1)\leq u\leq u(t_2))$$

であるとする. この曲線を x 軸のまわりに 1 回転してできる曲面は

$$p(u,v)=(f(u),g(u)\cos v, g(u)\sin v) \quad (u(t_1)\leq u\leq u(t_2), 0\leq v\leq 2\pi)$$

で与えられる. この回転面を S とすると, S の全曲率は

$$\iint_S KdA = -2\pi\lim_{t\to t_2-0}\frac{2\dot{g}(t)}{1-f(t)^2-g(t)^2}\frac{1}{\dfrac{du}{dt}} + 2\pi\lim_{t\to t_1+0}\frac{2\dot{g}(t)}{1-f(t)^2-g(t)^2}\frac{1}{\dfrac{du}{dt}}$$

となる.

証明. 定理 4.2 の証明と同様にして, $t=t_1,t_2$ のとき, $\dfrac{du}{dt}=0$ になることに注意して, 広義積分で考えると,

$$
\begin{aligned}
\iint_S KdA &= -2\pi\left[\frac{2\dot{g}(t)}{1-f(t)^2-g(t)^2}\frac{dt}{du}\right]_{t_1}^{t_2} \\
&= -2\pi\lim_{t\to t_2-0}\frac{2\dot{g}(t)}{1-f(t)^2-g(t)^2}\frac{1}{\dfrac{du}{dt}} + 2\pi\lim_{t\to t_1+0}\frac{2\dot{g}(t)}{1-f(t)^2-g(t)^2}\frac{1}{\dfrac{du}{dt}}
\end{aligned}
$$

が得られる. □

定理 4.4. xy 平面上の曲線

$$\gamma(t)=(f(t),g(t)) \quad (1-f(t)^2-g(t)^2>0)$$

は点 $t=t_1,c_1,c_2,\cdots,c_{n-1},c_n,t_2$ において $\dot{\gamma}(t)=\mathbf{0}$ であるとする. 開区間 $(t_1,c_1),(c_1,c_2),\cdots,(c_n,t_2)$ に対応する広義の弧長 $u=u_i(t)$ により, この曲線の弧長パラメータ表示が

$$\gamma(u_i)=(f(u_i),g(u_i))$$

であるとする. この曲線を x 軸のまわりに 1 回転してできる曲面は

$$p(u_i, v) = (f(u_i), g(u_i)\cos v, g(u_i)\sin v)$$

で与えられる. この回転面を S とすると, S の全曲率は

$$\begin{aligned}\iint_S K dA = &-2\pi \lim_{t\to t_2-0} \frac{2\dot{g}(t)}{1-f(t)^2-g(t)^2}\frac{1}{\dfrac{du_{n+1}}{dt}} + 2\pi \lim_{t\to c_n+0} \frac{2\dot{g}(t)}{1-f(t)^2-g(t)^2}\frac{1}{\dfrac{du_{n+1}}{dt}}\\ &- 2\pi \lim_{t\to c_n-0} \frac{2\dot{g}(t)}{1-f(t)^2-g(t)^2}\frac{1}{\dfrac{du_n}{dt}} + 2\pi \lim_{t\to c_{n-1}+0} \frac{2\dot{g}(t)}{1-f(t)^2-g(t)^2}\frac{1}{\dfrac{du_n}{dt}} - \cdots\\ &- 2\pi \lim_{t\to c_1-0} \frac{2\dot{g}(t)}{1-f(t)^2-g(t)^2}\frac{1}{\dfrac{du_1}{dt}} + 2\pi \lim_{t\to t_1+0} \frac{2\dot{g}(t)}{1-f(t)^2-g(t)^2}\frac{1}{\dfrac{du_1}{dt}}\end{aligned}$$

となる.

証明. 各開区間の広義の弧長による弧長パラメータを考え, 定理 4.3 を用いると, 得られる. □

定理 4.5. D^2 上の曲線

$$\gamma(t) = (f(t), g(t)) \quad (t_1 \leq t \leq t_2, 1 - f(t)^2 - g(t)^2 > 0)$$

に対し, $g(t_1) = g(t_2) = 0$, 他の t では $g(t) > 0$ とする. 閉区間 $[t_1, t_2]$ に対応する弧長 $u = u(t)$ により, この曲線の弧長パラメータ表示が

$$\gamma(u) = (f(u), g(u))$$

であるとする. この曲線を x 軸のまわりに 1 回転してできる曲面は

$$p(u, v) = (f(u), f(u)\cos v, g(u)\sin v)$$

で与えられる. この回転面を S とすると, S の全曲率は

$$\iint_S K dA = -2\pi \frac{2\dot{g}(t_2)}{1-f(t_2)^2-g(t_2)^2}\frac{1}{\left.\dfrac{du}{dt}\right|_{t=t_2}} + 2\pi \frac{2\dot{g}(t_1)}{1-f(t_1)^2-g(t_1)^2}\frac{1}{\left.\dfrac{du}{dt}\right|_{t=t_1}}$$

となる.

証明. 定理 4.2 と同様にして示される. □

定理 4.6. D^2 上の曲線

$$\gamma(t) = (f(t), g(t)) \quad (t_1 \leq t \leq t_2, 1 - f(t)^2 - g(t)^2 > 0)$$

に対し, $g(t_1) = g(t_2) = 0$, 他の t では $g(t) > 0$ とし, $\dot{\gamma}(t_2) = \mathbf{0}$ とする. 区間 $[t_1, t)$ に対応する弧長 $u = u(t)$ により, この曲線の弧長パラメータ表示が

$$\gamma(u) = (f(u), g(u))$$

であるとする. この曲線を z 軸のまわりに 1 回転してできる曲面は

$$p(u, v) = (f(u), f(u)\cos v, g(u)\sin v)$$

で与えられる. この回転面を S とすると, S の全曲率は

$$\iint_S K dA = -2\pi \lim_{t\to t_2-0} \frac{2\dot{g}(t)}{1-f(t)^2-g(t)^2}\frac{1}{\dfrac{du}{dt}} + 2\pi \frac{2\dot{g}(t_1)}{1-f(t_1)^2-g(t_1)^2}\frac{1}{\left.\dfrac{du}{dt}\right|_{t=t_1}}$$

となる. また, 上の条件において, 曲線 $\gamma(t)$ が $\dot{\gamma}(t_1)=\mathbf{0}$ も満たしているならば, 開区間 (t_1, t) に対応する弧長 $u=u(t)$ により, S の全曲率は,

$$\iint_S KdA = -2\pi \lim_{t\to t_2-0} \frac{2\dot{g}(t)}{1-f(t)^2-g(t)^2}\frac{1}{\dfrac{du}{dt}} + 2\pi \lim_{t\to t_2-0} \frac{2\dot{g}(t)}{1-f(t)^2-g(t)^2}\frac{1}{\dfrac{du}{dt}}$$

となる.

証明. 定理 4.4 と同様にして示される. □

定理 2.2, 2.5, 2.6, 2.13, 2.14, 4.2, 4.3, 4.4, 4.5, 4.6 は, 参考文献 [2] の定理 2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.5 を比較したとき, 計算式が同じになるため, ユークリッド空間で考えたときの回転面の全曲率と上半空間, 単位球で考えたときの回転面の全曲率は一致する.

参考文献

[1] 深谷賢治, (2004), 『現代数学への入門-双曲幾何-』, 岩波書店.
[2] 松田雄斗, (2019), 『回転面の全曲率に関する考察』, 三重大学大学院教育学研究科修士論文.
[3] 中村洋介, (2020), 『上半空間における曲面の曲率について』, 三重大学大学院教育学研究科修士論文.