

修士論文

統計の学習内容の連続性に関する実践的考察
—棒グラフ・ヒストグラム・確率密度関数の観点から—

三重大学大学院 教育学研究科
教育科学専攻 理数・生活系教育領域

219M018 森本諒

2021年（令和3年）2月12日 提出

目 次

序 章 本研究の目的と方法	3
第一節 本研究の目的	4
第二節 本研究の観点及び方法	4
第一章 統計教育の歴史	5
第一節 統計教育が重んぜられてきた経緯	6
第二節 戦後の統計の学習内容の変遷－学習指導要領－	8
第二章 統計の学習内容の概観	11
第一節 平成 29・30 年改訂学習指導要領の学習内容の構成	12
1. 小学校	12
2. 中学校	21
3. 高等学校	41
第二節 教科書の学習内容の構成－東京書籍・啓林館を例として－	54
1. 小学校	54
2. 中学校	69
3. 高等学校	74
第三節 統計の学習内容の構造化	82
第三章 統計の学習内容の連続性	87
第一節 確率密度関数を理解するための基礎概念の確認と指導順序	88
第二節 現行の教科書における学習内容の連続性について	94
第三節 「確率密度」なる概念を持ち出す理由	99
第四節 確率密度関数に「密度」が用いられる理由	100
第五節 棒グラフとヒストグラムと確率密度関数の関係	102
第四章 ヒストグラム・確率密度関数の理解度に関する実態調査	115
第一節 ヒストグラムの理解度に関する実態調査	116
第二節 確率密度関数の理解度に関する実態調査	144
第三節 考察とまとめ	151

第五章 実践的考察	153
第一節 過去の実践例	154
第二節 授業のシミュレーション	162
1. 中学校	162
第1時	162
第2時	174
第3時	190
2. 高等学校	205
第1時	205
第2時	218
第3時	229
第三節 実践の授業記録	235
1. 中学校	235
第1時	235
第2時	256
2. 高等学校	272
第1時	272
第2時	292
第3時	299
第四節 成果と課題	312
1. 中学校	312
2. 高等学校	317
終章 まとめと総括	319
第一節 研究の成果	320
第二節 今後の課題	321

序 章 本研究の目的と方法

第一節 本研究の目的

平成 29・30 年に行われた学習指導要領の改訂により、統計教育に、より焦点があてられるようになった。中学校学習指導要領解説数学編（平成 29 年告示）によれば、急速に発展しつつある情報化社会においては、様々なデータを手にすることができるようになってきており、それらを用いて問題解決する力を養うことができるようにする必要があるとされている（文部科学省，2017，p.10）。しかしながら、学習指導要領解説を眺めるとまだまだ不完全であり、児童・生徒らが統計の本質を理解するためには、統計教育に対するさらなる考察が必要である。

また、現在の統計の学習内容を一部挙げると、小学校では、ドットプロットとヒストグラム、中学校ではヒストグラムと相対度数、高校では相対度数のヒストグラムと確率密度関数となっている。しかし、中学校で階級の必要性や、高校で相対度数と確率の結びつきや区分求積法と確率密度関数のつながりについて触れていないことから、学習内容のつながりがうまくいっていないので、それぞれを別のものとして捉えているように見受けられる。

本研究では、統計の学習内容の連続性に着目し、「量」の観点から棒グラフ、ヒストグラム、確率密度関数などを見直す。そこから導かれた知見によって、授業のシミュレーションを構築し、その実践を通して、児童・生徒らが統計についてより深く理解する授業の構築を目的としている。

第二節 本研究の観点及び方法

本研究は、次の観点について以下のような方法で行う。

まず初めに、これまで統計がどのように扱われ、教えられてきたかを知るために、統計教育の歴史について、先行研究及び学習指導要領の変遷を振り返る（第一章）。その後、現在に視点を当てて、統計の学習内容を概観する（第二章）。そのために、学習指導要領及び教科書を用い考察する。

次に、棒グラフ、ヒストグラム、確率密度関数を「量」の観点から見直し、学習内容の関連性について考察する（第三章）。

最後に、実践にむけてヒストグラムと確率密度関数の理解度に関する実態調査を行い（第四章）、その結果を鑑み、授業のシミュレーションを構築する。その後実践を行い、その成果と課題について整理する（第五章）。

第一章 統計教育の歴史

本章では、統計教育がこれまでどのように扱われ変遷したかを知
ることを目的とする。そのため、先行研究や学習指導要領を参考に
戦後の統計教育の内容と変遷について調べる。

第一節 統計教育が重んぜられてきた経緯

木村(2010)によれば、戦後の学校教育における統計教育の歴史には、大きく分けて5つの転換期がある。1つ目は、戦後の「生活適応型教育」の教育課程の流れを受け、『統計を教える』(統計の知識教育)ではなく、『統計で教える(統計で考える)』を基本的な理論的支柱とした統計教育が、全国の統計教育研究指定校で実践された時期である。このとき、岡村により「あつめるーまとめるーよみとる」という領域原理が提案された。2つ目は、知識主義(学力向上・科学主義など)ー問題解決型(学力低下・人間主義・発達保障・ゆとりなど)の教育課程編成の変遷と情報の大波に飲まれ、統計教育が衰退した時期である。3つ目は、「国際化と情報化への対応の教育」を中核とした平成の教育課程の改訂に対応して、これまでの「統計知識の理解」「統計で考える統計教育」から情報化に対応した『新しい情報の創造(情報創造)の統計教育』を掲げた時期である。ここで木村は、統計的探究プロセスモデルとして「とらえるーあつめるーまとめるーよみとるーいかす」を提案した。4つ目は、平成の教育課程編成(ゆとり教育・総合的学習の時間の導入)で、小学校算数科における統計教育の削減、中学校数学科の統計教育の完全削除(高等学校へ移行)された時期である。また、高等学校では統計・確率の内容後退と選択制の低さによって、小学校レベルの知識で社会人になるという状態であった。5つ目は、平成20年度の学習指導要領の改訂で、「資料の活用」として中学校数学科に統計教育が復活した時期である。しかしその一方で木村は、ここでの統計教育は旧来の「資料の整理」の域を出ておらず、統計的思考力育成にはならないと指摘している。

このような歴史を踏まえた上で、今回の学習指導要領の改訂(平成29年度)を見ると、内容の思考力、判断力、表現力等の項目の中に、「(批判的に)考察する」や「判断する」といった表現が、ほとんどの学年で用いられるようになり、これまでの「記述統計」に関する教育だけでなく、「推測統計」の教育にも焦点が当てられていることが分かる。また、数学的活動の項目の中では、「日常の事象を数理的に捉え、数学的に表現・処理し、問題を解決したり、解決の過程や結果を振り返って考察したりする活動」とあることから、与えられるデータだけでなく、生徒たち自らが生活の中からも統計を捉え考えることも想定されていると考えられる。つまり、これまでしっかりと根付いてこなかった、木村の「とらえるーあつめるーまとめるーよみとるーいかす」がようやく体系化されようとしているのである。

木村は「とらえるーあつめるーまとめるーよみとるーいかす」を、平成元年の学習指導要領の改訂に対応するために、昭和63年に提案したとしている。しかし、同氏の昭和63年の論文では、「調べる(とらえる)ーあつめるーまとめるーよみとるー価値づける」としている(木村;1988)。つまり、もともと「価値づける」とされていた項目が、「いかす」に変化しているのである。木村(1988)は「価値づける」について、

⑤「価値づける・意味づける」の段階

引き続き、「小葉の数が奇数葉より偶数葉の方が多い」「八つ手の葉の小葉はなぜ8小葉なのか？」という事実から、さらなる探究に歩を進める。前段階で獲得された知識は確かに貴重であるが、まだまだ不完全であり、疑問を残していることを知り、そう評価する。つまり、ここで獲得された知識が疑問を呼び、さらに探究すべき課題があるという、知識の「価値づけ・意味づけ」をしているのである。そこで、再び探究、考察を通して、葉の固有の発生、成長のメカニズム、機構や構造に関するさらに新しい知識の獲得、創造に進んでいく。得られた情報・結果に対して評価を与え、価値判断する。(p.29)

と述べている。これに対して「いかす」という言葉は、「探究すべき課題があるという、知識の『価値づけ・意味づけ』をしている」と「新しい知識の獲得、創造に進んでいく」の2つの意味を内包した表現として用いられたのではないかと考えられる。

※木村捨雄(1988)「学校教育における統計教育：統計的認識と統計理論 —不確定性の中での統計的判断・意思決定と統計情報の活用—」日本科学教育学会研究会研究報告 3 巻 2号, pp.27-32

①「とらえる・調べる」の段階

最初、「おや？」と驚き、疑問に感じ、事実・実態(八つ手の小葉)を観察する。そして問題が何か、何が問題かを捉え、人に聞き、図書、事典や資料を調べる。自然事象以外にも、広くは経済、政治、文化に関する情報、新聞やニュースから必要な情報、統計情報を探索し、調べる。これらによって問題の焦点を絞りこむ。これが「とらえる・調べる」である。これには、常に問題意識をもち、鋭く矛盾や疑問を感じ取る鋭敏な感性が必要である。

②「あつめる」の段階：統計調査の企画設計と実施

次は、誰が、何を、何時、何処で、誰に、どのように調べるかである(5Wと1H)。小葉の数(問題の対象に対する数量的な指標)を調査の対象に決め、家の周りの八つ手の木の葉(対象集団)を対象にした調査の計画を立て、調査を行う(小葉の数の数量的、集団的な把握)。調査データ、資料が収集される。これが「あつめる」の段階である。

③「まとめる」の段階；統計解析

次は、集められたデータを分類・整理し、分析を行う段階である。小葉毎に観測値の頻度を整理集計し、分布の型、度数分布表などを作る。一般には、代表値(平均、モード、メジアン)、ちらばり・散布度、二元表、相関などの集計

処理，統計計算をする。また，各種のデータ解析を進め，統計グラフや統計表にまとめる。通常はさらに，合理的客観的な根拠をもって，結果を導くための「推論をする」ことの保証を与える統計的推定，検定を行う。これら一連の処理が統計解析で，集団特性の代表的平均的傾向（統計的傾向性，規則性）を求める。

④「よみとる」の段階：結果の統計的解釈

得られた各種の集団特性から，どの結果がこの調査の結果として望ましい，よいことかを考察し，結果をまとめる。八つ手の小葉の数は8小葉が最頻値で，経験則に合致していることを知るが，「8小葉以外のものもある」「偶数の小葉が奇数の小葉より多い」という新しい知識を見出す（よみとる）。

この過程で，「平均を採用しなかった」「度数分布で，1葉ごとの度数分布表を作った」ことが鋭い観察眼であった。平均の計算，度数分布の作成という統計処理を盲目的に行わなかったことが，「なぜ，八つ手の小葉の数が8枚なのか？なぜ，偶数葉の方が多いか？」の疑問を探究する契機になっている。最良の探究方法，最適の統計方法は，対象とする問題，知ろうとする世界の対象の性質によって決まる。このことは，重要な統計的知識・認識である。

⑤「価値づける・意味づける」の段階

引き続き，「小葉の数が奇数葉より偶数葉の方が多い」「八つ手の葉の小葉はなぜ8小葉なのか？」という事実から，さらなる探究に歩を進める。前段階で獲得された知識は確かに貴重であるが，まだまだ不完全であり，疑問を残していることを知り，そう評価する。つまり，ここで獲得された知識が疑問を呼び，さらに探究すべき課題があるという，知識の「価値づけ・意味づけ」をしているのである。そこで，再び探究，考察を通して，葉の固有の発生，成長のメカニズム，機構や構造に関するさらに新しい知識の獲得，創造に進んでいく。得られた情報・結果に対して評価を与え，価値判断する。（pp.28-29）

第二節 戦後の統計の学習内容の変遷－学習指導要領－

	小1	小2	小3	小4	小5	小6
昭和22年		一次元の表や図	絵グラフ 棒グラフ	折れ線グラフ； 二次元の表	歩合・百分率	円グラフ・正方形グラフ・帯グラフを読む
昭和26年	○や×を使い、簡単な表やグラフを作る	表やグラフの作成	二次元の表、絵グラフ・棒グラフ；概数を用いる	二次元の表、絵グラフ・棒グラフ；折れ線グラフ	折れ線グラフ、増減や変化の度合い；折れ線グラフ；グラフを定められた紙面に手際よくおさめる	正方形グラフ・帯グラフおよび円グラフ
昭和33年 (35年)		資料の分類整理し、表に表す	わかりやすい分類；表を作る、読む；棒グラフ、折れ線グラフ	落ちや重なりがないかを考えたり検討する；折れ線グラフ	平均、延べ；資料の散らばり；円グラフ・帯グラフ；百分率・歩合	適切な表・グラフの使用 グラフを工夫し、買い物の早見グラフや換算グラフを作る
昭和43年 (44・45年)		事柄を表やグラフの形にまとめる	二つの数量の関係づけ、資料の分類整理；表にまとめる；棒グラフ・折れ線グラフ	集合の考え方をうい、落ちや不必要な重なりがないように整理する	百分率・歩合；資料の散らばり；平均；度数分布の表・図表；円グラフ・帯グラフ；資料から求める割合と全体の集団についての傾向	
昭和52年 (53年)		表やグラフに表したりよんだりする	資料の分類整理；棒グラフ	折れ線グラフ；二つの事柄に関して起こる場合を調べたり落ちや重なりがないように考える；特徴や傾向をグラフから調べる	資料の分類整理 円グラフ・帯グラフ 百分率	資料の散らばり； 度数分布の表とグラフ（ヒストグラム）；一部の資料から全体の傾向を知る
平成元年		事柄を簡単な表に表したりよんだりする	簡単な事象の分類整理；棒グラフ	二つの事柄に関して起こる場合を調べたり落ちや重なりを検討したりする	資料の分類整理 円グラフ・帯グラフ 百分率	度数分布の表とグラフ； 一部の資料から全体の傾向を知る
平成10年 (11年)		事柄を簡単な表やグラフに表す、よむ	簡単な事象の分類整理；棒グラフ	二つの事柄に関して起こる場合を調べたり落ちや重なりを検討したりする；折れ線グラフ	資料の分類整理 円グラフ・帯グラフ 百分率	平均
平成20年 (21年)	ものの個数を絵や図に表す、よむ	身の回りにある数量を分類整理、表やグラフに表す、よむ	資料の分類整理；棒グラフ	資料を二つの観点から分類整理；折れ線グラフ	資料の分類整理 円グラフ・帯グラフ 百分率	平均 度数分布
平成29年 (30年)	ものの個数を絵や図に表す、よむ データの個数から事象の特徴を捉える	身の回りにある数量を分類整理、表やグラフに表す、よむ データを整理し考察する	資料の分類整理；棒グラフ データを整理し、考察し、表現する	データを二つの観点から分類整理；折れ線グラフ 目的に応じてデータを分類整理、判断、考察	資料の分類整理 円グラフ・帯グラフ 目的に応じてデータを分類整理、判断、多面的に考察 平均	代表値 度数分布

	中1	中2	中3	高1	高2	高3
昭和22年	棒グラフ、折れ線グラフ、帯グラフ、正方形グラフ、円グラフ；資料の整理；適切なグラフを選択する；百分率、歩合	歩合・百分率；グラフの特徴や、二つの量の間の関係を見いだす；円グラフ、柱状グラフ	変化する量の関係を予測し、表・グラフに表す変化の特徴や規則性を見いだす			
昭和26年	棒グラフ、折れ線グラフ、帯グラフ、正方形グラフ、円グラフ；資料の整理；適切なグラフを選択する；百分率、歩合	百分率・歩合；グラフ 円グラフ・柱状グラフ；グラフの特徴や、二つの量の関係を見いだす	百分率・歩合；変化する量の関係を予測し、表・グラフに表す変化の特徴や規則性を見いだす	色々なグラフの特徴 全体調査・一部調査 標準偏差 相関関係 百分率、歩合； 簿記； 確率や統計を用いることの意義を知る		
昭和33年 (35年)	資料の収集、整理表、グラフ、代表値、度数分布、ヒストグラム 相対度数・代表値；度数、分布、階級、ヒストグラム、相対度数、累積度数、代表値		相関表、相関図；標準偏差； 標本における比率から、母集団における比率を推定すること		標準偏差、推測統計の考え方 (数学ⅡA) 記述統計、二項分布、正規分布、標本調査、 (応用数学)	分布、平均とちらばり、二項分布、正規分布、標本調査。 (数学Ⅲ)
昭和43年 (44・45年)			表・グラフ、代表値などを用いて資料の傾向を知る 度数分布・代表値、ヒストグラム； 相関表、相関図		統計的な推測 (数学ⅡA) (総合数学) 母集団と標本、確率分布、統計的な推測 (応用数学)	母集団と標本、確率分布(確率変数の分布、分散、標準偏差)、二項分布、正規分布、統計的な推測、推定、検定 (数学Ⅲ)
昭和52年 (53年)		資料の収集、分類整理；代表値、散らばり度数分布、ヒストグラム相対度数、累積度数 平均値、範囲	母集団と標本、標本調査 標本における平均値や比率		二項分布、正規分布；記述統計、標準偏差；標本調査、標本の抽出、母集団標本と標本分布、推定、結果の検討 (数学Ⅱ)	変量の分布、代表と散布図、確率変数と確率分布、二項分布、正規分布、統計的な推測(母集団と標本、統計的な推測) (確率・統計)
平成元年		近似値と誤差；資料の収集、分類整理；代表値、散らばり度数分布、ヒストグラム相対度数、累積度数 平均値、範囲 相関図と相関表	標本調査		確率分布(確率変数と確率分布、二項分布) (数学B)	代表値と散布図、相関統計的な推測(母集団と標本、正規分布、統計的推測の考え) (数学C)
平成10年 (11年)				資料の整理；資料傾向の把握 (数学基礎)	表計算ソフトなどを利用した整理分類 度数分布表、相関図；代表値、分散、標準偏差、相関係数 (数学B)	確率分布(確率変数と確率分布、二項分布)；正規分布(連続型確率変数、正規分布)；統計的な推測(母集団と標本、統計的な推測の考え) (数学C)
平成20年 (21年)	資料の収集、表、グラフ、整理、代表値から傾向を読み取る；ヒストグラム、平均値、中央値、最頻値、相対度数、範囲、階級	母集団、標本；標本調査、全数調査	母集団、標本；標本調査、全数調査	統計の基本を用いてデータを整理・分析；四分位偏差、分散、標準偏差、散布図、相関係数 (数学Ⅰ)	確率分布(確率変数と確率分布、二項分布、正規分布)、統計的な推測 (数学B)	
平成29年 (30年)	ヒストグラム、相対度数 コンピュータを用いたデータの整理目的に応じてデータを収集分析、批判的考察、判断	四分位範囲、箱ひげ図 コンピュータを用いたデータの整理データを収集分析、批判的考察、判断	標本調査 コンピュータを用いたデータの整理方法や結果を批判的に考察、表現 標本調査から母集団の傾向を推定、判断	分散、標準偏差、散布図、相関係数、仮説検定 目的に応じて複数のデータの収集、適切な分析、傾向把握、特徴を表現 (数学Ⅰ)	確率分布(確率変数と確率分布、二項分布、正規分布)、統計的な推測；信頼区間、有意水準 (数学B)	

第二章 統計の学習内容の概観

現在の小・中学校及び高等学校での学習内容を把握し，どのような指導がなされているかを確認する。そのために，学習指導要領と教科書の内容を調べ，それらの学習内容を構造化する。

第一節 平成 29・30 年改訂学習指導要領の学習内容の構成

1. 小学校

第1学年

(1) 数量の整理に関わる数学的活動を通して、次の事項を身に付けることができるよう指導する。

ア 次のような知識及び技能を身に付けること。

(ア) ものの個数について、簡単な絵や図などに表したり、それらを読み取ったりすること。

イ 次のような思考力、判断力、表現力等を身に付けること。

(ア) データの個数に着目し、身の回りの事象の特徴を捉えること。

第2学年

(1) データの分析に関わる数学的活動を通して、次の事項を身に付けることができるよう指導する。

ア 次のような知識及び技能を身に付けること。

(ア) 身の回りにある数量を分類整理し、簡単な表やグラフを用いて表したり読み取ったりすること。

イ 次のような思考力、判断力、表現力等を身に付けること。

(ア) データを整理する観点に着目し、身の回りの事象について表やグラフを用いて考察すること。

第3学年

(1) データの分析に関わる数学的活動を通して、次の事項を身に付けることができるよう指導する。

ア 次のような知識及び技能を身に付けること。

(ア) 日時の観点や場所の観点などからデータを分類整理し、表に表したり読んだりすること。

(イ) 棒グラフの特徴やその使い方を理解すること。

イ 次のような思考力、判断力、表現力等を身に付けること。

(ア) データを整理する観点に着目し、身の回りの事象について表やグラフを用いて考察して、見いだしたことを表現すること。

- (8) 内容の「Dデータの活用」の(1)のアの(イ)については、最小目盛りが2，5又は20，50などの棒グラフや、複数の棒グラフを組み合わせたグラフなどにも触れるものとする。

第4学年

- (1) データの収集とその分析に関わる数学的活動を通して、次の事項を身に付けることができるよう指導する。

ア 次のような知識及び技能を身に付けること。

(ア) データを二つの観点から分類整理する方法を知ること。

(イ) 折れ線グラフの特徴とその用い方を理解すること。

イ 次のような思考力，判断力，表現力等を身に付けること。

(ア) 目的に応じてデータを集めて分類整理し，データの特徴や傾向に着目し，問題を解決するために適切なグラフを選択して判断し，その結論について考察すること。

- (9) 内容の「Dデータの活用」の(1)のアの(ア)については，資料を調べるときに，落ちや重なりがないようにすることを取り扱うものとする。

- (10) 内容の「Dデータの活用」の(1)のアの(イ)については，複数系列のグラフや組み合わせたグラフにも触れるものとする。

第5学年

- (1) データの収集とその分析に関わる数学的活動を通して，次の事項を身に付けることができるよう指導する。

ア 次のような知識及び技能を身に付けること。

(ア) 円グラフや帯グラフの特徴とそれらの用い方を理解すること。

(イ) データの収集や適切な手法の選択など統計的な問題解決の方法を知ること。

イ 次のような思考力，判断力，表現力等を身に付けること。

(ア) 目的に応じてデータを集めて分類整理し，データの特徴や傾向に着目し，問題を解決するために適切なグラフを選択して判断し，その結論について多面的に捉え考察すること。

(2) 測定した結果を平均する方法に関わる数学的活動を通して、次の事項を身に付けることができるよう指導する。

ア 次のような知識及び技能を身に付けること。

(ア) 平均の意味について理解すること。

イ 次のような思考力、判断力、表現力等を身に付けること。

(ア) 概括的に捉えることに着目し、測定した結果を平均する方法について考察し、それを学習や日常生活に生かすこと。

(5) 内容の「Dデータの活用」の(1)については、複数の帯グラフを比べることに触れるものとする。

第6学年

(1) データの収集とその分析に関わる数学的活動を通して、次の事項を身に付けることができるよう指導する。

ア 次のような知識及び技能を身に付けること。

(ア) 代表値の意味や求め方を理解すること。

(イ) 度数分布を表す表やグラフの特徴及びそれらの用い方を理解すること。

(ウ) 目的に応じてデータを収集したり適切な手法を選択したりするなど、統計的な問題解決の方法を知ること。

イ 次のような思考力、判断力、表現力等を身に付けること。

(ア) 目的に応じてデータを集めて分類整理し、データの特徴や傾向に着目し、代表値などを用いて問題の結論について判断するとともに、その妥当性について批判的に考察すること。

(2) 起こり得る場合に関わる数学的活動を通して、次の事項を身に付けることができるよう指導する。

ア 次のような知識及び技能を身に付けること。

(ア) 起こり得る場合を順序よく整理するための図や表などの用い方を知ること。

イ 次のような思考力、判断力、表現力等を身に付けること。

(ア) 事象の特徴に着目し、順序よく整理する観点を決めて、落ちや重なりなく調べる方法を考察すること。

データの活用	第1学年	第2学年	第3学年	第4学年	第5学年	第6学年
内容の構成	絵や図を用いた数量の表現	簡単な表やグラフ	表と棒グラフ データの分類整理と表／棒グラフの特徴と使い方（ <u>内容の取扱いに、最小目盛りが2，5などの棒グラフや複数の棒グラフを組み合わせさせたグラフを追加</u> ）	データの分類整理 二つの観点から分類する方法／折れ線グラフの特徴と使い方（ <u>内容の取扱いに、複数系列のグラフや組み合わせさせたグラフを追加</u> ）	1 円グラフや帯グラフ 円グラフや帯グラフの特徴と使い方／統計的な問題解決の方法（ <u>内容の取扱いに、複数の帯グラフを比べることを追加</u> ） 2 測定値の平均 平均の意味	1 データの考察 代表値の意味や求め方（←中1）／度数分布を表す表やグラフの特徴と使い方／ <u>目的に応じた統計的な問題解決の方法</u> 2 起こりうる場合
資質・能力	データの個数に着目して身の回りの事象の特徴を捉える力	身の回りの事象をデータの特徴に着目して捉え、簡潔に表現したり考察したりする力	身の回りの事象をデータの特徴に着目して捉え、簡潔に表現したり適切に判断したりする力	目的に応じてデータを収集し、データの特徴や傾向に着目して表やグラフに的確に表現し、それらを用いて問題解決したり、解決の過程や結果を多面的に捉え考察したりする力	身の回りの事象から設定した問題について、目的に応じてデータを収集し、データの特徴や傾向に着目して適切な手法を選択して分析を行い、それらを用いて問題解決したり、解決の過程や結果を批判的に考察したりする力	

内容の骨子

⑤ 不確定な事象の考察

児童の身の回りには、偶然に左右され、一つ一つには何の法則もないようにみえる事象がある。このような身の回りの事象を観察し、そこにある関係や傾向、法則等を見いだしたり、そうした事象について正しく判断したり、推測したりできるようにする。また、起こり得る場合について考察したり、問題解決のためにデータを集めてそれを分析し、その結果に基づいて判断したりする統計的な問題解決の方法の基礎について学習する。

多くの情報が氾濫する高度情報化社会では、目的に応じて情報を適切に捉え、的確な判断を下すことが求められる。小・中・高等学校の各学校段階を通じて、統計的な問題解決の方法を身に付け、データに基づいて的確に判断し批判的に考察することができるようにする必要がある。算数科では、データを様々に整理したり表現してその特徴を捉えたり、代表値やデータの分布の様子を知って問題解決に生かすなど、統計的な問題解決の方法について知り、それを実生活の問題の解決過程で生かすことを学習する。

内容の概観

D データの活用

(1) 「Dデータの活用」領域のねらい

この領域のねらいは、次の三つに整理することができる。

- ・目的に応じてデータを集めて分類整理し、適切なグラフに表したり、代表値などを求めたりするとともに、統計的な問題解決の方法について知ること
- ・データのもつ特徴や傾向を把握し、問題に対して自分なりの結論を出したり、その結論の妥当性について批判的に考察したりすること
- ・統計的な問題解決のよさに気付き、データやその分析結果を生活や学習に活用しようとする態度を身に付けること

(2) 「Dデータの活用」の内容の概観

この領域で働かせる数学的な見方・考え方に着目して内容を整理すると、次の二つにまとめることができる。

- ① 目的に応じてデータを収集、分類整理し、結果を適切に表現すること
- ② 統計データの特徴を読み取り判断すること

以下の表は、これらの観点から、各学年の内容を整理したものである。

数学的な 見方・考 え方	<ul style="list-style-type: none"> 日常生活の問題解決のために、データの特徴と傾向などに着目して捉え、根拠を基に筋道を立てて考えたり、統合的・発展的に考えたりすること 	
	目的に応じてデータを収集、分類整理し、結果を適切に表現すること	統計データの特徴を読み取り判断すること
第1学年	<ul style="list-style-type: none"> データの個数への着目 絵や図 	<ul style="list-style-type: none"> 身の回りの事象の特徴についての把握 絵や図
第2学年	<ul style="list-style-type: none"> データを整理する観点への着目 簡単な表 簡単なグラフ 	<ul style="list-style-type: none"> 身の回りの事象についての考察 簡単な表 簡単なグラフ
第3学年	<ul style="list-style-type: none"> 日時の観点や場所の観点などからデータを分類整理 表 棒グラフ 見いだしたことを表現する 	<ul style="list-style-type: none"> 身の回りの事象についての考察 表 棒グラフ
第4学年	<ul style="list-style-type: none"> 目的に応じたデータの収集と分類整理 適切なグラフの選択 二次元の表 折れ線グラフ 	<ul style="list-style-type: none"> 結論についての考察 二次元の表 折れ線グラフ
第5学年	<ul style="list-style-type: none"> 統計的な問題解決の方法 円グラフや帯グラフ 測定値の平均 	<ul style="list-style-type: none"> 結論についての多面的な考察 円グラフや帯グラフ 測定値の平均
第6学年	<ul style="list-style-type: none"> 統計的な問題解決の方法 代表値 ドットプロット 度数分布を表す表やグラフ 起こり得る場合の数 	<ul style="list-style-type: none"> 結論の妥当性についての批判的な考察 代表値 ドットプロット 度数分布を表す表やグラフ 起こり得る場合の数

(3) 「Dデータの活用」の領域で育成を目指す資質・能力

①目的に応じてデータを収集，分類整理し，結果を適切に表現すること統計的な問題解決活動

目的に応じてデータを収集，分類整理し，結果を適切に表現するとは，統計的な問題解決活動を指しているが，統計的な問題解決活動においては，「問題-計画-データ-分析-結論」というような段階からなる統計的探究プロセスと呼ばれるものがある。

問題	・問題の把握	・問題設定
計画	・データの想定	・収集計画
データ	・データ収集	・表への整理
分析	・グラフの作成	・特徴や傾向の把握
結論	・結論付け	・振り返り

統計的探究プロセスとは，元々の問題意識や解決すべき事柄に対して，統計的に解決可能な問題を設定し，設定した問題に対して集めるべきデータと集め方を考え，その計画に従って実際にデータを収集し，表などに整理した上で，集めたデータに対して，目的やデータの種類に応じてグラフにまとめたり，統計量を求めるなどして特徴や傾向を把握し，見いだした特徴や傾向から問題に対する結論をまとめて表現したり，さらなる課題や活動全体の改善点を見いだしたりするという一連のプロセスである。

これら一連のプロセスは「問題」から「結論」に向けて一方向に進んでいくものではなく，計画を立てながら問題を見直して修正を加えてみたり，グラフを作り直して分析したり，ときにはデータを収集直したり，相互に関連し，行き来しながら進むものである。

低学年の学習においては，「問題」や「計画」，「結論」の部分はそれほど重く扱わず，児童にとって身近な題材に注目し，関係するデータを整理しながらデータの特徴を捉えることを中心に行う。中学年の学習から，身近な題材から問題を設定する活動や，その問題に対して集めるべきデータとその集め方などについても徐々に扱っていくものとする。高学年では，一連の統計的探究プロセスを意識し，自分たちで問題を設定し，調査計画を立てることや，分析を通じて判断した結論についても別の観点から妥当性を検討できるようにすることも扱う。

統計的な問題解決は様々な分野で用いられるようになってきており，統計は社会における必須のツールとなってきた。他教科の学習や児童の生活に関わる事柄でも統計的な問題解決は用いることができるため，そのよさを感じて，進んで学習や生活に生かそうとする態度も養う。

データの種類

統計において扱うデータには、性別や血液型など文字情報として得られる「質的データ」と、身長やハンドボール投げの記録のように数値情報として得られる「量的データ」、各月の平均最高気温などのように時間変化に沿って得られた「時系列データ」がある。データの種類によって分類整理の仕方や用いるグラフなど異なってくるため注意が必要である。

低学年においては、質的データを中心に扱い、各データの個数を集計する活動が主であるが、第3学年では、質的データを集計し表やグラフに表したり、量的データをグラフに表したりする。第4学年では時系列データも扱うようになり、時間経過に伴う変化や傾向についても分析を行う。第5学年では質的データや量的データに対して割合の観点から分析を行い、第6学年では量的データに対して分布の中心やばらつきの様子を分析する。第4学年から、データの種類や目的に応じた適切な分類整理やグラフの表し方についても扱う。

表

データが集められても言葉や数値などの情報がそのまま羅列されているだけの状態からでは特徴や傾向を把握することは難しい。要点を端的に把握するためにも、またグラフなどに表すためにも表に整理することは大切である。

第2学年では、身の回りにある事柄に関する質的データを集計して表に表したり、読み取ったりすることを指導する。第3学年では、観点を定めてデータを分類整理し、簡単な二次元の表にまとめたり、表を読み取ったりすることを指導する。第4学年では、二つの観点からデータを分類整理し、二次元の表に表したり、読み取ったりすることを指導する。第6学年では、量的データに対して度数分布表に表したり、読み取ったりすることを指導する。

グラフ

データをグラフに表すことによって、特徴や傾向について図的表現を介して捉えやすくなるため、統計的な分析をするには欠かせないものとなっている。一方で、グラフによる特徴や傾向の捉えやすさから、社会においては、実態とは異なる印象を与え、誤認させるようにグラフが用いられる場合もあるため、読み取る際には注意が必要である。

第1学年では、一つ一つのデータを抽象的な絵で表し、それらを整理し揃えて並べることで数の大小を比較する簡単なグラフに表したり、読み取ったりすることを指導する。第2学年では、データを○や□などに抽象化して並べる簡単なグラフに表したり、読み取ったりすることを指導する。第3学年では、質的データの個数か、あるいは量的

データの大きさに相当する長さの棒の長さで違いを示す棒グラフに表したり、読み取ったりすることを指導する。第4学年では、時系列データの変化の様子を示す折れ線グラフに表したり、読み取ったりすることを指導する。第5学年では、データの割合を示す円グラフや帯グラフに表したり、読み取ったりすることを指導する。第6学年では、量的データの分布の様子を示す柱状グラフに表したり、読み取ったりすることを指導する。

なお、各学年において学習するグラフは定められているが、統計的な問題解決活動においては、特定の一つのグラフを用いるだけで解決するとは限らないため、目的やデータの種類に応じて、既習のグラフも適宜合わせて用いることが望ましい。

測定値の平均と代表値

量的データの特徴を端的に捉える指標としては代表値が用いられる。その意味や求め方について理解し、適切に用いることが重要である。

第5学年では、ならず操作としての平均の求め方を考え、測定値の平均の意味につなげる。一つのもの測定値の平均は、測定する対象がもつ真の値を予測した数値である。測定には誤差が伴うため、測定した結果が真の値であるとは限らない。測定した誤差については、真の値より小さくなることと大きくなることが一般的に等しく起こりやすく、また真の値よりもかけ離れた値は確率的に得にくくなっている。このことから、複数回の測定値について平均することで、真の値より小さい値と大きい値とが相殺し合い、1回だけの測定結果よりも真の値に近い値を得ることができる。

第6学年では、量的データの全ての値を足し合わせ、データの数で割ることで得られる、ならず操作としての平均が、ばらつきのある対象に対して、分布の中心がどの当たりになるかを示す指標（平均値）としての意味合いをもっていることを理解させる。このほか、データを順番に並べた際の真ん中に当たる中央値、データの中で最も多くみられる最頻値の意味や求め方について指導する。

起こり得る場合について

算数の授業では、確定した事象を取り扱うことが多い。しかし社会における事象には、結果が確定的に定まっていない不確定な事象も多く、そのような事象についても考察の対象として扱っていく。小学校で学習する起こり得る場合は中学校で学習する確率へとつながっていくものである。

第2学年や第3学年で学習する簡単な表や第4学年で学習する二次元の表に整理することを通じて、どの事柄が起こりやすいのかを捉えることができる。

第6学年では、起こり得る場合について落ちや重なりがないように調べる方法について考察することを指導する。

②統計データの特徴を読み取り判断すること

結論について多面的・批判的に考察すること

統計的な問題解決では、結果が定まっていない不確定な事象を扱うため、データの特徴や傾向を捉えても、結論を断定できない場合や立場や捉え方によって結論が異なってくる場合もある。そのため、自分たちが行った問題設定や集めたデータ、表やグラフを用いての分析の仕方など、問題解決の過程や結論について異なる観点や立場などから多面的に捉え直してみたり、誤りや矛盾はないかどうか妥当性について批判的に考察したりすることが重要である。

自分たちが行った問題解決活動と結論についてレポートやポスターなどの形式にまとめて発表する活動や、それぞれの問題解決について共有したり議論したりするなどの活動も行おうとよい。そうすることで表現力を伸ばすことができるとともに、別の観点や立場から捉え直したり、妥当性について考察したりする契機とすることができる。また、問題解決活動の体験や共有を通じて統計的な問題解決のよさを感じさせ、他教科等の学習や自分たちの生活においても生かそうとする態度が育成されることも大切である。

一方で、統計的な主張はニュースや新聞、雑誌など社会においてもよく触れる機会があるが、調査対象が偏っていたり、本来の特徴や傾向とは異なる印象を相手にもたせるように作られたグラフが用いられたりする場合もあるため、注意深く読み取り、その妥当性について批判的に考察することも大切である。

2. 中学校

第1学年

- (1) データの分布について、数学的活動を通して、次の事項を身に付けることができるよう指導する。
 - ア 次のような知識及び技能を身に付けること。
 - (ア) ヒストグラムや相対度数などの必要性和意味を理解すること。
 - (イ) コンピュータなどの情報手段を用いるなどしてデータを表やグラフに整理すること。
 - イ 次のような思考力、判断力、表現力等を身に付けること。
 - (ア) 目的に応じてデータを収集して分析し、そのデータの分布の傾向を読み取り、批判的に考察し判断すること。

(2) 不確定な事象の起こりやすさについて、数学的活動を通して、次の事項を身に付けることができるよう指導する。

ア 次のような知識及び技能を身に付けること。

(ア) 多数の観察や多数回の試行によって得られる確率の必要性和意味を理解すること。

イ 次のような思考力、判断力、表現力等を身に付けること。

(ア) 多数の観察や多数回の試行の結果を基にして、不確定な事象の起こりやすさの傾向を読み取り表現すること。

[用語・記号]

範囲 累積度数

第2学年

(1) データの分布について、数学的活動を通して、次の事項を身に付けることができるよう指導する。

ア 次のような知識及び技能を身に付けること。

(ア) 四分位範囲や箱ひげ図の必要性和意味を理解すること。

(イ) コンピュータなどの情報手段を用いるなどしてデータを整理し箱ひげ図で表すこと。

イ 次のような思考力、判断力、表現力等を身に付けること。

(ア) 四分位範囲や箱ひげ図を用いてデータの分布の傾向を比較して読み取り、批判的に考察し判断すること。

(2) 不確定な事象の起こりやすさについて、数学的活動を通して、次の事項を身に付けることができるよう指導する。

ア 次のような知識及び技能を身に付けること。

(ア) 多数回の試行によって得られる確率と関連付けて、場合の数を基にして得られる確率の必要性和意味を理解すること。

(イ) 簡単な場合について確率を求めること。

イ 次のような思考力、判断力、表現力等を身に付けること。

(ア) 同様に確からしいことに着目し、場合の数を基にして得られる確率の求め方を考察し表現すること。

(イ) 確率を用いて不確定な事象を捉え考察し表現すること。

第3学年

(1) 標本調査について、数学的活動を通して、次の事項を身に付けることができるよう指導する。

ア 次のような知識及び技能を身に付けること。

(ア) 標本調査の必要性和意味を理解すること。

(イ) コンピュータなどの情報手段を用いるなどして無作為に標本を取り出し、整理すること。

イ 次のような思考力、判断力、表現力等を身に付けること。

(ア) 標本調査の方法や結果を批判的に考察し表現すること。

(イ) 簡単な場合について標本調査を行い、母集団の傾向を推定し判断すること。

[用語・記号]

全数調査

データの活用	第1学年	第2学年	第3学年
内容の構成	<p>データの分布の傾向</p> <ul style="list-style-type: none"> ・ヒストグラムや相対度数の必要性と意味 ・多数の観察や多数回の試行によって得られる確率 ・多数の観察や多数回の試行によって得られる確率の必要性と意味 <p>(←中2)</p> <p><u>(用語に累積度数を追加)</u></p> <p>(用語から, 代表値, 平均値, 中央値, 最頻値, 階級を削除)</p> <p>(→小6)</p> <p>(内容の取扱いから, 誤差, 近似値, $a \times 10n$ の形の表現を削除)</p> <p>(→中3)</p>	<p>データの分布の比較</p> <ul style="list-style-type: none"> ・四分位範囲や箱ひげ図の必要性と意味 (追加) ・箱ひげ図で表すこと (追加) <p>場合の数を基にして得られる確率</p> <ul style="list-style-type: none"> ・確率の必要性と意味 ・確率を求めること <p>(「確率の必要性と意味」を一部移行)</p> <p>(→中1)</p>	<p>標本調査</p> <ul style="list-style-type: none"> ・標本調査の必要性と意味 ・標本を取り出し整理すること
資質・能力	<p>データの分布に着目し, その傾向を読み取り批判的に考察して判断したり, 不確定な事象の起こりやすさについて考察したりする力</p>	<p>複数の集団のデータの分布に着目し, その傾向を比較して読み取り批判的に考察して判断したり, 不確定な事象の起こりやすさについて考察したりする力</p>	<p>標本と母集団の関係に着目し, 母集団の傾向を推定し判断したり, 調査の方法や結果を批判的に考察したりする力</p>

内容の骨子

④不確定な事象

数学で考察する対象は多様であり、確定した事象だけではなく、集団においてばらつきのある事象や偶然に左右される事象、全体を把握することが困難な事象など不確定な事象も考察の対象とする。ばらつきのある集団の特徴や傾向を捉えるために、ヒストグラムや箱ひげ図などのグラフや、データの特徴を表す代表値など、データを可視化する方法が生み出されてきた。また、さいころの目の出方など不確定な事象の起こる程度を表すために確率の概念を生み出し、事象に0以上1以下の数を対応させ、数学的に考察する対象としてきた。さらに、全数調査が困難な場合にも母集団の特徴を把握するため、標本調査が行われ、確率的な概念に基づいた無作為抽出を行うことで、標本調査のばらつきを数学的に捉えてきた。

日常生活や社会では、不確定な事象に関する様々な情報に接する場面が多い。その際に、不確定な事象の特徴を踏まえ、適切に対応することが必要である。

内容の概観

(1)「データの活用」指導の意義

急速に発展しつつある情報化社会においては、確定的な答えを導くことが困難な事柄についても、目的に応じてデータを収集して処理し、その傾向を読み取って判断することが求められる。この領域では、そのために必要な基本的な方法を理解し、これを用いてデータの傾向を捉え考察し表現できるようにすることが中学校数学科における指導の大切なねらいの一つであり、統計的に問題解決する力を養うことにつながる。

中学校数学科の「データの活用」の指導の意義については、次の二つの面が考えられる。

- ・日常生活においては、不確定な事象についてデータに基づいて判断する場面が多いので、目的に応じてデータを収集して処理し、その傾向を読み取って判断することが有用であること。
- ・よりよい解決や結論を見いだすに当たって、データに基づいた判断や主張を批判的に考察することが有用であること。

データとは様々な事象について考察したり、判断したりする際に用いられる事項や材料を表し、一般的に数値的な情報だけでなく画像や映像などもデータに含まれることもあるが、ここでは特に数値的なものを主に取り扱う。

①不確定な事象を取り扱うこと

中学校数学科では、小学校算数科における学習の上に立ち、不確定な事象が数学的な考察の対象となることを理解して取り扱うことができるようにする。このことについて、中学校数学科においては、資質・能力として、主に次のア、イの育成を目指して指導が行われる。

ア データの分布と確率についての基礎的な概念や性質を理解すること

数学は、方程式を解いたり、図形の性質を証明したりするように答えや結論が明確に定まるものだけを考察の対象にしているわけではない。この領域においては、集団においてばらつきのある事象や偶然に左右される事象、全体を把握することが困難な事象など不確定な事象も数学の考察の対象であることを理解することが大切である。その上で、不確定な事象のばらつきを表すために、データの分布や確率についての基礎的な概念や性質を理解することが大切である。

イ データを収集して分析したり、確率を求めたりできるようにすること

集団においてばらつきのある事象は、ヒストグラムや箱ひげ図などのグラフを用いたり、代表値などを用いたりすることで考察することができる。また、偶然に左右される事象は、確率を用いて考察することができ、全体を把握することが困難な事象は、確率の性質を用いて標本調査を行い、その結果を考察することができる。そのような問題解決の過程を通して、ヒストグラムや箱ひげ図を作ったり、代表値や相対度数、確率などを求めたりすることができるようにする。また、それらを、具体的な事象を考察し傾向を読み取ったり、何らかの予測や判断を行うために用いたりすることができるようにすることも重要である。

②傾向を読み取り、批判的に考察し、問題解決に取り組むこと

このことについて、中学校数学科においては、資質・能力として、主に次のア、イの育成を目指して指導が行われる。

ア データの分布や母集団の傾向に着目して、その傾向を読み取り批判的に考察し判断すること

統計を活用して問題解決することができるようになるためには、日常生活や社会における問題を取り上げ、それを解決するために必要なデータを収集し、コンピュータなどを利用して処理し、データの傾向を捉え説明するという一連の活動を生徒が経験することが必要である。また、考察の結果としてただ一つの正しい結論が導かれるとは限らないことは、この領域の特徴である。それゆえ、自他の問題解決の過程を振り返ったり、社会における標本調査の方法などを多面的に吟味したりするなど、批判的に考察できるようにする。

イ 不確定な事象の起こりやすさについて考察し表現すること

日常生活や社会における不確定な事象は数学の考察の対象であり、その起こりやすさの

程度を数値で表現し把握するなど、不確定な事象の起こりやすさの傾向を読み取り表現することができるようにすることが大切である。指導に当たっては、不確定な事象を扱うというこの領域の特性に配慮し、正解を求めることができるということだけでなく、生徒が自分の予測や判断について根拠を明らかにして説明できるようにする。

また、例えば、「確率が $\frac{1}{6}$ である」ことを求めるだけでなく、「確率が $\frac{1}{6}$ である」ことの意味を理解し、それに基づいて判断したり説明したりすることができるようにする。指導においては、生徒がこうしたことを意識できるように、日常生活や社会などに関わる疑問をきっかけにして、問題を設定しその解決の方策を探り、答えを求めるという目的をもった活動ができるようにすることが大切である。「確率が $\frac{1}{6}$ である」だけでなく、「確率が $\frac{1}{6}$ だから…」も大切にして指導することが必要である。また、こうした活動を通して、予測したり判断したりした結果を具体的な事象との関係で見直し、評価・改善することにも取り組むことができるようにする。

(2) 指導内容の概観

小学校算数科における取扱い

小学校算数科では、「データの活用」に関係する内容として、データを分類整理することや、表やグラフに表すこと、相対度数や確率の基になる割合を学習している。また、それらを活用して、日常生活の具体的な事象を考察し、その特徴を捉えたり、問題解決したりすることに取り組んでいる。その主な内容は次のとおりである。

ア 第4学年までに、目的に応じてデータを集めて分類整理し、表やグラフを用いて分かりやすく表すことや、棒グラフや折れ線グラフの読み方やかき方について学習している。さらに、目的に応じてデータを収集し、データの特徴や傾向に着目して表やグラフに的確に表現し、それらを用いて問題解決したり、解決の過程や結果を多面的に捉え考察したりする力を養っている。

イ 第5学年では、測定値の平均や百分率について理解する。また、統計的な問題解決の方法を知るとともに、目的に応じてデータを集めて分類整理し、円グラフや帯グラフを用いて表したり、特徴を調べたりしている。さらに、第4学年と同様に、目的に応じてデータを収集し、データの特徴や傾向に着目して表やグラフに的確に表現し、それらを用いて問題解決したり、解決の過程や結果を多面的に捉え考察したりする力を養っている。

ウ 第6学年では、データの平均値、中央値、最頻値などの代表値や度数分布を表す表やドットプロットなどのグラフ、具体的な事柄について、起こり得る場合を順序よく整理して調べることを学習している。さらに、身の回りの事象から設定した問題について、目的に応じてデータを収集し、データの特徴や傾向に着目して適切な手法を選択して分

析を行い、それらを用いて問題解決したり、解決の過程や結果を批判的に考察したりする力を養っている。

中学校数学科における取扱い

中学校数学科では、小学校算数科における学習の上に立ち、確率と統計について次の内容を取り扱う。

ア 第1学年

第1学年では、データの分布に着目し、その傾向を読み取り批判的に考察して判断したり、不確定な事象の起こりやすさについて考察したりする力を養う。具体的には、目的に応じてデータを収集し、コンピュータを用いるなどしてデータを表やグラフに整理し、データの分布の傾向を読み取り、批判的に考察できるようにする。また、多数回の観察や試行に基づいて、不確定な事象の起こりやすさを表現できるようにする。

この学年では、小学校算数科におけるデータの代表値や散らばりを調べ、統計的に考察したり表現したりする学習を受けて、ヒストグラムや相対度数などの必要性和意味を理解し、それらを用いてデータの傾向を捉え説明することを学習する。ヒストグラムの学習は小学校算数科と同じ内容を繰り返し指導しているようにも見えるが、中学校数学科では、取り扱うデータの範囲が身近なものから社会一般的なものに広がったり、扱うデータも大量になったりする。また、そうしたデータを整理し処理するための統計的な手法について理解し、代表値の適切な使い方や階級の取り方によってヒストグラムの形が変わる場合があることなどについても学習し、批判的に考察できるようにする。ここでは、統計的な手法を用いてデータの傾向を捉え説明することを重視し、ヒストグラムを作ったり相対度数や累積度数を求めたりすることだけが学習の目標にならないように配慮する。

また、小学校算数科における割合などの学習を受けて、不確定な事象についての観察や実験などの活動を通して、多数の観察や多数回の試行によって得られる確率について理解する。さらに、日常生活においては、ある程度多くの観察や実験を基に得られた結果の相対度数を用いて、不確定な事象を捉え説明する機会が多くあることを理解できるようにする。データの収集方法については、改めて第3学年の標本調査において学習する。

ヒストグラムや相対度数などを手作業で作成したり求めたりすることは、その必要性和意味を理解するために有効であるが、作業の効率化を図り、処理した結果を基にデータの傾向を読み取ることを中心とする学習においては、コンピュータなどを積極的に利用できるようにする。

イ 第2学年

第2学年では、複数の集団のデータの分布に着目し、その傾向を比較して読み取り批判的に考察して判断したり、不確定な事象の起こりやすさについて考察したりする力を養

う。具体的には、目的に応じてデータを収集し、コンピュータを用いるなどして、データを整理したり、四分位範囲や箱ひげ図を用いてデータの分布を比較したりすることを通して、データの分布の傾向を読み取り、批判的に考察できるようにする。また、同様に確からしいことに着目して、場合の数を基にして得られる確率を用いて、不確定な事象の起こりやすさを捉え考察し表現できるようにする。

この学年では、第1学年でのヒストグラムや相対度数などを用いてデータの傾向を捉え説明する学習を受けて、四分位範囲や箱ひげ図を用いてデータの分布を比較する方法を学習し、データの傾向を読み取り、批判的に考察し判断することができるようにする。指導に当たっては、四分位範囲や箱ひげ図を活用するだけでなく、必要に応じてこれまでに学習した代表値やヒストグラムなども活用して多面的に考察することも大切である。

また、確率の学習においても第1学年での多数の観察や多数回の試行によって得られる確率などの学習を受けて、同様に確からしいことに着目することで、場合の数を基にして得られる確率を求めることができることを学習し、これら二つの確率の必要性や意味、それらの関係について理解する。

また、箱ひげ図を作成したり、四分位範囲を求めたりすることや確率を求めることだけが学習の目標にならないようにし、不確定な事象を捉え説明したり、目的に応じて判断したりすることを重視する。

ウ 第3学年

第3学年では、標本と母集団の関係に着目し、母集団の傾向を推定し判断したり、調査の方法や結果を批判的に考察したりする力を養う。具体的には、コンピュータを用いるなどして、母集団から標本を取り出し、標本の傾向を調べることで、母集団の傾向が読み取れることを理解できるようにし、実際に行った標本調査だけでなく、既に行われている標本調査の方法や結果についても批判的に考察し表現できるようにする。

この学年では、標本調査の必要性と意味を理解し、簡単な場合について標本調査を行い、母集団の傾向を捉え説明する。標本調査に伴う誤りの可能性を定量的に評価することまで取り扱う必要はなく、母集団からその一部を取り出して整理し処理することで、全体の傾向を推定できることや、標本の大きさを大きくすることで標本調査の結果の散らばりが小さくなることを経験的に理解できるようにすることが大切である。その際には、ヒストグラムや箱ひげ図などのこれまでの学習で身に付けた知識や技能を活用することが考えられる。また、標本を無作為に抽出することと関連して、第2学年までの学習内容を振り返ることで、確率の必要性と意味を学び直すことができる。

母集団から標本を抽出する際に必要な乱数を簡単に数多く求めることが必要な場合には、コンピュータなどを積極的に利用する。また、インターネットなどの情報通信ネットワークを利用してデータを収集したり、様々な標本調査について調べたりすることも考えられる。その際には、データの収集方法やそのまとめ方などについて、批判的に考察した

上で、目的に応じて、それらの結果に基づいて判断することも大切である。

ここで、「Dデータの活用」領域の指導事項について、前回の学習指導要領との相違点をまとめておく。

第1学年においては、これまで取り扱っていた度数分布表の階級や中央値、最頻値といった代表値を小学校算数科で取り扱うこととし、第2学年の内容であった確率を多数の観察や多数回の試行によって得られる確率と場合の数を基にして得られる確率とに分けて、多数の観察や多数回の試行によって得られる確率をこの学年で取り扱うこととした。また、内容の取扱いの中で述べられていた、誤差や近似値の意味、数を $a \times 10^n$ の形で表すことについては、第3学年の「A数と式」の(1)などに関連して取り扱うこととした。

第2学年においては、四分位範囲や箱ひげ図を取り扱うこととし、確率については場合の数を基にして得られる確率を中心に扱うこととした。

各学年の内容

第1学年

データの分布

小学校算数科では、統計的な問題解決の方法を知るとともに、棒グラフ、折れ線グラフ、円グラフ及び帯グラフを学習し、度数分布を表やグラフに表したり、データの平均や散らばりを調べるなどの活動を通して、統計的に考察したり表現したりしてきている。また、第5学年では測定値の平均について学習し、第6学年では、平均値、中央値、最頻値などの代表値を用いたりドットプロットなどを用いたりして統計的に考察したり表現したりすることを学習している。ここで、平均値はデータの個々の値を合計し、データの個数で割った値、中央値はデータを大きさの順に並べたときの中央の値、最頻値はデータの中で最も多く現れている値のことである。また、ドットプロットとは数直線上の該当する箇所にデータを配置し、同じ値のデータがある際には積み上げて表したものである。

中学校数学科において第1学年では、これらの学習の上に立って、データを収集、整理する場合には、目的に応じた適切で能率的なデータの集め方や、合理的な処理の仕方が重要であることを理解できるようにする。さらに、ヒストグラムや相対度数などについて理解し、それらを用いてデータの傾向を捉え説明することを通して、データの傾向を読み取り、批判的に考察し判断することができるようにする。

ヒストグラムの必要性と意味 (アの (ア))

日常生活や社会においては、データに基づいて判断しなければならないことが少なくない。目的に応じて収集したデータについては、大きく分けて、人口統計における都道府県

名のように質的な特徴に着目した質的データと、過去1か月間の正午の気温のように量的な特徴に着目した量的データとがある。いずれのデータについても、適切な判断を下すためには、目的に応じて統計的な表現や処理を行い、それを基にしてデータの傾向を読み取る必要がある。

データを整理する方法としては、質的データでは次元の表や棒グラフ、帯グラフなどがあり、量的データではドットプロットや度数分布表、ヒストグラムなどがある。小学校算数科では、第6学年で、ヒストグラムを柱状グラフとして学習しており、中学校第1学年で、その理解を深めていく。ヒストグラムを用いることで、量的なデータの分布の様子を捉えることができる。データを幾つかの階級に分け、ある階級に属する度数を明らかにすることで、全体の形、左右の広がり、山の頂上の位置、対称性、極端にかけ離れた値（外れ値）の有無など、直観的に捉えやすくなる。

ヒストグラムからデータの分布の傾向を読み取る場合、階級の幅の設定の仕方に注意する必要がある。例えば、図1はある中学校の第1学年の生徒100人のハンドボール投げの記録である。このデータから、階級の幅を3mに設定したヒストグラムと、2mに設定したヒストグラムを作成すると、それぞれ図2と図3のようになる。図2のヒストグラムからは、データの分布の様子は一つの山の形に見えるが、図3では二つの山の形に見える。したがって、ヒストグラムから「ハンドボールを何mくらい投げた人が多いのか」を読み取りたい場合、図2と図3のどちらのヒストグラムを基にするかで、生徒の判断は異なる可能性がある。

16, 12, 27, 18, 18, 23, 22, 24, 15, 13
26, 12, 24, 24, 15, 10, 18, 15, 18, 18
18, 18, 15, 16, 21, 11, 12, 20, 26, 27
16, 20, 25, 21, 18, 18, 23, 16, 18, 24
16, 18, 14, 18, 14, 14, 18, 15, 14, 18
23, 23, 23, 14, 14, 21, 21, 27, 25, 23
20, 22, 27, 18, 18, 14, 18, 18, 27, 24
15, 25, 15, 24, 23, 21, 25, 25, 15, 16
24, 11, 25, 23, 13, 13, 20, 15, 20, 26
18, 20, 25, 22, 23, 23, 21, 22, 16, 22

図1 (単位m)

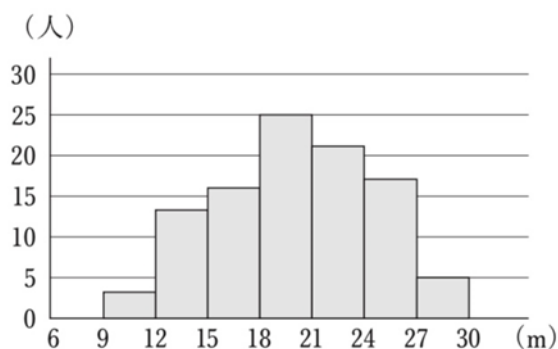


図2

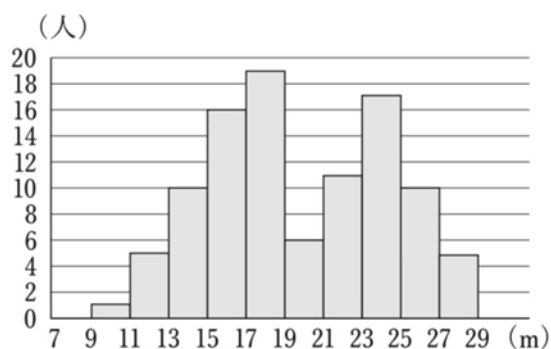


図3

このように、同じデータについても階級の幅が異なるとヒストグラムから読み取ることができる傾向が異なる場合がある。したがって、ヒストグラムからデータの傾向を読み取る場合、その目的に応じてデータの分布の傾向を的確に読み取ることができるように、階

級の幅の異なる複数のヒストグラムをつくり検討することが必要である。

ところで、データの傾向を読み取る場合、度数分布表やヒストグラムだけではなく、目的に応じて代表値などを用いることも大切である。小学校算数科では、第6学年で、代表値について学習している。代表値には、分布の特徴をある視点に立って一つの数値で表す点に特徴があり、平均値、中央値（メジアン）、最頻値（モード）が用いられることが多い。一つの数値で表すことで、データの特徴を簡潔に表すことができ、複数の集団のデータを比較することも容易になる。しかし、その反面、分布の形や極端にかけ離れた値の有無などの情報は失われてしまうので、データの分布全体を確認した上で代表値を用いるようにすることが大切である。また、極端にかけ離れた値があると、平均値は中央値に比べて、その値に強く影響を受けることに留意する必要がある。さらに、連続的なデータを取り扱う場合、同じ値をとる測定値はあまり見られないため、小学校第6学年で学習した最頻値が有効でないことがある。その際には、ヒストグラム等に整理し、度数が最大の階級の真ん中の値を最頻値として用いるとよい。

代表値以外で、データの分布の特徴を一つの数値で表すものとして範囲がある。範囲とは、データの最大値と最小値との差であり、データの散らばりの程度を表す値である。平均値が等しい二つの集団のデータでも範囲が等しいとは限らない。また、範囲は極端にかけ離れた値が一つでもあるときは、その影響を受けるので、取扱いや解釈の仕方には十分注意する必要がある。指導においては、中学校第2学年で学ぶ四分位範囲の基礎になることにも留意する。

相対度数などの必要性と意味（アの（ア））

大きさの異なる二つ以上の集団のデータの傾向を比較する場合、度数分布表の各階級の度数で単純に比べることはできない。このような場合、相対度数を用いると、各階級の度数について、総度数に対する割合が明らかになるので、大きさの異なる集団の階級ごとの比較がしやすくなる。相対度数は、全体（総度数）に対する部分（各階級の度数）の割合を示す値で、各階級の頻度とみなされる。このことは、確率の学習の基礎になることにも留意して指導することが大切である。

また、特定の階級の度数に着目するだけではなく、小さい方からある階級までの度数の総和を見ることも切である。

待ち時間 (分間)	度数	相対度数	累積 度数	累積 相対度数
以上 未満				
0 ~ 10	3	0.07	3	0.07
10 ~ 20	4	0.09	7	0.16
20 ~ 30	6	0.13	13	0.29
30 ~ 40	18	0.40	31	0.69
40 ~ 50	10	0.22	41	0.91
50 ~ 60	3	0.07	44	0.98
60 ~ 70	1	0.02	45	1.00
合計	45	1.00		

表1

る。例えば、ある病院の患者一人一人の待ち時間についてのデータを整理した度数分布表

(表1) から、待ち時間がどれくらいかを知りたい場合、「何分間未満の人数が多い」という観点から調べていくことが考えられる。その際、最小の階級から各階級までの度数の総和を表した、累積度数を用いるとよい。同様に、各階級までの相対度数の総和を求めると累積相対度数が得られ、ある階級以下(以上)の全体に対する割合を知ることができる。

データの分布の傾向を読み取り、批判的に考察し判断すること(アの(イ)、イの(ア))

目的に応じてデータを収集し、ヒストグラムや相対度数などを用いて、そのデータの分布の傾向を読み取り、批判的に考察し判断することができるようにする。

指導に当たっては、日常生活を題材とした問題などを取り上げ、それを解決するために計画を立て、必要なデータを収集し、コンピュータなどを利用してヒストグラムなどを作成したり相対度数などを求めたりしてデータの傾向を捉え、その結果を基に批判的に考察し判断するという一連の活動を経験できるようにすることが重要である。例えば、クラス対抗の大縄跳び大会で、あるクラスの選手が1列に並んで跳ぶのと、2列に並んで跳ぶのとでは、どちらがより多くの回数を連続で跳ぶと見込めるかについて考察することを考える。この過程で、2種類の並び方で跳んだ回数の記録を用いて度数分布表やヒストグラムを作成したり、相対度数などを求めたりして分布の状況などを調べることが考えられる。このことを基にして、「どちらの並び方の方が多く跳んでいるといえるのか」について批判的に考察し判断する。ここで、批判的に考察することとは、物事を単に否定することではなく、多面的に吟味し、よりよい解決や結論を見いだすことである。具体的には、データに基づいて問題を解決する過程において、データの収集の仕方は適切か、どの代表値が根拠としてふさわしいか、分布の形に着目しているか、傾向を読み取りやすいグラフで表せているか、グラフの目盛りなどを加工して過度に誇張していないか、分析した結果から得られる結論が妥当かなどについて検討することである。このような検討の過程において、よりよい解決や結論を見いだそうとする態度を養うことが大切である。

なお、小学校算数科では、第5、6学年で、データに基づいて判断する統計的な問題解決の方法を知り、その方法を用いて考察することを学習している。ここで、統計的な問題解決とは、次のような過程を含む一連のサイクルを意味する。

- ・身の回りの事象について、興味・関心や問題意識に基づき統計的に解決可能な問題を設定する。
- ・どのようなデータを、どのように集めるかについて計画を立てる。
- ・データを集めて分類整理する。
- ・目的に応じて、観点を決めてグラフや表や図などに表し、特徴や傾向をつかむ。
- ・問題に対する結論をまとめるとともに、さらなる問題を見いだす。

コンピュータなどの情報手段を用いること（アの（イ）、イの（ア））

ヒストグラムや相対度数などの必要性和意味を理解することの指導においては、手作業でこれらを作成したり求めたりすることが重要な意味をもつことに留意する。一方で、手作業でデータを処理することが難しい場合もある。例えば、大量のデータを整理する場合や大きな数、端数のある数を扱う場合、あるデータから多様なヒストグラムをつくる場合などである。このような場合には、コンピュータなどを利用して作業の効率化を図ることが大切である。それにより、処理した結果を基にデータの傾向を読み取ったり考察し判断したりすることに重点を置いて指導できるようにする。

また、情報通信ネットワーク等を活用してデータを収集する場合は、二次的なデータが多くなると考えられるので、誰がどのようにして調べた結果であるのかなど、その信頼性についても批判的に考察する必要がある。

不確定な事象の起こりやすさ

小学校算数科では、第6学年で、具体的な事柄について起こり得る場合を順序よく整理して、落ちや重なりなく調べることを学習している。

中学校第1学年において、(1)では、相対度数は、全体（総度数）に対する部分（各階級の度数）の割合を示す値で、各階級の頻度とみなされることを学習する。ここでは、これまで確定した事象を表すのに用いられてきた数が、不確定な事象の起こりやすさの程度を表すためにも用いられることを知り、不確定な事象の起こりやすさの傾向を読み取り表現することができるようにする。

多数の観察や多数回の試行によって得られる確率の必要性和意味（アの（ア））

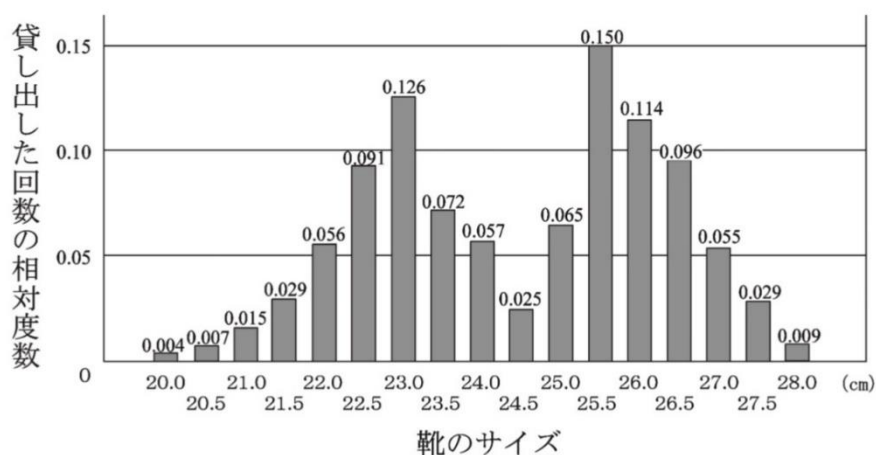
数学の授業では、確定した事象を取り扱うことが多い。しかし実際には、日常生活や社会における不確定な事象も数学の考察の対象となり、その起こりやすさの程度を数値で表現し把握するために確率が必要になる。

ペットボトルのふたを投げる場合、表向き（ふたがかぶさる向き）、裏向き、横向きどれが出るかを予言することはできない。しかし、多数回の試行の結果を、それぞれの向きについて整理してみると、ある向きが出る相対度数には、ある安定した値をとるという傾向が見られる。例えば、あるペットボトルのふたを投げ、表向きが出る回数を調べる場合を考える。ふたを投げる回数 n を大きくし、表向きが出る回数 r を求めて、表向きが出る相対度数の値 $\frac{n}{r}$ を計算してみる。 n を次第に大きくしていくと、それに伴って r も大きくなるが、 $\frac{n}{r}$ の値は次第にある値に近づいていく。この $\frac{n}{r}$ が近づいていく一定の値を、ペットボトルのふたを投げて表向きが出る確率という。指導に当たっては、実際に多数回の試行をするなどの経験を通して、ある事柄の起こる相対度数が、一定の値に近づくことを実感を伴って理解できるようにする。

不確定な事象の起こりやすさの傾向を読み取り表現すること（イの（ア））

日常生活や社会においては、偶然に左右される不確定な事象は数多くある。多数の観察や多数回の試行の結果を基にすることにより、不確定な事象の起こりやすさの傾向を読み取ることができる。

多数の観察や多数回の試行の結果を基に不確定な事象について考察する際には、相対度数を確率とみなして用いることが考えられる。例えば、あるボウリング場で、貸出し用の靴を全て買い替えることについて考える。「各サイズでどれくらいの数の靴を購入すればよいのだろうか」等の問題を見だし、各サイズで貸し出した靴の状況は毎年ほぼ同じ傾向が見られることから、過去1年で貸し出した靴の回数のデータを基に靴を買い替える場合、各サイズの相対度数を求め、各サイズの購入足数を決定する際の参考にすることが考えられる。



ここで、過去1年のデータにおける相対度数は確率であるとはいえないが、過去のデータから起こりやすさの傾向を予測するために、相対度数を確率とみなしていることになる。

不確定な事象の起こりやすさの傾向を読み取り表現することを通して、「必ず～になる」とは言い切れない事柄についても、数を用いて考察したり判断したりすることができることを知り、数学と日常生活や社会との関係を実感できるようにする。

第2学年

データの分布

第1学年では、ヒストグラムや相対度数などについて学習している。第2学年では、これに加えて四分位範囲や箱ひげ図を学習することで、複数の集団のデータの分布に着目し、その傾向を比較して読み取り、批判的に考察して判断する力を養う。

四分位範囲や箱ひげ図の必要性と意味 (アの (ア), アの (イ))

第1学年では、量的データの分布を捉える方法として、ヒストグラムや相対度数などについて学習している。ヒストグラムは分布の形は分かりやすい一方で、中央値などの指標が分かりづらい。複数のデータの分布を比較する際に、視覚的に比較しやすい統計的な表現として、箱ひげ図がある。

箱ひげ図とは、次のように、最小値、第1四分位数、中央値(第2四分位数)、第3四分位数、最大値を箱と線(ひげ)を用いて一つの図で表したものである。四分位数とは、全てのデータを小さい順に並べて四つに等しく分けたときの三つの区切りの値を表し、小さい方から第1四分位数、第2四分位数、第3四分位数という。第2四分位数は中央値のことである。なお、四分位数を求める方法として幾つかの方法が提案されているが、ここでは四分位数の意味を把握しやすい方法を用いる。

例えば、次の九つの値があるとき、中央値(第2四分位数)は5番目の26である。

23 24 25 26 26 29 30 34 39

この5番目の値の前後で二つに分けたときの、1番目から4番目までの値のうちの中央値24.5を第1四分位数、6番目から9番目までの値のうちの中央値32を第3四分位数とする。



箱ひげ図の箱で示された区間に、全てのデータのうち、真ん中に集まる約半数のデータが含まれる。この箱の横の長さを四分位範囲といい、第3四分位数から第1四分位数を引いた値で求められる。上の例では四分位範囲は $32-24.5=7.5$ である。四分位範囲はデータの散らばりの度合いを表す指標として用いられる。極端にかけ離れた値が一つでもあると、最大値や最小値が大きく変化し、範囲はその影響を受けやすいが、四分位範囲はその影響をほとんど受けないという性質がある。また、この図中に、平均値を記入して中央値との差を考えたり、第1四分位数や第3四分位数と中央値との差を考えたりすることにより、データの散らばり具合が把握しやすくなるので、複数のデータの分布を比較する場合などに使われる。

四分位範囲や箱ひげ図を用いて批判的に考察し判断すること (イの (ア))

四分位範囲や箱ひげ図を用いて、複数の集団のデータの分布の傾向を比較して読み取り、批判的に考察したり判断したことを説明したりすることができるようにする。

指導に当たっては、日常の事象を題材とした問題などを取り上げ、それを解決するために必要なデータを収集し、コンピュータなどを利用してデータを整理し、四分位範囲を求めたり箱ひげ図で表したりして複数の集団のデータの傾向を比較して読み取り、その結果を基に説明するという一連の活動を経験できるようにすることが重要である。例えば、中学生の体力は以前に比べて落ちているといえるかどうかについて考える。データとしては、生徒にと

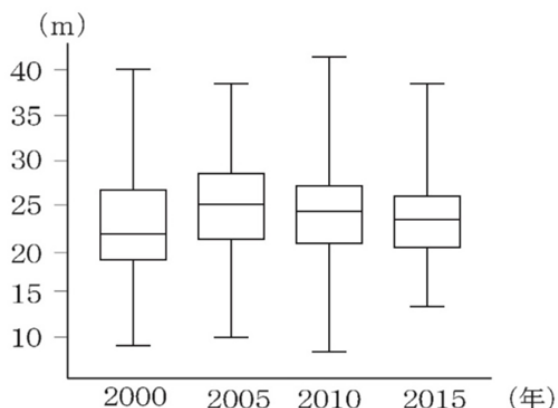


図1

っての考察のしやすさから、同じ学校の中学校2年生男子の体力テストの結果を用いることができるであろう。そこで、ハンドボール投げに焦点化し、2000年、2005年、2010年、2015年のデータから箱ひげ図(図1)を作成するなどして分布の傾向を比較して読み取り、これを基に、「中学生の体力は前に比べて落ちているといえるかどうか」について考察する。具体的には、「四分位範囲を表す箱は、2005年からそれほど大きく下がっておらず、中央値を中心とする全体の約半数のデータはそれほど下がっているわけではないので、体力が落ちているとは言えない」と判断することが考えられる。

ここで、より詳しく検討するために、範囲の違いに着目して、2010年と2015年に絞ってヒストグラムを作成し、これらの分布を詳しく比較することが考えられる。それにより、かけ離れた値があるかどうかなど、範囲が大きく異なる理由について検討することができる。また、5年ごとではなく毎年の中央値や平均値などに着目して折れ線グラフ(図2)を作成することで、経年変化の様子を調べることができる。さらに、「ハンドボール投げのデータだけで十分か」と批判的に考え、握力など他の体力テストのデータから箱ひげ図(図3)やヒストグラムを作成するなどして、一層詳しい考察を加えることも考えられる。

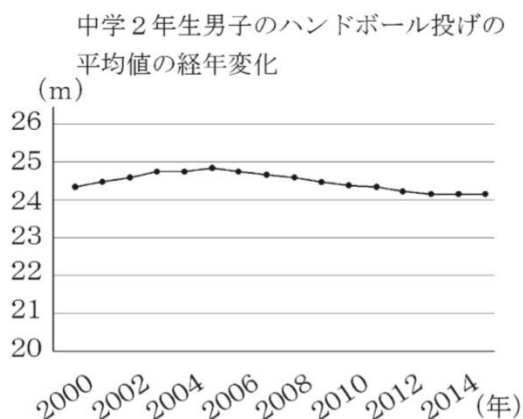


図2

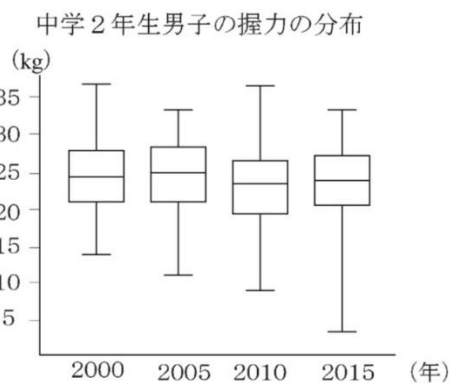


図3

このように、体力に対して多様なデータや統計的な表現を用いて多面的に吟味することで、批判的に考察することの必要性に気付くことが大切である。また、データの傾向を捉える場合、日常生活では、簡潔さの観点から箱ひげ図のみを用いて説明することが予想される。しかし、そのことによって分布の形など、失われる情報もあるので、必要に応じてヒストグラムなどと合わせて用いることが必要な場面もあることに留意する。なお、同じ学校のデータについての判断の結果を、中学生一般について考察することは、第3学年で学習する標本調査に関わることである。

第3学年

中学校数学科において第1学年では、目的に応じてデータを収集して整理し、ヒストグラムや相対度数などを用いてデータの傾向を読み取ることを学習している。また、多数回の試行によってデータを集めることにより、不確定な事象の起こりやすさに一定の傾向があることを調べる活動を通して、確率について学習している。第2学年では、四分位範囲や箱ひげ図を学習し、複数の集団のデータの分布に着目し、その傾向を比較して読み取り批判的に考察して判断する力を養っている。また、同様に確からしいことを利用することで数学的に確率を求めることができる場合があることを学習している。

第3学年では、これらの学習の上に立って、母集団の一部分を標本として抽出する方法や、標本の傾向を調べることで、母集団の傾向が読み取れることを理解できるようにするとともに、標本調査の方法や結果を批判的に考察し表現したり、母集団の傾向を推定し判断したりできるようにする。

標本調査の必要性と意味（アの（ア））

第1学年においては、全てのデータがそろえられることを前提に、ヒストグラムや相対度数などを用いてデータの分布の傾向を読み取ることを学習している。しかし、日常生活や社会においては、様々な理由から、全てのデータを収集できない場合がある。例えば、社会の動向を調査する世論調査のために全ての成人から回答を得ることは、時間的、経済的に考えて現実的ではない。また、食品の安全性をチェックするために、製造した商品を全て開封して調べることはしない。このような場合、一部のデータを基にして、全体についてどのようなことがどの程度まで分かるのかを考えることが必要になる。このようにして生み出されたのが標本調査である。国勢調査や進路希望調査などの全数調査と比較するなどして、標本調査の必要性と意味の理解を深めるようにする。

無作為に標本を取り出し、整理すること（アの（イ））

日常生活や社会では、母集団から標本を抽出する方法には様々なものがあり、その目的、費用、精度などから選択、実施されている。その中で、標本が母集団の特徴を的確に

反映するように偏りなく抽出するための代表的な方法として、無作為抽出を学習する。無作為に標本を抽出することにより、母集団における個々の要素が取り出される確率が等しくなると考えられる。確率の学習を前提として、乱数を利用することにより無作為抽出が可能になることを、経験的に理解できるようにする。

例えば、ある英和辞典に掲載されている見出しの単語の総数を標本調査で推定することを考える。この英和辞典が 980 ページであるとする、乱数さいやコンピュータなどを利用して、001 から 980 までの乱数を発生させ、ある程度の数のページを無作為に抽出する。そして、抽出したそれぞれのページに掲載されている単語の数を調べ、その平均値から、この英和辞典に掲載されている見出しの単語の総数を推定する。英和辞典に見出しの単語の総数が示されるなどしてあれば、その数と推定した見出しの単語の総数とを比較することができる。最初の 10 ページを抽出するというように無作為抽出をしない場合と比較したりして、無作為抽出についての理解を深める。このような経験を基にして、無作為に抽出された標本から母集団の傾向を推定すれば、その結果が大きく外れることが少ないことを実感できるようにする。

また、無作為抽出で取り出すページ数を変えて何回か標本調査をしてその結果を比較することで、標本の大きさが大きい方が母集団の傾向を推定しやすくなることを、経験的に理解できるようにすることが大切である。例えば、取り出すページ数を 10, 20, 30, … と変えて、それぞれについて見出しの単語の総数を何回か推定し、その推定した値をデータとする。そのようにして得られたデータの分布のばらつきを箱ひげ図などを用いて表し、標本の大きさが大きい方がその範囲や四分位範囲が小さくなる傾向があることを理解できるようにすることが考えられる。

なお、大量のデータを整理したり、大きな数値、端数のある数値を扱ったりする場合や、無作為抽出に必要な乱数を簡単に数多く得たい場合には、コンピュータなどを利用することが効果的である。

標本調査の方法や結果を批判的に考察し表現すること (イの (ア))

実際に行った標本調査だけではなく、新聞やインターネットなどから得られた標本調査の方法や結果についても、批判的に考察し表現できるようにすることが大切である。例えば、日常生活や社会の中で行われた標本調査の事例を取り上げ、標本調査の結果をどのように解釈すればよいのかを考察する場面を設けることが考えられる。その際、母集団としてどのような集団を想定しているのか、その母集団からどのように標本を抽出しているのか、抽出した標本のうちどのくらいの人が回答しているのか、などを観点として話し合うことが大切である。

また、実際の調査においては、無作為抽出以外の標本の抽出方法が用いられることもあること、そのときには標本がどのような集団を代表しているのかを検討することも考えら

れる。このような活動を通して、統計的な情報を的確に活用できるようにすることが大切である。

標本調査を行い、母集団の傾向を推定し判断すること（イの（イ））

簡単な場合について、標本調査から母集団の傾向を推定し判断したことを説明できるようにする。指導に当たっては、日常生活や社会に関わる問題を取り上げ、それを解決するために母集団を決めて、そこから標本を無作為に抽出して整理し、その結果を基に母集団の傾向を推定し説明するという一連の活動を経験できるようにすることが重要である。

標本調査では、母集団についての確定的な判断は困難である。社会で実際に標本調査を利用する場合には、この点を補完するため、予測や判断に誤りが生じる可能性を定量的に評価するのが一般的である。しかし、ここでは標本調査の学習の初期の段階であることに留意し、実験などの活動を通して、標本調査では予測や判断に誤りが生じる可能性があることを経験的に理解できるようにする。

生徒が導いた予測や判断については、生徒が何を根拠にしてそのことを説明したのかを重視し、調査の方法や結論が適切であるかどうかについて、説明し伝え合う活動などを通して相互に理解を図るようにする。

例えば、「自分の中学校の3年生の全生徒 200 人の、一日の睡眠時間は何時間くらいだろうか」について調べる場合、次のような活動が考えられる。

- ① 「一日の睡眠時間」の意味を明らかにして（昨日の睡眠時間か、過去 1 週間の平均睡眠時間かなど）質問紙を作成する。
- ② 標本となる生徒を抽出し、調査を実施する。
- ③ 調査の結果を整理する。
- ④ 調査結果を基にして、全生徒の睡眠時間を予測して説明する。

この場合、④で説明することには、予測だけでなく、①から③のような標本調査に基づいて母集団の傾向を捉える過程が含まれている。また、これらを基に、標本の抽出の仕方や予測の適切さについて検討する。

このように、標本調査を行い、母集団の傾向を推定し説明することを通して、生徒が標本調査の結果や、それに基づく説明を正しく解釈できるようにする。例えば、調査する標本が偏っていないか、アンケート調査の質問が誘導的でないか、アンケートの実施方法が適切かどうかなどにも目を向けられるようにする。

3. 高等学校

数学 I

(4) データの分析

データの分析について、数学的活動を通して、その有用性を認識するとともに、次の事項を身に付けることができるよう指導する。

ア 次のような知識及び技能を身に付けること。

(ア) 分散，標準偏差，散布図及び相関係数の意味やその用い方を理解すること。

(イ) コンピュータなどの情報機器を用いるなどして，データを表やグラフに整理したり，分散や標準偏差などの基本的な統計量を求めたりすること。

(ウ) 具体的な事象において仮説検定の考え方を理解すること。

イ 次のような思考力，判断力，表現力等を身に付けること。

(ア) データの散らばり具合や傾向を数値化する方法を考察すること。

(イ) 目的に応じて複数の種類のデータを収集し，適切な統計量やグラフ，手法などを選択して分析を行い，データの傾向を把握して事象の特徴を表現すること。

(ウ) 不確実な事象の起こりやすさに着目し，主張の妥当性について，実験などを通して判断したり，批判的に考察したりすること。

[用語・記号] 外れ値

数学 B

(2) 統計的な推測

統計的な推測について、数学的活動を通して、その有用性を認識するとともに次の事項を身に付けることができるよう指導する。

ア 次のような知識及び技能を身に付けること。

(ア) 標本調査の考え方について理解を深めること。

(イ) 確率変数と確率分布について理解すること。

(ウ) 二項分布と正規分布の性質や特徴について理解すること。

(エ) 正規分布を用いた区間推定及び仮説検定の方法を理解すること。

イ 次のような思考力，判断力，表現力等を身に付けること。

(ア) 確率分布や標本分布の特徴を，確率変数の平均，分散，標準偏差などを用いて考察すること。

(イ) 目的に応じて標本調査を設計し，収集したデータを基にコンピュータなどの情報機器を用いて処理するなどして，母集団の特徴や傾向を推測し判断するとともに，標本調査の方法や結果を批判的に考察すること。

[用語・記号] 信頼区間，有意水準

内容と内容の取扱い

数学 I

(4) データの分析

小学校算数科では、「データの活用」領域に関係する内容として、データを分類整理することや、表やグラフに表すこと、相対度数や確率の基になる割合を取り扱っている。また、それらを活用して、日常生活の具体的な事象を考察し、その特徴を捉えたり、問題解決したりする力を養っている。

中学校数学科では、上記の小学校算数科における学習の上に立ち、主に、次の内容を取り扱っている。

ア 第1学年では、目的に応じてデータを収集し、コンピュータを用いるなどしてデータを表やグラフに整理し、データの分布の傾向を読み取り、批判的に考察して判断すること。

イ 第2学年は、複数の集団のデータの分布に着目し、四分位範囲や箱ひげ図を用いてデータの分布の傾向を比較して読み取り批判的に考察して判断すること。

ウ 第3学年では、母集団から標本を取り出し、標本の傾向を調べることで母集団の傾向を推定し判断したり、調査の方法や結果を批判的に考察したりすること。

これらを踏まえ、ここでは、データの散らばり具合や傾向を数値化する方法を考察する力、目的に応じて複数の種類のデータを収集し、適切な統計量やグラフ、手法などを選択して分析を行い、データの傾向を把握して事象の特徴を表現する力、不確実な事象の起こりやすさに着目し、主張の妥当性について、実験などを通して判断したり、批判的に考察したりする力などを培う。

また、本科目の「(4) データの分析」を含め統計的な内容は、共通教科情報の「情報 I」の「(4) 情報通信ネットワークとデータの活用」との関連が深く、生徒の特性や学校の実態等に応じて、教育課程を工夫するなど相互の内容の関連を図ることも大切である。

データの散らばり具合や傾向を数値化する方法を考察し、分散、標準偏差、散布図及び相関係数の意味やその使い方を理解すること(ア(ア)、イ(イ))

中学校では、データの散らばりをヒストグラムや箱ひげ図を用いて捉えたり、データの散らばりの度合いを表す指標として範囲や四分位範囲を用いたりしている。「数学 I」では、そのようなデータの散らばりの度合いを数値化する方法を考察し、データの散らばりの度合いを表す新たな指標として分散及び標準偏差を取り扱う。その際、データの散らばりの度合いをどのように数値化するかを考えさせる。指導に当たっては、例えば、各データと平均値の差の和、各データと平均値の差の絶対値の和、各データと平均値の差の2乗の和、各データと中央値の差の和、各データと中央値の差の絶対値の和、各データと中央

値の差の2乗の和、及び、これらのそれぞれをデータの総数で除した値などの考えを出させ、それぞれの考えの長所や短所などについて話し合った上で、分散及び標準偏差を取り上げることも考えられる。なお、小学校、中学校において、データの分布に応じて適切な代表値を選択することを大切にしていることを踏まえ、分散または標準偏差は、平均値との差に基づいてデータの散らばりの度合いを表す指標なので、データの分布が概ね対称形の場合に用いることが多いことや、データの分布が非対称形の場合、すなわち、代表値として平均値より中央値のほうが適切な場合は、四分位範囲を用いるとよいことなどを取り扱うことも考えられる。また、生徒の特性等に応じて、平均値の数学的な意味について、少数のデータを例に考察することが考えられる。例えば、データ d_1, d_2, d_3, d_4, d_5 において、 $(d_1 - p)^2 + (d_2 - p)^2 + (d_3 - p)^2 + (d_4 - p)^2 + (d_5 - p)^2$ の値を最小にする p の値が平均値であることについて考察する。

データの相関については、散布図及び相関係数の意味を理解できるようにするとともに、それらを利用してデータの相関を的確に捉え説明できるようにする。その際、標準偏差や分散の場合と同様に、相関係数を求める式に着目し、具体的な少数のデータを通して、その意味を理解できるようにする。また、相関と因果の違いについても具体例とともに取り扱う。例えば、1ヶ月間に朝食を摂った日数の割合と数学のテストの得点の間に相関があったとしても、朝食を摂るだけで数学のテストの得点が上がるとは考えにくく、朝食と得点の間に因果関係があると断定することはできない。相関と因果を混同して用いられることも多いので、生徒の分かりやすい例を用いて確実に理解できるようにすることが大切である。

目的に応じて複数の種類のデータを収集し、適切な統計量やグラフ、手法などを選択し、コンピュータなどの情報機器を用いるなどして、データを表やグラフに整理したり、分散や標準偏差などの基本的な統計量を求めたりして分析を行い、データの傾向を把握して事象の特徴を表現すること (ア(イ), イ(イ))

小学校、中学校の「データの活用」領域においては、「問題－計画－データ－分析－結論」の五つの段階からなる統計的探究プロセスを意識した、統計的な問題解決の活動が大切にされている。

問題	・問題の把握	・問題設定
計画	・データの想定	・収集計画
データ	・データの収集	・表への整理
分析	・グラフの作成	・特徴や傾向の把握
結論	・結論付け	・振り返り

統計的探究プロセスとは、元々の問題意識や解決すべきことがらに対して、統計的に解決可能な問題を設定し、設定した問題に対して集めるべきデータと集め方を考え、その計画に従って実際にデータを集め、表などに整理した上で、集めたデータに対して、目的やデータの種類に応じてグラフにまとめたり、統計量を求めるなどして特徴や傾向を把握し、見いだした特徴や傾向から問題に対する結論をまとめて表現したり、さらなる課題や活動全体の改善点を見いだしたりするという一連のプロセスをいう。これら一連のプロセスは「問題」から「結論」に向けて一方向に進んでいくものではなく、計画を立てながら問題を見直して修正を加えたり、グラフを作り直して分析したり、ときにはデータを集め直したり、相互に関連し、行き来しながら進むものであるが、問題解決過程において、自分たちがどの段階にあるかを把握することが大切である。中学校では、このようなプロセスを通して、複数の集団のデータの分布に着目し、その傾向を比較して読み取り批判的に考察して判断したり、不確定な事象の起こりやすさについて考察したりする力を養っている。

「数学Ⅰ」においても、可能な範囲で具体的な問題の解決を通して、このような統計的探究プロセスを経験させるようにする。例えば、散布図及び相関係数を学習することを踏まえ、問題場面に対する仮説を立て、データを収集しその仮説を検証していく活動（仮説検証型アプローチ）や、データを分析し、これまでは気付いていなかった問題を発見し仮説を形成する活動（仮説探索型アプローチ）を通して、問題の解決や改善を図るために、現状のデータの分布を望ましいと考える方向に変えるための条件（要因）や改善策を探ることが考えられる。その際、コンピュータなどの情報機器を積極的に用いるなどする。また、統計的探究プロセスにおいて、目的やデータの種類に応じて適切な統計量やグラフ、手法などを選択できるようにするために、小学校や中学校で学習した平均値、最小値、最大値、中央値（メジアン）、最頻値（モード）、範囲、四分位範囲などの統計量や、棒グラフ、折れ線グラフ、ヒストグラム、箱ひげ図、散布図などのグラフを、どのようなデータに対して、どのような目的で使用することが多いかについて整理したり、必要に応じてそれらの精度を高めたりする方法を工夫することも大切である。小学校算数科では、文字情報として得られる「質的データ」と数値情報として得られる「量的データ」の双方を、中学校では、主に後者を取り扱っている。「数学Ⅰ」では、「質的データ」と「量的データ」の双方や、複数の「質的データ」や「量的データ」が紐付けられた複数の種類のデータを取り扱う。そして、それらのデータを、散らばりや変量間の関係などに着目し、適切な手法を選択して分析し、問題解決したり、解決の過程や結果を批判的に考察し判断したりする力を培う。例えば、質的データ間のある関係を探る際には、データを漏れないように分割した二次元表（クロス集計表、分割表と呼ばれることもある。）に整理したり、一旦整理したデータを、さらに異なる性質（観点）で漏れないように分類（分割）したりするとともに、割合（確度・頻度）とデータの度数を相互に関連付けながら分析する。例えば、下の二次元表は、合否が判定さ

れる試験において、ある本を使って学習をしたかどうかを尋ねた結果を表している。この表を見ると、本の使用と合否に因果があるように思える。

	合	否
使用有	65%	35%
使用無	49%	51%

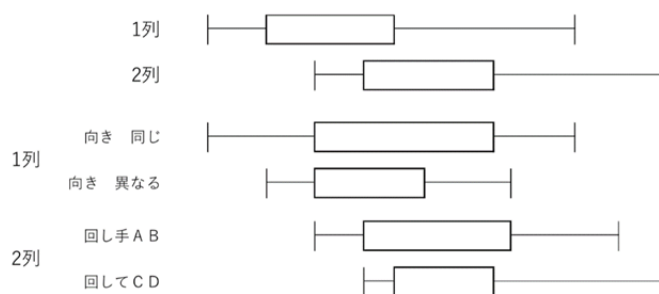
同じデータを、学年に分けて集計し直すと下の表のようになる。このことから、本の使用の有無よりも、学年のほうが合否に影響していることが予想でき、また、度数を見ることで、本の使用者自体が少なかったこともわかる。

	合	否
1 学年	25%	74%
2 学年	77%	23%

		合	否
有	1 学年	3 人	4 人
	2 学年	8 人	2 人
無	1 学年	12 人	38 人
	2 学年	32 人	10 人

なお、割合に関しては、これまで実施された大規模な調査において、高校生においても理解が不十分な生徒が少なからずいることが指摘されている。生徒の実態に応じて、例えば、先の表で、本を使用し合格した者の総受験者に対する割合や、合格者における1学年の生徒が占める割合などについて、何を1とみたときの割合であるかを確認することも大切である。

また、質的データと量的データ間の関係を調べる際には、制御する要因が質的データで、結果が量的データである問題場面では、下のよう
に、箱ひげ図を並列して比べる。例えば、クラス対抗の大縄跳び大会で、あるクラスの選手が1列に並んで跳ぶのと、2列に並んで跳ぶのと



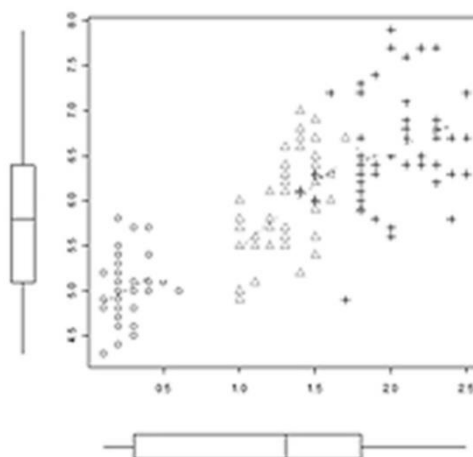
では、どちらがより多くの回数を連続で跳ぶと見込めるかについて、データをとって考察する場面では、並び方以外の要因、例えば、並び方が全員同一方向の場合と真ん中で分かれる場合や、縄の回し手別にデータを分けて（層別して）比較することが考えられる。

このような考察は、1つのデータが、複数の種類のデータと紐付けられていることにより可能になることである。したがって、データを収集する前に、分析の構想を練り、紐付ける

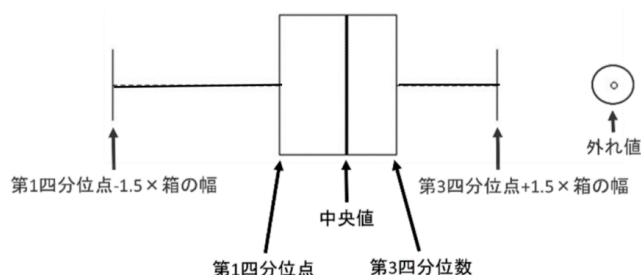
項目を洗い出すことが大切である。

量的データ間の関係を探る際には、散布図や相関係数を用いる。その際、データ数が多い場合や離散量のデータの場合、散布図で点が重なり傾向が十分読み取れないことがあることから、それぞれの変量の散らばりをヒストグラムや箱ひげ図で確認したり、右の図のように散布図と箱ひげ図を組み合わせた図を用いたりしながら分析することもできるようにする。

量的データには、他の値から極端にかけ離れたデータがあることがある。そのような値を「外れ値」と呼ぶ。外れ値は除外すべき値と捉えがちだが、その背景を探ることが大切である。測定ミスや入力ミスでなければ、そこに問題発見や問題解決の手がかりがあることもあるからである。例えば、販売実績が極めてよい販売員がいたとすれば、その販売員の工夫を探ることで対策が見いだせる。ここでは、このように、データの分析において外れ値を見いだす意義を理解できるようにする。



なお、外れ値、すなわち、「他の値から極端にかけ離れている」こと
の目安としては、四分位範囲の 1.5
倍以上離れた値や、標準偏差 σ を
用いて、平均値より $\pm 2\sigma$ （事象に
よっては $\pm 3\sigma$ ）以上離れた値とす
ることを取り上げる程度とする。



測定ミス・記入ミスなど原因が分かっているものは「異常値」とよび、区別することもある。

具体的な事象において仮説検定の考え方を理解するとともに、不確実な事象の起こりやすさに着目し、主張の妥当性について、実験などを通して判断したり、批判的に考察したりすること(ア(ウ)、イ(ウ))

不確実な事象において、読み取った傾向をもとに合理的な判断や意思決定をしようとする際には、同様の傾向が繰り返される（確率的事象）とみなし、データやそれに基づく確率や確率分布等を用いることによって、不確実性の度合いを評価することがある。中学校第1学年では、多数の観察や多数回の試行によって得られる結果を基にして、不確実な事象の起こりやすさの傾向を読み取り表現する力を養っている。これを踏まえ、「数学 I」

では、不確実な事象の起こりやすさに着目し、実験などを通して、問題の結論について判断したり、その妥当性について批判的に考察したりできるようにする。

例えば、「ある新素材の枕を使用した 30 人中のうちの 80%にあたる 24 人が以前よりよく眠れたと回答した」という結果に対して、新素材の枕を使用するとよく眠ることができるかと判断できるか、という問題に取り組ませることを考える。この問題を解決するために、この結果が偶然に起こりえた可能性はどのくらいあるのかを、コイン等を使った実験を多数回繰り返して考察する。つまり、以前よりよく眠れた場合とそうでない場合が起こる可能性が半々だとしたとき、24 人以上がよく眠れたと回答することがどの程度起こるかを考える。実験として、コインが表になった場合を「以前よりよく眠れた場合」とし、コインを 30 回投げるという試行を繰り返す。実験結果を表やグラフなどに整理し、24 枚以上表になった回数の相対度数 p を「起こりえないこと」の尺度として用いることで、「30 人中 24 人以上がよく眠れたと回答することが、無作為性（ランダムネス）だけで説明できる可能性は p しかないように思われる。」という、判断の根拠が得られたことになる。この「起こりえないこと」かどうかの基準として、平均から 2σ (σ は標準偏差) あるいは 3σ 離れた値を用いることが考えられる。この考え方を数学的に精緻化していくと、「帰無仮説：新素材の枕はよく眠れる効果がなかった」を確率分布を用いて検定する「数学 B」の内容につながる。

指導に当たっては、生徒が意欲をもって学習を進めることができるように、テーマを適切に選び、具体的な事象に基づいた取り扱いをすることとともに、多くのデータを取り扱う場合や実験においては、コンピュータなどの情報機器を積極的に用いるようにすることが大切である。また、 Σ は「数学 B」で取り扱うことに留意する。

数学 B

(2) 統計的な推測

中学校第 3 学年では、標本調査の必要性や意味について理解できるようにするとともに、コンピュータなどの情報機器を用いるなどして無作為に標本を取り出し、整理することや、簡単な場合について標本調査を行い、母集団の傾向を捉え説明することなどを取り扱っている。

また、「数学 I」の「(4) データの分析」では、分散、標準偏差、散布図及び相関係数、具体的な事象において仮説検定の考え方などを取り扱い、データの傾向を把握して事象の特徴を表現する力や、主張の妥当性を、実験などを通して判断したり、批判的に考察したりする力を培っている。また、「数学 II」の「(1) いろいろな式」では二項定理を取り扱い、「数学 A」の「(2) 場合の数と確率」では、場合の数、確率とその基本的な法則、独立な試行の確率、条件付き確率及び期待値などを取り扱い、確率の性質などに基づいて事象

の起こりやすさを判断したり，期待値を意思決定に活用したりする力を培っている。

ここでは、「数学Ⅰ」で，具体的な事象において，実験などを通して仮説検定の考え方を取り扱っていることを踏まえながら，確率の理論を統計に応用し，正規分布を用いた区間推定と仮説検定の方法を理解できるようにする。さらにそれらを通して，母集団の特徴や傾向を推測し判断したり，標本調査の方法や結果を批判的に考察したりする力を養う。

なお，これらの内容については理論的な取り扱いに深入りせず，具体的な例を工夫したりコンピュータなどの情報機器を用いるなどして確率分布の考えや統計的な推測の考えを理解できるようにする。例えば，二項分布が正規分布で近似されることなどの数理的現象については，コンピュータなどを用いて直観的に理解できるようにすることが考えられる。また，ここでの学習に関して，「数学Ⅱ」及び「数学A」の該当する内容を履修していない場合には，適宜必要な事項を補足するなどの配慮が必要である。

また，本科目の「(2) 統計的な推測」を含め統計的な内容は，共通教科情報の「情報Ⅱ」の「(3) 情報とデータサイエンス」との関連が深く，生徒の特性や学校の実態等に応じて，教育課程を工夫するなど相互の内容の関連を図ることも大切である。

標本調査の考え方について理解を深めること (ア (ア))

統計調査には，調査の対象となるものをもれなく調べる全数調査もあるが，全数調査では多くの時間，費用及び労力がかかり，実用的でないこともある。そこで，標本を抽出して調査し，その結果から全体の性質を推測する標本調査が必要となる。標本調査の目的は，抽出された標本の調査結果から，母集団の状況をできるだけ正確に推測することであり，そのためには，標本が母集団全体の特徴をよく表したものになるように，つまり，標本が母集団のよい縮図となるように標本調査を設計し，調査を実施する必要がある。中学校第3学年では，このような標本調査の必要性や意味を理解するとともに，無作為に抽出された標本から母集団の傾向を推定すればその結果が大きく外れることが少ないことや，標本の大きさが大きい方が母集団の傾向を推定しやすくなることを，コンピュータなどの情報機器を用いた実験や簡単な場合についての標本調査を通して経験的に理解している。

ここでは，中学校における学習を踏まえながら標本調査の考え方について理解を深め，目的に応じて標本調査を設計したり，標本調査の方法や結果を批判的に考察したりできるようにする。例えば，標本を無作為に抽出する方法として，母集団の全てのリストがない場合や，標本の抽出にかかる手間やコストを軽減したい場合には，クラスター抽出法（母集団を地域など複数の部分集団（クラスター）に分割し，部分集団を抽出してその集団に対しては全数調査を行う方法）や2段抽出法（クラスター抽出で抽出された部分集団から標本を抽出する方法）などの方法が用いられることを取り上げることが考えられる。

確率変数と確率分布について理解すること (ア (イ))

「数学 I」の「(4) データの分析」では、不確実な事象の起こりやすさに着目し、実験などを通して仮説検定の考え方を学んでいる。そこでは、実験などで集めたデータを基に、確率や確率分布等を直観的に取り扱っている。ここでは、それらの学習を踏まえ、分布を数学的に定式化するなどの目的を明確にした上で、確率変数とその分布について理解できるようにする。ここで取り扱う確率変数は、標本空間の各要素に対し一つの実数を対応させる写像のことである。例えば、互いに区別できる2枚の硬貨を投げる試行についての標本空間を $S = \{(\text{表}, \text{表}), (\text{表}, \text{裏}), (\text{裏}, \text{表}), (\text{裏}, \text{裏})\}$ とする。この試行において、 S のそれぞれの根元事象に対して表の出る枚数を確率変数 X とすれば、(表, 表) のとき $X = 2$, (表, 裏) のとき $X = 1$, (裏, 表) のとき $X = 1$, (裏, 裏) のとき $X = 0$ となり、次のような確率分布表が得られる。

X	0	1	2	計
確率	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

このような具体例を通して、確率変数とその分布の意味を十分に理解できるようにするとともに、確率変数の平均(期待値)、分散及び標準偏差が確率分布のどのような特徴を示しているかを理解できるようにする。また、確率変数の性質については、その必要性が感じられる場面で取り扱うようにする。

二項分布と正規分布の性質や特徴について理解するとともに、確率分布や標本分布の特徴を、確率変数の平均、分散、標準偏差などを用いて考察すること(ア(ウ)、イ(ア))

基本的な離散型確率分布である二項分布を取り扱う。一つの試行において、ある事象 E が起こる確率を p , 起こらない確率を q とする。すなわち、 $P(E) = p$, $q = 1 - p$, $0 < p < 1$ とする。この試行を独立に n 回だけ繰り返したとき、事象 E の起こる回数を確率変数 X とすれば、 X は二項分布 $B(n, p)$ に従い、 X が値 k をとる確率は次のようになる。

$$P(X = k) = {}_n C_k p^k q^{n-k} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n)$$

また、二項分布 $B(n, p)$ に従う確率変数 X の平均 np は、分散は npq である。

指導に当たっては、生徒の特性等に応じて適切な具体例を取り上げ、二項分布に従う確率変数の特徴や分布の様子を理解できるようにすることが大切である。例えば、1個のさいころを5回投げるとき、1の目が出る回数を X 回とすると、確率変数 X は二項分布

$B(5, \frac{1}{6})$ に従い、1の目が k 回出る確率は $P(X = k) = {}_5 C_k \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{5-k}$ となる。また4つ

の選択肢のうち1つが正解である問題が10問あり、それぞれの問題に対してランダムに解答を選択するとき、正解を選択した問題数を X 問とすれば、確率変数 X は二項分布 $B(10, \frac{1}{4})$ に従い、 k 問正解する確率は $P(X = k) = {}_{10}C_k \left(\frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{3}{4}\right)^{10-k}$ となる。このような例を通して、二項分布とは、一つの試行において、ある事象が起こるか、起こらないかだけに着目し、その試行を独立に何回も繰り返すような反復試行において見られる分布であることを理解できるようにする。また、確率分布表をもとに分布の様子をグラフに表すことで、二項分布 $B(n, p)$ に従う確率変数 X の平均が np になることや標準偏差が \sqrt{npq} になることなどの二項分布の特徴を、グラフの特徴と関連付けて理解できるようにすることも大切である。

次に、連続型確率分布である正規分布を取り扱う。正規分布は、連続的な確率変数の分布であり、その定義には連続関数や積分の概念等が用いられるため、数学的に厳密に取り扱うことは高等学校数学の範囲の中では難しい。その一方で、日常の事象や社会の事象において観測される変量には、その分布が近似的に正規分布に従うとみなせるものや、変量の値に影響を与えている原因を制御すれば正規分布に従うとみなせるものが数多く存在し、正規分布は統計学において重要な役割を果たす。それゆえ、正規分布の定義や分布曲線を与える式などについては理論的な取り扱いに深入りせず、具体的な例や実験などを通して、正規分布曲線の形や性質を理解できるようにすることが大切である。その際、確率変数 X が正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従うとき、 $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \doteq 0.683$ 、 $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \doteq 0.954$ 、 $P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \doteq 0.997$ であることやその意味について触れることも大切である。

また、確率変数 X が正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従う時、 $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ と置くと Z は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従うことを取り扱い、正規分布表を用いて確率 $P(a \leq X \leq b)$ を求めたり、日常の事象や社会の事象において観測され、正規分布に従うとみなせる変量について考察したりすることなどを取り扱う。

さらに、 n の値が大きいとき、二項分布が近似的に正規分布とみなせることについて取り扱う。その際、 n の値が大きくなると X の分布が、正規分布 $N(np, npq)$ に近づいていくことをコンピュータなどの情報機器を用いるなどして直観的に理解できるようにする。ここでは、二項分布で表わされる確率の近似値を、正規分布を活用して求めることに重点を置く。例えば、さいころを720回投げたとき、1の目が出る回数が100回以下となる確率などを取り扱うことが考えられる。二項分布で計算すると、その確率を求める式

$$\text{は } {}_{720}C_0 \left(\frac{5}{6}\right)^{720} + {}_{720}C_1 \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{5}{6}\right)^{719} + {}_{720}C_2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^{718} + \cdots + {}_{720}C_{100} \left(\frac{1}{6}\right)^{100} \left(\frac{5}{6}\right)^{620} \text{ とな}$$

り、計算が煩雑となるが、 n の値が大きいとき、二項分布は近似的に正規分布とみなすことができることや、確率変数 X が正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従う時、 $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ と置くと Z

は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従うことをもとにすると、その確率の近似値は正規分布表を用いて求めることができる。

正規分布を用いた区間推定及び仮説検定の方法を理解すること (ア (エ))

統計的な推定や検定は、自然現象や社会現象を科学的に研究するための方法として広く用いられている。ここでは、正規分布を用いた区間推定と仮説検定を取り扱う。

正規分布を用いた区間推定としては、例えば、任意の標本における平均値から、母集団における平均値を推定することを取り扱うことが考えられる。ある変数 x について、母平均 m 、母標準偏差 σ の母集団から大きさ n の標本を無作為に抽出し、その標本のもつ x の値を $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ とするとき、 n の値が大きければ標本平均 $\frac{X_1+X_2+X_3+\dots+X_n}{n}$ の値は母平均 m に近い。さらに、標本平均と m の差を $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ で割って、

$Z = \frac{X_1+X_2+X_3+\dots+X_n-nm}{\sigma/\sqrt{n}}$ と置くと、 Z は平均 0、標準偏差 1 の分布に従う。そして、 n の値

が十分大きければ、 Z の分布は標準正規分布 $N(0, 1)$ とみなすことができる。このことに基づいて母平均の区間推定が可能になる。

指導に当たっては、生徒の特性等に応じて、具体的な例を工夫するなどして区間推定の意味や方法を理解できるようにすることが大切である。例えば、大量に生産された製品の中から無作為に抽出された製品に関するあるデータについて、そのデータの平均値と母標準偏差が与えられているとき、それらを用いて信頼度 95% で母平均を推定することが考えられる。また、母平均の信頼区間の意味を理解できるようにするために、幾つもの標本を抽出し、それぞれの標本平均を求めたり、95% または 99% の信頼区間を求めたりすることも考えられる。その際、コンピュータなどの情報機器を積極的に用いるようにする。

また、正規分布を用いた仮説検定としては、例えば、母平均に関する検定を取り扱うことが考えられる。「数学 I」では、具体的な事象において、実験などを通して仮説検定の考え方を理解することを取り扱っている。ここでは、「数学 I」での学習を踏まえながら、正規分布を用いた仮説検定の方法を理解できるようにする。

一般に、仮説検定は次のような手順で行われる。

- 1) ある事象 E が起こった状況や原因を推測し、仮説を立てる。
- 2) その仮説を数学的に記述することで、統計的に実証したい仮説 H_1 (対立仮説) を立て、その否定命題としての帰無仮説 H_0 を考える。
- 3) 帰無仮説 H_0 が真であると仮定した場合に事象 E が起こる確率 p を求める。
- 4) 実験などを行う前に決めておいた「滅多に起こらないと判断する基準 (確率の値)」(有意水準) と p とを比較して、帰無仮説 H_0 が真であると考えられることを否定できるかどうかを判断し、仮説の妥当性を判断する。

指導に当たっては、生徒の特性等に応じて適切な具体例を取り上げ、仮説検定の方法を理解できるようにすることが大切である。例えば、次のような場面を考える。

あるコインにはどちらかの面が出やすくなるよう細工がされているという噂がある。そこで、実際にそのコインを投げる実験を行ったところ、100回投げて、表が61回出た。このとき、このコインには細工がされていると主張してよいだろうか。

このとき、仮説検定ではまず、「このコインには細工がされている」という主張や仮説に対し、それを数学的に記述したもので統計的に実証したい仮説「表の出る確率と裏の出る確率は等しくない」（対立仮説 H_1 ）を立て、その否定命題である「表と裏が出る確率は等しい」という仮説（帰無仮説 H_0 ）を考える。このような帰無仮説を立てる理由は、背理法において否定すべき仮説を立てる理由と同じである。背理法との違いは、否定したい命題（帰無仮説）と観測された事象の矛盾を論理的矛盾ではなく確率が定められた値より小さいことで判断する点である。そして、「表と裏が出る確率は等しい」という帰無仮説 H_0 が真であったと仮定した場合に「表が61回以上出る」という事象 E が起こる確率 p を求める。このとき、表が出る回数 n は二項分布 $B(100, \frac{1}{2})$ に従い、 $Z = \frac{n-50}{\sqrt{25}}$ とおくと、 Z の分布は近似的に標準正規分布に従うと考えてよい。 $n=61$ のとき、 $Z=2.2$ であり、正規分布表から $P(n \geq 61)$ は約 1.4% と分かる。先に決めておいた「滅多に起こらないと判断する基準（確率の値）」（有意水準）が 5% であったとすると、5% と比べ p の値は小さいので、「表と裏が出る確率は等しい」という帰無仮説 H_0 が真であると考えられることは否定できると判断し、対立仮説が正しいと考え、「このコインには細工がされている」と考えることが妥当であると判断する。

このような具体的な事例を通して、統計的仮説検定では、帰無仮説を立てることや背理法に似た論法が用いられること、さらには帰無仮説が真であると仮定した場合のある事象が起こる確率について考えることなどを理解できるようにすることが考えられる。また、帰無仮説が否定されないときも、必ずしも帰無仮説が支持されるわけではないことや、仮説検定で支持される全ての命題が真であるわけではないことにも留意する。このように、ここでは、仮説検定の考え方についての理解を深めることに重点を置く。

目的に応じて標本調査を設計し、収集したデータを基にコンピュータなどの情報機器を用いて処理するなどして、母集団の特徴や傾向を推測し判断するとともに、標本調査の方法や結果を批判的に考察すること（イ（イ））

目的に応じて必要となる標本の大きさを、正規分布を用いた区間推定の方法をもとに計算して標本調査を設計したり、正規分布をなす母集団の平均値を検定したり、新聞やイン

ターネットなどから得られた標本調査の方法や結果について、仮説検定の考え方に基づいて批判的に考察したりできるようにすることが大切である。また、生徒の特性等に応じて、情報科と連携していろいろな場面で検定を取り扱い、検定の有用性の理解を深めることも考えられる。

このような学習を通して、統計的な推測の意味やよさを理解できるようにし、日常の事象や社会の事象の考察に数学を活用しようとする態度を養うようにする。

第二節 教科書の学習内容の構成—東京書籍・啓林館を例として—

教科書における統計の学習内容の連続性に関わる部分の実際を眺める。新学習指導要領のスタートは、幼稚園はすでに2018年度から始められていて、小学校は2020年度から、中学校は2021年度から、高等学校は2022年度からである。本稿で対象とする教科書は現在使用されている現行の学習指導要領の下でのものとなる。

小学校・中学校・高等学校と3校種を作成している教科書会社は、東京書籍・啓林館の2社である。三重県では小学校は全県東京書籍で中学校は10地区の内、4地区が東京書籍、4地区が啓林館、1地区が数研出版、1地区が教育出版となっている。本節では、採択状況を鑑みて、東京書籍を対象とする。

1. 小学校『新しい算数』（2017年2月10日発行）

1年生（上）



【考察】

上の絵を見て、種類別に動物を数え、その分だけ下の絵を塗る活動を行う。そして、塗った図をもとに、それぞれの動物が何匹いるのかを下の枠に書き込ませる。また下の図では塗った個数が高さに表れるようになっており、次学年や棒グラフの学習につながると考えられる。上の図を見ると、豚、コアラ、クマは見かけ上の高さは同じに見える。犬と猫は1列に並んでおらず高さもそろっていない。見かけ上の量（特に高さ）と真の量は必ずしも一致せず、均等に並べて考える必要があることがうかがえる。これは、思考力、判断力に相当すると考えられる。

どんなとくちょうがあるかな？

学校で起こるけがについて話し合ってみよう。

さい近、学校でけがが多いので気をつけましょう。

けがのしゅるいや場所などについて調べて、とくちょうを知りましょう。

どこなけがが多いのだろう。

どこでけがをすることが多いのかな。

けがはいつが多いのかな。

けがのしゅるいや場所などについて調べて、とくちょうを知りましょう。

とくちょうをわかりやすく表すには…

りえ たけし あやか

こうた

94

18 見やすく整理して表そう

さい近、学校で起きたけがのしゅるいを、先生が読み上げています。

すりきず 切りきず 打ぼく すりきず ねんざ 打ぼく すりきず
 打ぼく すりきず 切りきず すりきず 打ぼく すりきず 切りきず
 ねんざ 打ぼく すりきず すりきず 打ぼく 切りきず
 すりきず ねんざ すりきず 打ぼく すりきず 打ぼく
 すりきず すりきず 打ぼく 切りきず

1 整理のしかた

1 上のけがのしゅるいとそれぞれの人数を、表に整理してわかりやすく表しましょう。

1 「正」の字を使って人数を調べ、下の㉞の表に書きましょう。

2 「正」の字を使って表した数を数字になおし、下の㉟の表に書きましょう。

すりきず
切りきず
打ぼく
ねんざ

1人…一
2人…二
3人…三
4人…正
5人…正

けがのしゅるい	人数(人)
すりきず	
切りきず	
打ぼく	
ねんざ	
合計	

95

3 「合計」が全体の人数と合っているかたしかめましょう。

4 いちばん多いけがは何ですか。

2 どこで何人けがをしているか調べて、表にまとめましょう。

校庭 教室 体育館 ろう下 げんかん 校庭
 校庭 教室 校庭 校庭 トイレ ろう下
 体育館 校庭 体育館 体育館 校庭 ろう下
 校庭 教室 体育館 校庭 体育館 校庭
 校庭 ろう下 体育館 ろう下 校庭 校庭

5 「正」の字を使って人数を調べましょう。

6 人数の少ないものは、まとめて「その他」としました。「その他」には、どんな場所が入りますか。

合計が全体の人数と合っているかたしかめよう。

7 いちばん多くけがをしている場所はどこですか。

場所	人数(人)
校庭	
体育館	
ろう下	
教室	
その他	
合計	

多い、少ないを、ひと目でわかりやすく表すには…

96

2 ぼうグラフ

1 95ページの2で整理した表を、下のようなグラフに表しました。どんなことがわかりやすくなりますか。

1 右のグラフのしめりは、何人を表していますか。

2 それぞれのけがの人数は何人ですか。

3 打ぼくの人数は、ねんざの人数より何人多いですか。また、打ぼくの人数は、ねんざの人数の何倍ですか。

4 みほさんは、上のグラフを下のようなグラフになおしました。どのようにふうをしたのでしょうか。

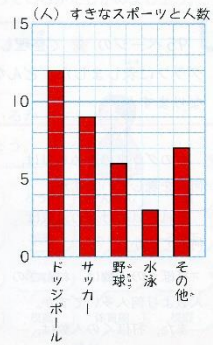
ぼうの長さで大きさを表したグラフを、ぼうグラフといいます。ぼうグラフに表すと、何が多くて何が少ないかひと目でわかります。

(人) けがのしゅるいと人数

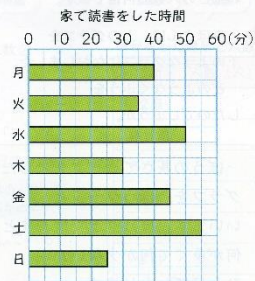
(人) けがのしゅるいと人数

97

- 1 たけしさんは、組の人たちの好きなスポーツを調べて、右のグラフに表しました。
- ① グラフの1めもりは何人を表していますか。
 - ② それぞれの人数は何人ですか。
 - ③ ドッジボールの人数は、水泳の人数の何倍ですか。



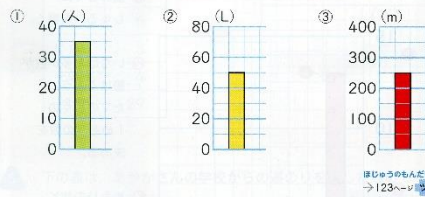
- 2 右のグラフは、リエさんが先週家で読書をした時間を表したものです。グラフをよみましょう。



- 1 グラフの1めもりは、何分を表していますか。
- 2 読書をした時間を、曜日のじゅんにいましょう。

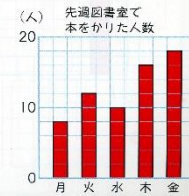
曜日のように、じゅんじょが決まっているときは、大きいじゅんにならべないこともあるよ。

- 2 下のぼうグラフで、1めもりが表している大きさと、ぼうが表している大きさをいましょう。



- 3 右のグラフは、リエさんの組で、先週図書室で本をかりた人数を表したものです。

- ① グラフの1めもりは、何人を表していますか。
- ② 木曜日の人数は何人ですか。
- ③ 先週本をかりた人は、全部で何人ですか。



- 3 96ページの2の表を、ぼうグラフに表しましょう。

けがをした場所と人数

場所	校庭	体育館	ろう下	教室	その他	合計
人数(人)	13	7	5	3	2	30

II ぼうグラフのかき方

- ① 横のじくにしゅるいを書く。
- ② いちばん多い数が書けるように、たてのじくの1めもりの数を決める。
- ③ めもりの数とたんいを書く。
- ④ 数にあわせて、ぼうをかく。
- ⑤ 表題を書く。
- ⑥ 表題は先に書いてもいいよ。

「その他」は数が多くても、さいごに言くんだよ。

- 4 下の表は、たけしさんの組の人たちの、すきなくだものについてまとめたものです。この表をぼうグラフに表しましょう。

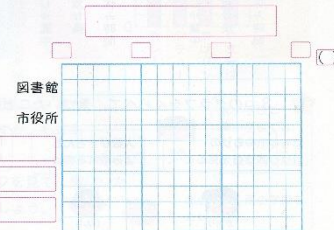
すきなくだもの

しゅるい	人数(人)
りんご	9
メロン	7
みかん	6
いちご	3
その他	4
合計	29

- 5 下の表は、あやかさんの学校からの道のりを表したものです。この表をぼうグラフに表しましょう。

学校からの道のり

場所	道のり(m)
図書館	1200
駅	500
交番	650
公園	400
市役所	950



4 下の3人は、けがをした時間と人数を調べ、それぞれグラフに表しました。3人のかいたグラフをくらべましょう。

時間	人数(人)
休み時間	18
放校後	9
じゅ業中	3
合計	30

あやか

たかし

りま

1 3つのグラフをくらべて、気づいたことをいましょう。

① めもりの大きさをみると...

② 人数がちんとよみ取れるのは...

③ 同じことを表しているのに、見た目は...

2 ひろきさんは、りえさんのグラフを見て、下のようになっています。この考えは正しいですか、正しくないですか。わけもいましょう。

ひろき: 放校後とじゅ業中では、けがをした人数はあまりかわらないね。

6 下のグラフは、北小学校と南小学校の3年生の、いちばんすきなきゅう食のメニューを表したものです。2つのグラフをくらべましょう。

北

南

① 右の考えは正しいですか、正しくないですか。わけもいましょう。

ゆみ: 北小学校と南小学校では、カレーがすきな人数は同じだね。

② 2つのグラフを見て、気づいたことをいましょう。

たくる: 北小学校も南小学校もカレーは...

3 表のくふう

1 下の表は、11月、12月、1月にけがをした3年生の人数を、けがのしゅるいごとにまとめたものです。3か月で、いちばん多いけがは何ですか。

けが調べ (11月)	けが調べ (12月)	けが調べ (1月)
しゅるい 人数(人)	しゅるい 人数(人)	しゅるい 人数(人)
すりきず 7	すりきず 9	すりきず 12
切りきず 3	切りきず 5	切りきず 4
打ぼく 5	打ぼく 10	打ぼく 6
その他 6	その他 8	その他 7
合計 21	合計 32	合計 29

全体のようなすがわかるように、1つの表にまとめよう。

けが	11月	12月	1月	合計
しゅるい				
すりきず	7	9	12	
切りきず	3			
打ぼく				
その他				
合計				

① それぞれの月のけがをした人数を表に書きましょう。

② 表の①、②、③に入る数は、それぞれ何を表していますか。

③ ④に入る数は、たてにたしても横にたしても...

18 ぼうグラフと表 しあげ

1 休み時間に、学校の前を通った乗り物を調べたら、次のようでした。

表や、ぼうグラフの表し方がわかるかな?

① 96〜②③
② 96〜②③
③ 100〜②③
④ 96〜②③

乗り物調べ

しゅるい	乗用車	トラック	バイク	その他	合計
数(台)					

① 絵を見て、表に整理しましょう。

② 「その他」には、どんな乗り物が入りますか。

③ 表をぼうグラフに表しましょう。

④ みきさんは、グラフを見て、「いちばん数が少ない乗り物はバイクです。」といました。みきさんの考えは正しいですか、正しくないですか。わけもいましょう。

【考察】

3年下では棒グラフの書き方・読み取り方を学習する。

学校で起きたけがの種類について表やグラフに整理して表す活動を行う。2年次ではグラフに丸を書くことによって人数を調べたが、3年次では「正」の字を使って人数を調べる方法について学習する。(p.95)

次に、けがをした場所を表にまとめる活動を行う。学習した内容の演習にあたる部分ではあるが、人数の少ないものをまとめて「その他」と表すことをここで学習する。(p.96)

次に、棒の長さで大きさを表したグラフを棒グラフということを学習する。また、グラフを見やすくするための工夫として、大きい順に並べ替えるということも学習する。(p.97)

次に、棒グラフの読み取りについての学習を行う。読み取りの視点としては、グラフの1目盛りが表す量、それぞれの項目の量の大きさ、項目どうしの比較、項目全体の総量等があげられる。(pp.98-99)

次に、棒グラフの表し方について学習する。棒グラフを書く手順は次のようにまとめられている。①横軸に種類を書く→②一番多い数が書けるように縦軸の1目盛りを決める→③目盛りの数と単位を書く→④数に合わせて棒を書く→⑤表題を書く。(pp.100-101)

次に、同じ表を1目盛りあたりの量が異なるグラフに表した時の読み取りについての考察を行う。ここでの学習は、グラフの形だけを見ても正確に読み取ることはできないということに気づかせることが狙いだと考えられる。この部分が思考力、判断力に相当すると考えられる。(pp.102-103)

最後に、複数の表を全体の様子分かるように1つの表にまとめる活動を行う。(p.104)

4年生 (上)

4月なのに秋?

秋になって、だんだんすずしくなってきました。 日本は春だというのに...

オーストラリアのシドニーにいる友だちから、メールがとどきました。

東京 (日本)

シドニー (オーストラリア)

4月

7月

10月

1月

折れ線グラフと表

1 グラフや表を使って調べよう

東京 (日本) とシドニー (オーストラリア) の1年間の気温を調べました。

1年間の気温の変わり方 (東京)

月	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
気温(度)	6	6	9	14	18	22	25	27	23	18	13	8

1年間の気温の変わり方 (シドニー)

月	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
気温(度)	22	22	21	18	16	13	12	13	16	18	19	21

表では、変わり方がわかりにくいね。

▼ 変わり方のようすを、わかりやすくする表し方について考えていこう。

1 折れ線グラフ

東京の気温の変わり方を表すには、どのようなグラフに表したらよいか考えましょう。

棒グラフに表すとこうなるけど...

折れ線グラフに表すとこうなるけど...

気温のように、変わっていくものようすを表すには、折れ線グラフを使います。

→

(度) 1年間の気温の変わり方 (東京)

- 1 横のじくは、何を表していますか。また、たてのじくは、何を表していますか。
- 2 たてのじくの1めもりは、何度を表していますか。
- 3 3月の気温は、何度ですか。
- 4 気温が18度なのは、何月と何月ですか。
- 5 いちばん高い気温は何度で、それは何月ですか。

2 8ページの折れ線グラフを見て、東京の気温の変わり方を調べましょう。

- 1 気温が上がっているのは、2月から何月までですか。また、気温が下がっているのは、何月から何月までですか。
- 2 気温が変わっていないのは、何月から何月までですか。
- 3 気温の上がり方がいちばん大きいのは、何月と何月の間ですか。また、何度上がっていますか。 気温がいちばん高いのは8月だけけど...
- 4 2月から8月まで、気温の上がり方がいちばん小さいのは、何月と何月の間ですか。
- 5 8月から12月まで、気温の下がり方がいちばん小さいのは、何月と何月の間ですか。

まとめ

折れ線グラフでは、線のかたむきで変わり方がわかります。また、線のかたむきが急であるほど、変わり方が大きいことを表しています。

上がる (ふえる)

変わらない

下がる (へる)

折れ線グラフは、変わっていくようすがわかりやすいね。

3 シドニーの1年間の気温の変わり方を、折れ線グラフに表してみましょう。

1年間の気温の変わり方(シドニー)

月	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
気温(度)	22	22	21	18	16	13	12	13	16	18	19	21

折れ線グラフのかき方

- 横のじくに「月」をとり、同じ間をあけて書く。単位も書く。
- たてのじくに「気温」をとり、いちばん高い気温が表せるようにメモリのつけ方を考え、メモリの表す数を書く。単位も書く。
- それぞれの月の気温を表すところに点をうち、点を直線で結ぶ。
- 表題を書く。

表題は先に書いてもいいよ。

1 かいた折れ線グラフを見ると、シドニーの気温の変わり方、どんなことがわかりますか。



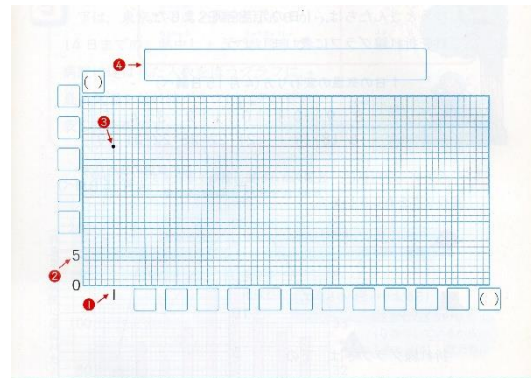
東京の気温の変わり方と、くらべてみるには…

2 次のページのグラフ用紙に、東京の1年間の気温の変わり方を、折れ線グラフに表しましょう。

シドニーの線と色を、変えるとわかりやすいね。

1年間の気温の変わり方(東京)

月	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
気温(度)	6	6	9	14	18	22	25	27	23	18	13	8



3 上のグラフ用紙に重ねてかいた、東京とシドニーの折れ線グラフを見ると、どんなことがわかりますか。

東京のグラフは、山のような形になっていて、シドニーのグラフは…



東京とシドニーの気温が同じになるのは…



東京とシドニーで、気温のちがいがいちばん大きい月は…



重ねて表すと、くらべてやすくなるね。

4 ゆうとさんたちは、1日の気温を調べました。これを折れ線グラフに表しましょう。

1日の気温の変わり方(4月15日調べ)

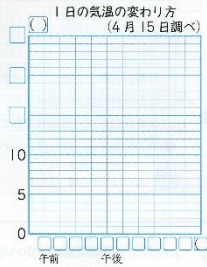
時こく(時)	午前8	9	10	11	午後0	1	2	3	4	5
気温(度)	16	18	19		21	22	23	22	21	19

1 右のグラフ用紙に、気温の変わり方を表しましょう。

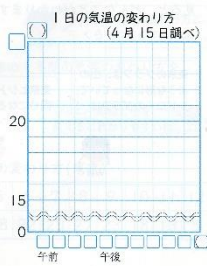
午前10時と午後0時は、目盛りを結ぼう。

15度より小さいメモリの、あるのかな。

折れ線グラフでは、下のグラフのように、メモリの印を使って、メモリのと中を省くことがあります。



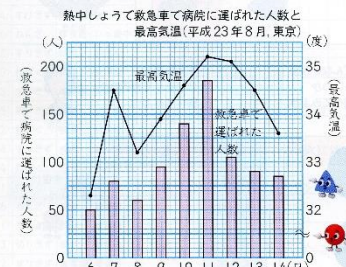
2 右のグラフ用紙に、気温の変わり方を表しましょう。



3 午前11時の気温は、どれくらいといえますか。

4 2つのグラフを見て、気づいたことを話し合おう。

5 下は、東京で平成23年8月6日から14日までの、熱中しようで救急車で病院に運ばれた人数をばうグラフに、最高気温を折れ線グラフに、それぞれ表したものです。



32度と33度の間を10等分しているから、1めもりは1度だね。

最高気温のめもりは、と中を省いているね。

- 13日に運ばれたのは何人ですか。また、その日の最高気温は何度ですか。
- 最高気温がいちばん高いのは、何日ですか。
- 運ばれた人がいちばん少ないのは、何日ですか。
- 最高気温の変わり方がいちばん大きいのは、何日と何日の間ですか。また、そのとき、運ばれた人はふえていますか、へっていますか。
- 5 グラフを見て、気づいたことを話し合おう。

2 整理のしかた

ゆいさんたちは、けが調べの表を見て、けがを少なくするための話し合いをしています。

どんなけがが多いかな。
 どこでけがをするのが多いかな。
 校庭ですりきずが多そうだ。
 けがに注意するポスターを作ろう。

ゆい そうた はるか ゆうき

どんなけがが多いのか調べてみよう。
 どんな場所でけがをしているのか調べてみよう。

けがの種類	人数(人)	場所	人数(人)
すりきず		校庭	
打ぼく		体育館	
切りきず		教室	
ねんざ		ろう下	
合計		合計	

「正」を言いて調べよう。

本当に、すりきずは校庭で多いかな。

記録を見やすく整理する方法を考えていこう。

- どんなけがが、どんな場所で多いかを見やすく表すには、どのように整理したらよいか考えましょう。

けが調べ(4月)

種別	けがの種類	場所	けがをした時間
2	打ぼく	体育館	昼休み
1	すりきず	体育館	昼休み
3	切りきず	校庭	昼休み
6	すりきず	校庭	放課後
5	すりきず	校庭	昼休み
1	打ぼく	教室	休み時間
4	すりきず	体育館	休み時間
6	ねんざ	体育館	じゅぎょう中
2	すりきず	校庭	昼休み
5	打ぼく	校庭	放課後
3	すりきず	体育館	昼休み
5	切りきず	教室	昼休み
2	打ぼく	校庭	放課後
4	すりきず	校庭	じゅぎょう中
4	打ぼく	ろう下	休み時間
1	打ぼく	体育館	昼休み
6	ねんざ	校庭	放課後
1	すりきず	校庭	放課後
3	切りきず	校庭	昼休み
2	すりきず	体育館	昼休み
5	すりきず	校庭	じゅぎょう中
2	すりきず	校庭	放課後
3	打ぼく	体育館	休み時間

- けがの種類とけがをした場所の2つに目をつけて、下の表に人数を書きましょう。

けがの種類とけがをした場所(4月)(人)

けがの種類	場所	校庭	体育館	教室	ろう下	合計
すりきず						
打ぼく						
切りきず						
ねんざ						
合計						

- それぞれの合計を計算しましょう。
- ⑥のところに入る数はいくつですか。
- どこでどんなけがをした人が、いちばん多いでしょうか。
- 表を見て、気づいたことをいましょう。

校庭や体育館はすりきずが多いから...
 どのようなポスターを作ればいいのかな。

- けが調べの記録を見て、学年や、けがをした時間や、けがの種類に目をつけて、人数を表にまとめよう。

何と何について表にまとめるとき、自分で決めてみよう。

2 おおいさんの組の、先週と今週の図書室での本の利用のようすを調べましょう。

先週と今週の本の利用のようすがわかるようにするには、どのように整理すればよいか考えよう。

- 右の表を見て、下の表に人数を書きましょう。

先週	今週	人数(人)
○	○	11
○	×	
×	○	
×	×	

先週も今週も借りた人は11人だね。

本の利用のようす(人)

	先週	今週	合計
借りた	11	⑤	⑥
借りない	⑦	⑧	
合計		⑨	⑩

- ⑤、⑦、⑧は、それぞれどのような人を表していますか。また、⑥、⑨、⑩は、それぞれどのような人を表していますか。
- 上の表のあいているところに、人数を書きましょう。

本の利用のようす

出席番号	先週	今週
1	○	○
2	○	×
3	×	×
4	×	×
5	○	○
6	○	×
7	○	○
8	×	○
9	○	×
10	×	○
11	○	○
12	×	×
13	○	○
14	○	×
15	○	○
16	○	○
17	×	○
18	○	○
19	○	○
20	×	×
21	○	○
22	×	○
23	○	×
24	×	○
25	○	×
26	×	○
27	○	○
28	○	×
29	×	○
30	×	○
31	×	×
32	○	×

○...借りた
 ×...借りない

1 折れ線グラフと表 しあげ

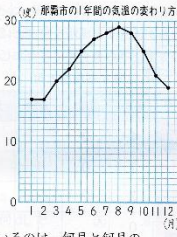
右の折れ線グラフは、那覇市の1年間の気温の変わり方を表したものです。

① たてのじくと横のじくは、それぞれ何を表していますか。

② いちばん気温が高いのは何月で、それは何度ですか。

③ 気温が1度下がっているのは、何月と何月の間ですか。

④ 気温が変わっていないのは、何月と何月の間ですか。



- 折れ線グラフのよみ方がわかるかな?
- 7ページ
 - 7ページ
 - 9ページ
 - 9ページ

- 高知市の1年間の気温の変わり方を表す折れ線グラフを、①のグラフの上にかきましょう。

高知市の1年間の気温の変わり方

月	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
気温(度)	6	8	11	16	20	23	27	28	25	19	14	9

2つのグラフをくらべて、気づいたことを書こう。

- 折れ線グラフのかき方がわかるかな?
- 10ページ

- 折れ線グラフに表すよいものはどれですか。
 - 1時間に道路を通った乗りの種類とその数
 - 毎年4月に調べた自分の身長
 - 午前10時のいろいろな場所の気温
- わけて説明しよう。

- 折れ線グラフに表すよいものがわかるかな?
- 7ページ

【考察】

4年生上では折れ線グラフについて指導している。

年間の気温の変化の例を元に、変化の様子を表すには「折れ線グラフ」を使うことを学習する。3年次で学習した棒グラフとの比較を行いながら、縦横の軸がそれぞれ何を表しているか、1目盛りあたりの量について考え、読み取りを行う。また、棒グラフにはない折れ線グラフ独自の読み取りの視点として、線の傾きに注目すべきということも学習する。具体的には、線の傾きが急であるほど変化が大きいということも学習する。(pp.8-9)

次に、折れ線グラフの書き方について学習する。折れ線グラフの書き方について次のようにまとめられている。①横軸に等間隔で数を書き、単位も書く→②一番大きい量が表せるように目盛りのつけ方を考え、目盛りの表す数を書き、単位も書く→③それぞれが表すところに点をうち、点を直線で結ぶ→④表題を書く(先に書いてもよい)。また、折れ線グラフを書く演習もかねて、東京とシドニーの1年間の気温の変化を同じグラフに重ねて表させて、できたグラフから2都市の違いを比較する活動も行う。さらに、折れ線グラフでは~の印を使って目盛りの途中を省略することがあることを学習する。(pp.10-12)

次に、2つのデータの関係性を読み取る活動を行う。ここでは、棒グラフと折れ線グラフが合わさったグラフを例に考察し話し合う。ここが思考力、判断力、表現力に相当すると考えられる。(p.13)

最後に得られたデータを生活に生かすために整理し考察する活動を行う。また、データによってどのように整理すればよいかについても考える。(pp.14-16)

5年生(下)

3 割合を表すグラフ

1

下の表は、都道府県別のみかんの収かく量と割合を表したものです。割合を表すグラフについて調べましょう。



熊本県宇土市

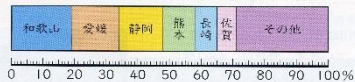
都道府県別のみかんの収かく量と割合(2013年)

都道府県	和歌山	愛媛	静岡県	熊本	長崎	佐賀	その他	合計
収かく量(t)	168900	137800	121800	91600	60900	53000	261900	895900
割合(%)	19	15	14	10	7	6	29	100

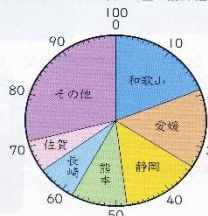
(2014年産林水産統計より)

割合を見やすくするには、下のようなグラフに表します。

① 都道府県別のみかんの収かく量の割合(2013年)



② 都道府県別のみかんの収かく量の割合(2013年)



②のグラフを**帯グラフ**といいます。帯グラフは全体を長方形で表し、各部分の割合を直線で区切って表します。
①のグラフを**円グラフ**といいます。円グラフは全体を円で表し、各部分の割合を半径で区切って表します。

- 1 ②の帯グラフ、①の円グラフを見て、次のことを調べましょう。
- ① 和歌山、愛媛、静岡の収かく量は、それぞれ全体の何%ですか。
 - ② ①の3県の合計の収かく量は、全体のおよそ何分の一ですか。
 - ③ 和歌山は、熊本のおよそ何倍ですか。

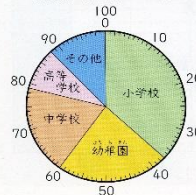
ほかに気づいたことはないかな

まとめ

帯グラフや円グラフは、全体をもとにしたときの各部分の割合をみたり、部分どうしの割合を比べたりするのに便利です。

- 1 下の円グラフは、日本の学校数の、種類別の割合を表したものです。次の問題に答えましょう。

日本の学校数の種類別の割合(2013年)



- ① 小学校の割合は、何%ですか。
- ② 中学校は、高等学校のおよそ何倍になっていますか。
- ③ 幼稚園、中学校、高等学校をあわせると、全体のおよそ何分の一になりますか。また、何%ですか。

2

下の表は、「好きな教科」について、みかさんの小学校でアンケートを行った結果です。これを帯グラフや円グラフに表しましょう。



好きな教科

教科	算数	体育	図画工作	国語	音楽	その他	合計
人数(人)	125	108	64	48	19	36	400
割合(%)	31						100

- 1 それぞれの人数が全体の何%になるかを求めて、上の表に書きましょう。

$$125 \div 400 \times 100 = 31.25\%$$

$\frac{1}{10}$ の位で四捨五入しよう。

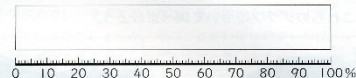
帯グラフや円グラフのかき方

- ① 各部分の割合を百分率で求める。合計が100%にならないときは、割合のいちばん大きい部分か「その他」を増やしたり減らしたりして合計を100%にする。
- ② ふつう、割合の大きい順に、各部分をそれぞれの百分率にしたがって区切る。

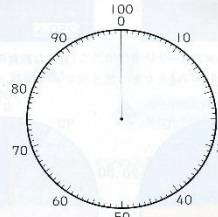
「その他」は最後だよ。

- 2 前のページの表の割合を、下の帯グラフや円グラフにかきましょう。

好きな教科



好きな教科

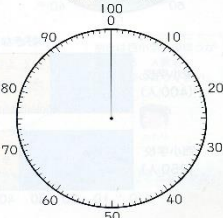


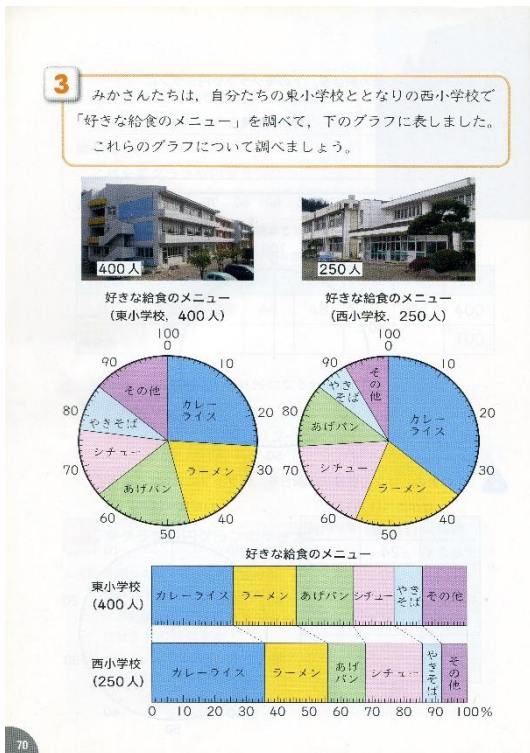
- 2 下の表の、けがの種類別の割合を、円グラフに表しましょう。

けが調べ(1月)

種類	件数(件)	百分率(%)
すりずす	24	
打ぼく	15	
切りずす	12	
ねんざ	5	
その他	4	
合計	60	

けが調べ(1月)





1 東小学校のラーメンの割合、西小学校のカレーライスの割合は、それぞれ何%ですか。

2 東小学校のカレーライスの人数は、東小学校全体のおよそ何分の一といえるでしょうか。そのことがわかりやすいのは、円グラフと帯グラフのどちらのグラフだと思いますか。

3 東小学校と西小学校で、シチューの人数の割合が高いのはどちらの学校ですか。そのことがわかりやすいのは、円グラフと帯グラフのどちらのグラフだと思いますか。

4 東小学校、西小学校のラーメンの人数は、それぞれ何人ですか。

5 東小学校のあげパンの人数は、やきそばの人数の何倍になっていますか。

6 東小学校と西小学校の、カレーライスの人数について、かおりさんは右のようにいいました。かおりさんの考えは正しいですか、正しくないですか。ことばや式を使って、そのわけも説明しましょう。

西小学校の帯グラフは、大きい値に
ならんでいないね、どうしてだろう。

割合は西小学校のほうが
高いから、人数も
西小学校のほうが多い。

4つのグラフを見て、ほかに気づいたことはないかな。

【考察】

5年生下では帯グラフと円グラフについて指導している。

割合を表すグラフとして帯グラフと円グラフを学習する。また、これらは全体をもとにしたときの各部分の割合をみたり、部分どうしの割合を比べたりするのに適していることも学習する。(pp.66-67)

次に、帯グラフや円グラフの書き方について学習する。書き方については次のようにまとめられている。①各部分の割合を百分率で求める(合計が100%にならないときは割合の一番大きい部分か「その他」を増減させ100%にする)→②ふつう、割合の大きい順に、各部分を百分率にしたがって区切る(「その他」は最後)。(pp.68-69)

最後に帯グラフ・円グラフの読み取りについて学習する。ここでは、同じデータを2通りのグラフで表し、比較したいことや読み取りたいことに応じてどちらのグラフの方が分かりやすいかについて考える。これは表現力、判断力に相当すると考えられる。(pp.70-71)

どんなことがわかるかな？

下の表は、12月10日に東小屋のにわとりが産んだ全部の卵の重さを記録したものです。

① 53	② 48	③ 58	④ 63	⑤ 65	⑥ 58	⑦ 53	⑧ 56
⑨ 58	⑩ 57	⑪ 60	⑫ 55	⑬ 67	⑭ 50	⑮ 62	⑯ 57

この表から、どんなことがわかるかな。

いちばん重い卵の重さは…

同じ重さの卵が…

平均すると、卵1個の重さは…

わかることを整理してみよう。

いちばん重い卵の重さ	□ g
いちばん軽い卵の重さ	□ g
卵の重さの合計	□ g

1つの表からでも、いろいろなお知らせがわかるね。

西小屋の卵はどんな様子かな。

資料の調べ方

13 資料の特ちょうを調べよう

下の表は、12月10日に西小屋のにわとりが産んだ全部の卵の重さを記録したものです。

① 50	② 63	③ 54	④ 74	⑤ 63	⑥ 45	⑦ 54	⑧ 67
⑨ 60	⑩ 47	⑪ 68	⑫ 52	⑬ 57			

1 平均とちがらり

12月10日に、重い卵がよく産まれたといえるのは、東小屋と西小屋のどちらの小屋ですか。

1 どのような比べ方がありますか。

いちばん重い重さどうしを…

合計の重さで…

いちばん軽い重さどうしを…

卵の重さの平均で…

2 考えた比べ方で比べると、どちらの小屋が重い卵がよく産まれたといえますか。比べ方について話し合ってみよう。

いちばん重い重さで比べると西小屋だけど、いちばん軽い重さで比べても…

卵の数がちがうから、重さの合計で比べても…

3 東小屋と西小屋それぞれの、卵の重さの平均で比べてみましょう。

まどめ
いくつかの集団の記録を比べるとときに、それぞれの集団の記録の平均を使うことがあります。

2 東小屋と西小屋の卵の重さは、それぞれどんなはんに、どのようにちがっているか調べてみましょう。

重さを数直線の上に表すと、調べやすいね。

4 西小屋の卵の重さを、数直線に表しましょう。

5 東小屋と西小屋のそれぞれで、いちばん重い重さといちばん軽い重さの差はどれだけありますか。

6 それぞれの数直線の、平均の重さを表すところに、↑をかきましょう。

7 卵の重さは、いつも平均の近くに集まるといえますか。

① 53	② 48	③ 58	④ 63	⑤ 65	⑥ 58	⑦ 53	⑧ 56
⑨ 58	⑩ 57	⑪ 60	⑫ 55	⑬ 67	⑭ 50	⑮ 62	⑯ 57

ちがらりの様子を、数えて見やすいように表せなかな。

3 東小屋と西小屋の卵の重さについて、全体のちがらりの様子が数で見やすいように、表に整理しましょう。

1 重さを5gずつに区切って、卵の数を整理します。

50gの卵は、どのはんに入りますか。

また、もし49.9gの卵があったとすると、どのはんに入りますか。

50以上というのは、50と等しいか、50より大きいことだよ。

重さ(q)	個数(個)
45以上～50未満	
50～55	
55～60	
60～65	
65～70	
70～75	
合計	

重さ(q)	個数(個)
45以上～50未満	
50～55	
55～60	
60～65	
65～70	
70～75	
合計	

2 それぞれのはんに入る卵の数を、右の表に書きましょう。

① 50	② 63	③ 54	④ 74	⑤ 63	⑥ 45	⑦ 54	⑧ 67
⑨ 60	⑩ 47	⑪ 68	⑫ 52	⑬ 57			

東小屋の卵の重さ		西小屋の卵の重さ	
重さ(g)	個数(個)	重さ(g)	個数(個)
45以上~50未満	1	45以上~50未満	2
50 ~55	3	50 ~55	4
55 ~60	7	55 ~60	1
60 ~65	3	60 ~65	3
65 ~70	2	65 ~70	2
70 ~75	0	70 ~75	1
合計	16	合計	13

- 東小屋と西小屋で、重さが55g未満の卵はそれぞれ何個ありますか。
- 東小屋と西小屋で、重さが55g以上65g未満の卵は、それぞれ何個ありますか。
また、その割合は、それぞれの小屋全体の個数のおよそ何%ですか。
- 東小屋と西小屋で、重さが65g以上の卵の割合は、それぞれの小屋全体の個数のおよそ何%ですか。
- 西小屋の卵13個のうち、軽いほうから数えて3番め、5番め、7番めの卵は、それぞれ何g以上何g未満のはんいにありますか。

まとめ

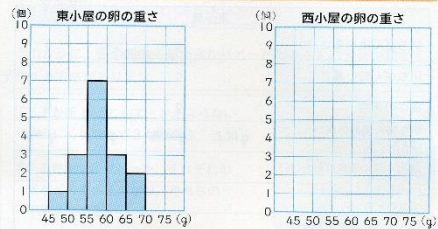
ちらばりの様子を表に整理すると、平均を求めただけではわからなかった資料の持ちよう調べることができます。

ちらばりの様子が、一目でわかるようにグラフに表せないう。

2 柱状グラフ

1

前のページの表を、下のようなグラフに表します。このグラフを見て、東小屋と西小屋の記録のちらばりの様子を調べましょう。



このようなグラフを柱状グラフ、またはヒストグラムといます。

- 西小屋の卵の重さを、柱状グラフに表しましょう。
- 東小屋と西小屋で、いちばん個数が多いのは、それぞれ重さが何g以上何g未満のはんにですか。
- 東小屋と西小屋で、60g以上の卵が多いのはどちらですか。また、それぞれ何個ありますか。
- 上のグラフを見て、東小屋と西小屋のちらばりの様子の持ちようをいましょう。

東小屋は、特に55g以上60g未満のはんに...

まとめ

柱状グラフは、ちらばりの様子を見るのに便利です。

2

東小屋と西小屋の卵の重さについて、いろいろな比べ方とそれぞれの結果を、下の表に整理しましょう。

- 結果を下の表に書きましょう。

	東小屋		西小屋	
いちばん重い重さ	g		g	
いちばん軽い重さ	g		g	
重さの平均	g		g	
いちばん個数の多いはんい	g以上	g未満	g以上	g未満
55g未満の個数の割合(%)				
55g以上65g未満の個数の割合(%)				
65g以上の個数の割合(%)				

- 比べ方や結果について、気づいたことを話し合しましょう。



平均で比べると西小屋の卵が重いけど、いちばん個数の多いはんいで比べると...



はんいを10gずつに区切ると、大まかなちらばりの様子が...

- 下の表は、1班と2班がとったさつまいもの重さを記録したものです。次の①、②の比べ方で比べたとき、重いさつまいもがよくとれたといえるのは、どちらの班ですか。

1班のさつまいもの重さ(g)	2班のさつまいもの重さ(g)
① 265 ② 278 ③ 287 ④ 309	① 280 ② 261 ③ 287 ④ 302
⑤ 319 ⑥ 268 ⑦ 269	⑤ 310 ⑥ 284 ⑦ 275 ⑧ 269

① 重さの平均 ② 重さを260g以上から10gずつ区切ったときの、個数のいちばん多いはんい

資料の持ちようについて、平均以外のことにも目を付けて、くわしく調べたり比べたりするよ。

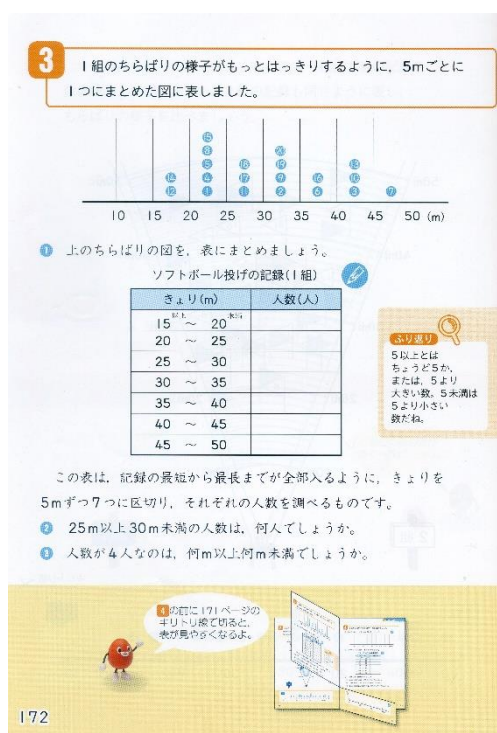
【考察】

6年生では度数分布表と柱状グラフ（ヒストグラム）について指導している。

指導するための例として、にわとりが産んだ卵の重さの記録を扱っている。

指導の順序としては、まずドットプロットを用いてどんな範囲にどのように散らばっているかを調べ、次にその様子が数で見やすいように度数分布表に整理し、最後に柱状グラフ（ヒストグラム）に表すようになっている。

しかし、ドットプロットから度数分布表への移行に関して、ドットプロットが度数分布表をイメージした図になっていないことが問題点であると考えられる。解決策として、45,50,55,・・・といった目盛り幅のドットプロットを用意するといった方法がある。この図は柱状グラフ（ヒストグラム）にもつながるのも良い点である。例えば、学校図書の教科書では以下のようにになっている。



学校図書『みんなと学ぶ小学校算数 6年』（平成26年2月28日検定済）

また、この指導では柱状グラフ（ヒストグラム）における長方形の高さが個数であるという誤認識を与えやすい。長方形の広さ（面積）が個数であるという認識を与えるためには、長方形の中に個数を書き、ヒストグラムの本質を示しておく必要がある。

2. 中学校『新しい数学』（2017年2月27日検定済）

1年生

7章 資料の分析と活用

1節 資料の分析

1 資料の分析

どちらのルートがよいか？

校外活動の班別自由行動の計画を立てています。美術館から西寺へ移動するのに、AルートとBルートのバスがあり、どちらのルートにしようか話し合っています。

平均所要時間は、どちらも34分と書いてあるよ。

西寺ではお土産をゆっくり見たいから、なるべく早く着きたいね。どちらのルートがよいか？

AルートとBルートの所要時間について、くわしく調べることにしました。

A/B	平日	休日	所要時間(分)	A/B	平日	休日	所要時間(分)
A	平日	休	37	A	平日	休	50
A	平日	休	39	A	平日	休	53
A	平日	休	38	A	平日	休	48
A	平日	休	37	A	平日	休	48

バス会社のホームページに所要時間の資料があったよ。

206

考えてみよう

AルートとBルートについて、平日の14時台に美術館を出発して西寺へ向かうバスの所要時間を調べたら、220ページのようになりました。美術館から西寺への移動時間をなるべく短くするには、どちらのルートのバスを使うとよいでしょうか。まず、Aルートの所要時間について、どのような特徴があるか考えてみましょう。

Aルートの所要時間の資料を、柱状グラフに表してみました。

Aルートの所要時間

このような形になるのはどうしてかな？

天気によって、道路の混みかあいは変わりそうだから...

資料をどのように整理すると傾向や特徴が読みとりやすくなるか、また、読みとった傾向や特徴を的確に伝えるにはどうすればよいかを考えていきましょう。

207

1 度数の分布

前ページの柱状グラフは、台数の集まった部分が30分台と40分台の2つあるようにみえる。これは、Aルートの所要時間の資料に、天気の影響がふくまれているためと考えられる。ここからは、資料を晴れや曇りの日と、雨の日に分けて調べていこう。

2つのルートの所要時間の特徴を読みとって比べてみよう

考えてみよう

AルートとBルートで、晴れや曇りの日の所要時間を整理して、比べてみましょう。

右の表は、Aルートの晴れや曇りの日の所要時間の資料を、3分ずつの区間に分け、その区間に入っている台数を調べてまとめたものである。

このように、資料を整理するために用いる区間を階級、区間の幅を階級の幅、階級の真ん中の値を階級の値、それぞれの階級に入っている資料の個数をその階級の度数という。

また、資料をいくつかの階級に分け、階級ごとにその度数を示して、分布のようすをわかりやすくした表を度数分布表という。

たしかめ ① Aルートの所要時間(晴・曇)の度数分布表について、次の問に答えなさい。

- 階級の幅をいいなさい。
- 所要時間が35分であるバスは、どの階級に入りますか。
- 度数がもっとも多い階級と、その度数をいいなさい。

所要時間(分)	度数(台)
以上 未満	
27 ~ 30	4
30 ~ 33	18
33 ~ 36	23
36 ~ 39	15
39 ~ 42	3
42 ~ 45	1
45 ~ 48	0
合計	64

② 27分以上30分未満の階級の階級幅は $\frac{27 \sim 30}{2} = 26.5$ (分)

問1 220ページのBルートの所要時間(晴・曇)の資料を、右の度数分布表に整理しなさい。

問2 Aルート、Bルートの所要時間(晴・曇)の度数分布表について、次の問に答えなさい。
① 所要時間の短いほうから数えて、10番目、20番目、30番目のバスは、それぞれのルートでどの階級に入っていますか。
② 所要時間が30分未満のバスは、それぞれのルートで何% ずつですか。

所要時間(分)	度数(台)
以上 未満	
27 ~ 30	
30 ~ 33	
33 ~ 36	
36 ~ 39	
39 ~ 42	
42 ~ 45	
45 ~ 48	
合計	64

右の柱状グラフは、Aルートの所要時間(晴・曇)の度数分布表を示したものである。柱状グラフのことをヒストグラムということがある。

ヒストグラムでは、それぞれの長方形の面積は階級の度数に比例している。

問3 Bルートの所要時間(晴・曇)の度数分布表を、ヒストグラムに表しなさい。

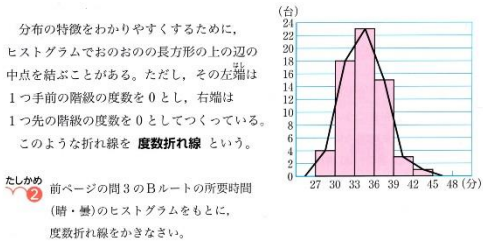
問4 AルートとBルートの所要時間(晴・曇)の分布について、2つのヒストグラムを比べて、どんなことがいえますか。



左表のような、所要時間に影響しそうな性質で、資料を分類して調べることが大切だね。

208

209



数学のまど 資料の分布の形

資料の分布のようすをヒストグラムや度数折れ線に表すと、下の図のようにさまざまな分布がみられます。

対称な分布、右にゆがんだ分布、左にゆがんだ分布、山が複数ある分布、麓がある分布

Bルートの晴・曇は、右にゆがんだ分布だね。

晴・曇と雨の2つのグループが混ざっていると、山が2つの分布になるね。

山がいくつかあるときは、グループが混ざっていないか調べてみることも大切だね。

210

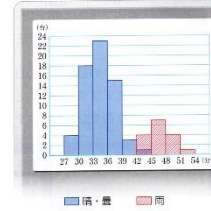
パスの所要時間について、さらに詳しく調べてみよう

調べてみよう
晴れや曇りの日と、雨の日とを比べると、所要時間にどのようなちがいがあのでしょうか。



Aルートの所要時間

所要時間(分)	晴・曇	雨
以上 未満		
27 ~ 30	4	0
30 ~ 33	18	0
33 ~ 36	23	0
36 ~ 39	15	0
39 ~ 42	3	0
42 ~ 45	1	4
45 ~ 48	0	7
48 ~ 51	0	4
51 ~ 54	0	1
合計	64	16



問5 上の度数分布表で、所要時間が39分以上の階級の度数について、晴れや曇りの日と、雨の日とを比べてわかることをいいなさい。

全体の度数が異なる資料を比べるときには、度数の代わりに、度数の合計に対する割合を用いるとよい。すなわち
(その階級の度数)
(度数の合計)
を用いる。このようにして求めた値を **相対度数** という。
相対度数を用いることで、ある階級の全体に対する割合がわかる。

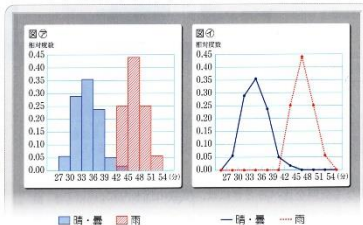
7章 資料の分析と活用

211

たしかめ 3 Aルートの雨の日の所要時間について、各階級の相対度数を求め、下の表に書き入れなさい。

所要時間(分)	晴・曇		雨	
	度数	相対度数	度数	相対度数
以上 未満				
27 ~ 30	4	0.06	0	
30 ~ 33	18	0.28	0	
33 ~ 36	23	0.36	0	
36 ~ 39	15	0.23	0	
39 ~ 42	3	0.05	0	
42 ~ 45	1	0.02	4	
45 ~ 48	0	0.00	7	
48 ~ 51	0	0.00	4	
51 ~ 54	0	0.00	1	
合計	64	1.00	16	

Aルートの晴れや曇りの日と、雨の日の所要時間について、相対度数を用いてヒストグラムをかくと、下の図⑦のようになる。また、各階級の相対度数を折れ線に表すと、下の図⑧のようになる。



問6 上の図をみて、Aルートの晴れや曇りの日と、雨の日の所要時間について、それぞれの特徴を説明しなさい。

212

2 範囲と代表値

資料の分布のようすや特徴をわかりやすく伝えることを考えてみよう

考えてみよう
晴れや曇りの日の、AルートとBルートの所要時間のちがいをわかりやすく伝えるには、どうすればよいでしょうか。



資料の分布のようすを調べたり伝えたりするとき、最大の値から最小の値をひいた値を用いることがある。最大の値から最小の値をひいた値を、分布の **範囲** または **レンジ** という。

$$(\text{範囲}) = (\text{最大の値}) - (\text{最小の値})$$

たしかめ 1 晴れや曇りの日の、AルートとBルートの所要時間の範囲を求めなさい。また、それらを比べてわかることをいいなさい。

資料の特徴を調べたり伝えたりするとき、1つの数値で代表させて、それらを比べることが多い。このような数値を **代表値** という。
代表値には、次のようなものがある。

- 平均値**
個々の資料の値の合計を資料の総数でわった値
- 中央値** または **メジアン**
調べようとする資料の値を大きさの順に並べたときの中央の値
(注意) 資料の総数が偶数の場合は、中央にある2つの値の平均値を中央値とする。
- 最頻値** または **モード**
資料の中で、もっとも多く出てくる値
度数分布表では、度数のもっとも多い階級の階級値

7章 資料の分析と活用

213

【資料】バスの所要時間 (207 ページ)

AルートとBルートについて、平日の14時台に美術館を出発して西寺へ向かうバスの所要時間を調べたところ、次のようになっていました。



【 Aルートと Bルートのバスの所要時間のデータ 】

A ルート			B ルート		
所要時間(分)	天気	所要時間(分)	所要時間(分)	天気	所要時間(分)
37	晴・曇	32	晴・曇	40	晴・曇
39	晴・曇	33	晴・曇	39	晴・曇
38	晴・曇	34	晴・曇	41	晴・曇
37	晴・曇	36	晴・曇	38	晴・曇
36	晴・曇	29	晴・曇	42	晴・曇
37	晴・曇	30	晴・曇	39	晴・曇
36	晴・曇	30	晴・曇	37	晴・曇
39	晴・曇	32	晴・曇	38	晴・曇
37	晴・曇	30	晴・曇	46	晴・曇
38	晴・曇	28	晴・曇	44	晴・曇
35	晴・曇	31	晴・曇	39	晴・曇
36	晴・曇	29	晴・曇	40	晴・曇
35	晴・曇	35	晴・曇	37	晴・曇
34	晴・曇	31	晴・曇	36	晴・曇
35	晴・曇	34	晴・曇	34	晴・曇
37	晴・曇	30	晴・曇	35	晴・曇
36	晴・曇	32	晴・曇	36	晴・曇
35	晴・曇	33	晴・曇	34	晴・曇
33	晴・曇	29	晴・曇	35	晴・曇
34	晴・曇	31	晴・曇	34	晴・曇
38	晴・曇	32	晴・曇	35	晴・曇
35	晴・曇	34	晴・曇	36	晴・曇
24	晴・曇	33	晴・曇	34	晴・曇
32	晴・曇	33	晴・曇	37	晴・曇
36	晴・曇	30	雨	36	晴・曇
34	晴・曇	53	雨	34	晴・曇
35	晴・曇	49	雨	33	晴・曇
33	晴・曇	48	雨	32	晴・曇
30	晴・曇	47	雨	33	晴・曇
32	晴・曇	48	雨	34	晴・曇
35	晴・曇	46	雨	33	晴・曇
31	晴・曇	45	雨	34	晴・曇
32	晴・曇	46	雨	32	晴・曇
34	晴・曇	47	雨	32	晴・曇
33	晴・曇	45	雨	33	晴・曇
31	晴・曇	44	雨	33	晴・曇
31	晴・曇	46	雨	30	晴・曇
42	晴・曇	44	雨	31	晴・曇
40	晴・曇	42	雨	31	晴・曇
36	晴・曇	43	雨	32	晴・曇

220

【考察】

度数分布表とヒストグラムについての指導をしている。

まず初めに、バスの所要時間のデータをもとにAルートとBルートのどちらが良いかを考える活動を例に学習を進めている。(pp.206-207)

次に、2つのルートのデータを表にまとめる活動を行う。このとき、度数分布表とそれに関する用語について学習する。また、度数分布表を読み取る活動もここで行う。(p.208)

次に、度数分布表をグラフに表す活動を行う。柱状グラフのことをヒストグラムということをしてここで学習し、2つのルートに関するヒストグラムを比較する活動も行う。(p.209)

次に、ヒストグラムの延長として度数折れ線(度数分布多角形)について学習する。(p.210)

ここまでは小学校6年生での学習の延長であったが、ここからは中学校で初めて学習する内容になる。

初めに、全体の度数が異なる資料を比較するときには、度数の合計に対する割合を表す「相対度数」を用いるとよいことを学習する。また、相対度数を用いた比較によってどのようなことが分かるかについて考える活動も行う。(pp.211-212)

次に、分布の様子(散らばり具合)を表現する方法として「範囲(レンジ)」、「平均値」、「中央値(メジアン)」、「最頻値(モード)」を学習する。また、これら4つのことを「代表値」ということも学習する。その後、2つのルートの各代表値をそれぞれ求め、2つのルー

トを比較することによって、各代表値の特徴について考える活動を行う。(pp.213-215)

2節の資料の活用では特に思考力、判断力を養うための活動を行う。(pp.218-219)

また、新学習指導要領ではこれらの学習内容に加え箱ひげ図についても取り扱うこととなっている。

3. 高等学校

『数学 I』（2017年2月10日発行）

1節 データの整理と分析

1 データの整理

データ

集められた資料から集団の特徴や傾向をとらえるためには、資料をどのように整理し、表やグラフに表せばよいかを考えてみよう。

次の資料は、あるクラスの「一か月の読書時間」について、電車・バス通学のA班と徒歩・自転車通学のB班に分けて、調べた結果である。

A班 20人 (単位: 時間)	B班 15人 (単位: 時間)
3 10 7 14 5 9 15 0 13 18	20 6 0 14 16 23 1 4 5 0
0 8 11 10 15 19 6 23 9 5	18 13 21 0 9

このような資料を**データ**という。また、読書時間のように、データの特性を表す数量を**変量**という。

データの整理

右の表は、A班の読書時間の結果をもとに、0時間から24時間までの間を4時間ずつの区間に分け、その区間に入っている人数を調べてまとめたものである。

このように、データを整理するために用いる区間を**階級**、区間の幅を**階級の幅**、階級の真ん中の値を**階級値**という。

また、それぞれの階級に入っているデータの値の個数をその階級の**度数**、各階級に度数を対応させたものを**度数分布**、それを表にしたものを**度数分布表**という。

読書時間 (時間)	度数
以上~未満	
0 ~ 4	3
4 ~ 8	4
8 ~ 12	6
12 ~ 16	4
16 ~ 20	2
20 ~ 24	1
計	20

2 代表値

いくつかのデータを比べるとき、それぞれのデータの特徴を1つの数値で表すと比較しやすい。そのような数値を**代表値**という。

代表値としては、**平均値**、**中央値**、**最頻値**がよく知られている。

平均値

x を変量とし、データの n 個の値 x_1, x_2, \dots, x_n が与えられているとき

$$\frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \quad \text{平均値} = \frac{\text{データの値の総和}}{\text{データの値の個数}}$$

をデータの**平均値**といい、記号 \bar{x} で表す。

例1 156ページのA班の読書時間の平均値を求めてみよう。

$$\frac{1}{20}(3+10+7+\dots+23+9+5) = \frac{1}{20} \times 200 = 10 \text{ (時間)}$$

例2 156ページのB班の読書時間の平均値を求めよ。

次に、度数分布から平均値を求める方法を考えてみよう。右の表は、変量 x の度数分布表である。このとき、平均値 \bar{x} は各階級に含まれるデータの値がすべてその階級値に等しいとみなして、次の式で計算する。

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 f_1 + x_2 f_2 + \dots + x_r f_r)$$

例2 156ページのA班の読書時間の平均値を度数分布表から求めてみよう。右の表より

$$\begin{aligned} \frac{1}{20}(2 \times 3 + 6 \times 4 + 10 \times 6 + 14 \times 4 + 18 \times 2 + 22 \times 1) \\ = \frac{1}{20} \times 204 = 10.2 \text{ (時間)} \end{aligned}$$

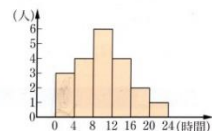
階級値	度数
x_1	f_1
x_2	f_2
\vdots	\vdots
x_r	f_r
計	n

階級値	度数
2	3
6	4
10	6
14	4
18	2
22	1
計	20

例1 B班の読書時間の度数分布表を、前ページにならって作成せよ。

度数分布をグラフにした図が**ヒストグラム**である。A班の読書時間のヒストグラムは右の図のようになる。

ヒストグラムは、階級の幅を底辺、度数を高さとする長方形をすき間なく並べたものである。ヒストグラムでは、それぞれの長方形の面積は、階級の度数に比例している。



例2 B班の読書時間のヒストグラムをかけ。

相対度数

A班とB班は人数が異なるから、度数を見るだけではデータを比較しにくい。そこで、度数の代わりに、各階級の度数を度数の合計で割った値を用いることにする。この値を**相対度数**という。

$$\text{すなわち} \quad \text{相対度数} = \frac{\text{その階級の度数}}{\text{度数の合計}}$$

相対度数を用いることで、ある階級の全体に対する割合がわかる。

A班の読書時間の度数分布表に相対度数を並べて記入すると、右の表のようになる。

このように、度数分布表に相対度数を並べて記入することがある。

読書時間 (時間)	度数	相対度数
以上~未満		
0 ~ 4	3	0.15
4 ~ 8	4	0.20
8 ~ 12	6	0.30
12 ~ 16	4	0.20
16 ~ 20	2	0.10
20 ~ 24	1	0.05
計	20	1.00

例3 問1で作成した度数分布表にB班の読書時間の相対度数を付け加えよ。

例1と**例2**のように、データから直接求めた平均値と度数分布表から求めた平均値では値が異なることがある。

例5 157ページの問1で作成した度数分布表を用いて、B班の読書時間の平均値を小数第2位を四捨五入して、小数第1位まで求めよ。

中央値

すべてのデータの値を小さい順に並べたとき、中央の順位にくる値を**中央値**または**メジアン**という。ただし、データの値の個数が偶数 $2n$ 個のときは、第 n 番目と第 $n+1$ 番目のデータの値の平均値を中央値とする。

例3 156ページのA班の読書時間の中央値を求めてみよう。

20個のデータの値を小さい方から順に並べると
0 0 3 5 5 6 7 8 9 9 10 10 11 13 14 15 15 18 19 23
となる。このデータの中央値は、10番目の値9と11番目の値10の平均値 $\frac{1}{2}(9+10) = 9.5$ (時間) である。

例6 156ページのB班の読書時間の中央値を求めよ。

最頻値

データを度数分布表に整理したとき、度数が最も大きい階級の階級値を**最頻値**または**モード**という。最頻値はヒストグラムにおいて、最も大きい度数を表す長方形における階級値である。

例4 156ページのA班の読書時間の最頻値を求めてみよう。

度数分布表で、読書時間の度数が最も大きい階級は8時間以上12時間未満である。よって、最頻値はこの階級の階級値を求めて、10時間である。

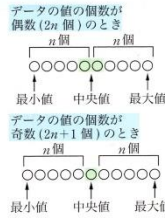
例7 157ページの問1で作成した度数分布表を用いて、B班の読書時間の最頻値を求めよ。

3 箱ひげ図

四分位数

データの特徴をよりくわしく表すために、データの値を小さい方から順に並びかえて、次のような数値を考えてみよう。

- ① データの中央値を求める。
- ② 右の図のように、中央値を境にしてデータの値の個数が等しくなるように2つの部分に分ける。
- ③ 2つに分けたうち、最小値を含む方のデータの中央値を求める。
- ④ 2つに分けたうち、最大値を含む方のデータの中央値を求める。



①の値を**第2四分位数**、③の値を**第1四分位数**、④の値を**第3四分位数**という。これらを合わせて**四分位数**という。

また、3つの四分位数の値は、データの値の小さい方から25%、50%、75%に対応する数値であるともいえる。

例5 156ページのA班の読書時間の四分位数を求めてみよう。

20個のデータの値を小さい方から順に並べると、次のようになる。

0 0 3 5 5 6 7 8 9 9 10 10 11 13 14 15 15 18 19 2

このデータの第2四分位数は、例3より9.5時間である。

第1四分位数は 0 0 3 5 5 6 7 8 9 9

の中央値より $\frac{1}{2}(5+6) = 5.5$ (時間)

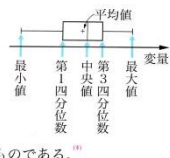
第3四分位数は 10 10 11 13 14 15 15 18 19 23

の中央値より $\frac{1}{2}(14+15) = 14.5$ (時間)

問8 156ページのB班の読書時間の四分位数を求めよ。

箱ひげ図

データの分布を表す方法として、最小値・最大値や四分位数を用いて表す**箱ひげ図**がある。



- 箱ひげ図とは、右の図のように、最小値、第1四分位数、中央値、第3四分位数、最大値を箱と線(ひげ)を用いて1つの図に表したものである。

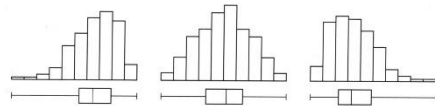
例6 156ページのA班の読書時間の箱ひげ図をかいてみよう。

- 例5より、箱ひげ図は右の図ようになる。

問9 156ページのB班の読書時間の箱ひげ図をかいて。

箱ひげ図とヒストグラム

箱ひげ図はヒストグラムと同様に、データの分布を表現するのに適している。ヒストグラムでは、度数分布表のすべての階級の度数が必要であるのに対して、箱ひげ図は最小値、第1四分位数、中央値、第3四分位数、最大値の5つの数値がわかると、かくことができる。箱ひげ図とヒストグラムの関係について考えてみよう。

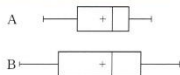


上の図のように、1つの山のヒストグラムの場合、ヒストグラムの山の高い部分に箱ひげ図の箱が対応し、山のすその部分に箱ひげ図のひげが対応している。

(*)箱ひげ図に平均値の位置を記入しないこともある。

4 箱ひげ図とデータの散らばり

右の図は、データの値の個数も平均値も中央値も等しい2つのデータA, Bの箱ひげ図である。



このように、平均値や中央値は等しくても、データの分布のようすが大きく異なることがある。箱ひげ図を用いることによって、データの分布のようすを視覚的に比較することを考えてみよう。

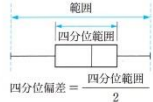
範囲と四分位偏差

あるデータにおいて、データの最大値から最小値を引いた値をそのデータの分布の**範囲**または**レンジ**という。

範囲は、データのすべての値を含む大きさを表しているから、極端にはずれた値の影響を受ける。

そこで、データの散らばり具合いを四分位数をもとにして、よりの確に表すことを考えてみよう。

第3四分位数から第1四分位数を引いた値を**四分位範囲**といい、四分位範囲を2で割った値を**四分位偏差**という。



例7 156ページのA班の読書時間の範囲、四分位範囲、四分位偏差を求めてみよう。

範囲は 23 - 0 = 23 (時間)

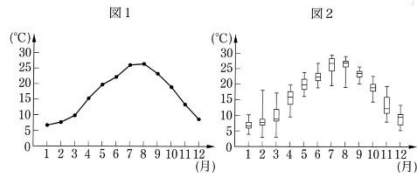
四分位範囲は 14.5 - 5.5 = 9 (時間)

四分位偏差は $\frac{9}{2} = 4.5$ (時間) となる。

問10 156ページのB班の読書時間の範囲、四分位範囲、四分位偏差をそれぞれ求めよ。

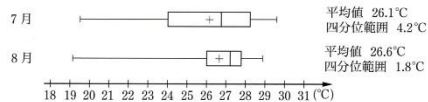
下の図1は、ある年の東京都における各月の日ごとの平均気温の平均値(単位: °C)を折れ線グラフで表したものである。

また図2は、各月の日ごとの平均気温の分布を箱ひげ図で表したものである。



平均値のみでは、各月の日ごとの平均気温の分布のようすを比較することができないが、箱ひげ図を用いることで分布のようすを比較することが可能である。

たとえば、7月と8月の箱ひげ図は下の図のようになる。



この図より、7月と8月の平均値や範囲はあまり変わらないが、8月の方が四分位範囲が小さい。

ゆえに、8月の方が、平均気温の散らばりが小さいことがわかる。

また、1月と2月は四分位範囲はあまり変わらないが、ひげの長さが違う。

ゆえに、1月の方が、平均気温の散らばりが小さいことがわかる。

このように、箱ひげ図は複数のデータの分布のようすを比較するとき有効である。

(*)箱ひげ図は90°回転したものを用いられる。

5 分散と標準偏差

データの散らばり具合を数値で表すために、データの個々の値と平均値の差に着目してみよう。

データの個々の値と平均値の差が大きいほど、その値は平均値から離れていることになる。

n 個のデータの値を x_1, x_2, \dots, x_n とし、その平均値を \bar{x} とするとき、各値の平均値との差 $x_1 - \bar{x}, x_2 - \bar{x}, \dots, x_n - \bar{x}$ をそれぞれ平均値からの**偏差**という。偏差の平均値を計算すると

$$\frac{1}{n}\{(x_1 - \bar{x}) + (x_2 - \bar{x}) + \dots + (x_n - \bar{x})\} = \frac{1}{n}\{(x_1 + x_2 + \dots + x_n) - n\bar{x}\} \\ = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n) - \bar{x} = \bar{x} - \bar{x} = 0$$

となり、偏差の平均値ではデータの散らばり具合を表すことはできない。

そこで、偏差を2乗した値 $(x_i - \bar{x})^2$ を考える。これらの値はすべて0

以上であり、データの値 x_i が平均値 \bar{x} から離れているほど大きくなる。

したがって、偏差を2乗し、その平均値を求めると、データの散らばり具合を表すことができる。この値を**分散**といい、 s^2 で表す。

分散 s^2 は、計算の過程で数値を2乗するため単位も変わるから、分散の正の平方根を考える。これを**標準偏差**といい、 s で表す。^(*)標準偏差の単位はデータの値の単位と同じである。

(*) s は標準偏差を意味する standard deviation の頭文字である。

例題 **標準偏差**

1 右の度数分布表は、ある高校のバスケットボール部の部員10人でフリースローを5回ずつ行ったゲームの結果である。このゲームの点数の標準偏差を小数第3位を四捨五入して、小数第2位まで求めよ。

点数 x	度数 f
0	2
1	3
2	1
3	2
4	1
5	1
計	10

点数 x	度数 f	xf	$x - \bar{x}$	$(x - \bar{x})^2$	$(x - \bar{x})^2 f$
0	2	0	-2	4	8
1	3	3	-1	1	3
2	1	2	0	0	0
3	2	6	1	1	2
4	1	4	2	4	4
5	1	5	3	9	9
計	10	20			26

xf の値は上の表のようになるから、このゲームの点数の平均値 \bar{x} は $\bar{x} = \frac{1}{10} \times 20 = 2$ (点) さらに、 $x - \bar{x}, (x - \bar{x})^2, (x - \bar{x})^2 f$ の値は上の表のようになるから 点数の分散 s^2 は $s^2 = \frac{1}{10} \times 26 = 2.6$ よって、標準偏差 s は $s = \sqrt{2.6} = 1.612 \dots \approx 1.61$ (点)

例12 下の表は、あるクラス40人に数学の小テストを行った結果である。このクラスの小テストの点数の標準偏差を小数第3位を四捨五入して、小数第2位まで求めよ。

点数 x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	計
人数	2	4	7	7	6	5	2	1	2	3	1	40

例8 次のデータは、ある携帯音楽プレイヤーを充電してからの連続使用時間を5回調べた結果を記したものである。

24 21 26 23 26 (単位: 時間)

このとき、音楽プレイヤーの連続使用時間の分散および標準偏差を求めよう。

連続使用時間の平均値は $\frac{1}{5}(24 + 21 + 26 + 23 + 26) = \frac{1}{5} \times 120 = 24$ (時間)

連続使用時間の各値の偏差は、下の表のようになる。

連続使用時間	24	21	26	23	26
連続使用時間の偏差	0	-3	2	-1	2

よって、連続使用時間の分散 s^2 は $s^2 = \frac{1}{5}\{0^2 + (-3)^2 + 2^2 + (-1)^2 + 2^2\} = \frac{1}{5} \times 18 = 3.6$

ゆえに、標準偏差 s は $s = \sqrt{3.6} = 1.897 \dots \approx 1.90$ (時間)

例11 次のデータは、ある高校のバレーボール部の選手6人の身長を記したものである。このとき、身長の分散を求めよ。また、標準偏差を小数第3位を四捨五入して、小数第2位まで求めよ。

174 169 175 171 168 181 (単位: cm)

次に、度数分布から標準偏差を求める方法を考えてみよう。変数 x の平均値を \bar{x} とすると、 x の分散 s^2 は次の式で計算する。

$$s^2 = \frac{1}{n}\{(x_1 - \bar{x})^2 f_1 + (x_2 - \bar{x})^2 f_2 + \dots + (x_r - \bar{x})^2 f_r\}$$

よって、 x の標準偏差 s は次の式で表される。

$$s = \sqrt{\frac{1}{n}\{(x_1 - \bar{x})^2 f_1 + (x_2 - \bar{x})^2 f_2 + \dots + (x_r - \bar{x})^2 f_r\}}$$

階級値	度数
x_1	f_1
x_2	f_2
\vdots	\vdots
x_r	f_r
計	n

問題

1 右の表は、ある年の東京と沖縄の各月の平均気温(単位: °C)のデータである。このとき、次の間に答えよ。

月	東京(°C)	沖縄(°C)
1	6.8	16.7
2	7.8	19.8
3	10.0	19.6
4	15.7	20.5
5	20.1	23.7
6	22.6	26.4
7	26.3	29.2
8	26.6	29.5
9	23.0	29.0
10	19.1	25.3
11	13.5	22.7
12	9.0	18.3

- (1) 東京と沖縄の各月の平均気温の第1四分位数、中央値、第3四分位数を求めよ。また、それらの箱ひげ図をかけ。
- (2) (1)の結果を利用して、東京と沖縄ではどちらの方が各月の気温のデータの散らばりが大きいかが答えよ。

2 下の表は、A病院である年の1月に生まれた新生児の体重を男女別に整した度数分布表である。このとき、次の間に答えよ。

- (1) 男の子と女の子の体重の標準偏差を小数第3位を四捨五入して、1数第2位まで求めよ。
- (2) この病院でこの年の1月に生まれた男の子と女の子では、どちらの方が体重のデータの散らばりが大きいかが答えよ。

体重(g)	階級値	度数	
		男の子	女の子
以上~未満			
2650~2750	2700	2	3
2750~2850	2800	3	5
2850~2950	2900	3	3
2950~3050	3000	2	3
3050~3150	3100	6	2
3150~3250	3200	3	1
3250~3350	3300	2	2
3350~3450	3400	3	1
3450~3550	3500	1	0
計		25	20

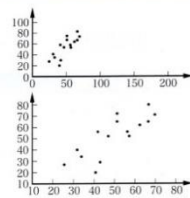


2 相関係数

散布図は、一見して相関のようすがわかる。

しかし、同じデータであっても、散布図のかき方によっては、右の図のように相関があるか判断しにくくなる。

そこで、対応する2つの変量の相関関係を数値で表すことを考えてみよう。



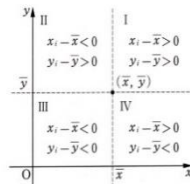
相関係数

対応する2つの変数 x, y の値の組を

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \dots, (x_n, y_n)$$

とし、 x, y のデータの平均値をそれぞれ \bar{x}, \bar{y} とする。散布図に記入されたすべての点は、これらの平均値を座標とする点 (\bar{x}, \bar{y}) のまわりに集まっている。

そこで、右の図のように、点 (\bar{x}, \bar{y}) を通り座標軸に平行な2直線で平面を4つの部分に分け、各部分をI, II, III, IVとする。このとき、 x と y に正の相関があれば散布図の点はIの部分とIIIの部分に多く集まり、負の相関があれば散布図の点はIIの部分とIVの部分に多く集まる傾向がある。



点 (x_i, y_i) が

I または III に属するときは $(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) > 0$

II または IV に属するときは $(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) < 0$

である。

2節 データの相関

1 相関関係

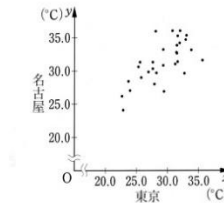
散布図と相関

右の表は、ある年の7月の東京と名古屋における各日の最高気温 x (°C), y (°C) のデータである。

この表から、各日の変数 x, y の値の組 $(27.9, 28.0), (29.4, 26.9), \dots$ を座標とする点を平面上にとると、下の図ができる。

日	東京 x	名古屋 y	日	東京 x	名古屋 y
1	27.9	28.0	16	31.5	33.8
2	29.4	26.9	17	31.2	31.0
3	22.7	26.2	18	32.9	34.7
4	22.9	24.1	19	33.8	33.1
5	29.3	30.8	20	29.3	33.2
6	23.7	28.4	21	30.8	36.0
7	27.6	30.3	22	28.1	35.9
8	27.6	31.3	23	25.8	29.0
9	24.0	27.0	24	26.9	29.8
10	31.6	31.4	25	31.4	32.8
11	32.7	29.6	26	28.2	29.7
12	25.8	29.0	27	35.6	31.6
13	25.3	30.6	28	33.0	35.3
14	25.6	31.3	29	31.6	35.2
15	31.5	32.6	30	32.0	36.0
			31	31.9	34.2

このような図を **散布図** という。



上の散布図では、対応する x と y の値は一方が増加すると他方も増加する傾向にある。このとき、2つの変数 x, y の間に **正の相関** があるという。

また、 x と y の間に一方が増加すると他方が減少する傾向があるとき、2つの変数 x, y の間に **負の相関** があるという。^(*) 正の相関も負の相関もみられないとき、相関がないという。

(*) 散布図において、データの分布が直線状に近づくほど相関が強いといい、直線状ではなく広くばらつくほど相関が弱いという。

したがって、 $(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$ の平均値

$$\frac{1}{n} \{(x_1 - \bar{x})(y_1 - \bar{y}) + (x_2 - \bar{x})(y_2 - \bar{y}) + \dots + (x_n - \bar{x})(y_n - \bar{y})\}$$

は、正の相関があるときには正の値をとり、負の相関があるときには負の値をとる。この値を、 x, y の **共分散** といい、 s_{xy} で表す。 x と y に相関がないときには、共分散は0に近い値になる。

共分散は、変数 x, y の単位の取り方や散らばり具合に影響を受けるから、 x, y の共分散

$$s_{xy} = \frac{1}{n} \{(x_1 - \bar{x})(y_1 - \bar{y}) + (x_2 - \bar{x})(y_2 - \bar{y}) + \dots + (x_n - \bar{x})(y_n - \bar{y})\}$$

を x, y の標準偏差 s_x, s_y 、すなわち

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{n} \{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2\}}$$

$$s_y = \sqrt{\frac{1}{n} \{(y_1 - \bar{y})^2 + (y_2 - \bar{y})^2 + \dots + (y_n - \bar{y})^2\}}$$

の積 $s_x s_y$ で割った値を考える。この値を2つの変数 x, y の **相関係数** といい、 r で表す。

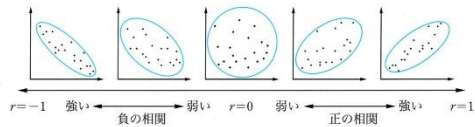
すなわち

$$r = \frac{s_{xy}}{s_x s_y}$$

一般に、相関係数 r の値については、次の不等式が成り立つ。

$$-1 \leq r \leq 1$$

とくに、正の相関が強いほど r の値は1に近づき、負の相関が強いほど r の値は-1に近づく。



例1 5人の生徒a, b, c, d, eの身長xcmと体重ykgが右の表のようであった。このとき、5人の生徒の身長と体重の相関係数を求めてみよう。

	x (cm)	y (kg)
a	178	68
b	172	66
c	168	62
d	172	74
e	180	75

ここで

$$\bar{x} = \frac{1}{5} \times 870 = 174 \text{ (cm)}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{5} \times 345 = 69 \text{ (kg)}$$

となる。

さらに、下の表のようにして計算すると

	x	y	$x - \bar{x}$	$(x - \bar{x})^2$	$y - \bar{y}$	$(y - \bar{y})^2$	$(x - \bar{x})(y - \bar{y})$
a	178	68	4	16	-1	1	-4
b	172	66	-2	4	-3	9	6
c	168	62	-6	36	-7	49	42
d	172	74	-2	4	5	25	-10
e	180	75	6	36	6	36	36
計	870	345	0	96	0	120	70

$$r = \frac{\frac{1}{5} \times 70}{\sqrt{\frac{1}{5} \times 96} \sqrt{\frac{1}{5} \times 120}} = 0.652 \dots \approx 0.65$$

ゆえに、相関係数は約0.65である。

例2 右の表は、5人の生徒の数学と英語の小テストの結果である。このとき、数学の点数と英語の点数の相関係数を小数第3位を四捨五入して、小数第2位まで求めよ。

	数学	英語
a	8	7
b	7	5
c	9	9
d	9	7
e	7	7

【考察】

1節ではデータの整理と分析についての指導をしている。**1**データの整理と**2**代表値は中学校での学習と同じ内容となっている。(pp.156-159) さらに、新学習指導要領では**3**箱ひげ図と**4**箱ひげ図とデータの散らばりも中学校で既出となる内容である。(pp.160-163)

5分散と標準偏差では、偏差、分散、標準偏差について学習する。データの散らばり具合を数値化するためにデータの個々の値と平均値の差について着目することや、偏差の平均ではなく偏差の2乗の平均を用いる理由など、分散と標準偏差の必然性について指導している。しかしながら、計算演習や分散と平均値の関係式など数式処理に関する指導が多い一方で、そこから得られた数値に対する情報処理に関する内容はどこにも見受けられない。

(pp.164-167)

2節ではデータの相関について扱い、**1**相関関係では散布図と相関について学習し、**2**相関係数では、共分散、相関係数について指導している。(pp.169-172)

2節 正規分布

1 正規分布

連続分布

前節で学んだ確率変数ではとり得る値はとびとびの値であった。ここでは、とり得る値が連続的に変化するような確率変数について考えてみよう。

紙テープを目分量で5cmの長さで切り、切り取られたテープの長さX cmを測定する実験を行った。右の表は、100回実験をして得られたものである。

表より

$$4.7 \leq X < 4.9$$

で表される階級の相対度数が0.21であることから、Xが

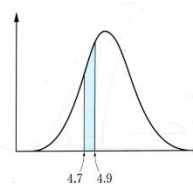
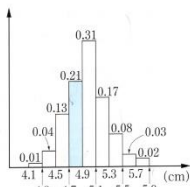
$$\text{区間 } 4.7 \leq X < 4.9$$

に値をとる確率が0.21であると考えられる。

各階級の相対度数の値を面積とする長方形を用いてヒストグラムをかくと右のようになり、Xの値が各階級に属する確率は、それぞれの階級に対応する長方形の面積で表される。

この長方形の面積の和は1となる。

長さ (cm)	相対度数
以上~未満	
4.1 ~ 4.3	0.01
4.3 ~ 4.5	0.04
4.5 ~ 4.7	0.13
4.7 ~ 4.9	0.21
4.9 ~ 5.1	0.31
5.1 ~ 5.3	0.17
5.3 ~ 5.5	0.08
5.5 ~ 5.7	0.03
5.7 ~ 5.9	0.02
計	1.00



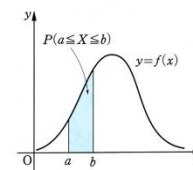
さらに、実験を多数回行い、階級の幅を小さくしていくと、そのヒストグラムは1つの曲線に近づく。

このとき、Xが4.7cm以上4.9cm未満の値をとる確率は、右の図の色のついた部分の面積に等しくなる。

一般に、実数のある区間全体に値をとる確率変数Xに対して、1つの関数 $y=f(x)$ が対応して次の性質をもつとする。

① $f(x) \geq 0$ を満たす。

② Xが $a \leq x \leq b$ の範囲の値をとる確率 $P(a \leq X \leq b)$ は、曲線 $y=f(x)$ とx軸および2直線 $x=a, x=b$ で囲まれた部分の面積 $\int_a^b f(x)dx$ に等しい。



すなわち
$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

③ 曲線 $y=f(x)$ とx軸の間の面積は1である。

このとき、Xを連続型確率変数といい、関数 $f(x)$ をXの確率密度関数、 $y=f(x)$ のグラフをその分布曲線という。確率密度関数によって確率分布が定められるとき、その分布を連続分布という。

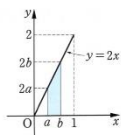
とくに、 $X=a$ となる確率は $P(a \leq X \leq a)$ と書けるから

$$P(X=a) = P(a \leq X \leq a) = \int_a^a f(x)dx = 0$$

である。

例 ① $0 \leq x \leq 1$ に値をとる確率変数Xの確率密度関数が $f(x) = 2x$ であるとき、次のようになる。

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b 2x dx = b^2 - a^2$$



例 ② $0 \leq x \leq 2$ に値をとる確率変数Xの確率密度関数が $f(x) = \frac{1}{2}x$ であるとき、 $P(1 \leq X \leq 2)$ を求めよ。

連続型確率変数の平均と分散・標準偏差

連続型確率変数に対して、とびとびの値をとる確率変数を離散型確率変数という。

離散型確率変数Xのとり得る値を x_1, x_2, \dots, x_n とする。平均 $E(X)$ と分散 $V(X)$ は、 $P(X=x_i) = p_i, E(X) = m$ とするとき

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i, \quad V(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 p_i$$

と定めた。

連続型確率変数Xのとり得る値の範囲が $a \leq X \leq b$ で、その確率密度関数を $f(x)$ とする。このとき、Xの平均 $E(X)$ や分散 $V(X)$ は、離散型確率変数の場合の和の記号 \sum を積分で置き換えた式で

$$E(X) = \int_a^b x f(x) dx$$

$$V(X) = \int_a^b (x-m)^2 f(x) dx$$

と定義する。ただし、 $E(X) = m$ である。

また、離散型確率変数の場合と同じように分散 $V(X)$ の正の平方根をXの標準偏差といい、 $\sigma(X)$ で表す。

すなわち
$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

正規分布

連続型確率変数Xの確率密度関数 $f(x)$ が

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \quad \dots \text{①}$$

で与えられるとき、Xは正規分布 $N(m, \sigma^2)$ に従う^{*)} といい、 $y=f(x)$ のグラフを正規分布曲線という。ここで、 e は自然対数の底とよばれる無理数で、その値は2.718281828...である。

正規分布について、次のことが知られている。

正規分布の平均と標準偏差

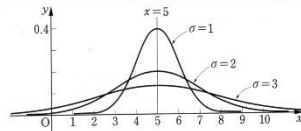
確率変数Xが正規分布 $N(m, \sigma^2)$ に従うとき

$$E(X) = m, \quad \sigma(X) = \sigma$$

① において、 $m = 5$

とし、 $\sigma = 1, 2, 3$

として $y=f(x)$ のグラフをかくと、右のようになる。



一般に、正規分布曲線は、次の性質をもつ。

① 直線 $x = m$ に関して対称であり、 y は $x = m$ のとき最大値をとる。

② 曲線の山は、標準偏差 σ が大きくなるほど低くなって横に広がり、 σ が小さくなるほど高くなって対称軸 $x = m$ のまわりに集まる。

③ x軸を漸近線とする。

確率変数Xが正規分布 $N(m, \sigma^2)$ に従うとき

$$Z = \frac{X-m}{\sigma}$$

$$Z = \frac{X - (Xの平均)}{(Xの標準偏差)}$$

とすると、Zは平均0、標準偏差1の正規分布 $N(0, 1)$ に従うことが知られている。このZを、Xを標準化した確率変数という。

*) Nは正規分布を意味する Normal distribution の頭文字である。

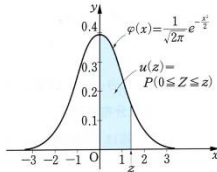
正規分布 $N(0, 1)$ を **標準正規分布** という。この場合の確率密度関数を $\varphi(x)$ と表すと

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

となる。

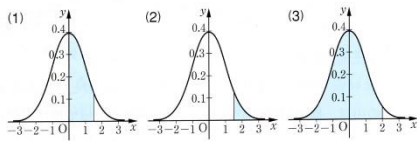
確率 $P(0 \leq Z \leq z)$ を $u(z)$ で表す。

z の値に対する $u(z)$ の値が巻末の正規分布表に示されている。



例2 確率変数 Z が標準正規分布 $N(0, 1)$ に従うとき、巻末の正規分布表を用いて、いろいろな確率を求めてみよう。

- (1) $P(0 \leq Z \leq 1.5) = u(1.5) = 0.43319$
- (2) $P(Z \geq 1.5) = P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 1.5)$
 $= 0.5 - u(1.5) = 0.5 - 0.43319 = 0.06681$
- (3) $P(Z \leq 2) = P(Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 2)$
 $= 0.5 + u(2) = 0.5 + 0.47725 = 0.97725$



例2 確率変数 Z が標準正規分布 $N(0, 1)$ に従うとき、次の確率を求めよ。

- (1) $P(Z \leq 1)$ (2) $P(Z > 0.5)$ (3) $P(-2 \leq Z \leq -1)$

一般の正規分布の確率

確率変数 X が正規分布 $N(m, \sigma^2)$ に従うとき、 X に関する確率は X を標準化して標準正規分布 $N(0, 1)$ における確率になおすことにより、求めることができる。

例3 確率変数 X が正規分布 $N(50, 10^2)$ に従うとき、 $P(45 \leq X \leq 65)$ を求めてみよう。

$Z = \frac{X-50}{10}$ とすると、 Z は $N(0, 1)$ に従う。よって

$$\begin{aligned} P(45 \leq X \leq 65) &= P\left(\frac{45-50}{10} \leq Z \leq \frac{65-50}{10}\right) \\ &= P(-0.5 \leq Z \leq 1.5) = P(-0.5 \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 1.5) \\ &= u(0.5) + u(1.5) = 0.19146 + 0.43319 = 0.62465 \end{aligned}$$

例3 確率変数 X が正規分布 $N(1, 2^2)$ に従うとき、次の確率を求めよ。

- (1) $P(X \geq 2)$ (2) $P(2 \leq X \leq 3)$ (3) $P(-2 \leq X \leq 2)$

例題 正規分布の標準化

1 ある高校の1年生男子の身長は平均167cm、標準偏差7cmの正規分布とみなせるという。身長が160cm以上172cm以下の生徒はおよそ何%いるか。

解 平均167、標準偏差7の正規分布に従う確率変数を X とすれば、求める割合は確率 $P(160 \leq X \leq 172)$ である。

$$\begin{aligned} Z = \frac{X-167}{7} \text{ とすると、} Z \text{ は } N(0, 1) \text{ に従う。よって} \\ P(160 \leq X \leq 172) &= P\left(\frac{160-167}{7} \leq Z \leq \frac{172-167}{7}\right) \\ &= P(-1 \leq Z \leq 0.71) = u(1) + u(0.71) \\ &= 0.34134 + 0.26115 = 0.60249 \end{aligned}$$

したがって、約60%である。

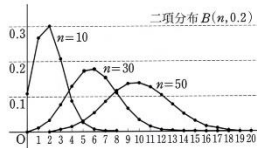
例4 例題1で、次の身長の生徒はおよそ何%いるか。

- (1) 181cm以上 (2) 160cm以下

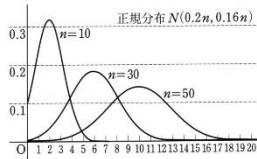
例5 例題1で、1年の男子は200人であったという。このとき、身長が174cm以上の生徒はおよそ何人か。

二項分布の正規分布による近似

確率変数 X が、二項分布 $B(n, 0.2)$ に従うとき、 X のとる値を横軸、それに対応する確率を縦軸として、折れ線グラフを $n = 10, 30, 50$ について示すと、右上の図のようになる。



また、 $m = n \times 0.2$, $\sigma^2 = n \times 0.2 \times (1 - 0.2)$ である正規分布 $N(m, \sigma^2)$ の分布曲線を $n = 10, 30, 50$ の場合についてかいてみると、右下の図のようになる。



ここで、 $B(n, 0.2)$ の確率の折れ線グラフと、正規分布 $N(m, \sigma^2)$ の正規分布曲線を比べてみると、 n が大きくなるとより近づいていることがわかる。

一般に、二項分布 $B(n, p)$ に従う確率変数 X は、 n が十分大きいとき、 $1-p$ を q とおくと、近似的に $N(np, npq)$ に従うことが知られている。したがって、次のことが成り立つ。

二項分布の正規分布による近似

二項分布 $B(n, p)$ に従う確率変数を X とすると、 n が十分大きいとき、 $Z = \frac{X - np}{\sqrt{npq}}$ は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従うとみなしてよい。ただし、 $q = 1 - p$ とする。

例題 二項分布の正規分布による近似

2 1個のさいころを360回投げるとき、1の目が55回以上出る確率を求めよ。

解 1の目が出る回数 X は二項分布 $B\left(360, \frac{1}{6}\right)$ に従うから、 X の平均 m と標準偏差 σ はそれぞれ次のようになる。

$$\begin{aligned} m &= 360 \times \frac{1}{6} \\ &= 60 \\ \sigma &= \sqrt{360 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6}} \\ &= \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \end{aligned}$$

ここで、 $Z = \frac{X-m}{\sigma}$ は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従うとみなしてよい。

また

$$\frac{55-60}{5\sqrt{2}} = \frac{-5}{5\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \approx -0.71$$

であるから、求める確率は次のようになる。

$$\begin{aligned} P(X \geq 55) &\approx P(Z \geq -0.71) \\ &= P(-0.71 \leq Z \leq 0) + P(Z \geq 0) \\ &= u(0.71) + 0.5 \\ &= 0.26115 + 0.5 \\ &= 0.76115 \end{aligned}$$

注意 $P(55 \leq X \leq 360) = \sum_{x=55}^{360} {}_{360}C_x \left(\frac{1}{6}\right)^x \left(\frac{5}{6}\right)^{360-x}$ の値は0.7798である。

例6 例題2で、1の目が出る回数が55回以上65回以下である確率を求めよ。

【考察】

数学 B では正規分布について学習する。

連続分布を考える手がかりとして相対度数について考えることによって学習を進めている。具体的には、ヒストグラムの階級の幅を小さくすることによって1つの曲線に近づけ、ヒストグラムの長方形の面積が相対度数であることから、曲線の関数を積分した値が確率となるといった流れで指導されている。しかし、積分の定義が区分求積法による定義でないことから、流れとして乖離しているということが指摘できる。(pp.134-135)

次に、連続型確率変数の平均と分散・標準偏差について学習する。連続型確率変数の平均と分散は、離散型確率変数の場合の和の記号 Σ を積分で置き換えた式で定義すると指導している。ここでも上記で触れたように、積分が微分の逆演算としか指導されておらず dx をただの記号としか認知されていないため、 p と $f(x)dx$ が同じものだということが分かりづらいと考えられる。また、正規分布、標準化、二項分布の正規分布による近似についての指導も行っているが、どれも天下り式のような学習となっているように見受けられる。(pp.136-141)

第三節 統計の学習内容の構造化

校種の区別を外して統計の全体の学習内容を眺めてみると、新学習指導要領で教える学習内容は、学年間の移行はあるものの「知識及び技能を身に付けること」に限っては新しい概念の導入は見当たらない。「思考力、判断力、表現力等を身に付けること」についての項目がそれぞれに追加されている。これは今回の改定の大きな特徴である。そのためにも、その基盤となる“児童・生徒の概念理解”が重要である。知識・理解・技能なしには、データを表現したり読み取り判断したりすることは難しい。

小学校・中学校・高等学校を通して、データの活用やデータの分析に用いる様々な概念である代表値（最大値，最小値，範囲，最頻値，平均など），分散，標準偏差，相関係数，箱ひげ図，折れ線グラフ，円グラフ，帯グラフなど様々なことが教えられているが，その中でもヒストグラムは，資料の分析や理解のための基盤的役割を担っている。

現行の教科書では，小学校は「度数分布表→ドットプロット図→ヒストグラム（柱状グラフ）」，中学校は「度数分布表→ヒストグラム，度数分布多角形→2つの集団比較のために相対度数分布表→相対度数分布多角形」，高等学校は「相対度数分布表→相対度数のヒストグラム→（実験を多数回行い，階級の幅を小さくしていく）→確率密度関数」という流れになっており，最後に正規分布曲線へとつなげている。その後正規分布は統計的な推測に利用されていく。

しかしこれらのことを理解するには，それまでの学習の準備がある。

度数分布を表すヒストグラムの1つ1つの長方形の縦の長さは「単位あたり量」を，横の長さは「いくら分」を，面積は「全体の量（度数）」を表している。

小学2・3年生で学習する分離量を対象とした「1あたり量×いくつ分＝全体の量」のかけ算，5・6年生で学習する連続量を対象とした「単位あたり量×いくら分＝全体の量」のかけ算では，「かけわり図」をシェーマとして使う。「かけわり図」の左側は「1あたり量」「単位あたり量」を書き，下側には「いくつ分」「いくら分」を書く。それらを掛け合わせた「全体の量」は長方形で表され，その広さは「全体の量の大きさ」を表している。一方，長方形の面積は「縦の長さ×横の長さ＝長方形の面積」で求められることを4年生で学習する。この2つのかけ算はともに $a \times b = c$ の形をしているので，「かけわり図」を簡略化して長方形にし，その縦の長さを「単位あたり量」，横の長さを「いくら分」，面積を「全体の量（度数）」と表す。この長方形を「面積図」と名付ける。これがヒストグラムの理解へとつながる。

折れ線グラフは度数分布多角形のグラフへ，円グラフや帯グラフのように，全体を1と見る考え方は相対度数のヒストグラムを考える基となっている。

相対度数のヒストグラムから確率密度関数（連続分布）を教えるとき，区分求積法と密度関数の概念を使う。区分求積法を理解するには無限級数の理解が必要で，無限級数には数列

を使う。

この学習内容全体の流れを学習内容の連続性の観点から見ると、3つの欠点が見受けられる。

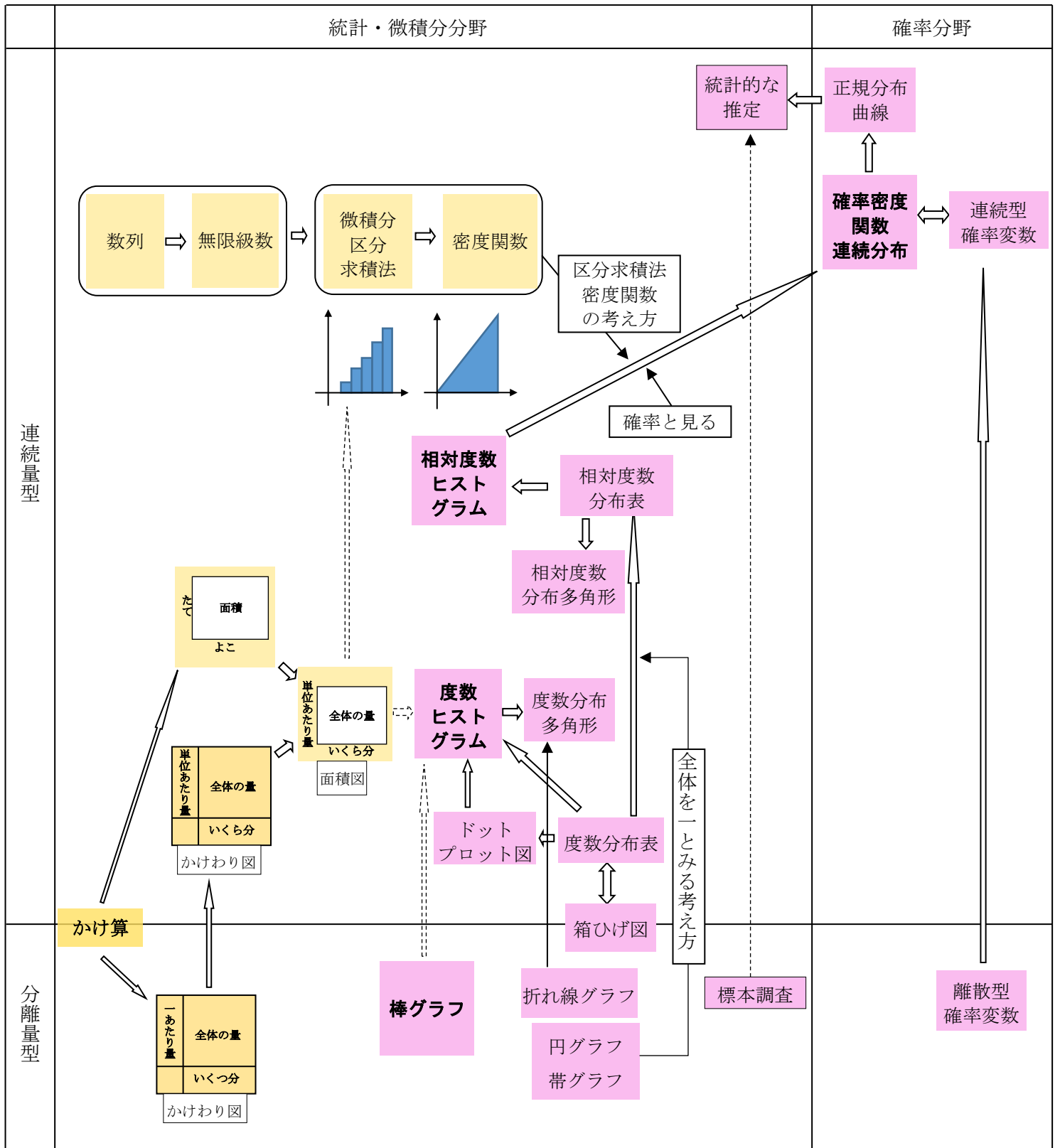
1つ目は「面積図」が教えられていないことである。この概念はヒストグラムと密度関数の意味理解には欠かせない。

2つ目は、小学校の教科書では、棒グラフの次に柱状グラフを扱う。中学校の教科書はすぐにヒストグラムから教えている。「度数分布表→ドットプロット図→ヒストグラム」の流れはあるものの、変数 x が分離量から連続量へ変わったとき、散らばり具合を視覚化するために、どうして高さから広さに変えなければならないのかの説明がなされていない。そのため大抵の児童・生徒は、ヒストグラム（柱状グラフ）の高さが度数だと思っている。

3つ目は、高校の教科書では、度数分布表から相対度数（全体を1と見る）分布表をつくり、相対度数のヒストグラムを作成し、実験を多数回行い、階級の幅を小さくしていくことで確率密度関数を説明している。しかし積分を「単位あたり量×いくら分＝全体の量」を利用した区分求積法で説明していないので、積分することは何を求めていることなのかが理解できない。その結果「なぜ「密度関数」という名称が使われるのか」についての説明やそれを想起させられるような説明も見当たらない。唐突にこの用語が使用される。 y の値が確率（グラフでは高さ）だと思っている生徒も少なくない。

以上の学習の流れをまとめると [図 1]（俯瞰図）のようになる。

太い白い矢印は学習内容の指導の流れ、黒い細い線の矢印は見方・考え方の利用、太い破線の矢印は学習内容に関する連続性についての欠点部分、細い破線の矢印は学習項目の流れを表している。



[図 1] (俯瞰図)

序章で述べたように、本論では新学習指導要領の特徴である統計教育について考察することが目的である。そのために第一節では新学習指導要領と現行教科書の学習内容を考察しその過程で 3 つの学習内容の欠点を指摘した。その解決のために以下の 4 点の授業を構築する必要があると判断した。すなわち、

- ①「面積図」を教える授業を構築すること
- ②変数 x が分離量から連続量へ変わったとき、散らばり具合を視覚化するために、どうして高さから広さに変えなければならないのかの授業を構築すること
- ③区分求積法で積分を説明し、積分することは何を求めていることなのかを理解させる授業を構築すること
- ④「なぜ「密度関数」という名称が使われるのか」についての説明やそれを想起させられる授業を構築すること

である。

欠点の問題解決のために、第五章では過去に行われてきた授業を検索し参考とする。その授業の評価は、上述のことが加味されている授業であるかどうかである。

第三章 統計の学習内容の連続性

本章では、まず確率密度関数の基礎概念について考察する。さらに、それと関連づけて小・中学校及び高等学校における教科書の統計教育の連続性と、その指導順序について考察する。

第一節 確率密度関数を理解するための基礎概念の確認と指導順序

統計の学習内容の連続性を考察することが本研究の核となる。

確率密度関数を指導するには、その概念を理解するための基礎となる概念がなければならぬ。本節ではその基礎概念には何があるのかについて考える。

教科書における確率密度関数の説明では、実測を多数回行いその相対度数のヒストグラムの階級の幅を小さくしていくとそのヒストグラムは一定の曲線に近づくとし、確率密度関数を導いている。

- ① 確率密度関数を理解するためには、 $y = f(x)$ の y の値が確率密度であることが分らなければならない。
- ② y の値が確率密度であることが分かるためには、まだ極限化する前の段階の相対度数のヒストグラムのそれぞれの長方形の縦の長さが確率密度を表していることを理解しなければならない。
- ③ 相対度数のヒストグラムのそれぞれの長方形の縦の長さが確率の密度（確率密度）を表していることを理解するためには、度数のヒストグラムのそれぞれの長方形の縦の長さが度数の密度（度数密度）を表していることを理解しなければならない。
- ④ 度数のヒストグラムのそれぞれの長方形の縦の長さが度数の密度（度数密度）を表していることを理解するためには、「単位あたり量×いくら分＝全体の量」（連続量型）を面積図として表現することを理解しなければならない。
- ⑤ 「単位あたり量×いくら分＝全体の量」（連続量型）の面積図を理解するためには、その原型であり、3つの量「単位あたり量」「いくら分」「全体の量」の関係を視覚的に説明しているかけわり図（連続量型）を理解しなければならない。
- ⑥ かけわり図（連続量型）を理解するためには、その前段階のかけわり図（分離量型）を理解しなければならない。かけわり図（分離量型）は小学校2年生に学習するかけ算である。

結局のところ原点は、小学校2年生にあることがわかる。かけわり図（分離量型）の先に確率密度関数がある。

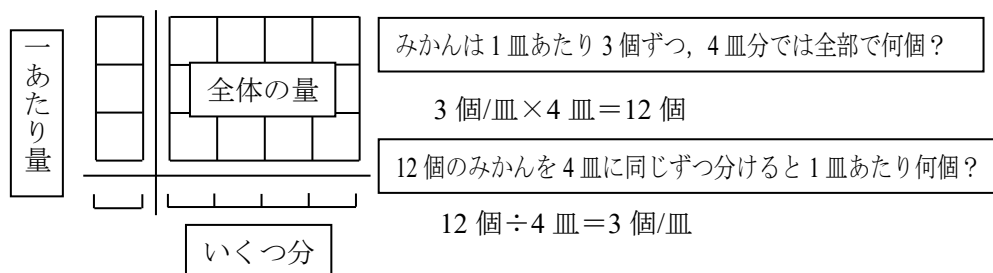
⑥、⑤、④、③、②、①の順に教えていけば学習がつながっていく。すなわち、⑥かけわり図（分離量型）→ ⑤かけわり図（連続量型）→ ④「単位あたり量×いくら分＝全体の量」（連続量型）の面積図 → ③度数のヒストグラムのそれぞれの長方形の縦の長さが度数の密度（度数密度）→ ②相対度数のヒストグラムのそれぞれの長方形の縦の長さが確率の密度（確率密度）→ ① $y=f(x)$ の y の値が確率密度の流れになる。

民間教育団体である数学教育協議会では、かけわり図から面積図へという指導の流れが

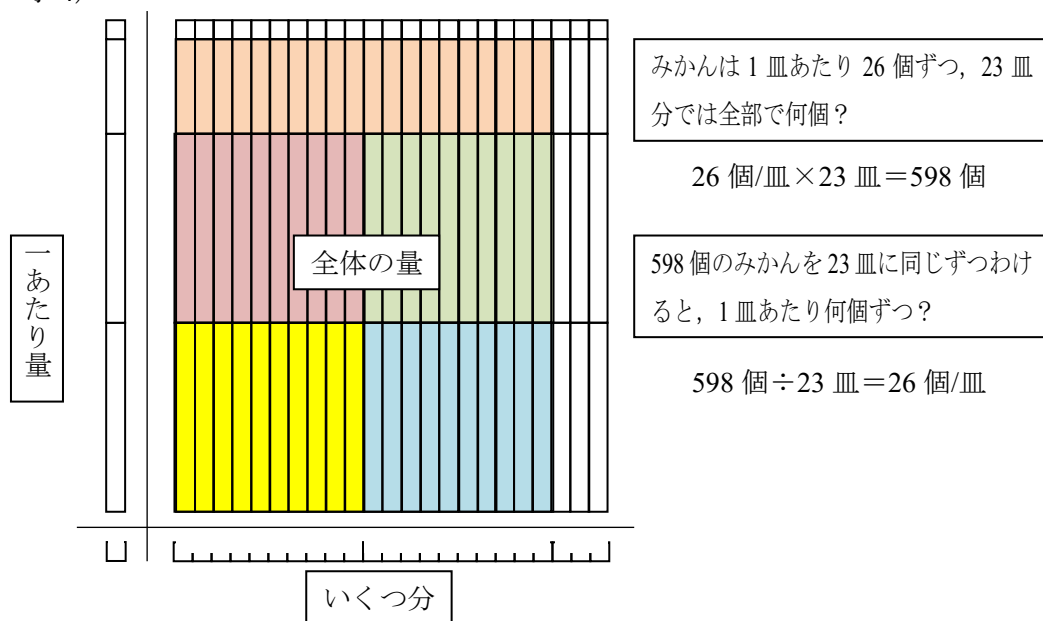
すでに実践されている。小学2年生のかけ算の意味をかけわり図（分離量型）で説明し、高学年では面積図へと発展させている。これらを踏まえて高校で積分の定義を区分求積法で学習すれば、確率密度関数を理解する基礎は出来上がる。以下、この流れを図で説明する。

⑥ かけわり図（分離量型）

（小2～小3）

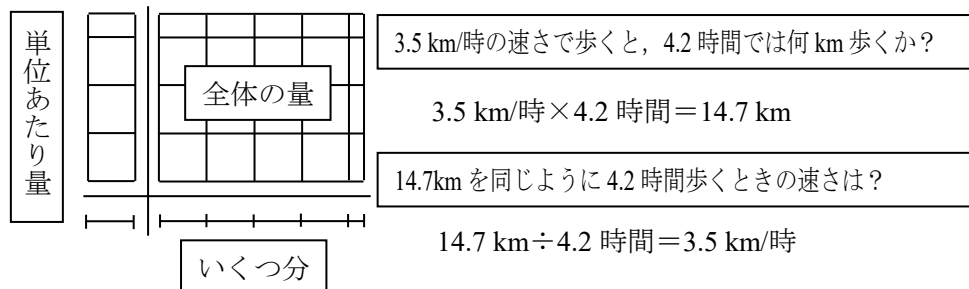


（小3～小4）



⑤ かけわり図（連続量型）

（小5～小6）



(小6～中3)

3.5km/時 (a km/時) の一定の速さで歩くと、 x 時間では何 km(y km) 歩くか?

$3.5\text{km/時} \times x \text{ 時間} = 3.5x \text{ km}$

$y = 3.5x$ (正比例) (小学校)
 $y \div x = 3.5$ 商一定

$y = ax$ (正比例) (中学校)
 $y \div x = a$ 商一定

④ 「単位あたり量×いくつ分=全体の量」(連続量型) の面積図

(高2)

瞬間速度が a km/h の一定の速さで歩くと、 x 時間では何 km(y km) 歩くか?

$a \text{ km/h} \times x \text{ h} = ax \text{ km}$ $y = ax$ $y' = a$
 $ax \text{ km} \div x \text{ h} = a \text{ km/h}$ $y \div x = a$

③ 度数のヒストグラムのそれぞれの長方形の縦の長さは密度

6年生で学習するヒストグラムは、面積図が連続に並んだものである。

例として、啓林館『わくわく算数6』p.167(平成26年2月28日検定済み)を見てみよう。

⑦ 10m以上15m未満の人数が2人ということ、どう表したらよいですか。

グラフのかき方

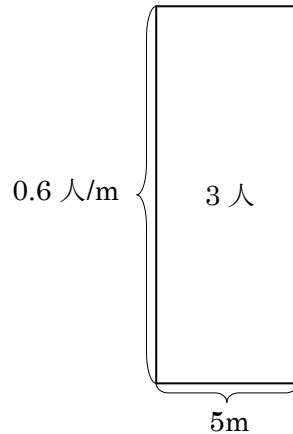
- 1 表題をかく。
- 2 横軸に投げたきょり、縦軸に人数を目もる。
- 3 きよりの区間を横、人数を縦とする長方形をかく。

右のようなグラフを **柱状グラフ**、または、**ヒストグラム** といいます。

ここでは、15m 以上 20m 未満の階級を見る。

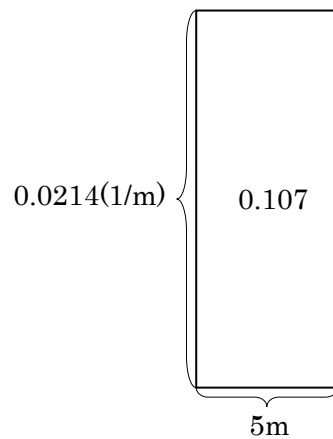
長方形の面積は度数に比例してかかかれているから、長方形の面積は 3 人である。

3 人が「全体の量」を表し、5m が「いくら分」を表している。「単位あたり量」は長方形の縦の長さだから、 $3 \text{ 人} \div 5 \text{ m} = 0.6 \text{ 人/m}$ となる。15m 以上 20m 未満の階級では、1m 以内に入る人数は 0.6 人になる（1m 以内に 0.6 人含まれる）ので人数の密度になっている。



② 相対度数のヒストグラムのそれぞれの長方形の縦の長さが確率密度

全体の人数は 28 人なので相対度数のヒストグラムの面積は、 $3 \text{ 人} \div 28 \text{ 人} \doteq 0.107$ 、高さは、 $0.17 \div 5 \text{ m} \doteq 0.0214(1/\text{m})$ となる。



15m 以上 20m 未満の階級では、1m 以内に入る確率は 0.0214 になる（1m 以内に 0.0214 の確率が含まれる）ので $0.0214(1/\text{m})$ は確率の密度になっている。

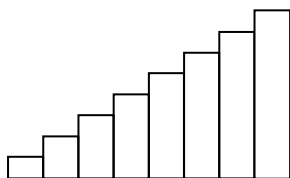
① $y = f(x)$ の y の値は確率密度

投げる生徒の人数を限りなく多くして、階級の幅を限りなく小さくする。しかし相対度数のヒストグラムのそれぞれの長方形の縦の長さの確率密度はそのまま維持される。最終的にグラフでは y の値が確率密度となり、確率密度を示している線分が隙間なく並ぶことになる。その先端だけを結んでいくと X の確率密度関数 $f(x)$ のグラフができる。

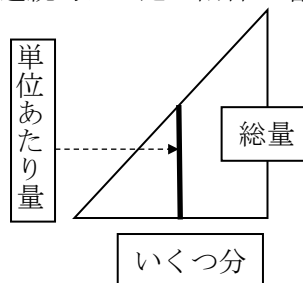
2. 面積図の発展としての区分求積法

面積図が連なっている状態、例えば「1時間ごとに速さが 2km/h ずつ増える」「1時間ごとに速さが増減する」状態から、連続変化の状態、例えば「速度が連続的に一定の割合で増えていく」「速度が連続的にいろいろ変化する」状態を考えることである。

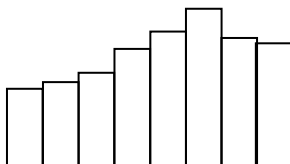
1時間ごとに速さが 2km/h ずつ増える



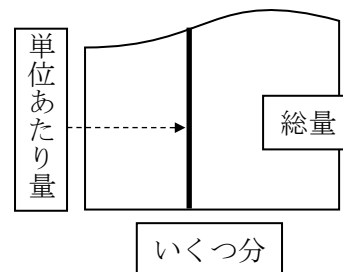
速度が連続的に一定の割合で増えていく



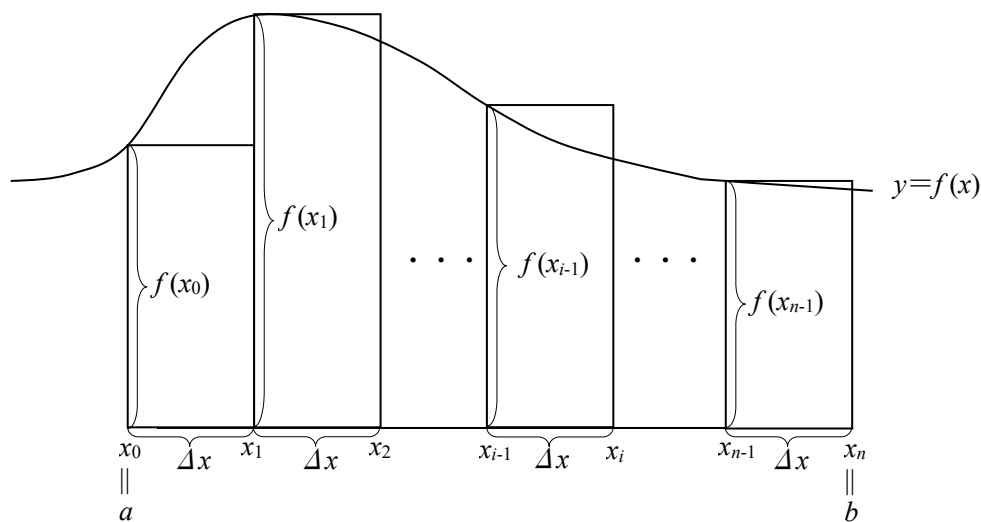
1時間ごとに速さが増減する



速度が連続的にいろいろ変化する



前記のグラフは、以下のような意味である。



$\Delta x = \frac{b-a}{n}$: 幅を n 等分する。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \Delta x = \int_a^b f(x) dx$$

$f(x_{i-1})$ は「単位あたり量」、 Δx は「いくつ分」である。 $f(x_{i-1}) \times \Delta x$ は $i-1$ 番目の「全体の量」を表わす。 i を 0 から $n-1$ まで全部たすと、全部の道のり(総量)が求められる。このように定積分は区分求積法で定義される。

単位あたり量が連続的に変化すると、「単位あたり量」は「微分係数」にあたることや、「総量を求めること」は「積分をすること」にあたるのが容易に分かる。

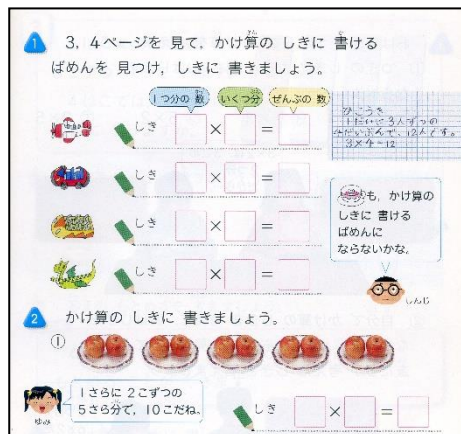
次節では現行の教科書において単位あたり量を求めるための指導内容とその指導順序はどのようになっているのかについて考える。

第二節 現行の教科書における学習内容の連続性について

第一節の⑥，⑤，④，③，②，①の観点から教科書を対応付けて考察する。

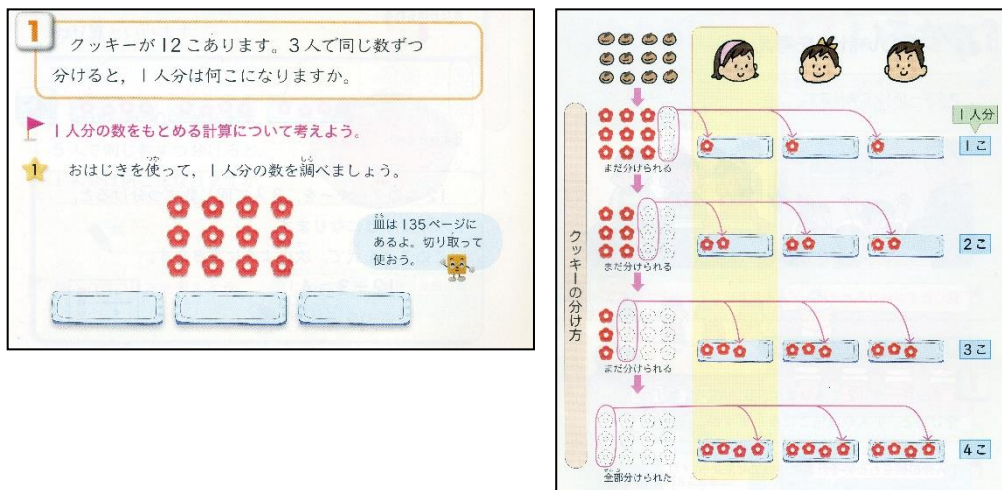
⑥ かけわり図 (分離量型) に対応するのは、2年生・3年生・4年生の整数のかけ算・わり算である。かけわり図は用いていないが、「1つ分の数 (1あたり量)」と「いくつ分」と「ぜんぶの数 (全体の量)」の関係について説明している。

(かけ算) リンゴが全部でいくつか (全体の量) を求めている。



[図] 東京書籍『新しい算数2下』(平成27年2月10日発行) p.7

(わり算：等分除) 1人分のあめの個数 (1あたり量) を求めている。



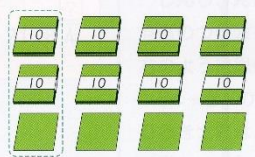
[図] 東京書籍『新しい算数3上』(平成27年2月10日発行) p.39-40

(わり算：包含除) 何人に分けられるか (いくつ分) を求めている。

1 色紙が84まいあります。この色紙を1人に21まいずつ分けると、何人に分けられますか。

式

★ 計算のしかたを考えましょう。



84 ÷ 21 = □ 答え □ 人

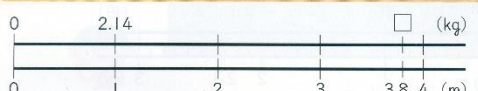
ひるき: 84から21は何ことれるかな。

[図] 東京書籍『新しい算数4上』(平成27年2月10日発行) p.103

⑤ かけわり図 (連続量型) に対応するのは5年生の小数のかけ算・わり算, 5年生の単位量あたりの大きさ, 6年生の速さである。かけわり図は用いていないが, 「単位あたり量」と「いくら分」と「全体の量」の関係について説明している。

(かけ算) パイプの長さ (全体の量) を求めている。

2 1mの重さが2.14kgのパイプがあります。このパイプ3.8mの重さは何kgですか。



パイプの長さが2倍, 3倍, ...になると, パイプの重さも2倍, 3倍, ...。

式

★ 右の計算のしかたを説明しましょう。

2.14 × 3.8 = □

214 × 38 = 8132 ÷ 1000

2.14 × 3.8の積は, 2.14を100倍し, 3.8を10倍して214 × 38の計算をし, 積を1000でわれば求められます。

$2.14 \times 3.8 = (2.14 \times 100) \times (3.8 \times 10) \div 1000$
 $= 214 \times 38 \div 1000$
 $= 8.132$ 答え 8.132kg

[図] 東京書籍『新しい算数5上』(平成27年2月10日発行) p.38

(わり算：等分除) 鉄の棒 1m の重さ (単位あたり量) を求めている。

2 6.3mの重さが7.56kgの鉄のぼうがあります。
この鉄のぼう1mの重さは何kgですか。

式

計算のしかたを考えよう。 6.3を、にできないかな。

右の計算のしかたを説明しましょう。

$$\begin{array}{r} 7.56 \div 6.3 = \square \\ \times \square \times \square \\ \hline 75.6 \div 63 = 1.2 \end{array} \quad \text{等しい}$$

7.56 ÷ 6.3の商は、7.56と6.3の両方を10倍した75.6 ÷ 63の商と等しくなっています。

$$\begin{aligned} 7.56 \div 6.3 &= (7.56 \times 10) \div (6.3 \times 10) \\ &= 75.6 \div 63 \\ &= 1.2 \end{aligned} \quad \text{答え } 1.2 \text{ kg}$$

[図] 東京書籍『新しい算数5上』(平成27年2月10日発行) p.52

(わり算：包含除) 何人に配れるか (いくつつ分) を求めている。

5 2.5mのリボンを、1人に0.7mずつ配ります。何人に配れますか。
また、何mあまりですか。

式

小数のわり算の、あまりの大きさについて考えよう。

右の筆算で、あまりの4はどんな大きさを表していますか。

$$\begin{array}{r} 3 \\ 0.7 \overline{) 2.5} \\ \underline{21} \\ 4 \end{array}$$

「あまりは4」でいいのかな。

0.1が4こあるということだから…。

図や検算で、あまりが0.4であることを確かめましょう。

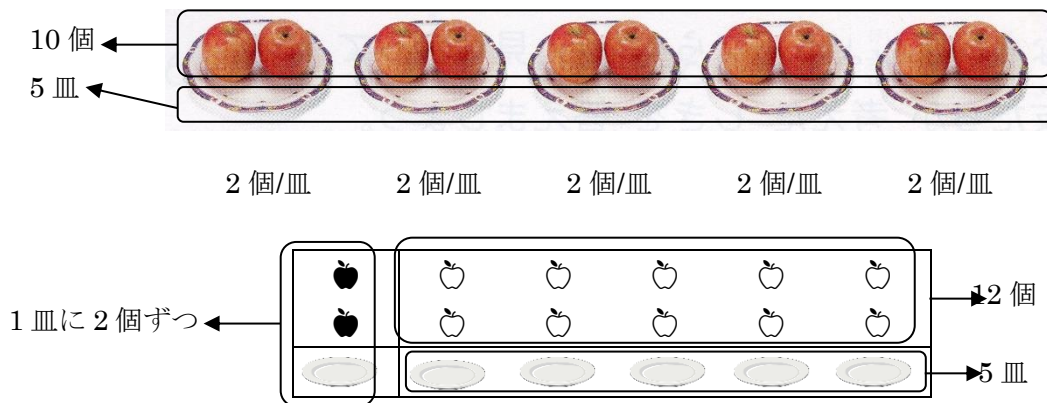
$$0.7 \times 3 + \square = \square$$

わる数 商 あまり わられる数

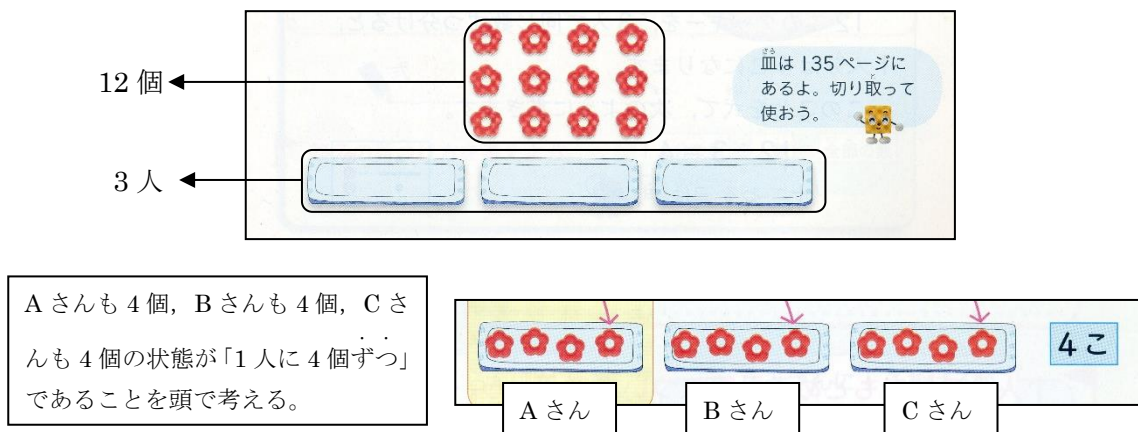
[図] 東京書籍『新しい算数5上』(平成27年2月10日発行) p.55

⑥, ⑤は, 3つの要素の関係は説明しているが, かけわり図を使っていないので, ヒストグラムの長方形の解釈には直接つながらない。

2年生のかけ算は「2個/皿×5皿=10個」である。この式の「10個」と「5皿」は以下の部分に図示されている。では, 「2個/皿」はどこに図示されているのか。「2個/皿」は「1つの皿に2個ずつ」という意味である。「5皿」と「10個」はわかるが, 「1皿に2個ずつ」が図に表現されていない。かけわり図には長方形の縦にあたる「1皿に2個ずつ」が表現されている。



3年生のわり算も同様である。「12個」を「3人」に配ると「1人4個ずつ」であるが, 「1人4個ずつ」がない。「12個」と「3人」は目の前にあるが, 「1人に4個ずつ」は全体を見て頭の中で考える。かけわり図には長方形の縦にあたる「1皿に4個ずつ」が表現されている。



④「単位あたり量×いくら分=全体の量」(連続量型)を面積図として表現すること, ③度数のヒストグラムのそれぞれの長方形の縦の長さが度数の密度であること, ②相対度数のヒストグラムのそれぞれの長方形の縦の長さが確率の密度を表していることは, 小・中・高の教科書では扱われていない。① $y=f(x)$ の y の値が確率密度であるが, なぜその用語なのかの解説はない。この学習時には, まだ積分を区分求積法で捉え直していないので, $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$ (p.103 の(※)を参照) が確率を求めていることは理解できないであろう。

以上のことから, 第一節の⑥~①の観点で評価すると, 連続的な学習内容になっていないことが分かる。

第三節 「確率密度」なる概念を持ち出す理由

「確率密度」なる概念を持ち出す理由は、連続量を対象とした場合ではある1つの値の確率が常に0になるからである。

【例1】

ハンドボール投げをして24m30cmの位置にピッタリ投げられる確率は、100回投げてもその位置になることは不可能なので0である。なぜなら0mから30mの間にある数は無限にある（実数濃度）。その1つが24m30cmである。ちょうどその位置に落ちる確率は、場合の数だと $1/\infty$ となる。 $1/\infty$ は0である。だから一見24m30cmのように見えても24m30cm1mmかもしれないし、24m29cm9mmかもしれない。24m40cmの位置にピッタリ投げられる確率も0であり、24m50cmの位置にピッタリ投げられる確率も0である。指定された位置ちょうどに投げられる確率は0である。しかし投げた位置が24m30cm以上24m50cm未満の間でよいとなれば可能性が出てくる。「投げた位置が24m30cm以上24m50cm未満の間になる確率」を考えるのである。もし100回投げてその内3回はその範囲に投げられたとすれば、24m30cm以上24m50cm未満の間に投げられる確率は0.03となる。

【例2】

紐の長さが100cmに切れたと主張する生徒がいたとする。しかし、先生が正確に測りなおすと、100.2cmであった。しかし、さらに電子顕微鏡を使って再度測定すると、100.20547cmとなった。さらに100年後、さらに技術が進むともっと詳しく測定できる。しかし測定の精度がいくら上がろうと、「ちょうど100cm」の長さに切れた紐は存在しない。なぜなら、90cmから110cmの間にある数は無限にある（実数濃度）。その1つが100cmである。100cmちょうどに切れる確率は、場合の数だと $1/\infty$ となる。 $1/\infty$ は0である。だから、紐の長さが110cmちょうどに切れる確率も0であり、200cmちょうどに切れる確率も0である。このように、指定された長さちょうどに切れる確率は常に0となってしまう。しかし、切った長さが100cm以上100.1cm未満の間でよいとすれば可能性が出てくる。すなわち「切った紐の長さが100cm以上100.1cm未満の間になる確率」を考えるのである。そこで、確率密度なる概念を持ち出して、例えば、「100cm以上100.1cm未満の間のすべての確率密度を足し合わせる」という行為をおこなう。専門的に言うと「確率密度を、長さ100cm以上100.1cm未満の間で積分する」という呼び方になる。

確率密度なる概念を持ち出して確率を考えるのは、実測値の確率が常に0になる状況を扱うためである。

連続量を対象とするがゆえに、積分した値を「確率」としなければならなくなり、そのため「確率密度関数」 $f(x)$ を持ち出したのである。

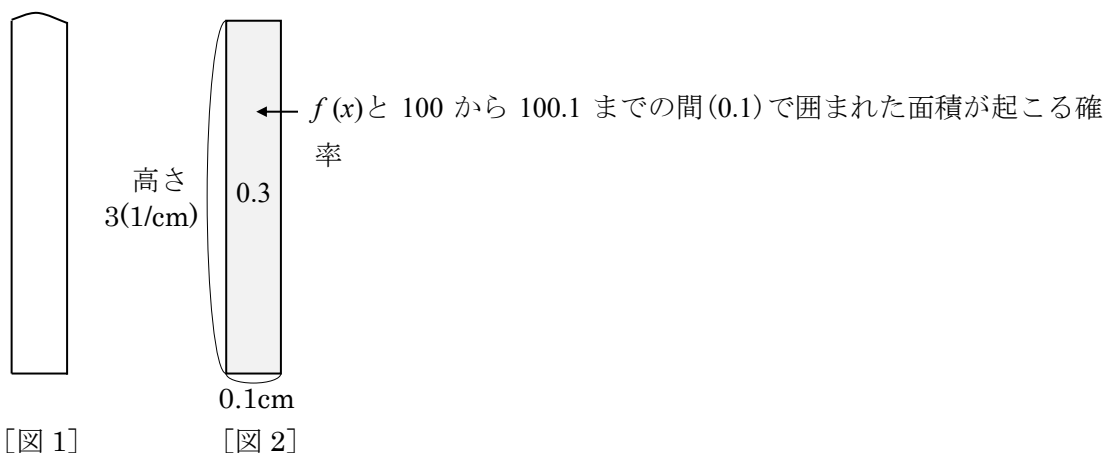
ゆえに確率密度関数 $f(x)$ の x は連続量であることが前提となる。サイコロの目の出る確率や二項分布のような分離量が対象であれば、 $f(x)$ が確率であり、上述のようなことは考えなくともよい。

第四節 確率密度関数に「密度」が用いられる理由

このことについては専門の統計の数学書にも学校の教科書にも説明されていない。生徒に「これは定義である」といっても納得いかないであろう。なぜそのような定義をするのか、なぜそのような用語を用いるのかの説明がある。このことについて具体的事象から考えてみたい。

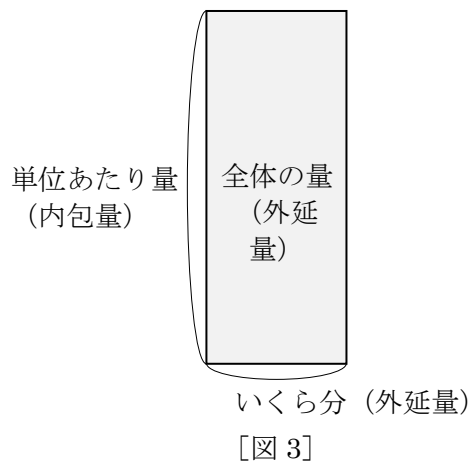
積分したら確率を求められるように「確率密度関数」 $f(x)$ を持ち出した。上述の例で言えば、「切った紐の長さが 100cm から 100.1cm の間になる確率」は、確率密度関数を $f(x)$ とすると、 $P(100 \leq X < 100.1) = \int_{100}^{100.1} f(x) dx$ ($f(x)$ と 100 から 100.1 までの間(0.1)で囲まれた面積が起こる確率)で求められるということである。

この結果を $P(100 \leq X < 100.1) = 0.3$ としよう。[図 1]のように x の変域をどのように取ろうとも一般に上部は曲線であるが、 x の変域が微小ならば[図 2]のようにほぼ長方形とみることができる。相対度数のヒストグラムは長方形である。



0.3は長方形の面積であるから、高さ \times 0.1cm $=$ 0.3である。ゆえに、高さ $=$ 0.3 \div 0.1cm $=$ 3(1/cm)となる。つまり $f(x)=3(1/cm)$ になる。

[図 2]は「全体の量 \div いくら分 $=$ 単位あたり量」の面積図と同じ構造をしている[図 3]。



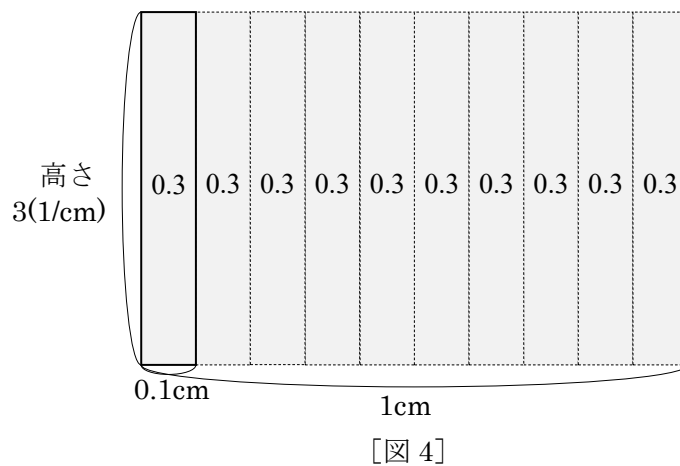
小・中学校での代表的な単位あたり量 (内包量) には速さや体密度がある。通常、速さは常に変化するし、体密度は場所によって異なる。しかし微小距離は微小時間に、微小質量は微小体積に比例する。そのような微小な世界では、速さは単位時間内にどれだけの距離を進むか (速さは単位時間内にどれだけの距離を含むか)、体密度は単位体積内にどれだけの質量を含むかという見方をしている。これらはともに「密度」と見ることができる。

では、この $3(1/cm)$ をどのように捉えれば「確率密度」と見ることができるか。確率は 0 以上 1 以下の数値で示されるのに「3」が出現している。

$$0.3 \div 0.1cm = 3(1/cm)$$

左辺は 100cm ~ 100.1cm の 0.1cm 内に入る確率が 0.3 であるという意味である。

右辺は分母が 10 倍の 1cm になっているので、確率も 10 倍の 3 になっている。確率は全事象を 1 と考えるが、この場合は全事象を 10 とみなしたことになる。この意味で 1cm 内に入る確率が 3 であるという意味である [図 4]。



このように「1/cm」の「1」を全事象の確率を 10 とみなしたときの確率の単位と捉えてみると、「1/cm」は 1cm 内に入る確率ということになる。やはり $3(1/cm)$ を「密度」と見ることができる。

このように考えれば、相対度数のヒストグラムの長方形の縦の長さに「確率密度」という用語を使うことにも納得がいく。

しかし、[図 2] の立場に立った長方形の捉え方は教科書では全く触れていない。ヒストグラムで唐突に出現するのである。さらに積分は区分求積で定義されていないので、縦の長さが「確率密度」になることはなおさら理解が遠のく。

第五節 棒グラフとヒストグラムと確率密度関数の関係

離散型確率変数の場合のグラフでは y 軸が「確率」であるのに対し、連続型確率変数のグラフの場合は y 軸が「確率密度」であり、その確率は積分で求めている。

棒グラフ（離散型：分離量が対象）とヒストグラム（連続型：連続量が対象）との関係は以下のようにまとめられる [表 1]。

[表 1] 棒グラフとヒストグラムと確率密度関数の関係

対象	分離量（離散型）	連続量（連続型）
資料の整理	棒グラフ 縦軸が度数	ヒストグラム 縦軸が単位あたり量
		相対度数 ↓ 区分求積法
確率	サイコロの目が出る確率 （離散型確率変数） 縦軸が確率	紐を一定の長さに切る確率 （連続型確率変数） 縦軸が確率密度：確率密度関数

(※) $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$ の理解について

1つ目は階級の区間は「〇〇以上△△未満」と表現するにもかかわらず、左辺が「 $P(a \leq X < b)$ 」ではないということである。階級の表し方からすると矛盾が生じるため困惑してしまう恐れがある。

このような表記にする理由は2つある。1つは「 $P(a \leq X < b)$ 」とした場合広義積分になってしまうことである。区間「 $a \leq X < b$ 」は开区間となるため積分するには広義積分を用いる必要がある。しかしながら、高校の指導要領では広義積分について学習しないため計算することができないのである。もう1つは $P(X=b)=0$ ということである。上記の広義積分を用いて「 $P(a \leq X < b)$ 」を計算すると、

$$P(a \leq X < b) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

となる。 $P(X=b)=0$ ということ踏まえると、

$$P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X < b) + P(X=b) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

となり、 $P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X < b)$ が成り立つ。したがって、閉区間の積分（定積分）は高校で学習することや、計算のことを考えると都合がよいのである。

以上のことを理解しておけば生徒の混乱を避けることができるだろう。

2つ目は左辺の X と右辺の x との違いが理解できているかである。 X は確率変数と定義されているので、 X は関数であるにもかかわらず変数と勘違いしてしまう恐れがある。

・ 離散型確率変数の場合

各面に、{熊, 兎, 猫, 犬, 猿, 象}の絵がかかれたサイコロで考えてみよう。このサイコロには何も細工がされていなく、どの面も出ることは「同様に確からしい」ものとする。サイコロを振るという実験・試行の結果、{熊が出る, 兎が出る, 猫が出る, 犬が出る, 猿が出る, 象が出る}のどれかが起こる。

しかし、この現象を数学の世界で扱うには、数値にしないと扱えない。

そこで、仮に

熊が出る=1, 兎が出る=2, 猫が出る=3, 犬が出る=4, 猿が出る=5, 象が出る=6
としてみる（数値なら何でもよい）。すると、試行の結果は{1, 2, 3, 4, 5, 6}となる。すなわち、振って見たら1, 2, 3, 4, 5, 6のどれかが出るということになる。この「振って見たら1, 2, 3, 4, 5, 6のどれかが出る」ことを何とか式化しようとしたものが、

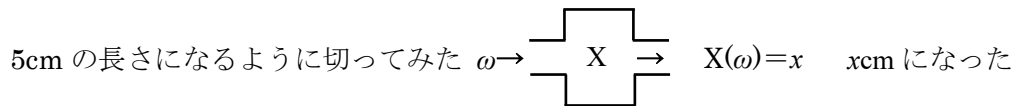
$$X(\omega) \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

である。すなわち ω を独立変数とし、1, 2, 3, 4, 5, 6 を従属変数と強引に見立てたのである。関数の入力は一般的には数値であるが、 ω は何を表しているかは厳密に定義されているものではない。この ω は「振ってみる（試行をする）」という風に解釈したらよいであろう。（「振ってみる」というこれまでにない入力の見方なので素直には受け入れられないであろう。「振ってみる」とはいつでもその振り方には、強い、弱い、右の方へ、左の方へなどいろいろある。どんな振り方にせよ、その振り方で1回振ると1~6の1つが決まる。しかしどんな関数かは分からない。試行の結果しかわからないのである。）この X を**確率変数**という（確率関数といった方が分かりやすいかもしれない）。このような意味で、「**確率変数は試行結果（この場合は1, 2, 3, 4, 5, 6）において定義される関数**」とみなすことができるのである。 X の取る値が「とびとび」のとき、 X を離散型確率変数といい、そのようなときの分布を**離散分布**という。

習慣的に $X(\omega) \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ の「 (ω) 」を省略して $X \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ と書くことが多い。同様に確率変数の値 x_i の確率 $P(X(\omega) = x_i) = p_i$ も $P(X = x_i) = p_i$ と書くことが多い。「 $X = x_i$ 」の表現は、 X は関数でもあり関数値でもあるような扱いになっている。

・連続型確率変数の場合

確率変数 X は関数なので、本当は $X(\omega)$ と表した方が x との区別も明示できてよいのかもしれない。ブラックボックスでは次のようになる。



具体的には、以下のようなものである。

1 回目 「5cm の長さに切ってみたら (ω_1) , $x = 4.2\text{cm}$ ($X(\omega_1)$) になった。」

2 回目 「5cm の長さに切ってみたら (ω_2) , $x = 5.2\text{cm}$ ($X(\omega_2)$) になった。」

3 回目 「5cm の長さに切ってみたら (ω_3) , $x = 5.6\text{cm}$ ($X(\omega_3)$) になった。」

⋮
⋮

100 回目 「5cm の長さに切ってみたら (ω_{100}) , $x = 4.6\text{cm}$ ($X(\omega_{100})$) になった。」

以上のような見方をするということである。「5cm の長さに切ってみたら 4.7cm 以上 4.9cm 未満に入る確率」は $P(4.7 \leq X(\omega) < 4.9)$ となるわけである。 $X(\omega)$ を略して単に X と表していることが多いので、 $P(4.7 \leq X < 4.9)$ と書かれていることが多い。連続型確率変数 X はあくまで関数であって $X(\omega)$ が関数値 x である。 X と x は同じではない。

3 つ目は積分の定義に関することである。積分は微分の原始関数を求めることとなっている。

微分の定義は、「 x の関数 $f(x)$ から、その導関数 $f'(x)$ を求めることを、 $f(x)$ を x で微分する、または単に**微分する**という。」である。導関数 $f'(x)$ の定義は、東京書籍『数学Ⅱ』（平成27年2月10日発行）の教科書では [図1] のように

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{h}$$

と説明されている。

積分の定義は、「 C は**積分定数**といい、関数 $f(x)$ の不定積分を求めることを、 $f(x)$ を**積分する**という。」である。関数 $f(x)$ 不定積分の定義は、同教科書では [図2] のように

$f(x)$ の任意の原始関数は次のように表される。

$$F(x) + C$$

これらをまとめて $\int f(x)dx$ と表し、 $f(x)$ の **不定積分** という。

$$\text{すなわち } \int f(x)dx = F(x) + C \quad (C \text{ は定数})$$

と説明されている。

定積分と面積の関係の説明でもこの立場にたって、曲線 $f(x)$ と x 軸の間にある図形の、 x 座標が a から x までの部分の面積 $S(x)$ とするとき、 $S'(x) = f(x)$ になることから、 $S = \int_a^b f(x)dx$ を導いている。

3節 積分

1 不定積分

関数 $f(x)$ が与えられたとき、微分して $f(x)$ になる関数、すなわち $F'(x) = f(x)$ を満たす関数 $F(x)$ を、関数 $f(x)$ の **原始関数** という。

例1 $(x^2)' = 2x$ であるから、 x^2 は $2x$ の原始関数である。
 $x^2 + \frac{1}{2}, x^2 + 2, x^2 - 3$ なども微分して $2x$ になる関数であるから、 $2x$ の原始関数である。このように、 $2x$ の原始関数は無数に存在する。

いま、 $f(x)$ の原始関数の1つを $F(x)$ とすると、 $f(x)$ の任意の原始関数 $G(x)$ について

$$\{G(x) - F(x)\}' = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

ゆえに、193ページで学んだことにより、 $G(x) - F(x)$ は定数となる。

この定数を C とすると $G(x) - F(x) = C$ すなわち $G(x) = F(x) + C$ 以上より、 $f(x)$ の任意の原始関数は次のように表される。

$$F(x) + C$$

これらをまとめて $\int f(x)dx$ と表し、 $f(x)$ の **不定積分** という。

$$\int f(x)dx = F(x) + C \quad (C \text{ は定数})$$

ここで、 C は **積分定数** といい、関数 $f(x)$ の不定積分を求めることを、 $f(x)$ を **積分する** という。

(*) 記号 \int は "インテグラル" または "積分" と読む。

[図 1]

2 導関数

181ページの例5で調べたように、関数 $f(x) = x^2$ の $x = a$ における微分係数 $f'(a)$ は

$$f'(a) = 2a$$

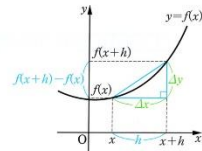
a	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f'(a)$	-6	-4	-2	0	2	4	6

であった。この式で、 a の値を変えると、 $f'(a)$ の値も変わる。すなわち、 a を変数とみなすと、微分係数 $f'(a)$ は a の関数になる。そこで、文字 a を文字 x に置き換えて得られる関数 $f'(x) = 2x$ を、関数 $f(x) = x^2$ の **導関数** という。

一般に、関数 $y = f(x)$ が与えられたとき、 x のおのこの値 a に微分係数 $f'(a)$ を対応させると、1つの新しい関数 $f'(x)$ が得られる。この関数 $f'(x)$ を、 $f(x)$ の **導関数** という。すなわち、関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は次の式で定義される。

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

上の式において、 h は x の変化量、 $f(x+h) - f(x)$ はそれとともなう y の変化量を表している。これらをそれぞれ、 x の **増分**、 y の **増分** といい、記号 Δx 、 Δy で表す。



すなわち $\Delta x = h$ 、 $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$ Δx 、 Δy の記号を用いると、導関数は次のように表される。

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

(*) Δ はギリシャ文字で、"デルタ" と読む。

[図 2]

3 定積分と面積

右の図は、 x 座標が1から x までの範囲で、関数 $f(x) = x+1$ のグラフと x 軸の間にある台形を表している。

この台形の面積を $S(x)$ とすると

$$S(x) = \frac{1}{2}(x-1)\{2+(x+1)\}$$

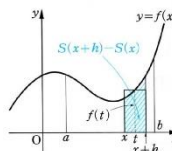
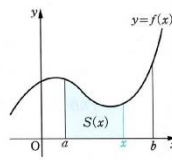
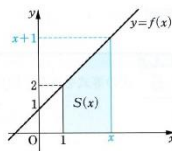
$$= \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{3}{2} \quad (x \geq 1)$$

このとき、 $S'(x) = x+1$ であるから **$S'(x) = f(x)$** が成り立つことがわかる。

区間 $a \leq x \leq b$ において $f(x) \geq 0$ を満たす関数 $f(x)$ が与えられているとし、曲線 $y = f(x)$ と x 軸の間にある図形の、 x 座標が a から x までの部分の面積を $S(x)$ とする。

x の値が x から $x+h$ まで変化するときの $S(x)$ の変化量 $S(x+h) - S(x)$ は、 $h > 0$ のとき x から $x+h$ までの区間において、曲線 $y = f(x)$ と x 軸の間にある図形の面積である。

$x \leq t \leq x+h$ として、この図形の面積が、横の長さ h 、縦の長さ $f(t)$ の長方形の面積に等しくなるように t をとると



[図 3]

$$S(x+h) - S(x) = hf(x)$$

よって $\frac{S(x+h) - S(x)}{h} = f(x)$

ここで、 $h \rightarrow 0$ のとき $t \rightarrow x$ であるから、 $f(t) \rightarrow f(x)$ となる。

したがって $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(x+h) - S(x)}{h} = f(x)$

$h < 0$ のときにも、同様にしてこの式が成り立つことがわかる。

ゆえに **$S'(x) = f(x)$**

すなわち、 $S(x)$ は $f(x)$ の原始関数になっている。

さて、 $F(x)$ を $f(x)$ の原始関数の1つとすると、ある定数 C を用いて

$$S(x) = F(x) + C \quad \dots\dots ①$$

となる。①で $x = a$ とおくと、 $S(x)$ の意味により $S(a) = 0$

であるから $F(a) + C = 0$

よって $C = -F(a)$

これを①に代入すると

$$S(x) = F(x) - F(a)$$

この式で $x = b$ とおくと $S(b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$

となる。 $S(b)$ を S と書くと、次のことが成り立つ。

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

定積分と面積

区間 $a \leq x \leq b$ において、 $f(x) \geq 0$ であるとする。

曲線 $y = f(x)$ と x 軸および2

直線 $x = a$ 、 $x = b$ で囲まれた

図形の面積 S は

$$S = \int_a^b f(x)dx$$



[図 4]

このような微分と積分が逆演算である定義の説明では、量に関係してくる具体的事例では何を求めているのかを理解できない可能性がある。定積分を少しでも意味づけようと「定積分と面積」で、積分することは面積を求めていることになる」と説明している [図 3] [図 4] が、この説明では、 $f(x)$ が具体的事象の関数となったとき、積分値がその事象の何を求めていることになるのか容易に理解できないであろう。度数分布表（量が入っている）をもとに作られた相対度数のヒストグラムを使って確率密度関数を説明し、その関数を積分すると確率が求められることを教えるが、そのことを十分理解できるのであろうか。その根底となっている「単位あたり量×いくら分＝全体の量」を用いた区分求積法の積分の定義の説明が確率密度関数の理解へつながる。積分の定義を考え直す必要があるのではないか。

これまでに量を重視した積分の導入した教科書はないのかといえばそうではなく、昭和 41 年に日本文教出版から出された『数学ⅡB』はその一例として挙げられる。少し長くなるが紹介しよう [図 5～17]。

積分の説明のために初めは簡単な具体例をいくつか紹介している。

(具体例 1) [図 5] メスシリンダーの中に下から順に二硫化炭素・水・エーテルを入れ、互いに溶け合うことがないとした上で、それぞれのメスシリンダーの目盛り (cc)，物質の体積 (cm^3)，密度 (g/cm^3) の値を与え全体の重さを求めさせている。そこに出てくる式「 $1.3 \times 260 + 1.0 \times 90 + 0.7 \times 150 = 533$ (g)」をグラフでも考えさせている。横軸にメスシリンダーの目盛りを取り、縦軸に中の物質の密度を取っている。二硫化炭素で考えると 1.3×260 (g) はグラフの左の長方形の面積を求めることに相当している。式「 $1.3 \times 260 + 1.0 \times 90 + 0.7 \times 150 = 533$ (g)」は、単位あたり量×いくら分＝全体の量の合計を計算していて、グラフでは 3 つの長方形の面積の合計を求めていることになる。この長方形は「面積図」であり、長方形の上の辺は密度の定数関数になっている。

(具体例 2) [図 6] 出発してから利用した乗り物（自転車・電車・バス・自動車）の時間と走った距離 (km) と速度 (km/時) の値を与え、出発してから 3.5 時間たつ間に通過した道のりを求めさせている。そこに出てくる式「 $16 \times 0.5 + 60 \times 1.0 + 32 \times 0.5 + 44 \times 1.5 = 150$ (km)」をグラフでも考えさせている。横軸に出発してからの時間を取り、縦軸に速度を取っている。自動車について考えると、 44×1.5 (km) を求める計算は、グラフの右の長方形の面積を求めることに相当している。式「 $16 \times 0.5 + 60 \times 1.0 + 32 \times 0.5 + 44 \times 1.5 = 150$ (km)」は、単位あたり量×いくら分＝全体の量の合計を計算していて、グラフでは 4 つの長方形の面積の合計を求めていることになる。やはりこの長方形も「面積図」であり、長方形の上の辺は密度の定数関数になっている。

(具体例 3) [図 7] 負の単位あたり量についての例も挙げている。

東西に通ずる直線状の道路で、基準の地点から東を正、西を負で表し、初め基準の位置にいた自転車が東へ -15km/h で1時間走り、次にまた東へ -20km/h で1.5時間走ったとして、出発してから2.5時間たつ間に通過した道のりを求めさせている。式は「 $(-15)\times 1 + (-20)\times 1.5 = -45$ (km)」でグラフでも考えさせている。横軸に時間を、縦軸に速さを取っている。最初の1時間について考えると、「 $(-15)\times 1 = -15$ (km)」をもとめる計算は、グラフの左の長方形の面積に負の符号をつけたものに相当している。式「 $(-15)\times 1 + (-20)\times 1.5 = -45$ (km)」は、単位あたり量 \times いくら分=全体の量の合計を計算していて、グラフでは2つの長方形の面積の合計を求めていることになる。やはりこの長方形も「面積図」であり、長方形の下の辺は密度の定数関数になっている。

(具体例 4 (問)) [図 7~8] ケーブルカーが、ある地点 P を出発してから進んだ道のり (m) と、ケーブルカーが1m進むごとに何 m 上昇するかを4段階に分け表に示し、最終の1020m進む間に、地点 P から何 m 上昇するかを計算式と、それを表現するグラフ (横軸に P から進んだ道のり、縦軸に1m進むごとに上昇する高さ) をかかせ、P から上昇した高さは何に相当するのかを考えさせている。

(具体例 5 (問)) [図 8] 直線上を運動しているある物体の基準の点からの距離 (cm) と、直線と同方向にその物体に作用した力 (dyne : 1dyne は質量 1g の物体に 1cm/s^2 の加速度を生じさせる力) を5段階の場合に分け表に示し、仕事の合計 (erg) を計算させている。その式と、グラフ (横軸はこの物体の基準からの距離、縦軸は作用した力) をかかせ、仕事は何に相当するのかを考えさせている。

(具体例 6) [図 8~9] 一般化する。

直線上を動く点の出発してからの時間・走った時間 (Δx)・速度 (v)・道のり (S) を与えている。例えば表にある一例では、出発してからの時間 ($x_3 \sim x_2$)、走った距離 ($x_3 - x_2 = \Delta x_3$)、速度 (v_3)、道のり ($v_3 \Delta x_3$) と表している。継続的に変化するときの道のりの合計を S_n とすると、これまでの例から記号を使って表すと、

$$s_n = \sum_{i=1}^n v_i \Delta x_i$$

によって求められるとしている。この式をグラフ (横軸を時間、縦軸を速度) に表し、道のりは長方形の面積全部に相当することを教えている。

(具体例 7) [図 9~11] 速度が連続的に変化する場合を考える。

真空中を落下する物体の、落下し始めてから t 秒後の速度は、 $v=f(t)=9.8t$ (m/秒) で与えられることを利用して、区分解積分法を使い、 $s_n = \sum_{i=1}^n f(\tau_i)\Delta t_i$ から $s = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\tau_i)\Delta t_i$ を 3 段階 (初めは 4 つの段階に、次はさらに 8 分割に、最後には連続的に) に細分して丁寧に導いている。

$f(x)$ の単位はすべての例で単位あたり量である。本論文ではこれを**密度関数**と呼んでいる。これらの学習を通して定積分や積分の定義を以下のように説明している [図 15]。

求める面積 S は、すべての Δx_i が限りなく小さくなるように、 n を限りなく大きくしたときの、積の和 S_n の極限值になる。すなわち

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i \cdots \cdots (2)$$

である。

この極限值 (2) を、関数 $f(x)$ の $x=a$ から、 $x=b$ までの **定積分** といい、 $\int_a^b f(x)dx$ で表す。すなわち、

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i \cdots \cdots (3)$$

また、この値を求めることを、 $f(x)$ を $x=a$ から、 $x=b$ まで **積分する** という。

以上のように指導していけば、 $f(x)dx$ は単なる記号ではなく、 $f(x) \times dx$ のことであり、 $f(x)$ は単位あたり量、 dx はいくら分を意味しており、 $f(x)dx$ は全体の量を求めているかけ算であることを記号の意味として持つことができる。確率密度関数の意味・理解の基盤になる。

第4章 積分

§1 定積分

積の和で求められる量 右の図のようなメスシリンダーの中に、下から順に二硫化炭素・水・エーテルを入れた。これらは互いに溶け合うことがないものとする。



このとき、メスシリンダーの目盛りをよんだら、次のようになった。

メスシリンダーの目盛り(cc)	0~260	260~350	350~500
物質	二硫化炭素	水	エーテル

これから、このメスシリンダーの中に入れた物質の重さの合計を求めよう。

二硫化炭素・水・エーテルの密度を、それぞれ 1.3, 1.0, 0.7 (g/cm³) とすれば、全体の重さは次のようにして求めることができる。

物質	メスシリンダーの目盛り (cc)	物質の体積 (cm ³)	密度 (g/cm ³)
二硫化炭素	0~260	260	1.3
水	260~350	90	1.0
エーテル	350~500	150	0.7

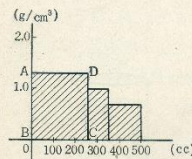
$$1.3 \times 260 + 1.0 \times 90 + 0.7 \times 150 = 533 \quad \text{計 } 533 \text{ g}$$

[図 5]

134

第4章 積分

この計算をグラフの上で考えてみよう。次のように、横軸にメスシリンダーの目盛りをとり、縦軸に中の物質の密度をとる。



まず、二硫化炭素について考えると、その重さを求める計算

1.3×260(g) は、左の図の長方形 ABCD の面積を求めることに相当する。同様に考えると、全体の重さを求める計算は、左の図の斜線をひいた部分の面積を求めることにあたる。

次に、道のりについて考えよう。次の表は、出発してからの時間と、利用した乗り物およびその速度を示している。

出発してからの時間(時間)	0~0.5	0.5~1.5	1.5~2.0	2.0~3.5
利用した乗り物	自転車	電車	バス	自動車
速度 (km/時)	16	60	32	44

上のことから、出発してから 3.5 時間たつ間に通過した道のりは、次のようにして求められる。

乗り物	出発してからの時間(時間)	走った時間(時間)	速度 (km/時)
自転車	0 ~ 0.5	0.5	16
電車	0.5 ~ 1.5	1.0	60
バス	1.5 ~ 2.0	0.5	32
自動車	2.0 ~ 3.5	1.5	44

$$16 \times 0.5 + 60 \times 1.0 + 32 \times 0.5 + 44 \times 1.5 = 150 \quad \text{計 } 150 \text{ km}$$

この計算をグラフで考えてみる。横軸に出発してからの時間をとり、縦軸に速度をとる。自動車について考えると、それに

[図 6]

§1 定積分

135

乗って通過した道のり 44×1.5 (km/時)

(km) を求める計算は、右の図の長方形 ABCD の面積を求めることにあたる。同様に考えると、全体の道のりを求める計算は、右の図の斜線をひいた部分の面積を求めることに相当する。

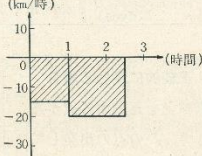
東西に通ずる直線状の道路で、基準の地点から東を正、西を負で表わすことにしよう。初め基準の地点にいた自転車が、東へ -15km/時 で 1 時間走り、次にまた東へ -20km/時 で 1.5 時間走ったとする。出発してから 2.5 時間たつ間に通過した道のりは、

$$(-15) \times 1 + (-20) \times 1.5 = -45 \quad (\text{km/時})$$

$$\text{計 } -45 \text{ km}$$

すなわち、西へ 45 km である。

これは、右の図で、斜線をひいた部分の面積に負の符号をつけたものに相当する。



問 1 次の表は、あるケーブル・カーが、ある地点 P を出発してから進んだ道のりと、ケーブル・カーが 1 m 進むごとに何 m 上昇するかを示したものである。

道のり(m)	0~400	400~600	600~770	770~1020
1m進むごとに上昇する高さ(m)	0.10	0.22	0.36	0.52

[図 7]

136

第4章 積分

このケーブル・カーが、出発してから 1020 m 進む間に、地点 P から何 m 上昇するか。また、横軸に P から進んだ道のり、縦軸に 1 m 進むごとに上昇する高さをとって、前ページの表をグラフにかいたときに、P から上昇した高さはなにに相当するか。

問 2 直線上を運動しているある物体がある。次の表は、この物体の基準の点からの距離 (cm) と、直線と同方向にその物体に作用した力 (dyne) を示している。仕事の合計は何 erg か。また、横軸にこの物体の基準の点からの距離、縦軸に作用した力をとって、次の表をグラフにかいたとき、仕事はなにに相当するか。

基準の点からの距離 (cm)	0~15	15~32	32~48	48~90	90~130
作用した力 (dyne)	4.5×10^7	3×10^7	2.5×10^7	1.8×10^7	0.9×10^7

連続的に変わる場合

直線上を運動する点があって、この点の出発してからの時間、および速度が、右の表のように断続的に変化するとき、道のり S_n は、積の和

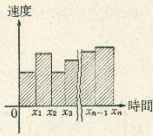
出発してからの時間	走った時間	速度	道のり
$0 \sim x_1$	$x_1 - 0 = \Delta x_1$	v_1	$v_1 \Delta x_1$
$x_1 \sim x_2$	$x_2 - x_1 = \Delta x_2$	v_2	$v_2 \Delta x_2$
$x_2 \sim x_3$	$x_3 - x_2 = \Delta x_3$	v_3	$v_3 \Delta x_3$
.....
$x_{n-1} \sim x_n$	$x_n - x_{n-1} = \Delta x_n$	v_n	$v_n \Delta x_n$

$$S_n = \sum_{i=1}^n v_i \Delta x_i$$

によって求められる。横軸に出発してからの時間、縦軸に速度

[図 8]

をとって前ページ下の表をグラフにかくと、道のりは、右の図の斜線をひいた部分の面積に相当する。



次に、速度が連続的に変化する場合について考えよう。

真空中を落下する物体の、落下し始めてから t 秒後の速度は、
 $v = f(t) = 9.8t$ (m/秒)
 で与えられる。この物体は、落下し始めてから 4 秒間に何 m 落ちるだろうか。

このときは、速度は連続的に変化しているから、前と同じように簡単に道のりを求めるわけにはいかない。そこで、この運動を、次のように考えてみよう。4 秒間をいくつかの小区間に分け、各小区間内では、その小区間に属する 1 つの時刻における速度で、等速運動すると考えるのである。

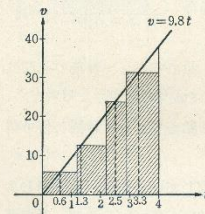
たとえば、4 秒間を時刻 t_1, t_2, t_3 によって 4 つの小区間に分け、各小区間 $0 \sim t_0 \sim t_1, t_1 \sim t_2, t_2 \sim t_3, t_3 \sim t_4 = 4$ では、その小区間内のある時刻 $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4$ での速度で等速運動するものと考えよう。

小 区 間	0~1.2	1.2~2.2	2.2~2.9	2.9~4
$\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$	1.2	1.0	0.7	1.1
τ_i	0.6	1.3	2.5	3.3
$f(\tau_i)$	5.88	12.74	24.50	32.34

t_i や τ_i が上の表のようであったとすると、進んだ道のりは、次ページ上の式のようになる。

[図 9]

$$\sum_{i=1}^4 f(\tau_i) \Delta t_i = 5.88 \times 1.2 + 12.74 \times 1.0 + 24.50 \times 0.7 + 32.34 \times 1.1 = 72.52$$



つまり、上のような断続的な運動と考えると、進んだ道のりは近似的に 72.52 m と計算される。

この値は、左の図で、斜線をひいた部分の面積に相当する。しかし、この値は実際に進んだ道のりとは正確には一致しない。

区間をさらに細分すれば、実際に進んだ道のりとして、よりいっそう信頼できる値が得られる。

細分した区間、 τ_i などが、次の表のとおりであったとしよう。

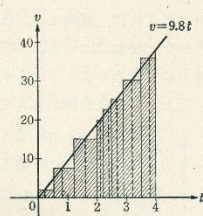
小 区 間	0~0.5	0.5~1.2	1.2~2.0	2.0~2.2	2.2~2.5	2.5~2.9	2.9~3.5	3.5~4
$\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$	0.5	0.7	0.8	0.2	0.3	0.4	0.6	0.5
τ_i	0.2	0.8	1.6	2.1	2.4	2.7	3.2	3.8
$f(\tau_i)$	1.96	7.84	15.68	20.58	23.52	26.46	31.36	37.24

このとき、

$$\sum_{i=1}^9 f(\tau_i) \Delta t_i = 1.96 \times 0.5 + 7.84 \times 0.7 + 15.68 \times 0.8 + 20.58 \times 0.2 + 23.52 \times 0.3 + 26.46 \times 0.4 + 31.36 \times 0.6 + 37.24 \times 0.5 = 78.204$$

[図 10]

つまり、このような断続的な運動を考えると、道のりは前より正確に 78.204 m と計算される。この値は、右の図で、斜線をひいた部分の面積に相当する。



このようにして、 n 個の小区間に分け、同様にして道のりを近似的に求めると、

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(\tau_i) \Delta t_i \dots \dots \dots (1)$$

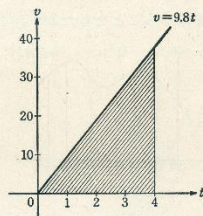
となる。

ここで、すべての $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ が限りなく 0 に近づくように、 n を限りなく大きくしたときの、

(1) 式の極限值

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\tau_i) \Delta t_i$$

が存在すれば、これが実際に進んだ道のりになる。したがって、 S を計算することは、右の図の斜線をひいた部分の面積を求めることに相当することがわかる。



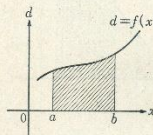
すなわち、速度が連続的に変化する場合にも、進んだ道のりを求めることは、速度のグラフと横軸との間にはさまれた面積を求めることになる。

前の項で学んだような量についても、上の速度の例と同じよ

[図 11]

うに考えれば、縦軸にとった量が連続的に変化する場合にも、グラフと横軸にはさまれた部分の面積を求めることによって全体の値を求めることができる。

たとえば、金属棒があって、端から長さ x (cm) の所の線密度 (単位長さ当たりの質量) が x の関数として、 $d = f(x)$ (g/cm) で与えられているとしよう。端から a cm の所から b cm の所までの質量は、左の図の斜線をひいた部分の面積を求めることによって得られる。



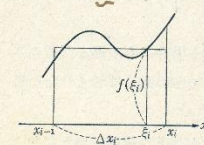
定積分 次に、グラフと横軸にはさまれた部分の面積を求めることを考えよう。

左の図で、 $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$ ($a < b$), $y = 0$ で囲まれた部分の面積を求めよう。

区間 $a \leq x \leq b$ を n 個の小区間に分ける点の x 座標を順に、 x_1, x_2, \dots, x_{n-1} とし、 $a = x_0, b = x_n$

とする。小区間 $x_{i-1} \leq x \leq x_i$ 内にそれぞれ点 ξ_i をとり、そこでの関数の値 $f(\xi_i)$ に小区間の幅 $x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$ を掛けて加え、

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \dots \dots \dots (1)$$



[図 12]

を作れば、これが、求める面積の近似値になる。
 そこで、この区間の分け方を、小区間の幅が小さくなるように細かくして、前ページ(1)式のような積の和 S_n を計算すれば、求める面積にいくらでも近い近似値が得られる。
 だから、求める面積 S は、すべての dx_i が限りなく小さくなるように、 n を限りなく大きくしたときの、積の和 S_n の極限值になる。すなわち、

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \quad \dots\dots\dots (2)$$

である。

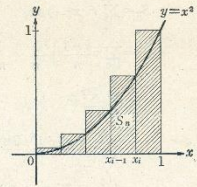
この極限值(2)を、関数 $y=f(x)$ の $x=a$ から、 $x=b$ までの定積分といい、 $\int_a^b f(x)dx$ で表す。すなわち、

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \quad \dots\dots\dots (3)$$

また、この値を求めることを、 $f(x)$ を $x=a$ から $x=b$ まで積分するという。

例 $\int_0^1 x^2 dx$ を求めよ。

解 これは、グラフ $y=f(x)=x^2$ 、 $x=1$ 、 $y=0$ で囲まれた部分の面積に相当する。区間 $0 \leq x \leq 1$ を n 等分する点の x 座標を順に、 x_1, x_2, \dots, x_{n-1} とし、 $x_0=0$ 、 $x_n=1$ とする。このとき、 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{1}{n}$ 、 $x_i = \frac{i}{n}$ となる。



[図 13]

各小区間 $x_{i-1} \leq x \leq x_i$ 内で、それぞれもっとも大きい関数値を与える点は x_i だから、 ξ_i としてそれをとると、積の和(1)は、

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n}$$

となる。これを变形すると、

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

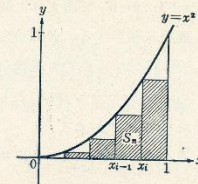
ここで、 n を限りなく大きくすると、小区間の幅 $\Delta x_i = \frac{1}{n}$ はいくらでも小さくなるから、求める積分は、(3)より、

$$\int_0^1 x^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{3}$$

別解 各小区間 $x_{i-1} \leq x \leq x_i$ 内で、それぞれ関数値を最小にする値 x_{i-1} を ξ_i にとってもよい。そのときは、

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) \Delta x_i \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{i-1}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n (i-1)^2 \\ &= \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n-1} i^2 \\ &= \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} \\ &= \frac{1}{6} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(2 - \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

だから、やはり、



[図 14]

$$\int_0^1 x^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{3}$$

問 次の定積分の値を求めよ。

- (1) $\int_0^2 x^2 dx$ (2) $\int_0^1 x dx$ (3) $\int_0^1 x^3 dx$

定積分と微分法の関係 定積分を求めるとき、いちいち前ページの例のようにして求めていたのではたいへんであるから、もっと別の方法を考えよう。

右の(1)図の斜線をひいた部分の面積 S は、すでに学んだように、

$$S = \int_a^b f(x) dx \quad \dots\dots\dots (1)$$

で与えられる。

(2)図の斜線をひいた部分の面積は、 x の関数となる。これを $F(x)$ と書くと、上の面積 S は、

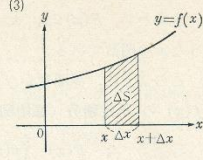
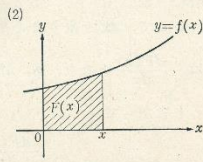
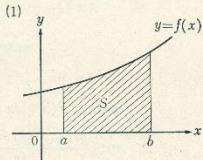
$$S = F(b) - F(a) \quad \dots\dots\dots (2)$$

である。したがって、(1)、(2)式から、

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad \dots\dots\dots (3)$$

となる。この $F(x)$ について、もっと調べてみよう。

(3)図の斜線をひいた部分の面積 ΔS は、



[図 15]

$$\Delta S = F(x + \Delta x) - F(x) \quad \dots\dots\dots (4)$$

である。

一方、 x と $x + \Delta x$ の間の区間における $f(x)$ の最大値を M 、最小値を m とすると、図からすぐわかるように、

$$m \Delta x \leq \Delta S \leq M \Delta x$$

が成り立つ。つまり、

$$\begin{aligned} m \Delta x &\leq F(x + \Delta x) - F(x) \leq M \Delta x \\ \therefore m &\leq \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} \leq M \quad \dots\dots\dots (5) \end{aligned}$$

ここで、 Δx を限りなく 0 に近づけると、 $\frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}$ は、 $\frac{dF(x)}{dx}$ となり、 m 、 M はともに $f(x)$ となる。

したがって、

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x) \quad \dots\dots\dots (6)$$

すなわち、 $F(x)$ は、 x について微分すると $f(x)$ になるような x の関数である。

このように、導関数が $f(x)$ となるような x の関数 $F(x)$ を $f(x)$ の不定積分(原始関数)といい、

$$F(x) = \int f(x) dx \quad \dots\dots\dots (7)$$

と書く。

注意 とくに、 $f(x)=1$ のとき、 $\int 1 dx$ を簡単に $\int dx$ と書く。

[図 16]

したがって、定積分 $\int_a^b f(x)dx$ を求めるには、不定積分 $\int f(x)dx=F(x)$ を求めて、

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$

とすればよい。ここで簡単に、 $F(b)-F(a)=\left[F(x)\right]_a^b$ と書けば、

$$\int_a^b f(x)dx=\left[F(x)\right]_a^b$$

と書ける。

例 $\frac{d}{dx}(x^3-3x)=3x^2-3$ を知って、次の定積分を計算せよ。

$$(1) \int_1^2 (3x^2-3)dx \quad (2) \int_{-1}^1 (3x^2-3)dx \quad (3) \int_{-1}^2 (3x^2-3)dx$$

$$\text{解} \quad (1) \int_1^2 (3x^2-3)dx = \left[x^3-3x\right]_1^2 \\ = (2^3-3 \cdot 2) - (1^3-3 \cdot 1) = 8-6-1+3=4$$

$$(2) \int_{-1}^1 (3x^2-3)dx = \left[x^3-3x\right]_{-1}^1 \\ = (1^3-3 \cdot 1) - \{(-1)^3-3 \cdot (-1)\} = 1-3+1-3=-4$$

$$(3) \int_{-1}^2 (3x^2-3)dx = \left[x^3-3x\right]_{-1}^2 \\ = (2^3-3 \cdot 2) - \{(-1)^3-3 \cdot (-1)\} = 8-6+1-3=0$$

問1 $\frac{d}{dx}(x^2-3x+2)=2x-3$ を知って、次の定積分を計算せよ。

$$(1) \int_1^5 (2x-3)dx \quad (2) \int_{-2}^5 (2x-3)dx \quad (3) \int_{\frac{2}{3}}^2 (2x-3)dx$$

問2 $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}x^3\right)=x^2$ を知って、次の定積分を計算せよ。

[図 17]

第四章

ヒストグラム・確率密度関数の 理解度に関する実態調査

本章では、ヒストグラム・確率密度関数の理解度に関する実態について把握する。そのために、中学生と大学生、小・中学校及び高等学校の先生方にアンケート調査を行い、その結果を考察する。

第一節 ヒストグラムの理解度に関する実態調査

1. 調査の目的

本調査の目的は、アンケート調査を通して、ヒストグラムに対する理解度の現状を明らかにし、その改善点を模索することである。

2. アンケート調査

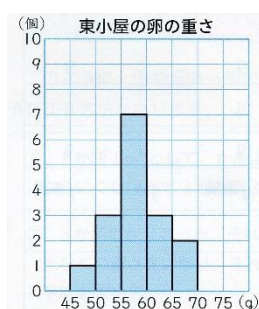
アンケート調査問題は生徒用と教員用の 2 種類作成した。今回の調査では中学生、教育学部の学生、小学校教員、中学校教員にアンケートを実施し、中学生には生徒用、大学生と教員には小・中教員用を用意した。以下は実際に使用したアンケート調査問題とその回答例である。

(1) アンケート調査問題

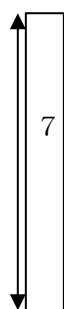
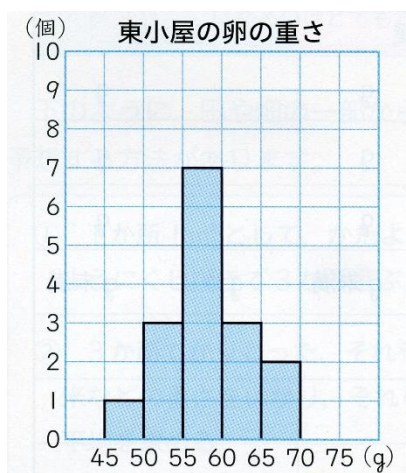
(中学校生徒用)

東京書籍『新しい算数6』(平成27年2月10日発行)の13節で「資料の特ちょうを調べよう」がある。そこに東小屋の卵の重さ(g)をヒストグラムにしています。

重さ(g)	個数(個)
45以上~50未満	1
50 ~55	3
55 ~60	7
60 ~65	3
65 ~70	2
70 ~75	0
合計	16



(1) 55g以上60g未満には7個の卵があります。ヒストグラムでは一番高い長方形です。この7個は長方形のヒストグラムのどこに表れていますか。



?

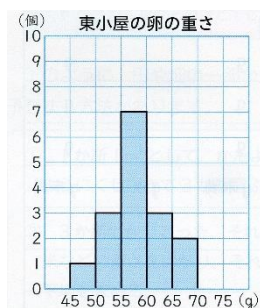
高さ (), 幅 (), 面積 (), 分からない ()

(2) どうして 55g 以上 60g 未満と「以上」「未満」になっているのでしょうか。

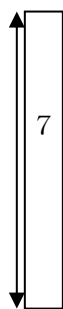
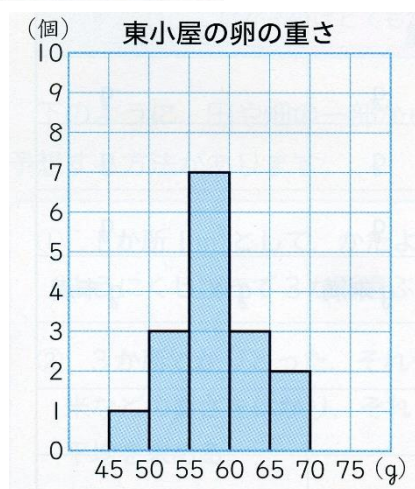
(小・中学校教員用)

東京書籍『新しい算数6』(平成27年2月10日発行)の13節で「資料の特ちょうを調べよう」がある。そこに東小屋の卵の重さ(g)をヒストグラムにしています。

重さ(g)	個数(個)
45以上~50未満	1
50 ~55	3
55 ~60	7
60 ~65	3
65 ~70	2
70 ~75	0
合計	16



(1) 55g以上60g未満には7個の卵があります。ヒストグラムでは一番高い長方形です。この7個は長方形のヒストグラムのどこに表れていますか。



?

高さ(), 幅(), 面積(), 分からない()

(2) どうして55g以上60g未満と「以上」「未満」になっているのでしょうか。

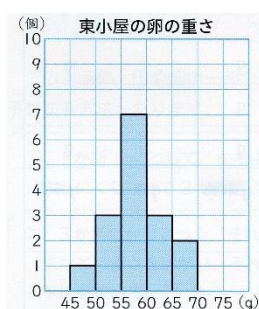
(3) 棒グラフではなく、どうしてヒストグラムでなければならないのでしょうか。

(2) アンケート調査問題回答例

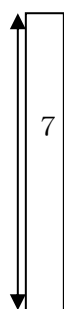
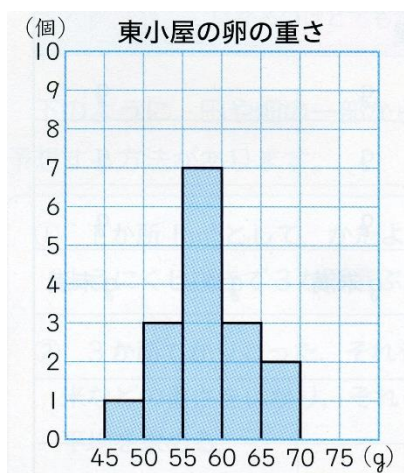
(中学校生徒用)

東京書籍『新しい算数6』(平成27年2月10日発行)の13節で「資料の特ちょうを調べよう」がある。そこに東小屋の卵の重さ(g)をヒストグラムにしています。

重さ(g)	個数(個)
45以上~50未満	1
50 ~55	3
55 ~60	7
60 ~65	3
65 ~70	2
70 ~75	0
合計	16



(1) 55g以上60g未満には7個の卵があります。ヒストグラムでは一番高い長方形です。この7個は長方形のヒストグラムのどこに表れていますか。



?

高さ (), 幅 (), 面積 (○), 分からない ()

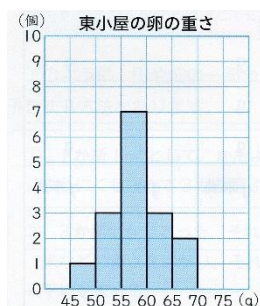
(2) どうして 55g 以上 60g 未満と「以上」「未満」になっているのでしょうか。

「階級の重複」に触れた内容で明確であれば可

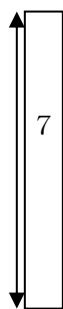
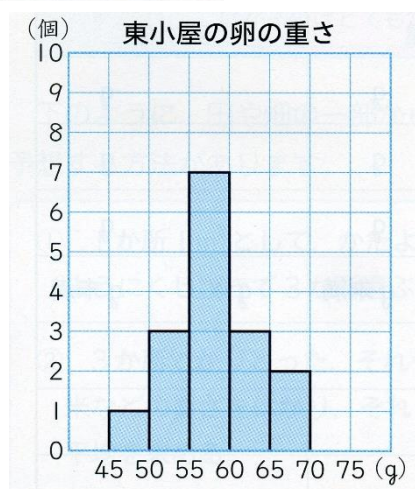
(小・中学校教員用)

東京書籍『新しい算数6』(平成27年2月10日発行)の13節で「資料の特ちょうを調べよう」がある。そこに東小屋の卵の重さ(g)をヒストグラムにしています。

重さ(g)	個数(個)
45以上~50未満	1
50 ~55	3
55 ~60	7
60 ~65	3
65 ~70	2
70 ~75	0
合計	16



(1) 55g以上60g未満には7個の卵があります。ヒストグラムでは一番高い長方形です。この7個は長方形のヒストグラムのどこに表れていますか。



?

高さ (), 幅 (), 面積 (○), 分からない ()

(2) どうして55g以上60g未満と「以上」「未満」になっているのでしょうか。

「連続量」や「階級の重複」に触れた内容で明確であれば可

(3) 棒グラフではなく、どうしてヒストグラムでなければならないのでしょうか。

「連続量」や「棒グラフでは階級の幅を表現できないこと」に触れた内容であれば可

3. アンケート調査の結果

以下は中学校 2 年生，教育学部の学生，小学校教員，中学校教員のアンケートの回答結果である。まず，記述内容に関して詳しく紹介し，その後，回答の中から代表的な記述を選び一覧表に整理している。

(1) 中学生

対象：公立中学校 2 年生（60 人）

(1) 55g 以上 60g 未満には 7 個の卵があります。この 7 個はヒストグラムの長方形のどこに表れていますか。

高さ：44 人 幅：1 人 面積：7 人 分からない：3 人 無回答・その他：5 人

(2) どうして 55g 以上 60g 未満のように「以上」「未満」になっているのでしょうか。

(1)で高さで回答した人

- ・ 55g 「以上」とすることで，55.1g，55.2g という小数も含むことを表している。
60g 「未満」とすると，55.9g，55.8g などの小数も含んでいることを表している。だから 59g 「以下」にしてはいけない。
- ・ 小数以上の数字があるかも
- ・ 小数点以下の数字もふくまれるため
- ・ 「55g 以上，60g 以上」にすると，次のところが，61 以上…になってしまい，小数の部分がないことになってしまうから。(60.1，60.2 など)
- ・ 例えば 60g 以下だと次の階級が 60g 以上 65g…と 60g がかぶってしまう
- ・ 以上は始めの数も未満は入らないから。55g 以上なら，55 も入る。60g 未満は次，60g 以上になる。
- ・ 55g 以上 60g 以下にしてしまうとグラフの数値に重複してしまうから。又はヒストグラムに表しやすいから。
- ・ まず「以上」ではなく，「より大きい」とかだと，その間の数字が抜けてしまって，正確にならないと思ったから。「未満」ではなく，「以下」だとそれより大きいところのはんいとかさなって正確にならないから。
- ・ 「以上」「未満」を使うと，グラフの中に同じ値があることを防げるから。
- ・ 60g 以下にしてしまうと，一つのヒストグラムの量がバラバラになってしまうことがあるから。5 個ずつにする場合は一つ 6 個になってしまうので全部とういつするためには未まんにしなければならない。

- ・未満は未満にしないと以上と重なってデータがおかしくなるから
- ・他とかぶっちゃうから
- ・以上・以下だととなり合うグラフの範囲内にどちらの範囲にも含まれる数ができてしまうから。例) 55g 以上 60g 以下と 60g 以上 66g 以下
- ・60 以下だと次に 60 以上にできないから
- ・55g は入って 60g は入らないから。
55g, 56g, 57g, 58g, 59g までが 55g 以上, 60g 未満に入る。
- ・55 以上 59 以下になるから。
- ・未満は 60 をふくまないの、次のグラフが区切りのいい数字ではじめられるようにするため。以上は 55 も含まれるので、区切りがいい。この場合 55g~59g のグラフになる。
- ・55g はグラフの中の数値に入っていて 60g は入っていないから
- ・55 は個数に含み, 60 は個数に含まないから。
- ・以上は 55 をふくみ, 未満は 60 をふくまないから。
- ・60g 未満は 60g が入らない。
だから 50g 以上~55g 未満は入らない
- ・以上はその数を含む
未満はその数を含まない ?
- ・55g より多くて 60g もない
- ・55g 以上 60g 未満だから
- ・お偉いさんが決めたから
- ・「以上」とすれば 55g も範囲に入るから
「未満」としなければ範囲が 10 でおさまらないから
- ・切りがよくて, 表しやすいから。
- ・ちょうど 5 区切りになるから。
前に「以下」を使うと, 55 より下全てになるし, 「未満」を使うとそれより小さくなってしまうから。
後ろに「以上」を使うと, 60 より大きい全てになるし, 「以下」を使うと 60 より小さい数がすべて入ってしまうから。
- ・グラフをかくのに「以上」と「未満」の方がつごうがいいから
- ・以上, 以下だと卵それぞれに重さはあるから, 55g 以上はあって, 60g まであるってことだから未満で表している
- ・前後が~未満または~以上となっているから
- ・55g よりはうえで 60g よりは下だから
- ・グラフに表しやすいから
- ・きじゅんが「以上」「未満」だから。

- ・分かりやすくするため

無回答：9人

(1)で幅と回答した人

- ・55g以上は、その数からある
60g未満は、60もないから。

(1)で面積と回答した人

- ・60g以上にすると、60gが60g以上65g未満の範囲にも含まれてしまうから。
- ・例えば、「以上」「以下」だと60が55~60、60~65の2つの階級に入ってしまうから、「未満」にした
- ・未満はその数を含まず、以上はそれ以上でどこからどこからかのはんいをわかりやすくするため。
- ・55gから上で60gより下
- ・分かりやすいから
- ・知りません
- ・卵

(1)で分からないと回答した人

- ・以上はその数も含んでの計算で、未満は次の以上を測る数で入れるから。
- ・わけやすいから
キリがいいから

無回答：1人

公立中学校 2 年生 (60 人, 無回答・その他 5 人)

(1)	(2)	
高さ (44 人)	正しいと考えられるもの (4 人)	<ul style="list-style-type: none"> • 55g 「以上」とすることで, 55.1g, 55.2g という小数も含むことを表している。60g 「未満」とすると, 55.9g, 55.8g などの小数も含んでいることを表している。だから 59g 「以下」にはしてはいけない。 • 以上・以下だととなり合うグラフの範囲内にどちらの範囲にも含まれる数が出てしまうから。例) 55g 以上 60g 以下と 60g 以上 66g 以下
	明確に答えられていないもの (13 人)	<ul style="list-style-type: none"> • 55 以上 59 以下になるから。
	間違っているもの・その他 (27 人, 内 9 人无回答)	<ul style="list-style-type: none"> • 切りがよくて, 表しやすいから。 • お偉いさんが決めたから
幅 (1 人)	正しいと考えられるもの	
	明確に答えられていないもの (1 人)	<ul style="list-style-type: none"> • 55g 以上は, その数からある • 60g 未満は, 60 もないから。
	間違っているもの・その他	
面積 (正解) (7 人)	正しいと考えられるもの (2 人)	<ul style="list-style-type: none"> • 60g 以上にすると, 60g が 60g 以上 65g 未満の範囲にも含まれてしまうから。
	明確に答えられていないもの (2 人)	<ul style="list-style-type: none"> • 未満はその数を含まず, 以上はそれ以上でどこからどこからかのはんいをわかりやすくするため。
	間違っているもの・その他 (3 人)	<ul style="list-style-type: none"> • 分かりやすいから • 知りません
? (3 人)	正しいと考えられるもの	
	明確に答えられていないもの (1 人)	<ul style="list-style-type: none"> • 以上はその数も含んでの計算で, 未満は次の以上を測る数で入れるから。
	間違っているもの・その他 (2 人, 内 1 人无回答)	<ul style="list-style-type: none"> • わけやすいから キリがいいから

(2) 大学生

対象：国立大学教育学部学生（60人）

(1) 55g 以上 60g 未満には 7 個の卵があります。この 7 個はヒストグラムの長方形のどこに表れていますか。

高さ：37人 幅：1人 面積：19人 分からない：0人 その他：3人

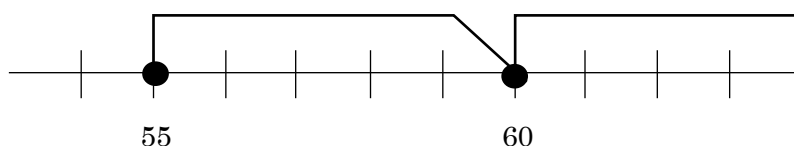
(2) どうして 55g 以上 60g 未満のように「以上」「未満」になっているのでしょうか。

(1)で高さと回答した人

- ・ 以上と以下にするとかぶるところがあるから。
- ・ 数を数える時に不足が生れるから。
- ・ 「以上」「以下」にすると重複する部分があるのでくるためすべての数値が 1 つのグループのみに含まれるようにするため。

例 55g 以上 60g 以下, 60g 以上 65g 以下→60g で重複

- ・ 以上はその数字を含む, 未満はその数字を含まないことを前提に以上, 以下で表現すると例えば 55g 以上 60g 以下, 60g 以上 65g 以下で 60g がかぶってしまうため。また 55g 以上 59g 以下にすると 59~60 の値を表すことができないため。
- ・ 「以上・以下」→範囲が被る
「より多い・未満」→範囲に不足
「より多い・以下」より「以上・未満」の方が区切りやすい（丁度の最低量について）
- ・ 50, 51, 52, 53, 54 55, 56, 57, 58, 59 60, 61, 62, 63, 64
のようにすべての数字が入るようにするため。
- ・ ○以上は, ○の数字を範囲に含み, △未満は△の数字を含まないため, ○以上△未満となれば, どこで範囲を区切っても範囲の重なりはなくなるから。
- ・ 度数を数えるときに, 重複しないようにするため
- ・ 55g を含まないそれよりも大きい数を表す単語がないから少ない数の方を「以上」を用いる。
- ・ 重複したり, 含まれない値がないようにするため。
- ・ 範囲がかぶらないようにするため
- ・ 階級の重複を防ぐため



- ・ 55g は含めて、60g は含めないため。
次の 60g より少しでも少なければ 55g 以上 60g 未満になるため。
- ・ 「以上」「以下」だったら、境界にある数量に対応するものが 2 つの階級にまたがってしまうので。「より大きい」「以下」だったら 0 がふくめられない。
- ・ すべての重さをカバーするため
- ・ 前後とかぶらないため
- ・ 5g ずつ区切っている中で、1 つ前の区域に 55 が含まれてないから。
- ・ 数値の個数被りを防ぐため。
例：60g 以下にしてしまうと 60g 以上 65g 未満にも 60g の卵の個数が含まれてしまい、
合わないから
- ・ 数がかぶらないように区別するため
- ・ 55 や 60 が 2 回数えられないようにするため
- ・ 階級に同じ数字が入らないようにするため。
- ・ 境目の部分で 2 重に含んでしまったり、含まれなくなる場合があるから
- ・ 重複して数えられないようにするため。
- ・ 上限を以下にすると次の階級と被るから。
- ・ 階級が被ることを防ぐため
- ・ 以上と以下だと階級が被ってしまうため
- ・ 以上以上だと重複し、未満未満では、数えそこねているから
- ・ 以上と以下、より大きいと未満だと重複や該当なしが出てくるから
- ・ 階級が被っているから。
- ・ 55g を含み、60g を含まないから
階級 5g だから
- ・ 段階を示すのに有効 軽→重
- ・ 階級の値を区分できなくなるから。60 未満を 59g 以下にしないのは、くぎりの良い数字
で示すため。
「～より大きい」を表す熟語がないから。

無回答・分からない：4 人

(1)で幅と回答した人 無回答

(1)で面積と回答した人

- ・重なりがないようにするため
- ・以上, 以下だと重複してしまう。
「より大きい」と「未満」では範囲に含まれない数がでてしまう。
- ・重複を避けるため。
- ・重複してはダメだから
「より大きい」「以下」でもいいの？
- ・数値の重複がないようにするため
- ・範囲を限定するため。
前後の範囲を被らないようにするため。
- ・とりこぼしがないようにするため
以上, 以下→かぶる
- ・取りこぼしと重複がなくなるようにするため
- ・「以上」と「以下」だと, 隣り合う階級と重複する値域が表れる
- ・以上, 以下にしてしまうと, 境目にあたる数値が隣の範囲と重なり, 重複してしまうから。
- ・60g 以下にしてしまうと, 次の階級の 60g 以上 65g 未満と被ってしまうから。
- ・どちらも“以上”だと重複ができてしまうから。
- ・～より大きいに値する言葉がないから? ○——
- ・四捨五入したときに階級の中で値がかわってくるから
- ・区別するため 55g より大きくて 60g 以下でもいい
- ・数えやすいちで区切るため。
- ・「以上」「より上」表現だと, 一番小さい数(左)が表現できない。

無回答・分からない: 2人

(1)でその他の人

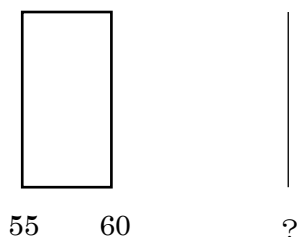
- ・隣り合う階級とかぶってしまうのを防ぎ, どんな数値も入る階級が 1 つに決まるようにする。
- ・区切りをよくするため。

無回答: 1人

(3) 棒グラフではなく、どうしてヒストグラムでなければならないのでしょうか。

(1)で高さで回答した人

- ・横軸には卵の重さが示されており、重さの範囲の中にある卵の数を示すためには棒グラフではなく、ヒストグラムが適切だから。
- ・重さに幅があるから。
- ・棒グラフは、幅のある階級値ではなく、ある特定の値を階級値にするから。
- ・幅（範囲）をもたせるため。
- ・値の幅があるため、その幅を分かりやすくするため。
（もし1, 2, 3などの1つの値だったら棒でもいいのでは）
- ・横軸に連続性があるから。
- ・連続した数だから、幅がなくなるから



- ・棒グラフではわからないことがあるから。
- ・棒グラフだと変化が目で見にくい
- ・比べやすくするため
- ・ヒストグラムは範囲で分けることができ、棒グラフはグラム単位。
グラム単位で分けると0のデータが多くデータ量も大きくなる。
- ・全体の個数をかぞえやすくするため
- ・棒グラフだと誤差が大きくなるから
傾向を見るため
- ・数値（データ）の一貫性を保つため
ヒストグラムにすることで、データの散らばり具合を視覚的に判断しやすいから。
- ・数量のみだけでなく分布を表す図であるので。
- ・階級の個数を表しているから。
○gというのは厳密にあてはまらなくて数字に幅をもたせないといけない。
- ・棒グラフは遷移を表す
ヒストグラムは差を表す（範囲）

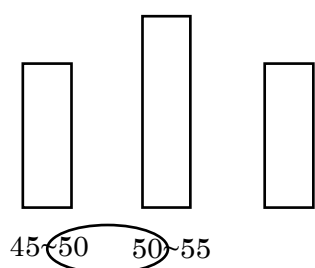
- ・棒グラフは数値のうつりかわりを見るためのもので、ヒストグラムはその範囲の数をみるためのものだから。
- ・横軸の幅を表せるから。
- ・階級の幅がわかりやすいから
- ・棒グラフでは階級の幅が分かりにくいから
- ・大切なのは個数であって、分布ではないから
- ・階級が存在し、同じ重さでないことを表すため
- ・階級の幅が広いから。
- ・棒グラフでは階級の幅を表現することができないから。
- ・隣同士で比べやすくするため。
棒グラフにすると、棒と棒の間に隙間ができるので混乱してしまう。
- ・分布状況が分からないから。
無回答・分からない：10人

(1)で幅と回答した人

- ・視覚的に理解しやすいから。

(1)で面積と回答した人

- ・とぎれていないから？
- ・範囲がつながっている数になっているため
- ・もともと連続している数を区切っているから。
- ・(g)の値は連続する値だから



- ・棒グラフでは視覚的に階級の連続性が示されないため。
- ・○以上△未満と範囲の中の数個という表現なので、ヒストグラムがイメージしやすい。
- ・棒グラフには幅がなく、高さのみで表すが、ヒストグラムには幅があり、範囲の幅を表すから。

- ・棒グラフでは 1 つの数値の数の集合だが、ヒストグラムはその範囲にあるものの分布を表すため。
- ・ヒストグラムの方が見やすいから
- ・度数分布多角形（面積）を書くから。
- ・分布を一目で判別するため
- ・ヒストグラムの方がどのくらいの重さのものが多いのか、ちらばり方が棒グラフの方より分かりやすい。
- ・連続な数ではないから。
- ・どこが多いかなど見やすいため。
- ・目盛りを区切ることで個数が正しくなるから。
- ・児童たちに読み取りやすい
幅がある階級を表現できるから
- ・数が視覚的に分かるから。

無回答・分からない：2人

(1)でその他の人 無回答

国立大学教育学部学生 (60 人)

(1)	(2)		(3)
高さ (37 人)	正しいと考えられるもの	<ul style="list-style-type: none"> ・「以上」「以下」だったら、境界にある数量に対応するものが 2 つの階級にまたがってしまうので。「より大きい」「以下」だったら 0 がふくめられない。 (20 人)	<ul style="list-style-type: none"> ・横軸に連続性があるから。 ・棒グラフは、幅のある階級値ではなく、ある特定の値を階級値にするから。 (7 人)
	明確に答えられていないもの	<ul style="list-style-type: none"> ・階級が被ることを防ぐため ・数がかぶらないように区別するため (10 人)	<ul style="list-style-type: none"> ・重さに幅があるから。 ・棒グラフでは階級の幅が分かりにくいから (7 人)
	間違っているもの・その他	<ul style="list-style-type: none"> ・段階を示すのに有効 軽→重 ・階級の値を区分できなくなるから。 60 未満を 59g 以下にしないのは、くぎりの良い数字で示すため。 「～より大きい」を表す熟語がないから。 (7 人, 内 4 人無回答・分からない)	<ul style="list-style-type: none"> ・分布状況が分からないから。 ・隣同士で比べやすくするため。 棒グラフにすると、棒と棒の間に隙間ができるので混乱してしまう。 (23 人, 内 10 人無回答・分からない)
幅 (1 人)	正しいと考えられるもの		
	明確に答えられていないもの		
	間違っているもの・その他	<ul style="list-style-type: none"> ・無回答 	<ul style="list-style-type: none"> ・視覚的に理解しやすいから。

(1)	(2)		(3)
面積 (正解) (19人)	正しいと考えられるもの	<ul style="list-style-type: none"> ・以上, 以下にしてしまうと, 境目にあたる数値が隣の範囲と重なり, 重複してしまうから。 (9人) 	<ul style="list-style-type: none"> ・(g) の値は連続する値だから ・棒グラフでは 1 つの数値の数の集合だが, ヒストグラムはその範囲にあるものの分布を表すため。 (6人)
	明確に答えられていないもの	<ul style="list-style-type: none"> ・重複してはダメだから「より大きい」「以下」でもいいの? (3人) 	<ul style="list-style-type: none"> ・とぎれていないから? ・範囲がつながっている数になっているため (2人)
	間違っているもの・その他	<ul style="list-style-type: none"> ・区別するため 55g より大きくて 60g 以下でもいい ・四捨五入したときに階級の中で値が変わってくるから (7人, 内 2人無回答・分からない) 	<ul style="list-style-type: none"> ・ヒストグラムの方が見やすいから ・度数分布多角形(面積)を書くから。 (11人, 内 2人無回答・分からない)
その他 (3人)	正しいと考えられるもの	<ul style="list-style-type: none"> ・隣り合う階級とかぶってしまうのを防ぎ, どんな数値も入る階級が 1 つに決まるようにする。 	
	明確に答えられていないもの	<ul style="list-style-type: none"> ・区切りをよくするため。 	
	間違っているもの・その他	<ul style="list-style-type: none"> ・無回答 	<ul style="list-style-type: none"> ・無回答 (3人)

(3) 小学校教員

対象：公立小学校教員（17人）

1. 55g 以上 60g 未満には 7 個の卵があります。この 7 個はヒストグラムの長方形のどこに表れていますか。

高さ：3人 幅：0人 面積：14人 分からない：0人

2. どうして 55g 以上 60g 未満のように「以上」「未満」になっているのでしょうか。

(1)で高さと回答した人

- ・仮に 60g 以下としてしまうと、右となりのヒストグラムが表す 60 以上 65 未満の 60 と重複してしまい、全体量が変わってしまうおそれがあり、それをさけるため。
- ・以下を使うと 60g の卵が 2 つの領域に入ってしまうから
- ・45, 50, 55 などがどこに入れたらよいかを明確にするため

(1)で面積と回答した人

- ・両方に入ってしまうから。
- ・重さが連続量のため
分離量でないため、どこかでバサッとは切れないため
- ・**60**以上**60**未満ですべての数がどこかに入るから
- ・連続量として区切るために、重なりがないようにする必要があるから。
- ・「59.999...g 以下」とするとすっきりしないから
「55g より大きく」とするとすっきりしないから
- ・つなぐため
- ・60kg は次のヒストグラムに入るから
- ・連続性になっているため
- ・「以上」「未満」を使わなければ「55」や「60」のような境目の数がどこに位置するか、わからなくなるから。
- ・0 以上から計量しているから（以上）
ある区間（値）をどちらに含めるかはっきりさせるため（未満）
- ・グラフに切れ間がないようにするため
- ・範囲があるため

無回答・分からない：2人

3. 棒グラフではなく、どうしてヒストグラムでなければならないのでしょうか。

(1)で高さで回答した人

- ・ヒストグラム＝柱状グラフというが、柱の状態であることで、数値ではなく数量であることが表せられるため。
- ・見やすくするため

分からない：1人

(1)で面積で回答した人

- ・横軸のg（重さ）は連続量だから
- ・棒の長さ（高さ）で表すのではないから
- ・量の視覚化（量感）
棒グラフは同じ量（1つの）の変化を表す
1つのものではない。どんな重さの卵が何個あるかを表す資料を表すため
- ・特ちょうなので、いつも同じでないから。
- ・分布を表すものだから？
- ・範囲があるので
個数でないから
- ・比較するために量感がある方がわかりやすい。
- ・横軸が連続の数になっている長方形とみるため
- ・gを連続量として捉えさせたいから
- ・範囲を表すため
- ・マス目状になっており、個数が分かりやすいから②
- ・全体的な傾向を見ることが目的であるため

無回答・分からない：2人

公立小学校教員（17人）

(1)	(2)		(3)
高さ (3人)	正しいと考えられるもの	<ul style="list-style-type: none"> 仮に 60g 以下としてしまうと、右となりのヒストグラムが表す 60 以上 65 未満の 60 と重複してしまい、全体量が変わってしまうおそれがあり、それをさけるため。 以下を使うと 60g の卵が 2 つの領域に入ってしまうから (3人)	
	明確に答えられていないもの		
	間違っているもの・その他		<ul style="list-style-type: none"> ヒストグラム＝柱状グラフというが、柱の状態であることで、数値ではなく数量であることが表せられるため。 見やすくするため (3人, 内1人分からない)
幅 (0人)	正しいと考えられるもの		
	明確に答えられていないもの		
	間違っているもの・その他		

(1)	(2)		(3)
面積 (正解) (14人)	正しいと考えられるもの	<ul style="list-style-type: none"> ・連続性になっているため ・「以上」「未満」を使わなければ「55」や「60」のような境目の数がどこに位置するか、わからなくなるから。 (7人)	<ul style="list-style-type: none"> ・横軸の g (重さ) は連続量だから ・棒の長さ (高さ) で表すのではないから ・横軸が連続の数になっている長方形とみるため (4人)
	明確に答えられていないもの	<ul style="list-style-type: none"> ・グラフに切れ間がないようにするため ・範囲があるため ・60kg は次のヒストグラムに入るから (5人)	<ul style="list-style-type: none"> ・量の視覚化 (量感) 棒グラフは同じ量 (1つの) の変化を表す 1つのものではない。どんな重さの卵が何個あるかを表す資料を表すため ・範囲を表すため (2人)
	間違っているもの・その他	無回答・分からない (2人)	<ul style="list-style-type: none"> ・比較するために量感がある方がわかりやすい。 ・分布を表すものだから? (8人, 内2人無回答・分からない)
? (0人)	正しいと考えられるもの		
	明確に答えられていないもの		
	間違っているもの・その他		

(4) 中学校教員

対象：公立中学校教員（37人）

(1) 55g 以上 60g 未満には 7 個の卵があります。この 7 個はヒストグラムの長方形のどこに表れていますか。

高さ：26人 幅：0人 面積：10人 分からない：0人 その他：1人

(2) どうして 55g 以上 60g 未満のように「以上」「未満」になっているのでしょうか。

(1)で高さと回答した人

・「以上」「以下」では重複するから、そうならないため

$$55 \leq x < 60$$

・境目の値があった場合、どちらに属すればよいかわからないから。

・連続性がわかるように

・重複をなくすため

・55g 以上 60g 以下とすると、次の 60g 以上のところと重なってしまうから

・60g は 60~65 の階級に入り、55~60 ではないようにするため

・どちらか端に「以上」「未満」としておかないと入らない g 重複の g がでてしまう

・数の被りをなくすため（例：50 や 60 の場合）

・60g 以下にすると 60g が両方の階級に入ってしまう。

・以下にすると両方の階級に入るから

・両方とも以上・未満だと 55 のデータが重複する

両方とも未満 だと 55 のデータが含まれない

・各階級で「以上」「以下」にしてしまうと、2つの階級に入る場合がある。

「未満」「より大」にしてしまうと、どこの階級にも入らない事もおこり得る。

・重複してしまうから

・個々の重さを見やすく 5g ずつの階級に区切っているので境目がどちらの階級に入るのかわかるように「以上」「未満」になっている

・以上、未満を決めておかないと、人によってどの階級に入れるのかわかってしまう。度のためあらかじめ決めておくべき

・次の階級のはじまりが～以上なので、その階級の終わりは未満としておかないと数値を二重で考えてしまうから。（正しい度数がでない）

ex. 55g 以上 60g 以下, 60g 以上 65g 以下→60g がかぶる！

2つの階級でカウントされてしまう

- ・両方含むと、数値によってはバラツキがでるから統一する
- ・幅の設定に重なりが生じないようにするため
- ・45, 50, 55, …の点が2回重ならず点の集合が並んで直線を作れるように
(1つの点をどちらかに含ませるため)
- ・両方含むことになってしまうといけないから表によって違いがあるといけないので統一
- ・以上, 未満という表記にすることによりすべての値をうめることができるから
- ・連続した量の中でそれぞれの階級の幅を同じにするため
- ・柱状で表すため, きちんと区切るため

無回答・分からない : 3人

(1)で面積と回答した人

- ・個数と違い連続量となるため
- ・重なりがないように
- ・小数点以下のこまかい数まで, 四捨五入で考えられるように。
- ・未満であるのは, 以下だと次を「～より大きい」と書かなくてはならない
- ・範囲がかぶらないようにするため。「より大きい」「以下」だと0を含むことができなくなるから
- ・連続量を区切るためには, すき間なく設定するために以上, 未満で区切る方法しかないため
- ・以上と未満にしないと重複してしまうから
- ・連続値として考えたいため
- ・階級間の値をしっかりと反映させるため
- ・1つの数値じゃないから。複数の数値だから幅がある。

(1)で高さ, 面積の両方を回答した人

- ・隙間なく, 重複を避ける為

(3)棒グラフではなく, どうしてヒストグラムでなければならないのでしょうか。

(1)で高さで回答した人

- ・連続していることがわかるために。
- ・重さに幅があるため。
- ・度数分布多角形を作るときに, ヒストグラムでないと困るから。
- ・ヒストグラムであれば連続的な数が表現できる

- ・横軸が項目ではなく連続量だから。
- ・棒グラフ : 「何 g は何個」 → 細かく分ける
ヒストグラム : 「階級の幅がある」 → 幅がある
- ・階級の幅も表すので
- ・重さ 1 つ 1 つ (棒グラフ) でとると特徴を調べにくい内容であるから
- ・データは連続しているから。データの大きさを多角形の面積で示しているから。
- ・「卵の重さ」なので、値が無限小数になる場合もあり、各階級の境が連続していく必要がある。
- ・「以上」「未満」と幅があることから境目はくっついていなければならない
棒グラフだと離散量になってしまうから
- ・重さに範囲があるので、棒グラフだと 1 つのものしかグラフにできない
たくさんグラフができてみにくい
- ・棒グラフは「その値」がいくつかということの限定になるので、幅の中がいくつ分ということを表すためにはヒストグラムかな
- ・例えば、55g 以上 60g 未満という幅の中での 7 個であるため、横軸 (x 軸) の目もりに対して長方形を描くヒストグラムでなければならぬ
- ・連続した量で卵の重さの分布を調べたいから。
棒グラフでは 1 つ 1 つの値として出てくるため、階級で調べられないから。
- ・同じ卵の重さを比べているので、グラフはくっついたヒストグラム
もし、国、数、英の小テストの平均など違う教科を比べるときは棒グラフ
- ・例えば、55g 以上 60g 未満の中に 7 個の卵が存在するのでその区間すべての中に存在するという意味でヒストグラム
- ・棒だと数値が関係してこないから
- ・棒グラフでは階級の幅があわせられない
- ・ヒストグラムだと両端を 0 として度数分布多角形をつくることでその資料の特徴をしる
(わかる) ことができる
- ・両端の階級が 0 と見ることができるから
- ・データがぼう大になった時に表現しづらい

無回答 : 4 人

(1)で面積と回答した人

- ・棒グラフは高さを考えるものであり、ヒストグラムは面積を考えるものであるため、(2)のことをふまえるためには、ヒストグラムが適切である。
- ・階級を利用するにはヒストグラムが適切だと思う。
- ・棒グラフでは階級の度数が小さくなってしまう。
- ・卵の重さはピッタリ 47g ではなく 47.123...というように無限に続く数なので棒グラフで表すには不適
- ・卵の重さが連続量であるから。棒グラフではすき間が生じる。
- ・連続値として考えるので、間があると不連続になる。
- ・階級と階級がつながりをもっていることを示すため
- ・幅があるものだから
- ・1つの値についてのグラフじゃないから。

無回答：1人

(1)で高さ、面積の両方を回答した人

- ・横軸の隙間をなくす為

公立中学校教員 (37人)

(1)	(2)	(3)	
高さ (26人)	正しいと考えられるもの	<ul style="list-style-type: none"> 各階級で「以上」「以下」にしてしまうと、2つの階級に入る場合がある。 「未満」「より大」にしてしまうと、どこの階級にも入らない事もおこり得る。 連続性がわかるように (21人) 	<ul style="list-style-type: none"> 連続していることがわかるために。 例えば、55g以上60g未満の中に7個の卵が存在するのでその区間すべての中に存在するという意味でヒストグラム (14人)
	明確に答えられていないもの	<ul style="list-style-type: none"> 両方含むと、数値によってはバラツキがあるので統一する 柱状で表すため、きちんと区切るため (2人) 	<ul style="list-style-type: none"> 重さに幅があるため。 同じ卵の重さを比べているので、グラフはくつついたヒストグラム もし、国、数、英の小テストの平均など違う教科を比べるときは棒グラフ (3人)
	間違っているもの・その他	無回答・分からない (3人)	<ul style="list-style-type: none"> 度数分布多角形を作るときに、ヒストグラムでないと困るから。 データがぼう大になった時に表現しづらい (9人、内4人无回答・分からない)
幅 (0人)	正しいと考えられるもの		
	明確に答えられていないもの		
	間違っているもの・その他		

(1)	(2)		(3)
面積 (正解) (10人)	正しいと考えられるもの	<ul style="list-style-type: none"> ・個数と違い連続量となるため ・範囲がかぶらないようにするため。「より大きい」「以下」だと0を含むことができなくなるから (7人)	<ul style="list-style-type: none"> ・棒グラフは高さを考えるものであり、ヒストグラムは面積を考えるものであるため、(2)のことをふまえるためには、ヒストグラムが適切である。 ・連続値として考えるので、間があると不連続になる。 (5人)
	明確に答えられていないもの		<ul style="list-style-type: none"> ・階級を利用するにはヒストグラムが適切だと思う。 ・1つの値についてのグラフじゃないから。 (3人)
	間違っているもの・その他	<ul style="list-style-type: none"> ・小数点以下のこまかい数まで、四捨五入で考えられるように。 ・階級間の値をしっかりと反映させるため ・1つの数値じゃないから。複数の数値だから幅がある。 (3人)	<ul style="list-style-type: none"> ・棒グラフでは階級の度数が小さくなってしまう。 (2人、内1人無回答)
? (0人)	正しいと考えられるもの		
	明確に答えられていないもの		
	間違っているもの・その他		
その他 (1人)	正しいと考えられるもの	・隙間なく、重複を避ける為	
	明確に答えられていないもの		・横軸の隙間をなくす為

4. 考察

生徒の結果を見ると、(1)では高さで回答した生徒が全体の7割以上を占めていた。(2)でも説明できていると考えられる回答は全体で6人しかおらず、全体的にヒストグラムに対する理解度が低いことが分かる。

教育学部生の回答を見ると、(1)では高さで回答した学生が半数以上、正しい回答である面積で回答した人は全体の約3割となった。(2)で説明できていると考えられる回答は全体の半数だったのに対し、(3)で説明できていると考えられる回答は全体で17人と3割にも満たなかった。このことから、ヒストグラムに対する正確な理解をしている学生は、生徒と同様少ないことが分かる。

小学校教員の結果は、(1)で正解である面積で回答した人が17人中14人と高い割合を占めた。(2)は、全体的に説明できていると考えられる回答がされていた。しかし、(3)で説明できていると考えられる回答をしている人は、(1)で面積で回答した人の中のごく一部だった。このことから、ヒストグラムにおける度数とは面積に表れるものだと知りつつも、なぜそうなるのかということ、ヒストグラムの扱う量が連続量であることが結びついていない人が多いということが分かった。

中学校教員の結果は、(1)の質問において、高さで回答した人は26人で、全体の約7割を占める結果だった。残り的人(1人例外を除く)は正しい回答である面積を選択していた。(2)では(1)での回答にかかわらず、ほとんどの人が「連続量」や「階級の重なり」に注目した説明できていると考えられる回答をしていた。(3)においても(2)ほどではないが、全体的に概ねの人が説明できていると考えられる回答をしていた。これらのことから、重さのような連続量を扱う場合、階級の幅も表現できるヒストグラムを用いることが適当であるということは理解しているが、度数がヒストグラムの面積で表されているという、ヒストグラムの意味を正しく理解している人はあまりいないという現状が明らかとなった。階級の幅が統一されているヒストグラムの場合、見かけ上度数が高さに表れるとはいえ、高さで回答した人の記述には、そのような趣旨は見受けられなかった。

以上のことから、生徒のヒストグラムに対する理解度が低いのは、教員の理解度がそもそも十分でないからだといえる。しかし、教育学部生の理解度も良くないことから、教員もこれまでに正しいヒストグラムの意味を学習する機会がなかったと考えられる。したがって、教員が正しいヒストグラムの意味について学ぶことが重要である。

第二節 確率密度関数の理解度に関する実態調査

1. 調査の目的

本調査の目的は、アンケート調査を通して、確率密度関数に対する理解度の現状を明らかにし、その改善点を模索することである。

2. アンケート調査

現在、高校で確率密度関数を学習してきている高校生はほとんどいないため、生徒にはアンケートを実施できない。そのためアンケート調査は高等学校教員のみを実施した。以下は実際に使用したアンケート調査問題とその回答例である。

(1) アンケート調査問題

(高等学校教員用)

高等学校学習指導要領では数学 B の「統計的な推測」で「正規分布」について学習することとなっています。そして、この学習内容の中に「確率密度関数」が含まれています。

130 第4章 確率分布と統計的な推測

15 正規分布

これまで、そのとりうる値がとびとびで有限個であるような確率変数だけを考えてきた。ここでは、連続した値をとる確率変数について考えよう。

A 連続した値をとる確率変数

右の表は、あるクラス 40 人の身長を調べた結果で、度数分布表において、各階級の相対度数をまとめたものである。この 40 人の中から 1 人を選ぶとき、その生徒の身長を X とする。
たとえば、 X が 174 cm 以上 178 cm 未満の階級に属する確率は相対度数 0.175 であると考えてよい。

このように考えると、 X が各階級に属する確率は、各階級の相対度数に一致する。したがって、 X は各階級に対して属する確率の定まる確率変数と考えられる。

右の図は、上の表で示した相対度数を柱状のグラフで示したものである。このような図を、ヒストグラムという。たとえば、図の斜線部分が、 $162 \leq X < 170$ となる確率を表す。

データの総数を増やし階級の幅を細かく分けて同様なヒストグラムを作っていくと、ヒストグラムの形はある曲線に近づいていくと考えられる。

身長の階級 (cm)	度数	相対度数
158 以上 162 未満	2	0.050
162 ~ 166	4	0.100
166 ~ 170	10	0.250
170 ~ 174	16	0.400
174 ~ 178	7	0.175
178 ~ 182	1	0.025
計	40	1.000

第1節 確率分布 131

一般に、連続した値をとる確率変数 X を **連続型確率変数** という。

連続型確率変数 X の確率分布を考える場合は、 X に 1 つの曲線 $y=f(x)$ を対応させ、 $a \leq X \leq b$ となる確率

$$P(a \leq X \leq b)$$

が、右の図の斜線部分の面積で表されるようにする。

この曲線 $y=f(x)$ を、 X の **分布曲線** といい、関数 $f(x)$ を **確率密度関数** という。

確率密度関数 $f(x)$ は、次のような性質をもつ。

常に $f(x) \geq 0$ で $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$

X のとる値の範囲が $\alpha \leq X \leq \beta$ のとき $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = 1$

例 17 確率変数 X のとる値の範囲が $0 \leq X \leq 1$ で、その確率密度関数が $f(x)=2x$ ($0 \leq x \leq 1$) であるとき、確率 $P(0 \leq X \leq 0.4)$ は

$$P(0 \leq X \leq 0.4) = \int_0^{0.4} 2x dx = \left[x^2 \right]_0^{0.4} = 0.16$$

練習 21 確率変数 X の確率密度関数 $f(x)$ が次の式で与えられるとき、指定された確率をそれぞれ求めよ。

- $f(x)=x$ ($0 \leq x \leq \sqrt{2}$) $0 \leq X \leq 0.5$ である確率
- $f(x)=0.5x$ ($0 \leq x \leq 2$) $1 \leq X \leq 2$ である確率

数研出版『高等学校数学 B』(平成 25 年 1 月 10 日発行) pp.130-131

(1) 一般的に「確率密度関数」と呼ばれていますが、なぜ「密度」という言葉が使われているのですか。

(2) 数研出版『高等学校数学Ⅱ』（平成26年1月10日発行）第6章，第3節「積分することと微分することとは，互いに逆の計算であるといえる。」や，啓林館『数学Ⅱ』（平成25年12月10日発行）第5章，第3節「導関数 $f'(x)$ が与えられたときに，もとの関数 $f(x)$ を求めることはできるのだろうか。このようなときには，微分の逆の演算が必要になる。」とあることから，積分を微分の逆演算として指導していることが分かります。しかし，確率密度関数から確率を求める際に用いる積分は，相対度数のヒストグラムを利用していることから，区分求積法で説明されていると考えられます。この2つの違いが及ぼす，生徒の確率密度関数についての理解への影響はあると思いますか。もしあれば，どのようなことが考えられますか。

ご協力ありがとうございました。

(2) アンケート調査問題回答例

(高等学校教員用)

高等学校学習指導要領では数学 B の「統計的な推測」で「正規分布」について学習することとなっています。そして、この学習内容の中に「確率密度関数」が含まれています。

130 第4章 確率分布と統計的な推測

15 正規分布

これまで、そのとりうる値がとびとびで有限個であるような確率変数だけを考えてきた。ここでは、連続した値をとる確率変数について考えよう。

A 連続した値をとる確率変数

右の表は、あるクラス 40 人の身長を調べた結果で、度数分布表において、各階級の相対度数をまとめたものである。この 40 人の中から 1 人を選ぶとき、その生徒の身長を X とする。
たとえば、 X が 174 cm 以上 178 cm 未満の階級に属する確率は相対度数 0.175 であると考えてよい。

このように考えると、 X が各階級に属する確率は、各階級の相対度数に一致する。したがって、 X は各階級に対して属する確率の定まる確率変数と考えられる。

右の図は、上の表で示した相対度数を柱状のグラフで示したものである。このような図を、ヒストグラムという。たとえば、図の斜線部分が、 $162 \leq X < 170$ となる確率を表す。

データの総数を増やし階級の幅を細かく分けて同様なヒストグラムを作っていくと、ヒストグラムの形はある曲線に近づいていくと考えられる。

身長階級 (cm)	度数	相対度数
158 以上 162 未満	2	0.050
162 ~ 166	4	0.100
166 ~ 170	10	0.250
170 ~ 174	16	0.400
174 ~ 178	7	0.175
178 ~ 182	1	0.025
計	40	1.000

第1節 確率分布 131

一般に、連続した値をとる確率変数 X を **連続型確率変数** という。

連続型確率変数 X の確率分布を考える場合は、 X に 1 つの曲線 $y=f(x)$ を対応させ、 $a \leq X \leq b$ となる確率

$$P(a \leq X \leq b)$$

が、右の図の斜線部分の面積で表されるようにする。

この曲線 $y=f(x)$ を、 X の **分布曲線** といい、関数 $f(x)$ を **確率密度関数** という。

確率密度関数 $f(x)$ は、次のような性質をもつ。

常に $f(x) \geq 0$ で $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$

X のとる値の範囲が $\alpha \leq X \leq \beta$ のとき $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = 1$

例 17 確率変数 X のとる値の範囲が $0 \leq X \leq 1$ で、その確率密度関数が $f(x)=2x$ ($0 \leq x \leq 1$) であるとき、確率 $P(0 \leq X \leq 0.4)$ は

$$P(0 \leq X \leq 0.4) = \int_0^{0.4} 2x dx = \left[x^2 \right]_0^{0.4} = 0.16$$

練習 21 確率変数 X の確率密度関数 $f(x)$ が次の式で与えられるとき、指定された確率をそれぞれ求めよ。

- $f(x)=x$ ($0 \leq x \leq \sqrt{2}$) $0 \leq X \leq 0.5$ である確率
- $f(x)=0.5x$ ($0 \leq x \leq 2$) $1 \leq X \leq 2$ である確率

数研出版『高等学校数学 B』(平成 25 年 1 月 10 日発行) pp.130-131

(1) 一般的に「確率密度関数」と呼ばれていますが、なぜ「密度」という言葉が使われているのですか。

- ・ある区間を積分した結果が確率であるためには、ある点での関数値が確率密度とするとうまく結びつくから。
- ・相対度数のヒストグラムの横軸を細かくしたものが確率密度関数のグラフであり、相対度数(確率)を面積で表しているから、高さは必然的に密度になるから。

(2) 数研出版『高等学校数学Ⅱ』（平成26年1月10日発行）第6章，第3節「積分することと微分することとは，互いに逆の計算であるといえる。」や，啓林館『数学Ⅱ』（平成25年12月10日発行）第5章，第3節「導関数 $f'(x)$ が与えられたときに，もとの関数 $f(x)$ を求めることはできるのだろうか。このようなときには，微分の逆の演算が必要になる。」とあることから，積分を微分の逆演算として指導していることが分かります。しかし，確率密度関数から確率を求める際に用いる積分は，相対度数のヒストグラムを利用していることから，区分求積法で説明されていると考えられます。この2つの違いが及ぼす，生徒の確率密度関数についての理解への影響はあると思いますか。もしあれば，どのようなことが考えられますか。

微分の逆演算という定義だけでは，関数で囲まれた部分の面積を求めることが積分になるという理解にはつながらないと考えられる。

つまり確率密度関数において面積が確率を表すことの理解につながらない。

ご協力ありがとうございました。

3. アンケート調査の結果

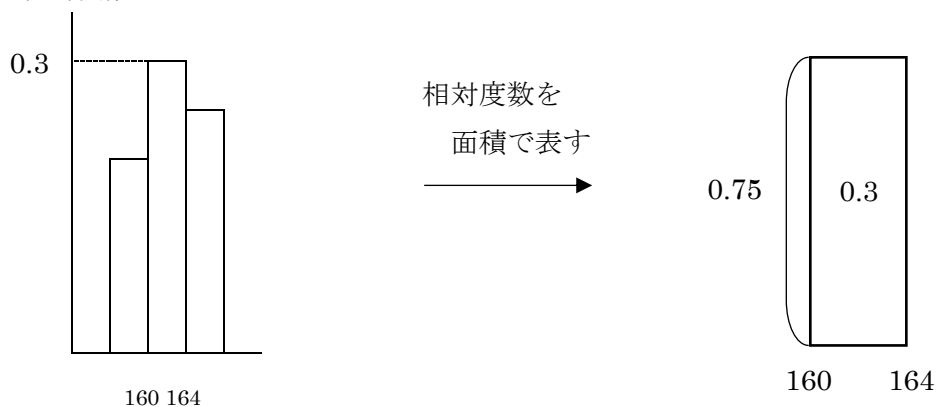
以下は高校教員のアンケートの回答の結果である。まず、記述内容に関して詳しく紹介する。

実施日：8月18日

対象：近畿地区数学教育協議会会員（10名のうち5名回収）

(1) 一般的に「確率密度関数」と呼ばれていますが、なぜ密度という言葉が使われているのですか。

・相対度数のヒストグラム



線密度のようなもの

このとき高さは $\frac{0.3}{4} = 0.75$ は密度というしかない

・その点の確率ではなくて積分したときに確率になる

$$\int P(v)dv \quad \text{こっちを空間（抽象的に）と考えると密度という言葉が使われることになる}$$

\int (質量の密度) $\times dv$ だったら質量になる

積分したとき「確率」となるので「確率密度」という言葉を使っている

- ・考えたことがありませんでした。これから少し考えてみます。
- ・(高専)大学の勉強につなげるため
- ・無回答

(2) 数研出版『高等学校数学Ⅱ』（平成 26 年 1 月 10 日発行）第 6 章，第 3 節「積分することと微分することとは，互いに逆の計算であるといえる。」や，啓林館『数学Ⅱ』（平成 25 年 12 月 10 日発行）第 5 章，第 3 節「導関数 $f'(x)$ が与えられたときに，もとの関数 $f(x)$ を求めることはできるのだろうか。このようなときには，微分の逆の演算が必要になる。」とあることから，積分を微分の逆演算として指導していることが分かります。しかし，確率密度関数から確率を求める際に用いる積分は，相対度数のヒストグラムを利用していることから，区分求積法に相当すると考えられます。この 2 つの違いが及ぼす，生徒の確率密度関数についての理解への影響はあると思いますか。もしあれば，どのようなことが考えられますか。

5 名全員があると回答（1 名は影響があるということだけ回答）

- ・区分求積法の勉強（補習）を入れたらよい。
- ・“積分と面積が関係があるのは $\int \sim dx$ で面積が求められる”と感じているだけで，区分求積法を知っているわけではないです。すごく古い話ですが，ぼくは大学の統計の授業で「何で確率に \int が出てくるんや？」とずっと思っていました。
さらに，区分求積から積分を学んだ高校生でもかたんに確率密度につながるのはしんどいと思います。
- ・「逆微分が積分である」と教えるのは日本のジョーシキ，世界のヒジョーシキです。
と代々木ゼミの講師が言っていた。と上の娘が予備校通いしていたときに言っていました。（2004 年かな？）
逆微分が積分なんだから・・・，と考えていると頭が混乱する。
- ・積分は $\sum f(x)\Delta x$ の意味であることは必要でしょう。

4. 考察

アンケート調査の結果では，説明できていると考えられる回答をしている人は 5 人中 2 人であった。このことから，確率密度関数に対する理解度は高くないことが分かる。しかし，確率密度関数の指導については，5 人すべての人が区分求積法の学習をせずに確率密度関数を学習することは，生徒たちの理解に影響を及ぼすと考えている。

このことから，確率密度関数に対する理解や，指導上の留意点についてはある一定の見解を持っていると考えられる。しかしながら，今回のアンケート調査に関しては標本が少ない。そのため，一般的傾向であるとはいえない可能性があるため，今後さらなる調査が必要であると考えられる。

第三節 考察とまとめ

ヒストグラムの理解度に関するアンケート調査の結果によれば、ヒストグラムにおいて度数が面積で表されていることを理解している人の割合は、中学生で約 1 割、教育学部学生で約 3 割、小学校教員で約 8 割、中学校教員で 3 割に満たなかった。さらにその中でも、ヒストグラム全体に対する理解が十分な人の割合は全体に対して、中学生は 1 割を下回り、教育学部で 1 割、小学校教員で約 2 割、中学校教員で約 1 割だった。このことから、生徒のヒストグラムに対する理解度が低いのは、教員の理解度が十分でないからだと推測される。また、教育学部生の理解度も良くないことから、大学の教員養成においてもヒストグラムの本質的な理解を促す授業が求められる。

高校教員へのアンケートによれば、すべての教員が指導に関するある一定の見解を持っていることから、統計教育の重要性を理解し、改善が必要だと感じているということが分かった。

第一章の学習指導要領の変遷を見ても分かるように、今の教員世代が子どものころにはまだ統計教育に力を入れた指導はされておらず、そもそも統計というものを学んだことが、あるいは学んだ記憶がない教員も多いと考えられる。実際筆者も平成 10 年改訂の指導要領のもとで学んできたため、中学校や高等学校でヒストグラムや確率密度関数について学習することなく大学に入学した。大学でもカリキュラムは先生により異なるため、場合によっては統計について学ぶことなく教員になる人もいたと考えられる。

これらのことを踏まえると、教員が統計について学習し直す機会を設けることが強く望まれる。

第五章 実践的考察

本章では実践にむけた準備を行う。そのために、過去の統計教育の実践例について考察し、その上で、実際に行う授業のシミュレーションを構築する。その後、実践を行い成果と課題について考察する。

第一節 過去の実践例

1. 川上公一著「生徒が解決の必然性や魅力を感じる教材とはどのようなものか（資料の散らばりと代表値）」『教育科学／数学教育』12月号（No.650），明治図書，2011年12月1日発行，pp.10-13

川上は、過去の統計指導では資料やグラフをつくることを重視してきたが、資料整理の目的は、集団全体の特徴、集団と個の関係を調べることや、集団と集団を比較することであるとしている。つまり、ただ資料を作成するだけでなく、そこから情報を正しく読み取り、的確に判断し、それを他者に説明できる能力を身に付けさせることが必要だということである。以下は、これらの必然性や魅力を感じさせるために川上は、身近な素材を取り上げている。ここでは、川上が取り上げているヒストグラムの例についてだけを対象とする。

筆箱の中に入っている筆記用具の本数について代表値を求めてみよう。

黒板に右図（下図）を示し、該当するところで挙手をさせ、ヒストグラムを作成する。これだけで簡単に最頻値を求めることができる。この学級の場合最頻値は6本である。

その後、平均値と中央値をグループごとに求めてみる。平均値は5.33，中央値は6である。ヒストグラムから代表値を求める場合、最頻値が簡便であることに気付かせたい。

その後「先生は60本もっている」などと投げかけ、一人だけ突出した本数をもっている場合、平均値はその値の大きく影響を受けることに気付かせる。

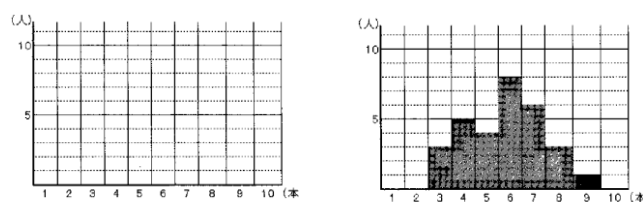


図1 筆記用具数の調査（生徒数30人）

【考察】

筆箱の中に入っている筆記用具の本数という、非常に身近で資料整理のしやすい例を用いて、それぞれの代表値の特徴や、どの代表値を用いることが効果的かということを考えさせることができるのは良い題材である。しかしながら、階級にあたる数値である筆記用具の本数は分離量であり、このグラフは明らかに棒グラフであってヒストグラムではない。

2. 村田敏彦著「学校生活で数学しよう!!」『教育科学／数学教育』12月号 (No.650),
 明治図書, 2011年12月1日発行, pp.26-29

村田は、「知識基盤社会」の現代において、日常生活や社会にはたくさんの情報があふれており、意図的な宣伝や特殊な情報に流されるのではなく、正しく必要な情報を取り出してまとめ、分析する力が必要になっていると指摘している。小学校での、棒グラフをはじめとした様々なグラフの処理、統計的な表現や考察等を基に、中学校ではさらに詳しく、目的に応じた資料収集、処理の工夫、資料傾向の読み取り、説明することが目標となるとしている。

また、この学習において、中学生にとって身近な問題ではあるが、偶然に左右されたりする不確定な事象を題材として扱うことが欠かせないとしている。以下は、「交通立哨はいつ行うのがよいか」という課題を取り上げた授業の具体例である。

(1) 1時間目

T 10月の中間考査のときに、S 小学校前の国道を横断して帰るみんなの様子を見ていたんだけど、試験が終わってからどのくらいの時間でみんなが交差点を通過するか調べていたんだ。40人が通過した時間は、表1のようになっているよ。この表1を参考に、12月の期末考査のときは、いつの時間を中心に立てばいいか教えてくれるかな？

20	41	38	7	12	21	9	11	21	37
19	18	20	36	36	16	18	19	39	40
25	43	31	14	17	14	38	18	27	30
34	41	37	19	39	19	30	42	22	24

表1 試験終了後、交差点を通過した経過時間(分)

- S1 表をただ見ているだけでは、よくわからないね。
- S2 表1を見ると、早い生徒は7分後には通過しているし、遅い生徒は43分後の通過だから、36分も開き(範囲)があるんだね。先生も大変だ。
- T S2さん、ありがとう。その通りなんだ。時間があれば、ずっとみんなの帰りを見守れるんだけど、限られた時間しかないからね。
- S3 それじゃあ、平均を求めてその時間を中心に交差点に立ったらいいよ。
- S4 平均を求めたら26.05分になるので、S3さんの言うように、26分を境に立つ時間を決めたらどう？ もし20分しか立てないとしても16分から36分の間立ったら、ほとんどの生徒の下校の様子が見られると思うよ。
- S5 もっと具体的な分布が知りたいので、表1を整理して度数分布表とヒストグラムをつくってみよう。さらに詳しい分布の様子がわかるよ。

S6 階級の幅が5分のヒストグラムをつくるとこうなるよ。

階級 (分)	度数 (人)
0～5	0
5～10	2
10～15	4
15～20	9
20～25	6
25～30	2
30～35	4
35～40	8
40～45	5
計	40

表2 度数分布表

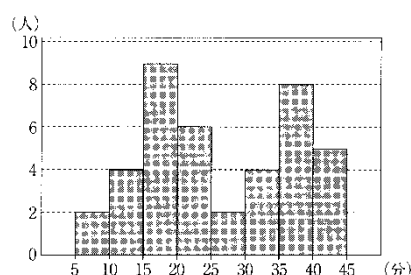


表3 ヒストグラム

S7 確かに平均は26.05分だったけど、ヒストグラムを見ると、その度数が一番低いから平均を中心に20分間立つのは効果がないのかなあ？

S8 でもS7さん、最頻値は17.5分だし、中央値は23分だから、いい時間の配分じゃないかなあ。もう少し時間を前にずらして交差点に立つようにすると、ほとんどの生徒の様子がわかるね！

S9 なかなか、いい判断ができたね。

S10 ただ後半の人の通過が見られないのが残念。

T みんなのおかげで、今度の期末考査のとき、交差点にいつごろから立ったらいいかわかったよ。できるだけ長い時間下校の様子を見たいね。

S11 でも、案外遅い時間に帰っている生徒の様子も大切だよ。

S12 先生は20分間立つ予定だけど、これが10分しか立てなかったら、単純に平均時間を境に10分間と予定を立てたら、あまり意味のないことになってしまう。ほとんど生徒の通過が見られないね。だから、平均値だけで決めるのではなく、中央値や最頻値を見て判断しないと困るね。

S13 そうか。前半の時間帯と、後半の時間帯に分けて見るなど工夫がいるんだな。僕は、平均時間しか見てなかったな。

(2) 2時間目



S13 先生、期末考査の最終日に3年生は学年集会があるらしく、A先生の話があるから、下校時間が20分遅くなるんだって。

T それは、困ったなあ。いつごろ交差点に立つのがいいのかなあ？40人のうち、30分くらいまでは3年生が半分くらいの人数を占めているらしいんだけど…

S14 う～ん…。それぞれ 20 分遅くなるとすると、1 時間目のときと同じように 20 分間立っても効果がないね。

S15 そうだとすると、表 1 のデータや表 2 の度数分布表では、少しわかりにくくなってしまふね。S16 さんだったらどのように考える？

S16 難しい問題だわ。でも、30 分までに通過する生徒のうち、半分くらいが 3 年生だという情報を利用して、表 4 のように考えたらどうかしら？

S17 つまり、表 3 の 30 分までの半分に、表 4 のように  印を付けて 20 分右にずらし、 として元のヒストグラムにのせればいいんだよね。

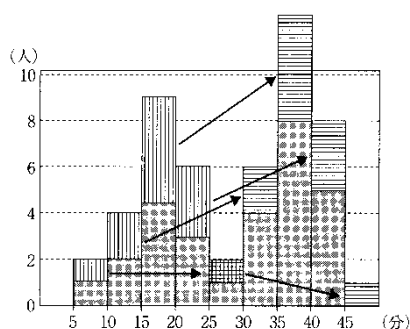


表4 ヒストグラム

S18 なるほど。そうすると、分布の状況がよく見えてくるね。

S19 先生、時間がなければ、35 分から 40 分がピークになるので、その時間を中心に、もし余裕があれば 15 分くらいまでに行ければ、ほとんどの生徒の帰りを見ることができよ。

T ありがとう。みんなの意見を参考に、12 月寒いけれどがんばるよ。

【考察】

この授業は、資料の散らばりと代表値についての授業である。1 時間目は、代表値からデータの傾向を読み取る際、1 つだけから判断するのではなく、すべてを総合して判断する必要があるということを学習している。2 時間目では代表値にこだわらず独自の処理を用いて傾向を読み取ろうとする姿がうかがえる。学校生活に根差した題材を用いて、生徒達の考える意欲を高め、資料をただ代表値のみで判断するだけでなく、他の方法を模索させている点は良い指導法である。しかしながら、この題材にたいしてヒストグラムを用いることがなぜ適切なのかについての問いかけはなされていない。また、生徒が面積を度数として認識しているかは判断できない。

3. 牧下英世著「自分の予想や判断について根拠を明らかにして説明し、伝え合う（1年）〔高校・大学へつなぐ中学での統計教育—SSH研究の取組から〕」『教育科学／数学教育』11月号（No.625），明治図書，2009年11月1日発行，pp.34-39

牧下は、小学校学習指導要領の改訂により、小6において、度数分布の指導が新設されたのは、中学校1年次の「資料の活用」の指導において、学校間における系統性とスパイラルを意識したものだと考えている。また、このような学校間における系統性とスパイラルは小中高のどの段階でも意識すべきことであり、学校段階による指導内容や用いられる資料などを十分に研究しておきたいと述べている。以下は高校・大学へつなぐための中学での統計教育の例である。

中学1年における統計指導

表計算ソフトの基本的な使い方を指導した後、夏休みの宿題にデータ収集、整理、考察を課す。集まったデータやグラフを基に、次の事項を取り上げる。

(1)度数分布表及びヒストグラム

様々なグラフを紹介しながら、度数分布表及びヒストグラムのつくり方を定着させる。また、表計算ソフトを利用すると階級の幅の変更も比較的容易にできる。階級の幅でグラフの印象が変わることもあるので、階級のつくり方にも気を配らせる。

(2)グラフの見方（平均値の意味・とらえ方）

様々なヒストグラムを取り上げながら、データ全体を代表する値として平均値がよく用いられるが、どんな場合でも代表していると言えるかを考えさせる。

(3)分布の比較（相対度数、代表値、散布度）

データの種類が同じ場合の比較。相対度数の利用や、平均値（代表値）だけでは比較できない場合もあることを確認する。

<夏休みの課題>

どんな分布か興味あることについてのデータを集め、代表値などを算出し、度数分布表やグラフをつくる。

注意：(1)データは原則として、100個以上集めること。

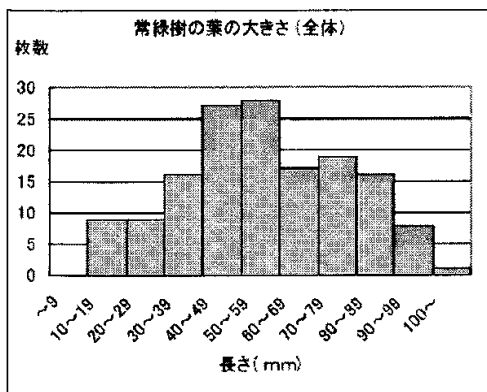
(2)レポートの1枚目には、クラス、番号、氏名を記入するとともに、いつ、どこで、どのようにして集めたデータかを明記し、そのデータについての感想を書くこと。

(3)グラフなどだけでなく、生のデータの一覧もレポートに含めて提出すること。

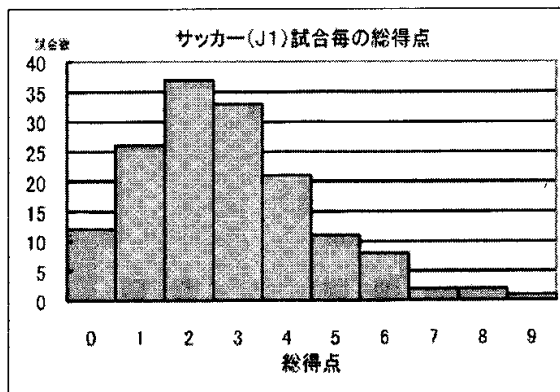
(4)表計算ソフトを利用してもよい。

下の (1) ~ (8) は、中学 1 年生たちの思い思いの作品である。

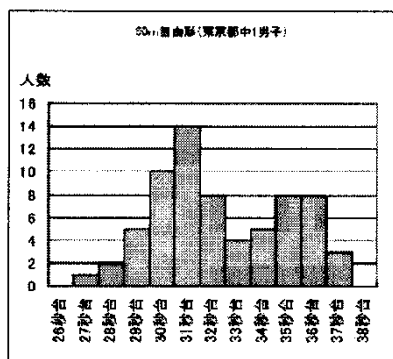
(1)ある常緑樹の葉の大きさ
(150 枚, 平均 55.9mm)



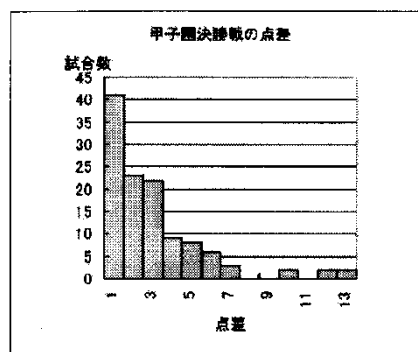
(2)サッカー (1) 試合毎の総得点
(153 試合, 平均 2.78 点)



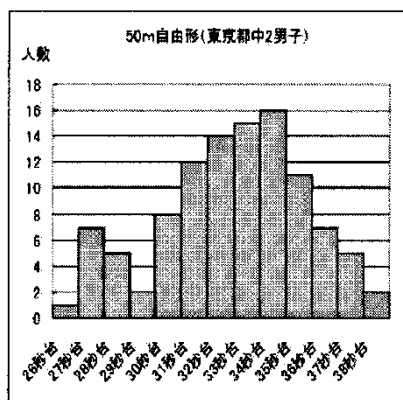
(3)高校野球甲子園決勝戦の点差
(118 試合, 平均 3.02 点)



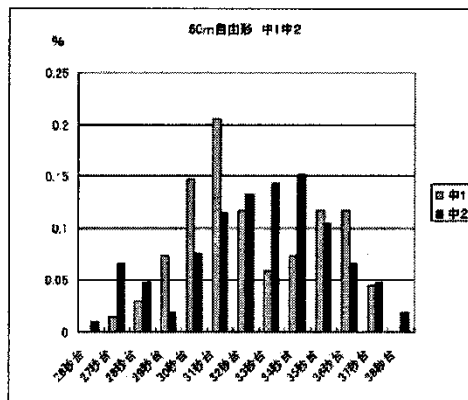
(4)競泳中1男子 50m 自由形の記録
(68 人, 平均 32.84 秒)



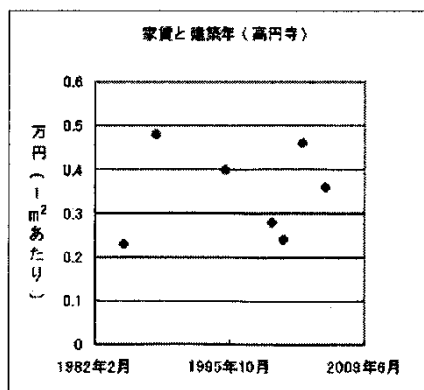
(5)競泳中2男子 50m 自由形の記録
(105 人, 平均 32.98 秒)



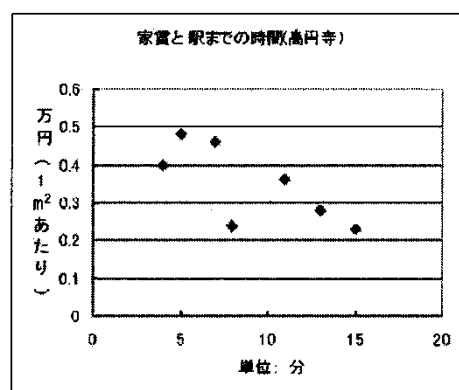
(6)競泳中1と中2の比較



(7) 家賃と建築年の関係



(8) 家賃と駅までの時間の関係



(1)~(5)は、ある1変数の分布である。(3)はある変数の差の分布であり興味深い。得点の差が1点から3点のところによく分布しており、さすが甲子園の高校野球の決勝戦は実力伯仲ということがわかるだろう。

また、(7)、(8)のように、2つの変数を座標平面上に点(散布図)として表せば、2つの変数の関係がみえてくる。(7)からこの地区では、アパートの家賃と建築年の関係はあまり見いだせない。しかし、(8)からこの地区では、アパートが駅から離れば家賃が安くなる関係がみえてくる。さらに、この生徒が工夫したところは、アパートの大きさを1m²当たり換算してとらえていることである。また(4)、(5)のように、学年ごとの分布を表した後に、(6)のように2つの集団を比較するような場面も出てくるだろう。

他にも、例えば、全国調査の中で我が市はどのような位置付けになっているのかを考えることは自然な流れである。すなわち、「大きな集団での分布と身近なデータとを比較すること」である。以上をまとめると、

- ある量の分布を調べたい
 - 2つの集団の比較を行いたい
 - 大きな集団での分布と身近なデータとを比較したい
- が考えられる。

【考察】

統計教育において小中高の学校段階の系統性とスパイラルを意識した指導は、統計教育を考える上で、外すことのできない課題であるという牧下の考え方には賛同できる。しかし、例では資料の作成や、読み取りについて、生徒の興味のあるデータを用いて学習しているが、棒グラフとヒストグラムの違いや、ヒストグラムの概念が全く扱われていない。ヒストグラムの概念を理解することは、高校での正規分布の学習を進める上で欠かせないものである。

また、生徒たちの作品についても問題がある。(1)は階級が10~19、20~29のように以上、

未満を用いた表現になっており、ヒストグラムとして不適切である。(2), (3)の階級は点数(分離量)となっているため、ヒストグラムではなく棒グラフである。(4), (5)はヒストグラムのように見えるが、これらを比較した(6)では棒グラフのように扱っているため、ヒストグラムとして扱っているかは分からない。

4. 考 察

3つすべての実践に共通している点は、ヒストグラムの活用法や、それに伴う代表値の学習について主に取り扱っていることである。また、どの実践においても、生徒が身近に感じる事柄を題材として扱っている。その題材はヒストグラムを用いなければ表現できないという意味で重要な役割を果たしている。これらの学習はデータの読み取り、考察にあたり、新学習指導要領における、「目的に応じてデータを収集して分析し、そのデータの分布の傾向を読み取り、批判的に考察し判断すること。」の部分に合致している。

しかしながら、ヒストグラムや相対度数などの意味を理解させるための指導はどの実践でも見受けられない。もしかすると、これらの実践報告の外側でこのような指導が行われているのかもしれないが、少なくとも実践報告には挙げられていない。

以上のことから、現在の統計教育では、ヒストグラムの活用とその読み取り、および代表値との結びつきには焦点が当てられているものの、ヒストグラムの必要性和意味の学習には焦点が当てられていない。ヒストグラムの必要性和意味にも指導の焦点を当てること、統計教育を考える上で重要になってくる。

第二節 授業のシミュレーション

1. 中学校

指導計画

- (1) 操作活動を通してヒストグラムについて知り，グラフを書くことができる。(第1時)
- (2) ヒストグラムの1つの長方形の意味について，面積が度数，高さが度数の密度を表すことを理解する。(第2時)
- (3) 相対度数の考え方を理解し，ヒストグラムや度数分布多角形として表現することができる。(第3時)

第1時

目標

- ① 連続量は測定したとき，測定値の真の値が分からないため，真の値が入る範囲を用いて考えなければいけないことが分かる。
- ② ヒストグラムをかく。
- ③ 「ヒストグラム」の用語を知る。

準備物

先生：プリント1，プリント2，テープ

生徒：はさみ，定規

<シミュレーション>

先生：今日はみなさんの直観力を測定してみたいと思います。

ではまず，近くの人とペアになってください。

ではプリント1を配ります。(プリントを配る)

いまからみなさんには10cmのテープを切ってもらいます。まずは10秒時間をとるので，1. に書いてある通りに10cmをよく見て，目に焼きつけてください。

生徒：(静かにプリント1の10cmを見ている)

先生：(10秒たったら) はい，プリントを裏向けてください。

それでは，2. の作業に移ります。いまからテープを配るので，受け取った人からまずはテープの最初の端をはさみで切って，そのあと自分が 10cm だと思いうところで切ってください。切り終わったら，プリントを表にして切ったテープを定規で測って，何 cm だったかをプリントの 3. のところに記入してください。(テープを配る)

(黒板)

配られたテープの端がそろうように少しだけ切る

↓

テープを 1 人 1 本ずつ 10cm だと思いうところで切る

↓

お互いに切り終わったらプリントを表にする

↓

切ったテープを定規で測り，プリントの 3. のところに記入する

生徒：(2. 3. の作業をしている)

プリント 1

1. 以下の長さは 10cm あります。よく見てください。



2. よく見たら、これとだいたい同じ長さのテープになるように 1 本切ってください。
3. 切り終わったら、定規を使って何 cm だったか測り、下に記入してください。

_____ cm

4. 先ほどのテープも含めて、20 本同じように切ってください。

先生：(作業を終えたのを確認してから) では結果を聞いてみましょう。
何 cm になりましたか。(数人指名する)

生徒：(例) 10.3cm になりました。

先生：おっ、おいしいですね。
でもそれって本当に 10.3cm でしたか。

①連続量は測定したとき、測定値の真の値が分からないため、真の値が入る範囲を用いて
考えなければいけないことが分かる。

生徒：???

先生：もちろん疑っているわけではないですよ。
ただ、本当に 10.3cm ぴったりだったのか気になっただけです。

生徒：ぴったりではないです。

先生：では、正確には何 cm でしたか。

生徒：正確には測れません。

先生：そうですね。長さは正確に測れませんね。もし定規の目盛りぴったりに見えたとしても、肉眼では見えない部分できっとずれているはずですよ。では、どのようにして 10.3cm と決めたのですか。

生徒：10.3cm の目盛りが一番近かったからです。

先生：なるほど。ですがそれだと、例えば先ほどと同じテープでも測る人によっては、テープの当て方によって 10.2cm、あるいは 10.4cm とするかもしれません。つまり、10.3cm、10.2cm、10.4cm は本当の値ではありません。
では、このテープの長さが確実に入る範囲はどれくらいでしょうか。少し周りと相談してみてください。

生徒：(周りと相談しながら考えている)

先生：はい，では聞いてみましょう。このテープが確実に入る範囲はどれくらいだと思いますか。

生徒：(予測される生徒の発言)

①10.2cm から 10.3cm (あるいは 10.3cm から 10.4cm)

②10.2cm から 10.4cm

③10cm から 11cm

先生：(①に対して) これだとテープが 10.3cm より少し長い時 (あるいは 10.3cm より少し短い時) に入らなくなってしまいますね。

先生：(②に対して) これだと確かに (①と比べると) 入りそうですが，先ほどの話であったように測る人のテープの当て方によってはこの範囲に入らない可能性がありますね。

先生：(③に対して) これだけの範囲であれば多少当て方が違っても確実に入りそうですね。

先生：というわけで今回は 10cm～11cm の範囲で考えていきます。ちなみに幅は何 cm ですか。

生徒：1cm です。

先生：そうですね。というわけで，このことを利用し 4. の作業の後でグラフを作ります。

②グラフをかく。

先生：では，2人で20本切るので残り18本のテープを先ほどと同様に直観で9本ずつ切ってください。

生徒：(4. の作業をしている)

先生：(作業を終えたのを確認してから) では，プリント1の裏にグラフを作ってもらいます。その前に書き方についてプリント2を使って説明します。

(プリント2を配り，実際に例を示しながら説明する)

先生：では、今日のテーマを書きます。

(黒板)

きっちりと測れないテープの散らばり具合を考えよう

先生：では、作業を始めてください。

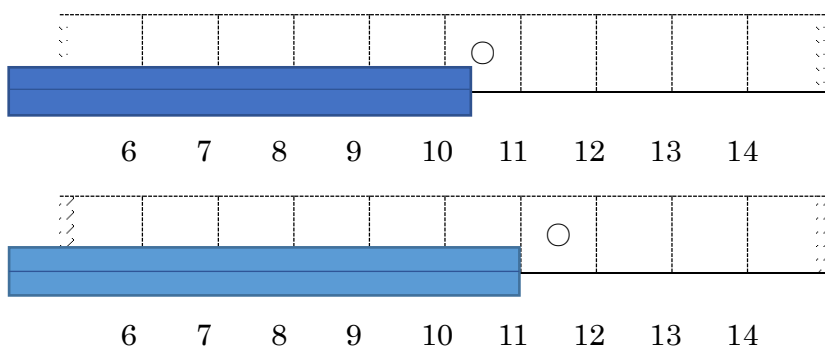
プリント 2

1. 切り終わったら，別紙のグラフの横軸にテープをあて，グラフ上に記録をとってください。（鉛筆で○をしてください）

※短辺を2等分した山折りの線の長さを記録してください。

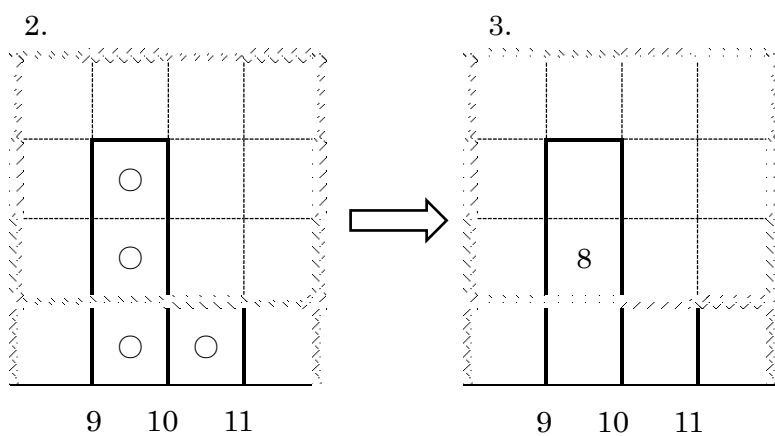
※テープが線と重なったら繰り上げて記録してください。

(例)

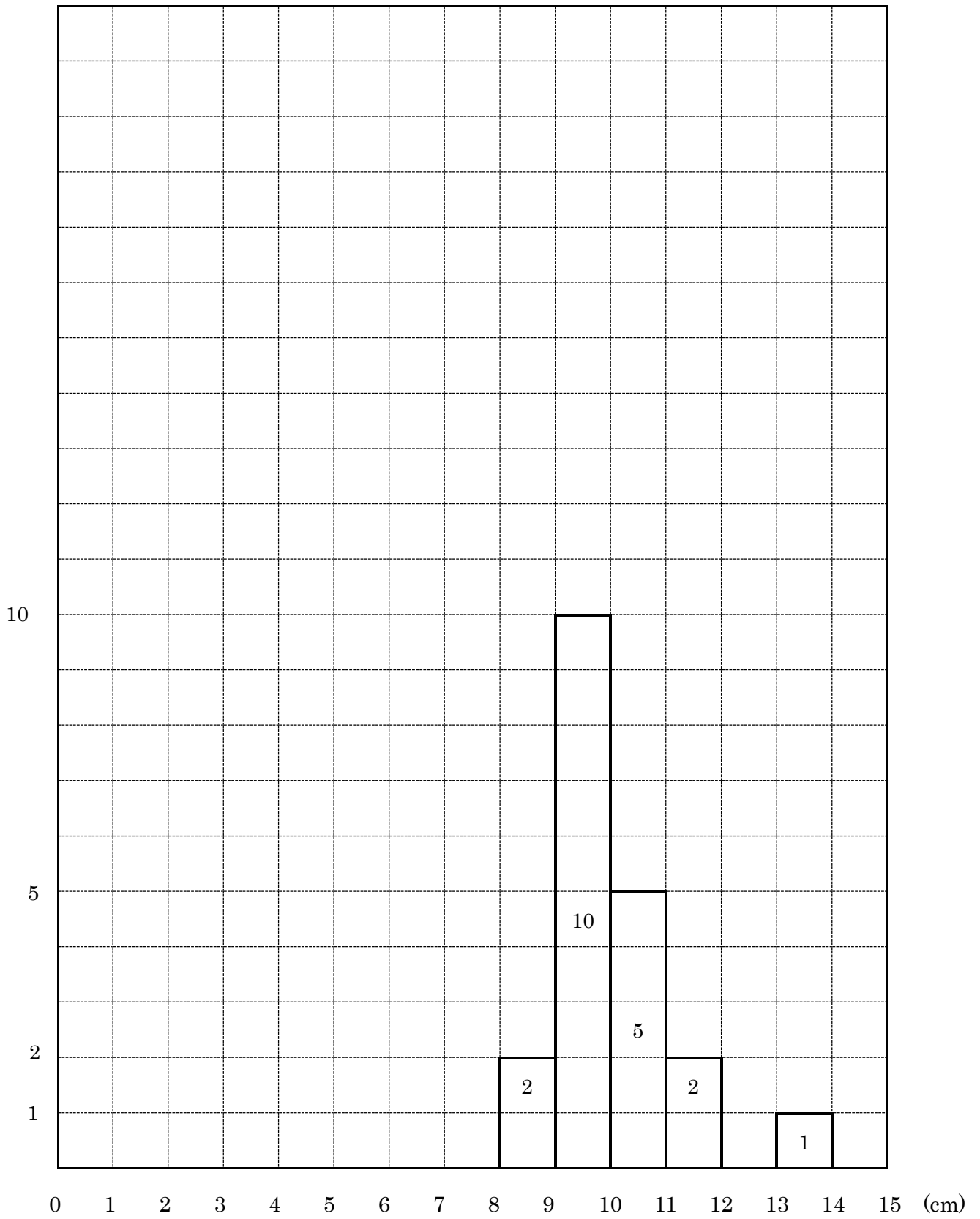


2. ○をつけたところをマス目にそってボールペンで囲んでください。
3. 囲まれた部分の○を個数に置き換えましょう。（○は消してください）
4. 縦軸にも個数をかきます。

(例)



(例) 10cm テープカットの記録



先生：(作業を終えたのを確認してから) これでグラフができあがりました。
では、結果を聞いてみましょう。10cm～11cm の間に入ったテープは何本でしたか。

生徒：(例) 5 本でした。

先生：なるほど。なかなかいい直観力していますね。
さて、この「10cm～11cm の間に 5 本入っている」ということを数学では「階級 10cm 以上 11cm 未満の度数は 5」と表現します。今回度数は本数のことを指しています。

(黒板)

10cm～11cm の間に 5 本入っている → 階級 10cm 以上 11cm 未満の度数は 5

先生：さて、「〇〇以上××未満」という表現が出てきましたが、これは今回の記録の取り方と関係しています。

テープが線の上にかかっているときには、その右側のところに印をつけました。これは「以上」という考え方と同じ作業ですよね。そして、範囲の右端はテープが線にかからないギリギリのところまでだったので、「未満」と同じ考え方をしているのが分かります。

(黒板)

10cm～11cm の間に 5 本入っている → 階級 10cm 以上 11cm 未満の度数は 5
線にかかる 線にギリギリかからない

先生：そして、この「階級 10cm 以上 11cm 未満の範囲 (1cm)」のことを数学では「階級の幅 (1cm)」といいます。

③「ヒストグラム」の用語を知る。

先生：度数分布の形が一見してわかるように柱状のグラフで表したものをヒストグラムといいます。

(黒板)

階級 10cm 以上 11cm 未満の範囲 (1cm) → 階級の幅 (1cm)
度数分布の形が一見してわかるように柱状のグラフで表したもの → ヒストグラム

先生：では，黒板に書いたことをプリントの空いているところにメモしてください。

先生：次回はこのできあがったグラフについて詳しく見ていきます。

○/○ きっちりと測れないテープの散らばり具合を考えよう

10cm～11cm の間に 5 本入っている → ^{かいきゅう}階級 10cm 以上 11cm 未満 の^{どすう}度数は 5

線にかかっている 線にギリギリかからない

階級 10cm 以上 11cm 未満の範囲 (1cm) → ^{はば}階級の幅 (1cm)

度数分布の形が一見してわかるように柱状のグラフで表したもの → ヒストグラム

第2時

目標

- ① ヒストグラムの長方形の面積が度数を表すことを理解する。
- ② ヒストグラムの長方形の各面積は各階級の度数に比例することを理解する。
- ③ ヒストグラムの長方形の高さが度数の密度を表すことを理解する。

準備物

先生：プリント3, プリント（例）

生徒：プリント1

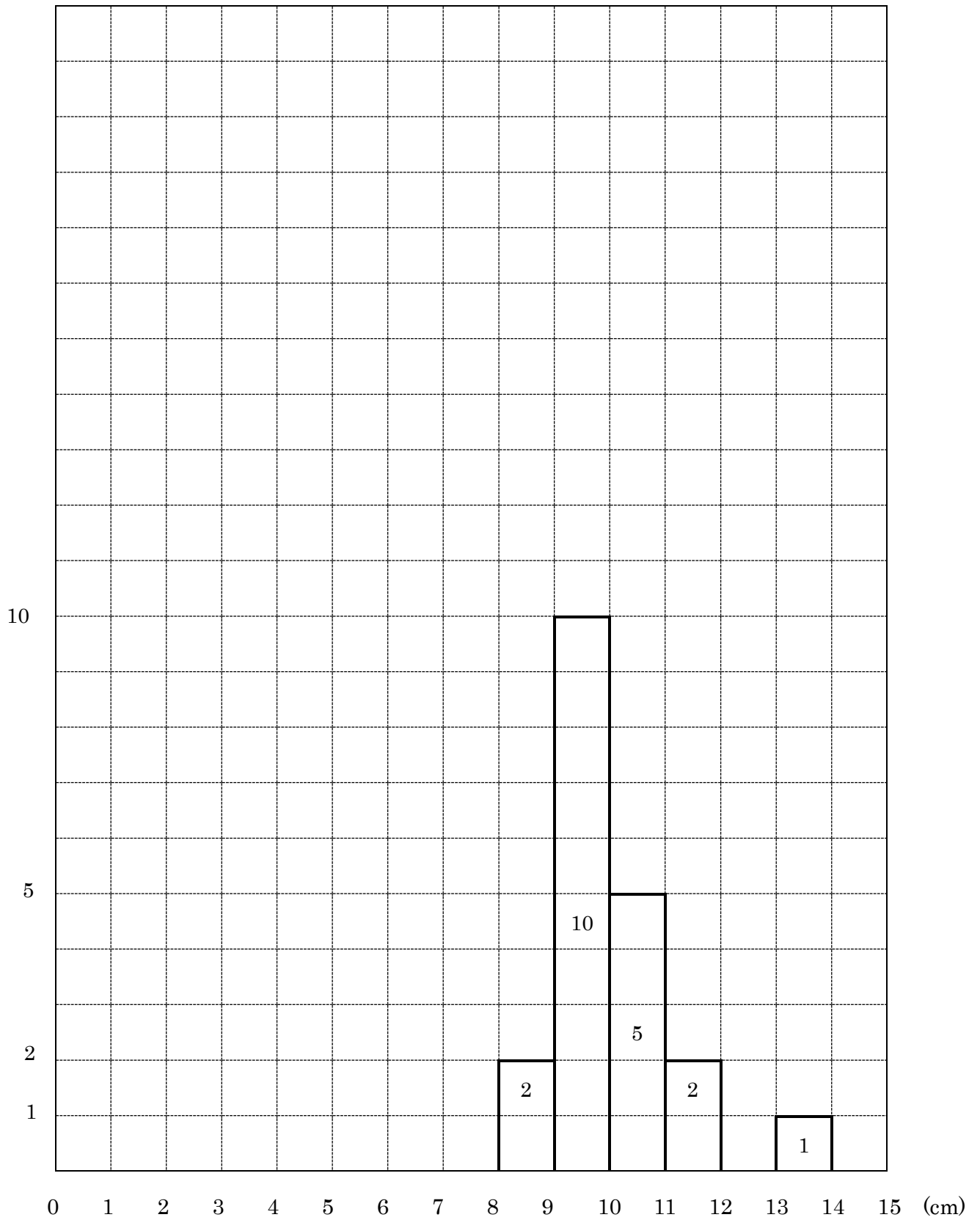
<シミュレーション>

先生：前は10cm テープカットをして、その記録をグラフに表しました。

今日はグラフについて詳しく見ていきましょう。

では、〇〇さんのグラフ（例）（間に度数が0の入っているグラフになった生徒をあらかじめ探しておく。いなければ教師の例を使う。）を見てみましょう。

(例) 10cm テープカットの記録



先生：このグラフを表に直すとこのようになります。(度数分布表を提示)
このような表のことを度数分布表といいます。

(板書)

度数分布表

階級 (cm)	度数 (本)
8cm 以上 9cm 未満	2
9cm 以上 10cm 未満	10
10cm 以上 11cm 未満	5
11cm 以上 12cm 未満	2
12cm 以上 13cm 未満	0
13cm 以上 14cm 未満	1

先生：では自分のグラフから度数分布表を作ってみましょう。今からプリント（度数分布表：プリント3）を配るのでそこに記入してください。枠は余ってもいいので、自分のグラフに合わせて作ってください。

度数分布表

階級 (cm)	度数 (本)
cm 以上 cm 未満	
cm 以上 cm 未満	
cm 以上 cm 未満	
cm 以上 cm 未満	
cm 以上 cm 未満	
cm 以上 cm 未満	
cm 以上 cm 未満	
cm 以上 cm 未満	
cm 以上 cm 未満	
cm 以上 cm 未満	
cm 以上 cm 未満	

先生：(作業が終わったのを確認してから) さて、黒板の表に戻ります。この表を見ると度数が0の階級がありますね。先生は真ん中に度数が0の階級があるのが嫌なのでこのような度数分布表を作りました。

(黒板)

階級 (cm)	度数 (本)
8cm 以上 9cm 未満	2
9cm 以上 10cm 未満	10
10cm 以上 11cm 未満	5
11cm 以上 14cm 未満	3

先生：このように度数分布表の階級の幅は自由にとることができます。今日は階級の幅を自由にとるとどんなことがおこるのかについて考えます。

(黒板)

階級の幅を自由にとるとどんなことがおこるのだろう

先生：さて、階級の幅を黒板のように11cm以上14cm未満にすると階級の幅は何cmになりますか。

生徒：3cmです。

- ①ヒストグラムの長方形の面積が度数を表すことを理解する。
- ②ヒストグラムの長方形の各面積は各階級の度数に比例することを理解する。

先生：そうですね。では11cm以上14cm未満のように階級の幅が3cmになると度数3というのはどのように囲めばいいと思いますか。班ごとにプリントを配るのでどのように囲むかを班で話し合っテグラフに書き込んでください。では始めてください。

生徒：(話し合いながら考えている)

先生：(各班が書けたのを確認してから) ではそれぞれの班に聞いてみましょう。どのように表現しましたか。

生徒：予想1(予想2)のようになりました。

先生：なるほど，意見が分かれましたね。ではどうしてそのように囲んだのか理由を聞いてみましょう。どうしてそのように囲みましたか。

生徒： 予想 1：グラフの高さが本数を表しているからです。

予想 2：となりの 5 よりも少なくみえるようにしたいからです。

先生：わかりました。ではみなさんに質問します。この 2 つのグラフはどちらの方がもっともらしく見えますか。どちらかに手を挙げてください。

生徒：（どちらかに挙手）（予想 2 の方がたくさん挙がると予想される）

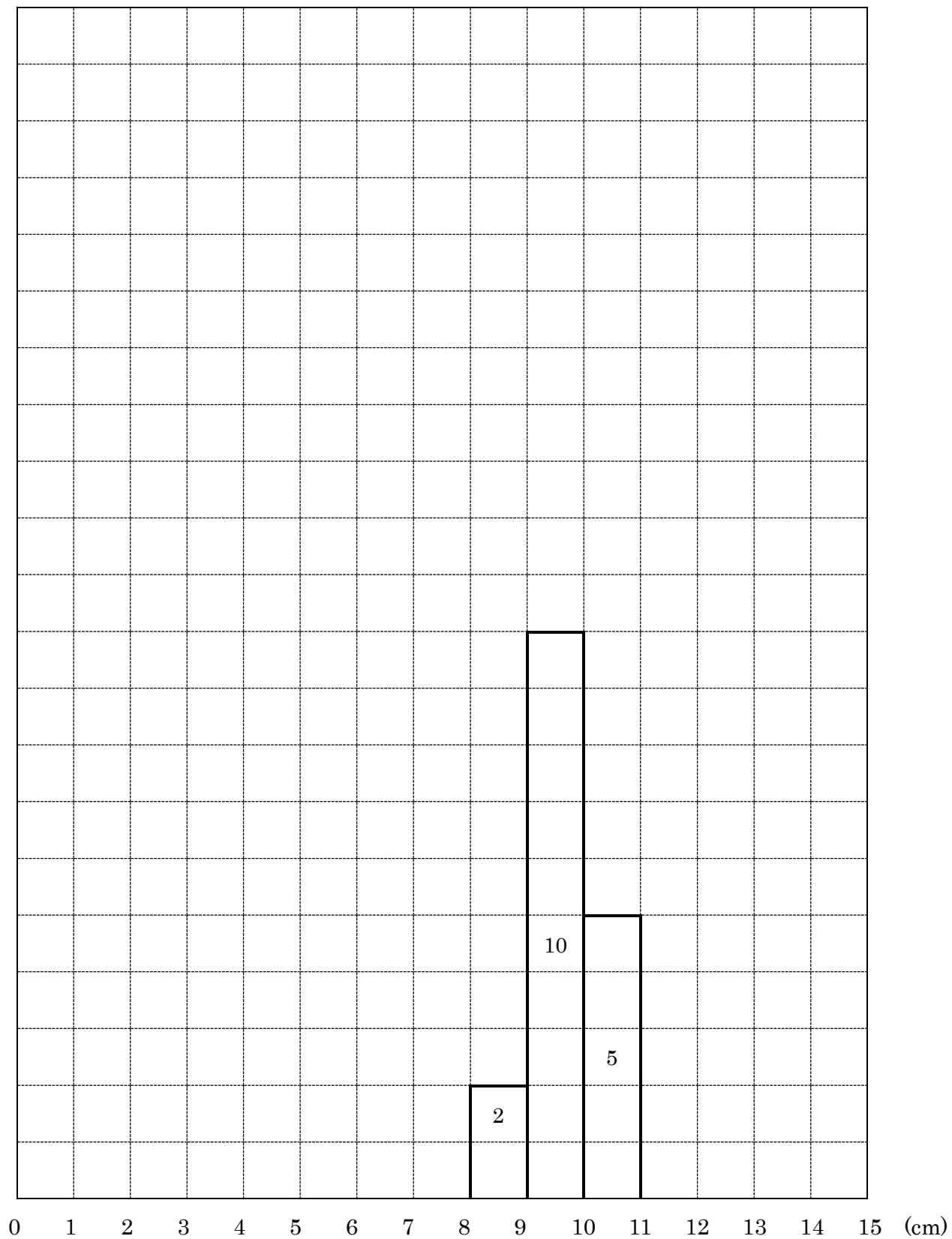
先生：はい，わかりました。

ではまず，この班のグラフ（予想 1）について考えてみましょう。

10cm 以上 11cm 未満の度数と 11cm 以上 14cm 未満の度数はどちらの方が多いですか。

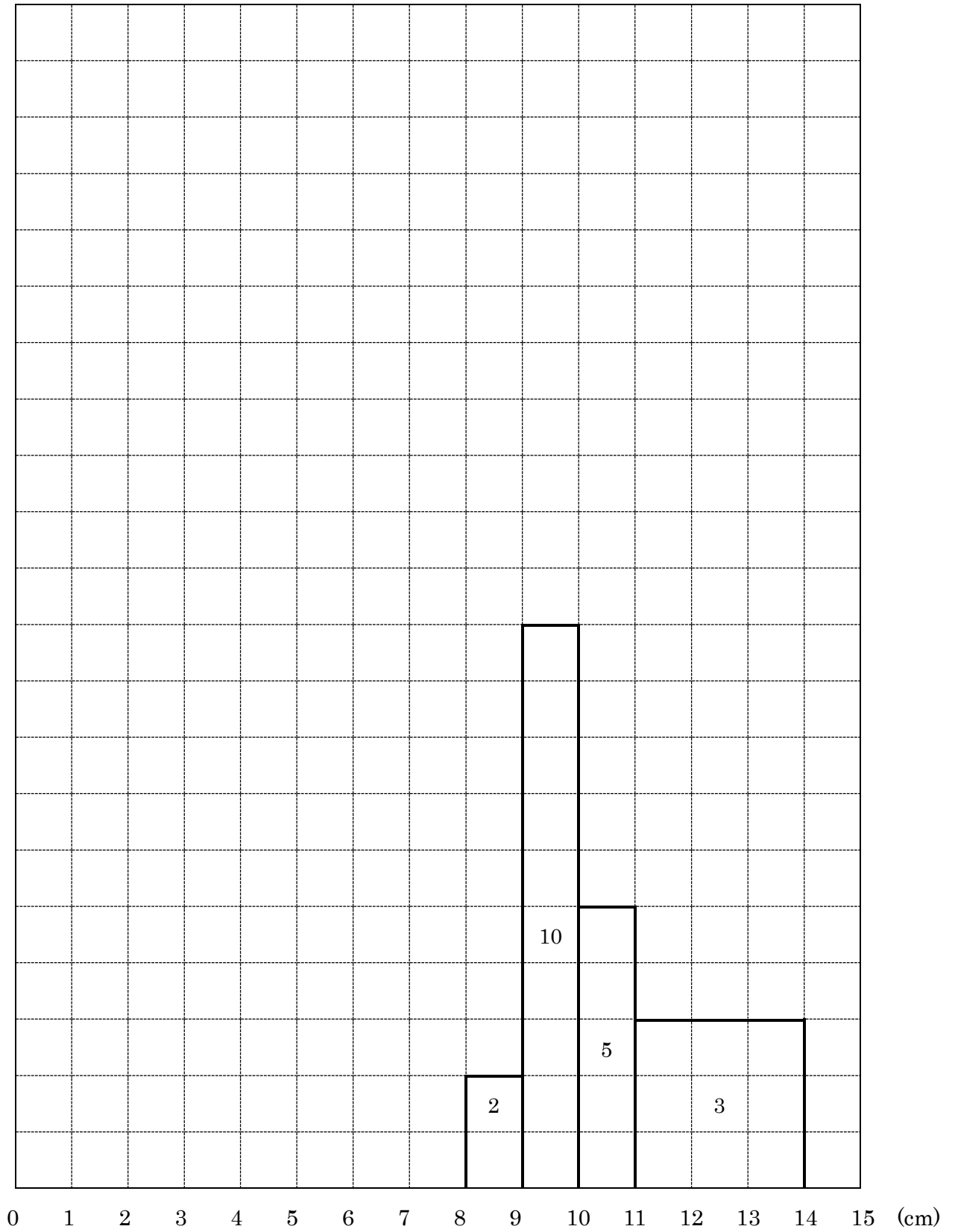
生徒：10cm 以上 11cm 未満の度数の方が多いです。

(プリント例)
10cm テープカットの記録



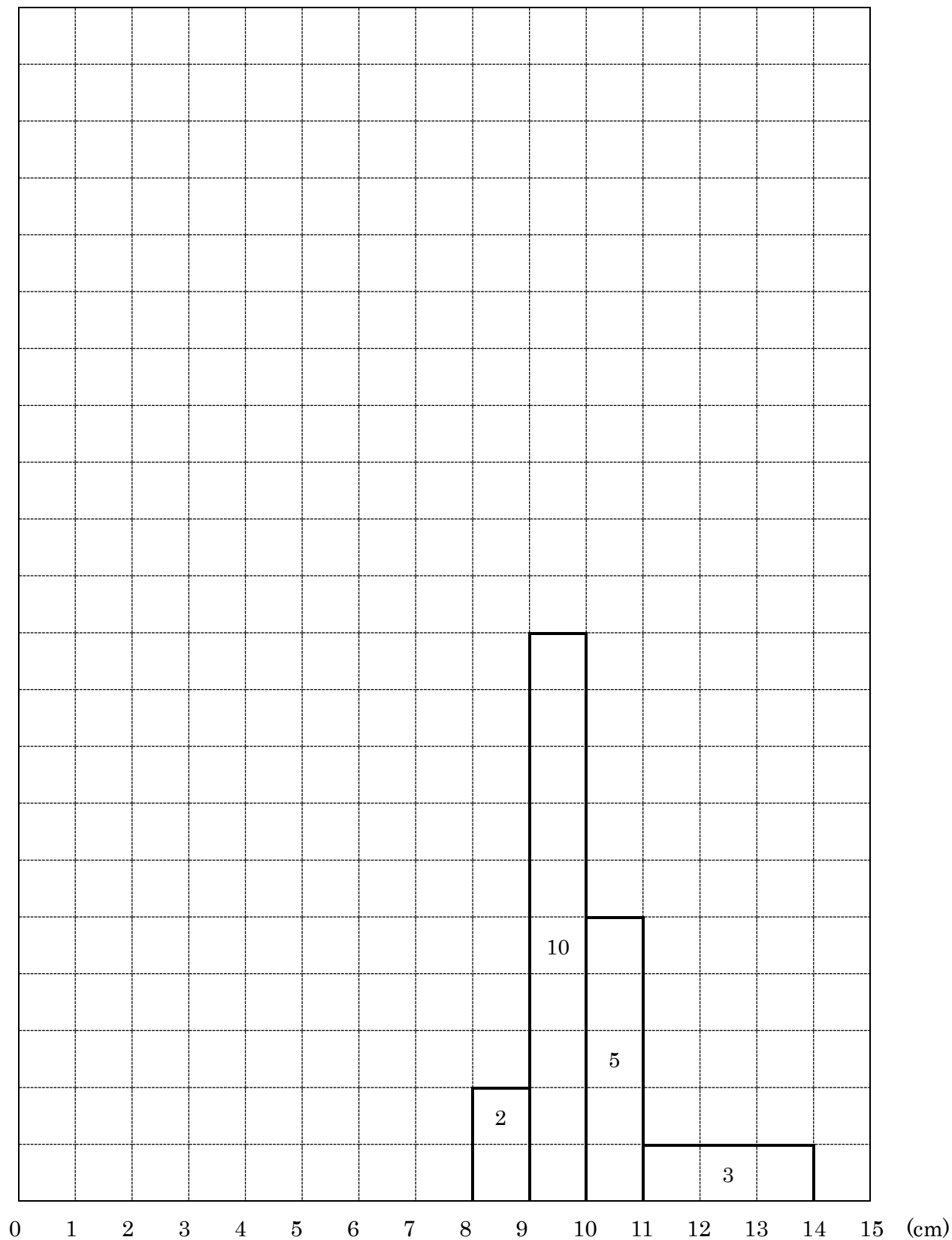
(生徒予想 1)

10cm テープカットの記録



(生徒予想 2)

10cm テープカットの記録



先生：そうですね。ではこのグラフ（予想1）のグラフを見たときに、パッと見どちらの方が多く見えますか。

生徒：11cm 以上 14cm 未満の方です。

先生：そうですね。ということは実際の量と、見た目の量がそろっていませんね。では、こっちの班（予想2）のグラフを見てみましょう。パッと見、10cm 以上 11cm 未満の度数と 11cm 以上 14cm 未満の度数はどちらの方が多く見えますか。

生徒：10cm 以上 11cm 未満の方です。

先生：そうですね。こちらのグラフなら実際の量と見た目の量が一致していますね。詳しく言えば7は7の広さ、3は3の広さにちゃんとなっていますね。ということで、正しいグラフはこちら（予想2）になります。広さは面積のことなので、面積がテープの本数を表しています。なので、テープの本数が多ければ面積は大きく、テープの本数が少なれば面積は小さくなります。このことを数学の言葉でかっこよく言うとこのグラフの長方形の面積は各階級の度数に比例しているといえます。

（黒板）

各階級の度数に比例している

↑

面積：テープの本数（本）

③ヒストグラムの長方形の高さが度数の密度を表すことを理解する。

先生：では、（グラフを示しながら）面積はテープの本数、横は長さを表していました。では、縦は何を表しているでしょうか。

生徒：???

先生：そうですね。ちょっと難しいですね。

でもみなさんは長方形の面積の求め方は知っていますよね。実はそれと同じなのです。縦の長さは長方形の面積÷横の長さで求めることができました。面積はテープの本数，横は長さを表しているの、それらに対応させるとテープの本数÷幅が縦となります。

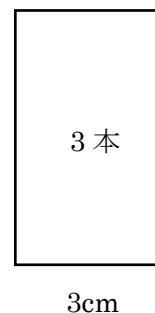
(黒板)



先生：具体的に先ほどのグラフの階級 11cm 以上 14cm 未満で考えると式はこうなります。この場合 6 本が長方形の面積，3cm が横の長さを表しています。

(黒板)

$$\begin{array}{cc} \text{面積} \div \text{横} & \\ \downarrow \quad \downarrow & \\ 3 \text{本} \div 3\text{cm} & \end{array}$$



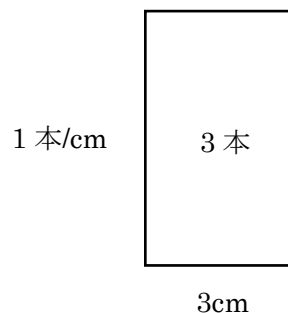
先生：この計算結果はいくつになりますか。

生徒：1です。

先生：そうですね。実は単位の計算もできます。この計算を数値と単位に分けて計算するとこうなります。

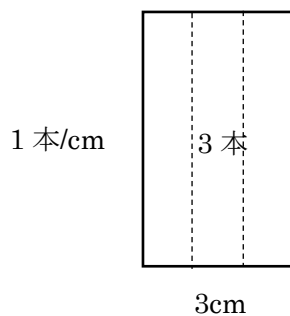
(黒板)

$$\begin{array}{ccc} \text{面積} \div \text{横} & = & \text{縦} \\ \downarrow \quad \downarrow & & \downarrow \\ 3 \text{本} \div 3\text{cm} = \left(\begin{array}{l} 3 \div 3 = \frac{3}{3} = 1 \\ \text{本} \div \text{cm} = \frac{\text{本}}{\text{cm}} = \text{本/cm} \end{array} \right) = 1 \text{本/cm} \end{array}$$



先生：この1本/cmというのは、1cmに1本ずつあるようなイメージです。
とりあえずこのように思っておいてください。

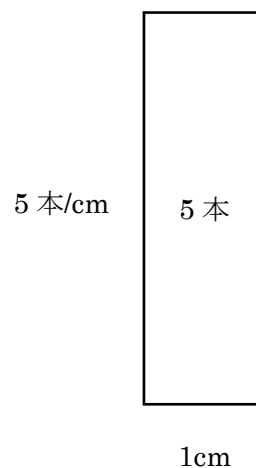
(黒板)



先生：同じように階級10cm以上11cm未満についても計算するところになりますね。

(黒板)

$$5 \text{本} \div 1\text{cm} = \left(\begin{array}{l} 5 \div 1 = 5 \\ \text{本} \div \text{cm} = \text{本/cm} \end{array} \right) = 5 \text{本/cm}$$



先生：このような計算で求められるものを「密度」といいます。例えば、電車1両に乗っている人数も密度です。たくさん人が乗っているとギュウギュウですし、全然乗っていないとスカスカです。このギュウギュウ具合やスカスカ具合、つまり混み具合を表しているのが密度です。この1本/cmは階級11cm以上14cm未満の幅のどの1cmの間にも1本つまっているという見方です。この5本/cmは階級11cm以上12cm未満の幅の1cmの間に5本つまっているという見方です。何だか想像がつかなくて納得がいかないと思います。ですが計算ではこのようになります。

(黒板)

横：幅 (cm)
縦：テープの本数の密度 (本/cm)

先生：そして、これらを一般的に数学では次のように呼びます。

(黒板)

面積：テープの本数 (本) ←度数
横：幅 (cm) ←階級の幅
縦：テープの本数の密度 (本/cm) ←**度数密度**

度数密度

度数

階級の幅

先生：というわけで、長方形の面積で表される部分のことを「度数」、横で表される部分のことを「階級の幅」、縦で表される部分のことを「度数密度」といいます。そして、このように、度数分布の形が一見してわかるように柱状のグラフで表したものを「ヒストグラム」といいます。

(黒板)

面積：テープの本数 (本) ←度数
横：幅 (cm) ←階級の幅
縦：テープの本数の密度 (本/cm) ←**度数密度**

先生：では，最後に黒板に書いたこの部分（面積図4つとヒストグラムの定義を線で囲む）をプリントの空いているところにメモしてください。

板書計画

〇/〇階級の幅を自由にとるとどんなことがおこるのだろう

度数分布表
(揭示)

$$\begin{array}{ccc} \text{面積} \div \text{横} & = & \text{縦} \\ \downarrow & & \downarrow \\ 3 \text{本} \div 3\text{cm} & = & \left(\begin{array}{l} 3 \div 3 = \frac{3}{3} = 1 \\ \text{本} \div \text{cm} = \frac{\text{本}}{\text{cm}} = \text{本/cm} \end{array} \right) \\ & & = 1 \text{本/cm} \\ 5 \text{本} \div 1\text{cm} & = & \left(\begin{array}{l} 5 \div 1 = 5 \\ \text{本} \div \text{cm} = \text{本/cm} \end{array} \right) = 5 \text{本/cm} \end{array}$$

面積図4つ

面積 : テープの本数 (本) ←度数
横 : 幅 (cm) ←階級の幅
縦 : テープの本数の密度 (本/cm) ←度数密度

(揭示)

度数分布表

階級 (cm)	度数 (本)
cm 以上 cm 未滿	
cm 以上 cm 未滿	
cm 以上 cm 未滿	
cm 以上 cm 未滿	
cm 以上 cm 未滿	
cm 以上 cm 未滿	
cm 以上 cm 未滿	
cm 以上 cm 未滿	
cm 以上 cm 未滿	

度数分布表

階級 (cm)	度数 (本)
cm 以上 cm 未滿	
cm 以上 cm 未滿	
cm 以上 cm 未滿	
cm 以上 cm 未滿	
cm 以上 cm 未滿	
cm 以上 cm 未滿	
cm 以上 cm 未滿	
cm 以上 cm 未滿	
cm 以上 cm 未滿	

第3時

目標

- ① 全体の度数が異なると直接比べることは合理的でないため、相対度数の考え方が必要になることが分かる。
- ② 2つの相対度数のヒストグラムの散らばり具合を見比べるとき、度数分布多角形を使えば全体の様子がより分かりやすくなることが分かる。

準備物

先生：プリント4, プリント5

生徒：プリント1

<シミュレーション>

先生：前はヒストグラムについて詳しく学習していききました。

今日はヒストグラムの少し違った見方について考えましょう。

最初の授業で使ったプリント1を出してください。

生徒：(プリント1を出す)

先生：(黒板にプリント1の例を貼る)

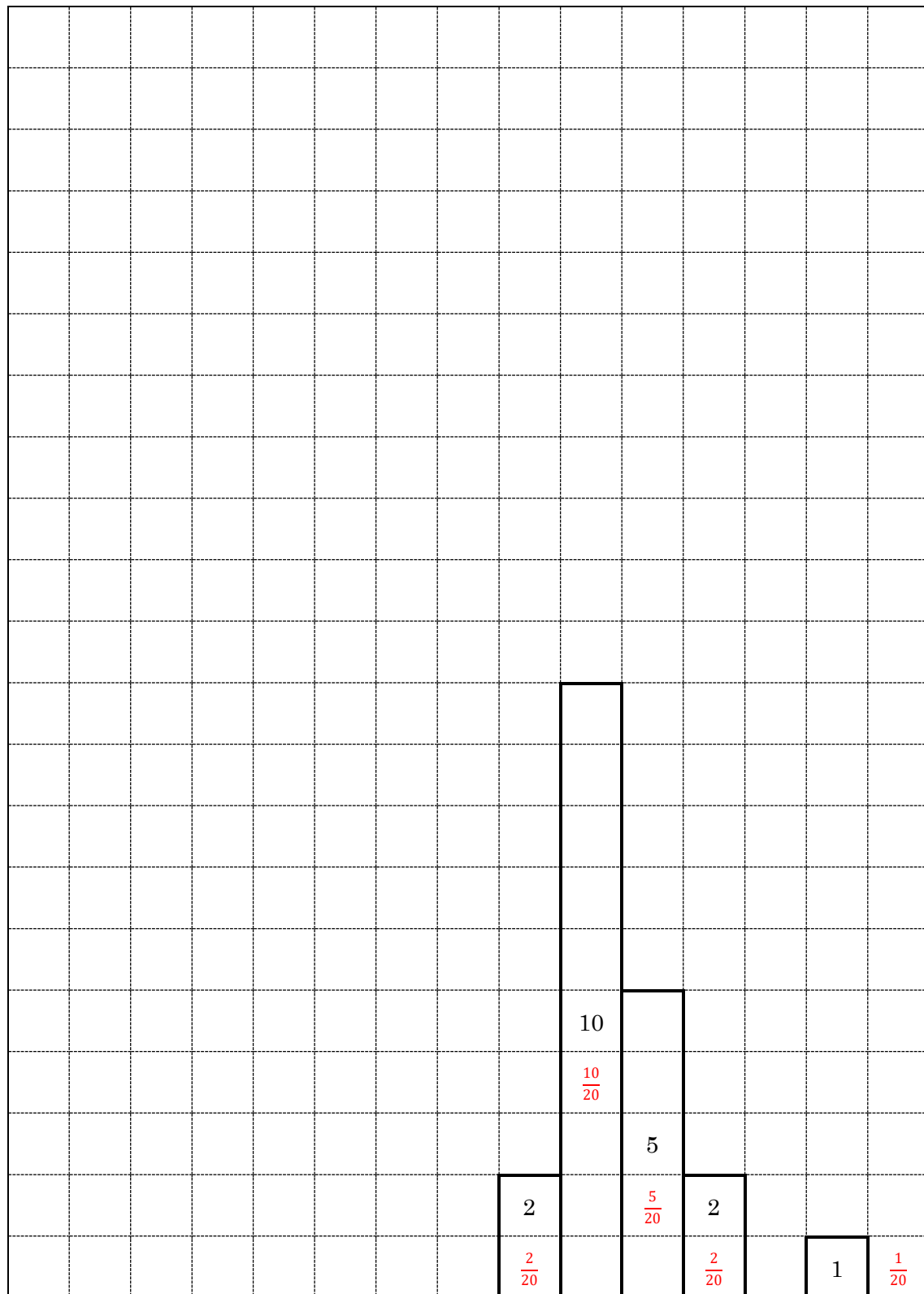
先生：みなさんにはまずこのように(黒板で示しながら)各階級の度数の下に赤で(例)

$\frac{10}{20}$ のように $\frac{\text{度数}}{20}$ となるように自分のプリントに書き込んでもらいます。

このとき約分はしないでください。では、始めてください。

生徒：(作業をしている)

(例) 10cm テープカットの記録



0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 (cm)

先生：では、例えば黒板の $\frac{10}{20}$ は何を表していると思いますか。
小学校 5 年生で習っているので思い出してみてください。

生徒：(思い出している)

先生：では聞いてみましょう。どうですか。

生徒：割合を表しています。

先生：そうですね。

この $\frac{10}{20}$ は 20 本のうちの 10 本の割合を表しています。

実は他の見方もあります。少し実演してみましょう。

ここに黒板のグラフのもととなったテープ 20 本があります。

これを袋の中に入れてよくかき混ぜてから 1 本取り出します。

このとき、このテープは(グラフを示しながら)この幅に入るかもしれないし、こ
っちの幅に入るかもしれません。

その中で、このテープが階級 9cm 以上 10cm 未満に入る入りやすさを数値で表すと
 $\frac{10}{20}$ になります。このことは 2 年生で詳しく学習します。

先生：では、なぜこのような見方が必要なのかを考えるためにまずは班の形になってくだ
さい。

①全体の度数が異なると直接比べることは合理的でないため、相対度数の考え方が必要に
なることが分かる。

生徒：(班の形になる)

先生：では今から配るプリントを見てください。(プリント 5 を配る)

生徒：(プリントを受け取る)

度数分布表

階級 (cm)	度数 (本)	
cm 以上 cm 未満		
cm 以上 cm 未満		
cm 以上 cm 未満		
cm 以上 cm 未満		
cm 以上 cm 未満		
cm 以上 cm 未満		
cm 以上 cm 未満		
cm 以上 cm 未満		
cm 以上 cm 未満		
cm 以上 cm 未満		

(例)

度数分布表

階級 (cm)	度数 (本)	
7cm 以上 8cm 未満	5	
8cm 以上 9cm 未満	8	
9cm 以上 10cm 未満	10	
10cm 以上 11cm 未満	8	
11cm 以上 12cm 未満	6	
12cm 以上 13cm 未満	0	
13cm 以上 14cm 未満	3	
cm 以上 cm 未満		
cm 以上 cm 未満		
cm 以上 cm 未満		

先生：(生徒全員が受け取ったのを確認して) これ(黒板に掲示)は先生が皆さんと同じように前回とは別に40本テープを切った記録です。それでは、20本切った記録と40本切った記録、どちらの記録がより10cmに近いところで切れているかを比べてみましょう。

度数分布表の階級9cm以上10cm未満に注目して、どちらの記録がより10cmに近いところで切れているか比べてみてください。

そして、それについて話し合ってください。

生徒：(比べて話し合っている)

先生：(タイミングを見計らって) ちょっといったん手を止めてください。

みなさんの話し合いを聞いていて少し気になったことがあるので、みんなで共有しましょう。

同じ階級9cm以上10cm未満に対して、20本切った記録、40本切った記録のどちらも10本となっています。

ということは、2つの記録は階級9cm以上10cm未満で同じ本数切れているといえます。ということは、2つの記録はどちらも同じような割合で切れているといえますか。

少し話し合ってみてください。

生徒：(話し合っている)

先生：(話し合いが落ち着いてきたところで) では聞いてみましょう。

2つの記録はどちらも同じような割合で切れているといえますか。

生徒：いえません。

先生：それはどうしてですか。

生徒：記録全体のテープの本数が違うからです。

先生：そうですね。もとの数が違っていると比べることはできませんでしたね。
20本中10本なのと、40本中10本では全体の本数が異なっています。
しかし、世の中にはこれと同じようにもとの数が異なるのに比べなければならないことがたくさんあります。
そこで、先ほどの各階級の度数の全体に対する割合を用います。
全体を1と考え、統一することで比べられるようにします。
では今から班でお互いの記録を合わせた度数分布表を作りましょう。
班で協力して、まずは合わせた度数を先程のプリントに書き込んでください。

生徒：(班で協力して作業をしている)

先生：(作業が終わったのを確認してから) では次に各階級の度数の全体に対する割合を書き込んでもらいますが、まずは黒板の例でそのやり方を確認しましょう。
初めに、この記録の度数全体はいくつですか。

生徒：40本です。

先生：そうですね。
では、9cm以上10cm未満の階級の度数の全体に対する割合を求めるとどうなりますか。

生徒： $\frac{10}{40}$ です。

先生：そうですね。このように、各階級の度数の全体に対する割合のことを「相対度数」と言います。表の右上の空欄に書き込んでください。
また相対度数は次のようにして求められます。

(黒板)

$$\text{相対度数} = \frac{\text{階級の度数}}{\text{度数の合計}}$$

先生：これもプリント5の空いているところに書き写してください。
では、班で協力して合わせた記録の相対度数を求めて、表の空いている右側の枠に書き込んでください。

生徒：(班で協力しながら作業をしている)

先生：(すべての班が作業を終えたのを確認してから)

では、相対度数のヒストグラムも作りましょう。

今からグラフのプリントを配りますが、まだ作業を始めないでグラフを見てください。(プリント 6 を配る)

さて、プリント 1 では $\frac{10}{20}$ が $\frac{1}{2}$ となりますね。

これを全体のテープの本数が 40 本の場合で考えると $\frac{20}{40}$ が $\frac{1}{2}$ となりますね。

同じ割合はそろってないと比べられないので、今配ったプリント 6 は比べられるように目盛りを調整しておきました。

では、自分たちの班の 60 本の度数分布表を基に相対度数のヒストグラムを作ってください。

生徒：(相対度数のヒストグラムを作っている)

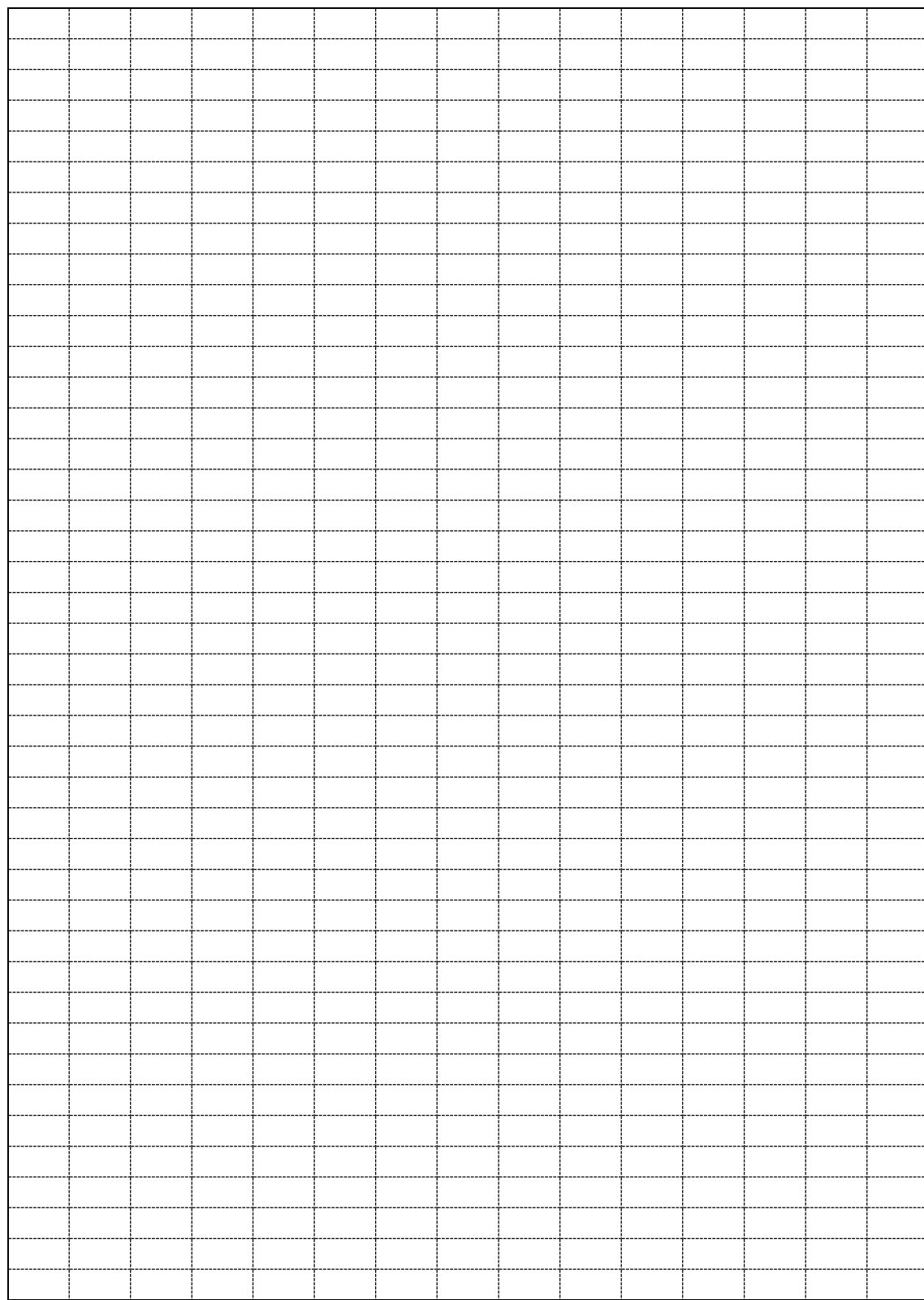
教師：(例を黒板に貼る)

(例)

度数分布表

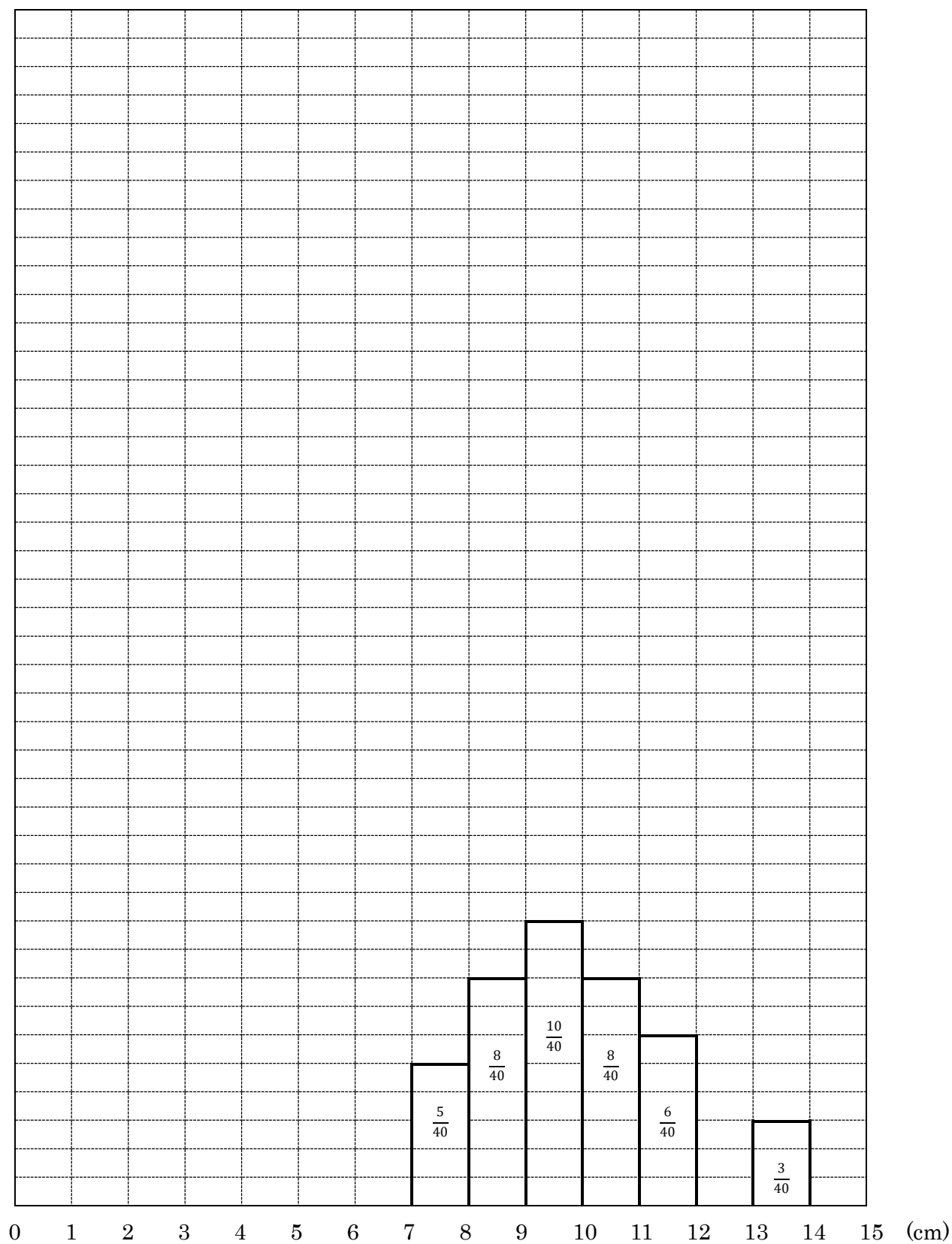
階級 (cm)	度数 (本)	相对度数
7cm 以上 8cm 未満	5	$\frac{5}{40}$
8cm 以上 9cm 未満	8	$\frac{8}{40}$
9cm 以上 10cm 未満	10	$\frac{10}{40}$
10cm 以上 11cm 未満	8	$\frac{8}{40}$
11cm 以上 12cm 未満	6	$\frac{6}{40}$
12cm 以上 13cm 未満	0	$\frac{0}{40}$
13cm 以上 14cm 未満	3	$\frac{3}{40}$
cm 以上 cm 未満		
cm 以上 cm 未満		
cm 以上 cm 未満		

相対度数のヒストグラム (40 本)



0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 (cm)

(例) 相対度数のヒストグラム (40本)



先生：(全員が相対度数のヒストグラムを完成させたのを確認してから)では、完成したプリント 6 のグラフとプリント 1 グラフを並べて比べてください。

20 本のヒストグラムと 40 本にしたヒストグラムの全体の散らばり具合を比べると同じですか。それとも違いますか。

どちらかに手を挙げてください。

生徒：(どちらかに手を挙げている)

②2 つの相対度数のヒストグラムの散らばり具合を見比べるとき、度数分布多角形を使えば全体の様子がより分かりやすくなることが分かる。

先生：はい。では、さらに比べやすくするために次のようなことをしてみましょう。

今から前でやることと同じことを 40 本の相対度数のヒストグラムに書き込んでください。(以降示しながら)

まず初めに、それぞれの階級の長方形の上の辺のちょうど真ん中に点を打ちます。

ただし、両方の端は度数 0 の階級があると考えます。(手順 1)

次に先ほどの点を線で結びます。(手順 2)

このようにしてできた折れ線グラフのことを「度数分布多角形」といいます。

プリント 6 の空いているところに写してください。

(黒板)

度数分布多角形

先生：では、今度はこの度数分布多角形を見たとき、20 本のヒストグラムと 40 本にしたヒストグラムの全体の散らばり具合を比べると同じですか。それとも違いますか。

どちらかに手を挙げてください。

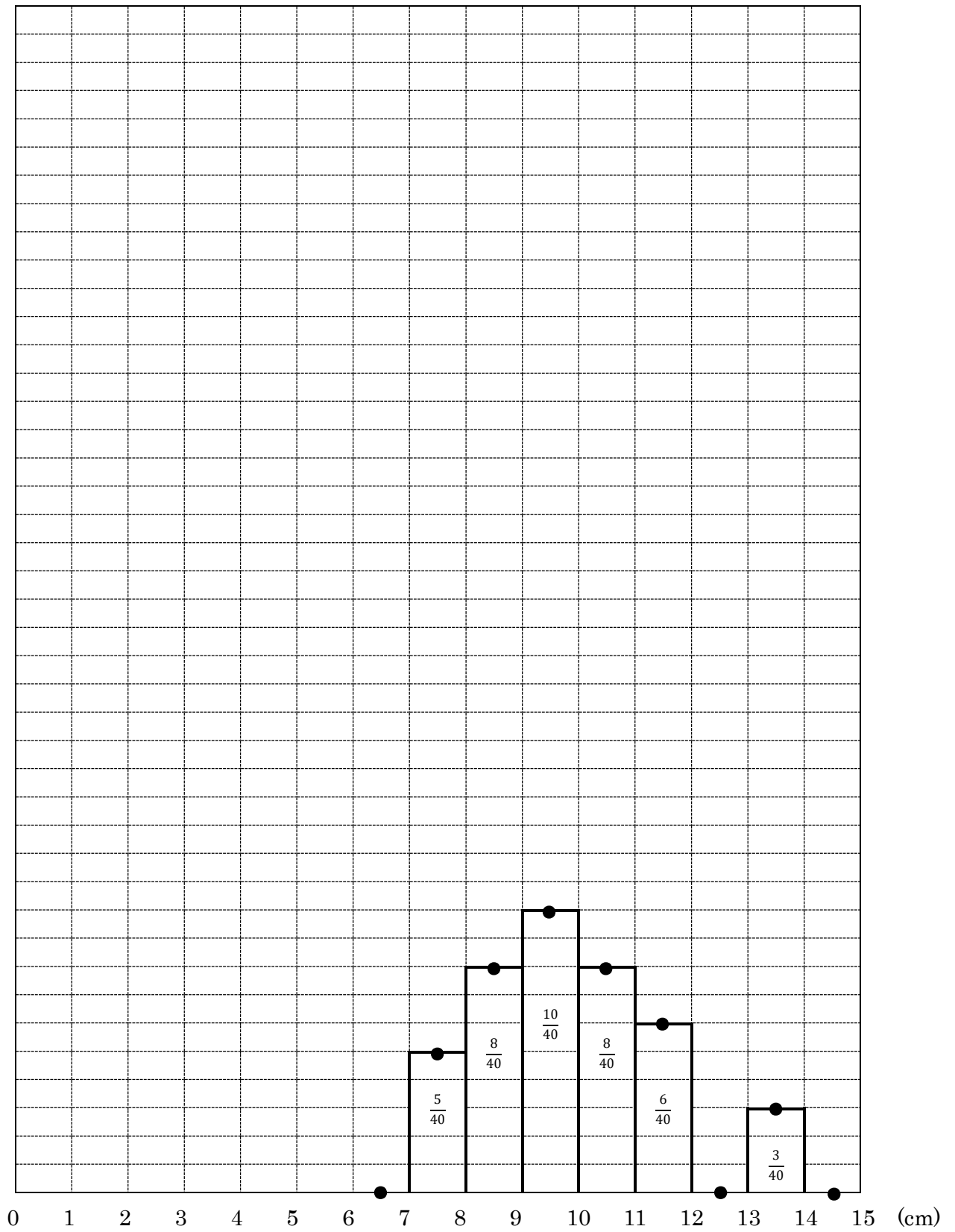
生徒：(どちらかに手を挙げている)

先生：なるほど。では、最初と違う方に手を挙げた人は何人くらいいますか。

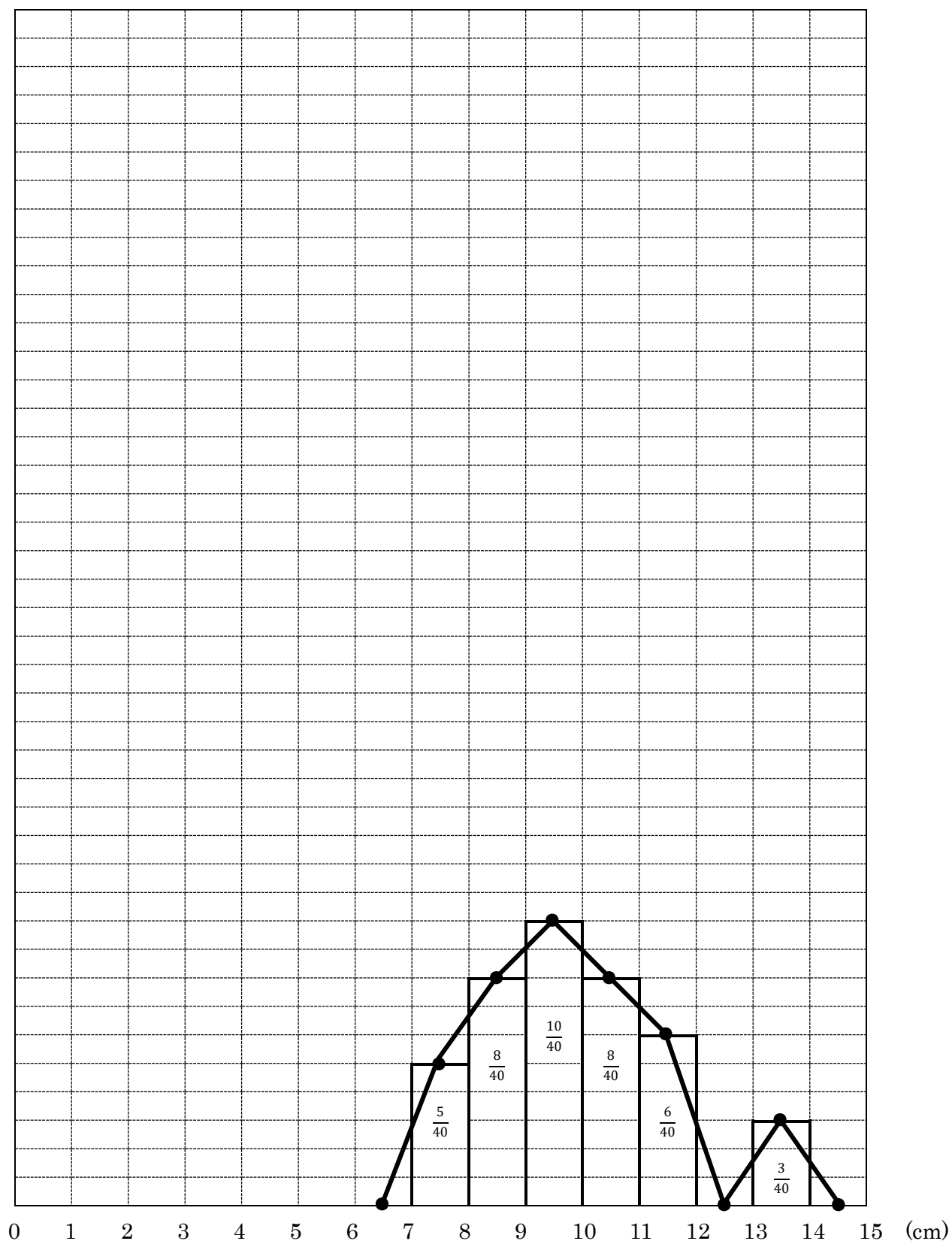
生徒：(数人が手を挙げる)

先生：そうですね。変わらなかった人もいますが、それはテープを切るときにそれぞれのクセがあるのでそのようになってもおかしくないです。このように、2つの異なる相対度数のヒストグラムの度数の散らばり具合を見るとき、度数分布多角形を使えば全体の様子が分かりやすくなります。

(手順 1) 相対度数のヒストグラム (40 本)



(手順 2) 相対度数のヒストグラム (40 本)



2. 高等学校

目標

- ・ 離散型と連続型のグラフの違いがわかる。
- ・ 度数のヒストグラムの高さは度数密度を表し，相対度数のヒストグラムの高さは確率密度を表すことを理解する。
- ・ 確率密度関数を知る。

指導計画

- (1) 離散型と連続型の確率を表すグラフを作る。
- (2) ヒストグラムの高さが確率密度であることが分かる。
- (3) 確率密度関数について分かる。

第1時

本時の目標

- ① 離散型と連続型の確率を表すグラフを作る。
- ② 連続量は真の値が分からないため，一定の幅を用いて考えなければいけないことが分かる。

準備物

先生：プリント1（生徒用），プリント2（生徒用），プリント例1～4（掲示用），
サイコロ，テープ，はさみ

生徒：定規

<シミュレーション>

先生：まず今日のテーマを書きます。

(黒板)

確率を表す2つのグラフを書こう。

先生：では1つ目のプリントを配ります。

今からサイコロも配るので1. 2. の作業をやってください。

(サイコロを配る)

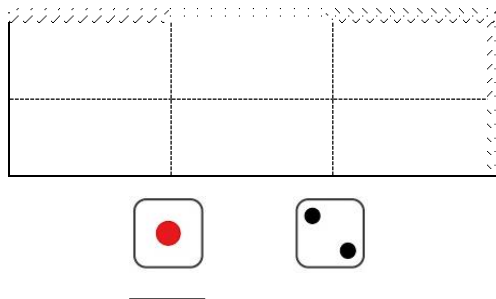
先生：次に3. の作業をしてください。

生徒：(各々作業をしている)

プリント 1

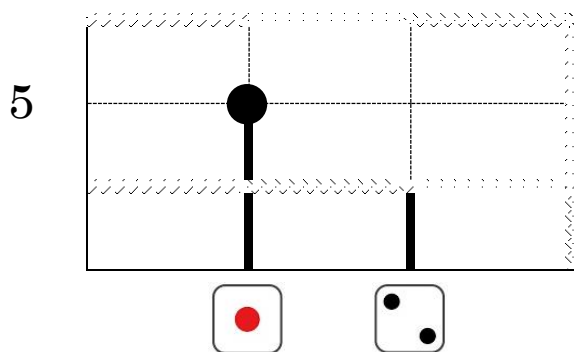
1. サイコロを 30 回振って、その結果を別紙のグラフに記入してください。

(例)  が出たら...



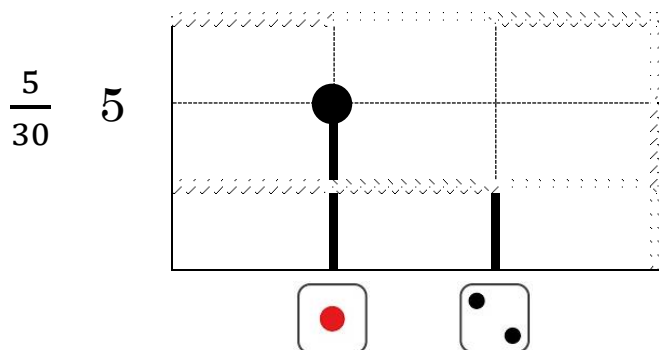
2. 点を線で結び、完成したグラフに合わせての縦軸に数値を記入してください。

(例)

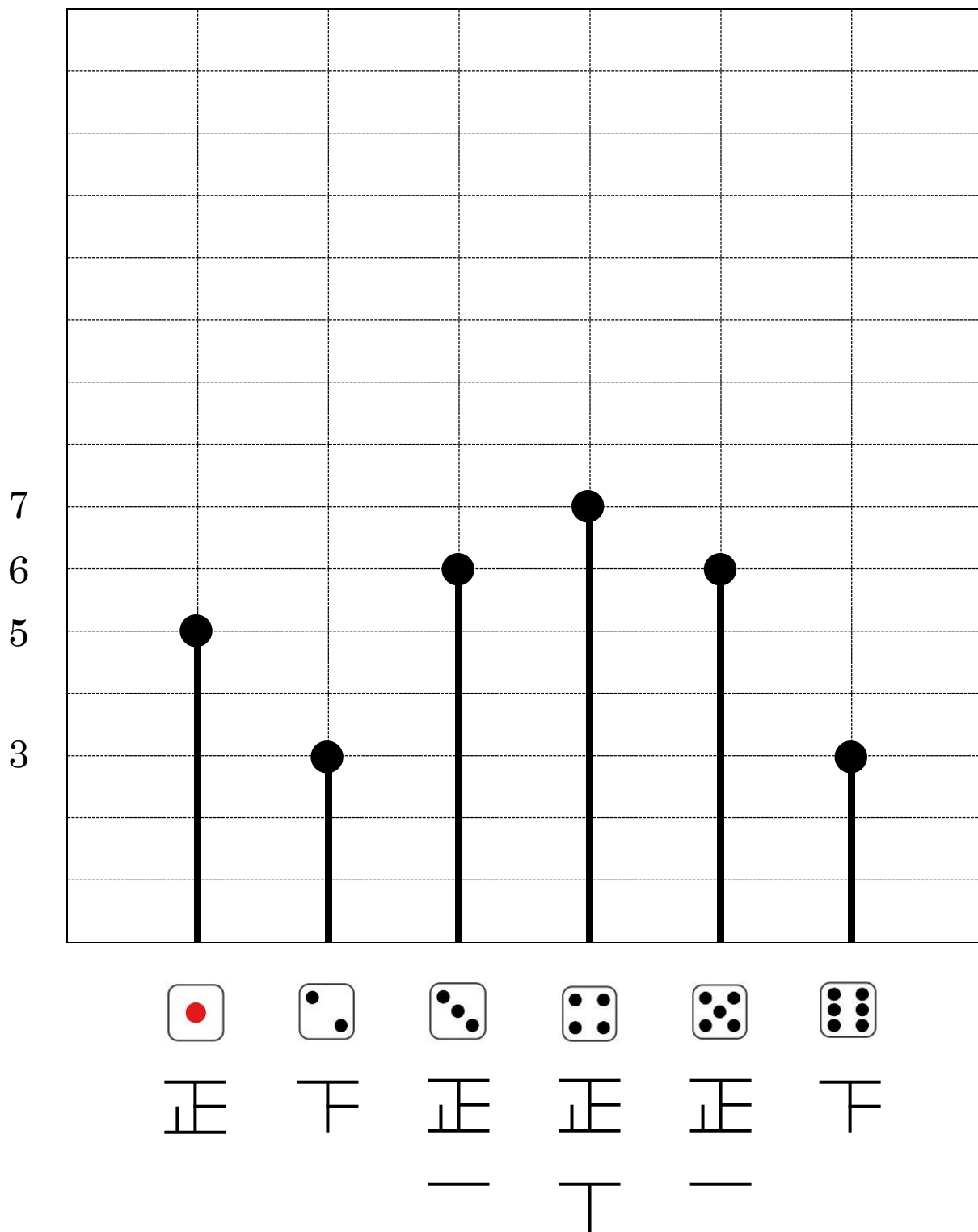


3. 2. で記入した数値の横にそれに対応する確率（相対度数）を記入してください。

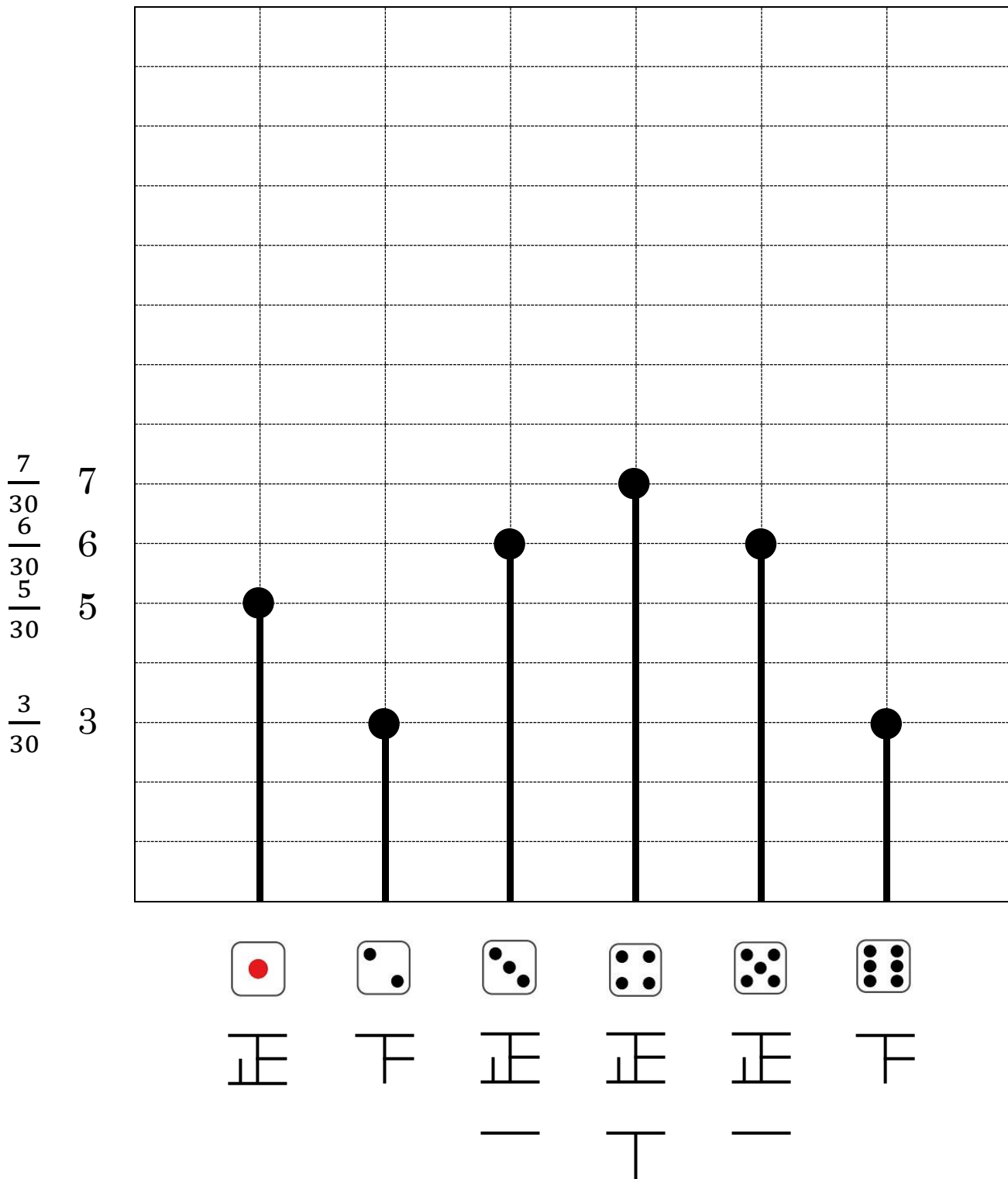
(例)



(例 1) サイコロの出た目の記録



(例 2) サイコロの出た目の記録



先生：これでもう1つ目のグラフが完成しました。

では質問します。各目が出る確率はグラフのどこに表されていますか。

生徒：（棒の）高さです。

先生：そうですね。このグラフでは高さが確率を表しています。

（黒板）

棒グラフ：確率 → 高さ

先生：では、2つ目のプリントとテープを配ります。まずは、3. までの作業をやってください。

生徒：（静かに作業をしている）

プリント 2

5. 以下の長さは 10cm あります。よく見て下さい。

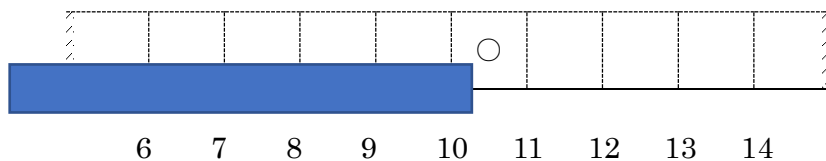


6. よく見たら、これとだいたい同じ長さのテープになるように 1 本切ってください。
7. 切り終わったら、定規を使って何 cm だったか測り、下に記入してください。

_____ cm

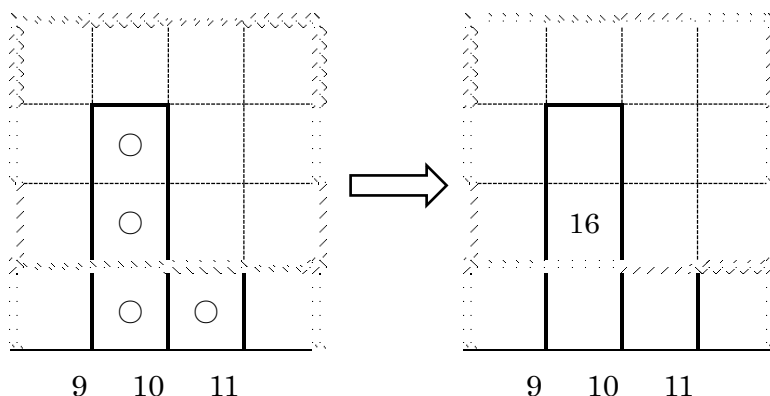
8. 先ほどのテープも含めて、30 本同じように切ってください。
9. 切り終わったら、別紙のグラフの横軸にテープをあて、グラフ上に記録をとってください。(鉛筆で○をしてください)

(例)



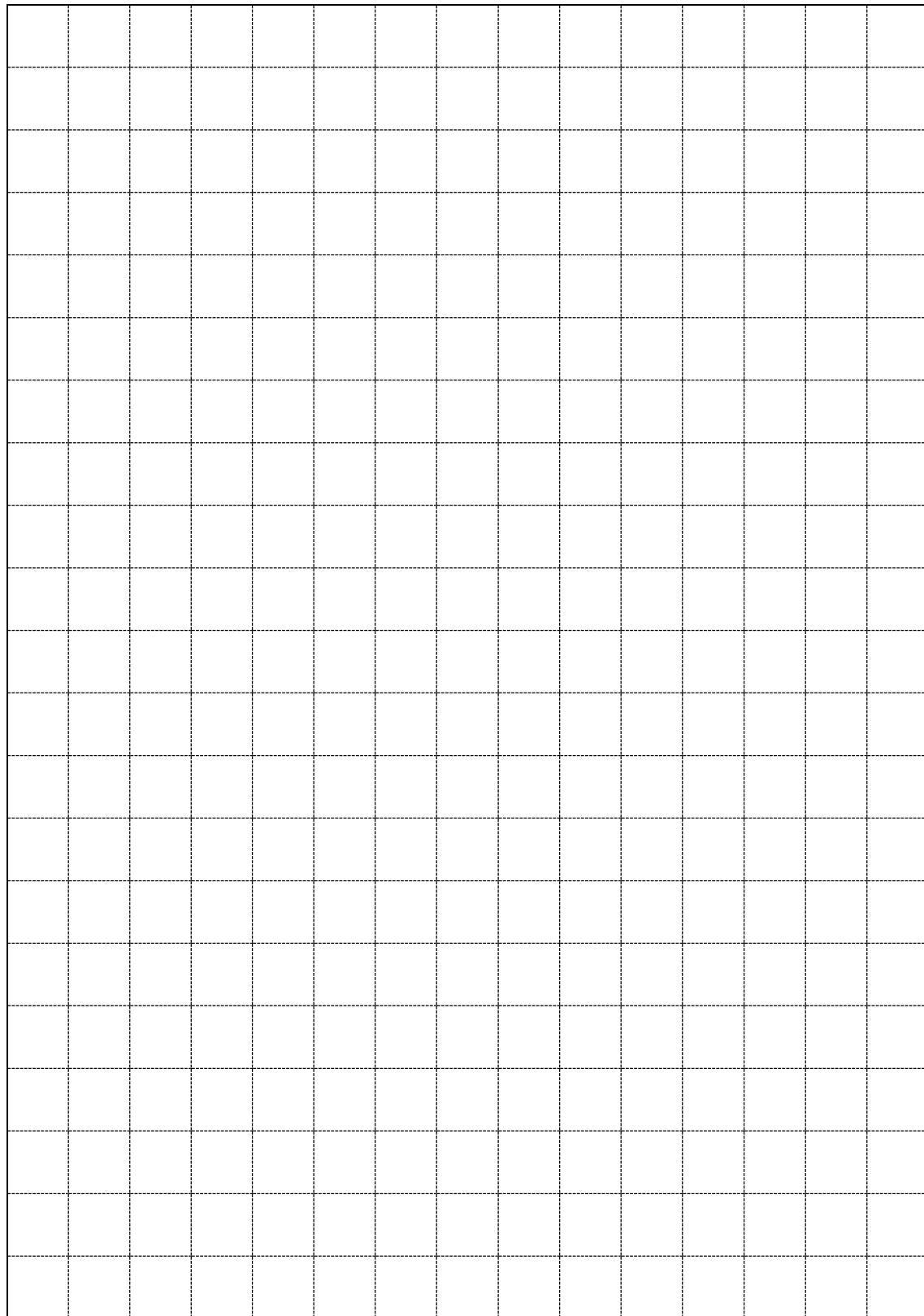
10. ○をつけたところをマス目にそってボールペンで囲み、囲まれた部分の○を個数に置き換えましょう。(○は消してください)

(例)



11. 書き込んだ個数それぞれの下にその確率 (相対度数) を書き込んでください。
(スペースの都合で下が無理な場合は上でも可)

10cm テープカットの記録



0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 (cm)

先生：(作業を終えたのを確認してから) では何人かに結果を聞いてみましょう。
(生徒を数人していして) 何 cm でしたか。

生徒：(例) 10.3cm になりました。

先生：おっ、おいしいですね。
でもそれって本当に 10.3cm でしたか。

生徒：???

先生：もちろん疑っているわけではないですよ。
ただ、本当に 10.3cm ぴったりだったのか気になっただけです。

生徒：ぴったりではないです。

先生：では、正確には何 cm でしたか。

生徒：定規では正確に測れません。

先生：そうです。そこが重要なのです。もっと厳密に言えば「正確に測れない」ということが重要なのです。ではなぜ正確に測れないのでしょうか。話し合ってください。

生徒：(話し合っている)

先生：では話し合ったことを聞かせてください。

生徒：目ではぴったりに見えても、見えにくいらい細かい部分でぴったりじゃないかもしれないからです。

先生：そうですね。
長さは連続なので単位を用いて正確に測ることはできません。だから、私たちは「近似」というものを用いておおよその長さを考えるのですね。
では、(10.3cm と答えた生徒を指名して) どうやって 10.3cm と決めたのですか。

生徒：(例) 10.3cm が一番近かったからです。

先生：なるほど。つまり詳しく言うと，〇〇さんは 10.25cm 以上 10.35cm 未満という範囲を考えて，そこに入っているので 10.3cm と考えてくれたのですね。

先生：ということは，ここまでの流れを考えると，長さは正確に測れないけど，ある幅の間に入っているかは判断することはできるということですね。ということで，そのことを利用して次の作業に移りましょう。今から 4. と 5. の作業をしてもらいます。定規は 0.1cm で区切られていますが，大体の傾向を知りたいので，今回は 1cm で区切って考えます。そうすると，(実際に示しながら) 10.3cm は 10cm と 11cm の間にあると考えます。

生徒：(協力しながら作業している)

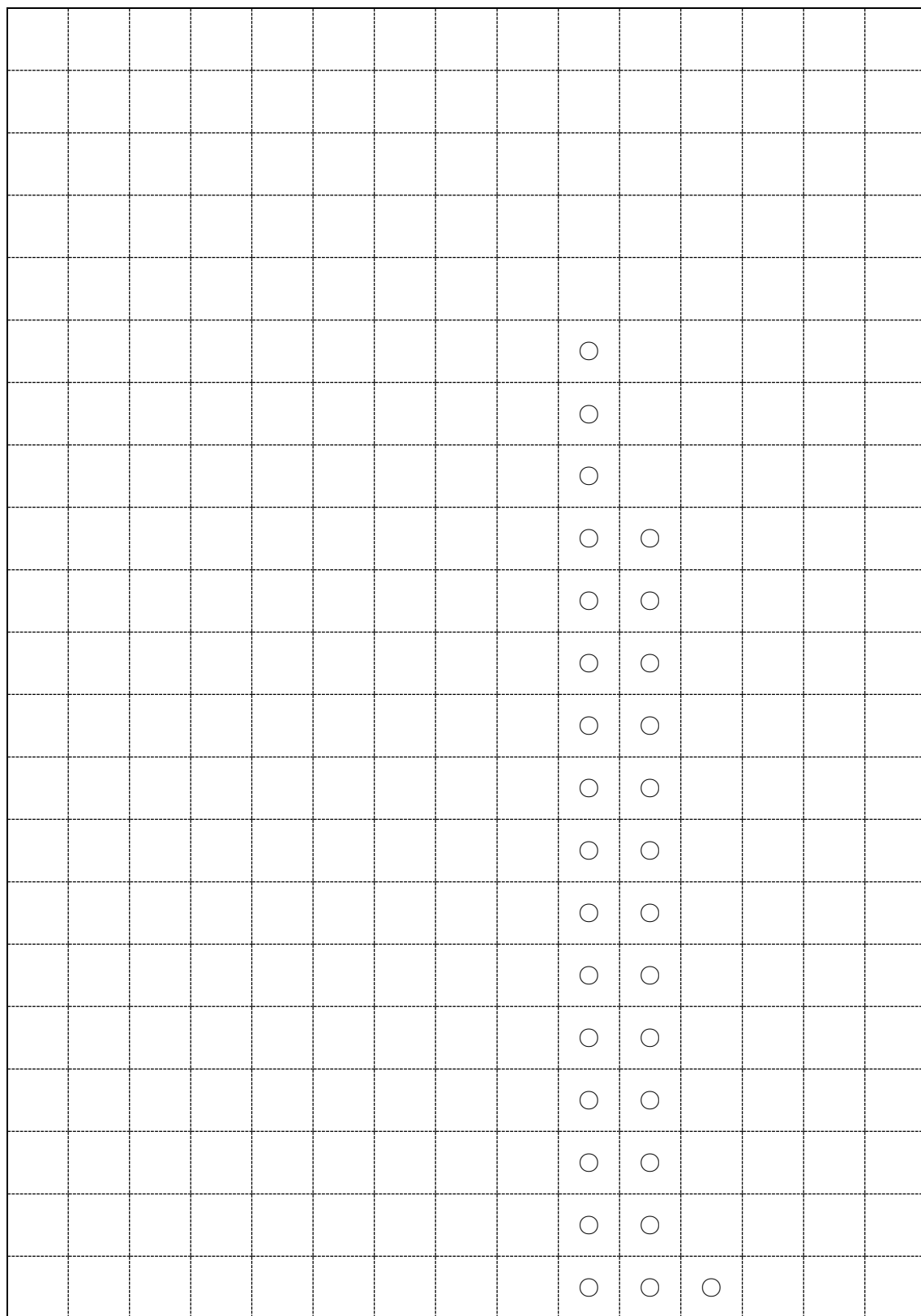
先生：終わったら 6. 7. の作業にとりかかってください。

生徒：(各々作業をしている)

先生：(適宜生徒に声をかけながら机間巡視)

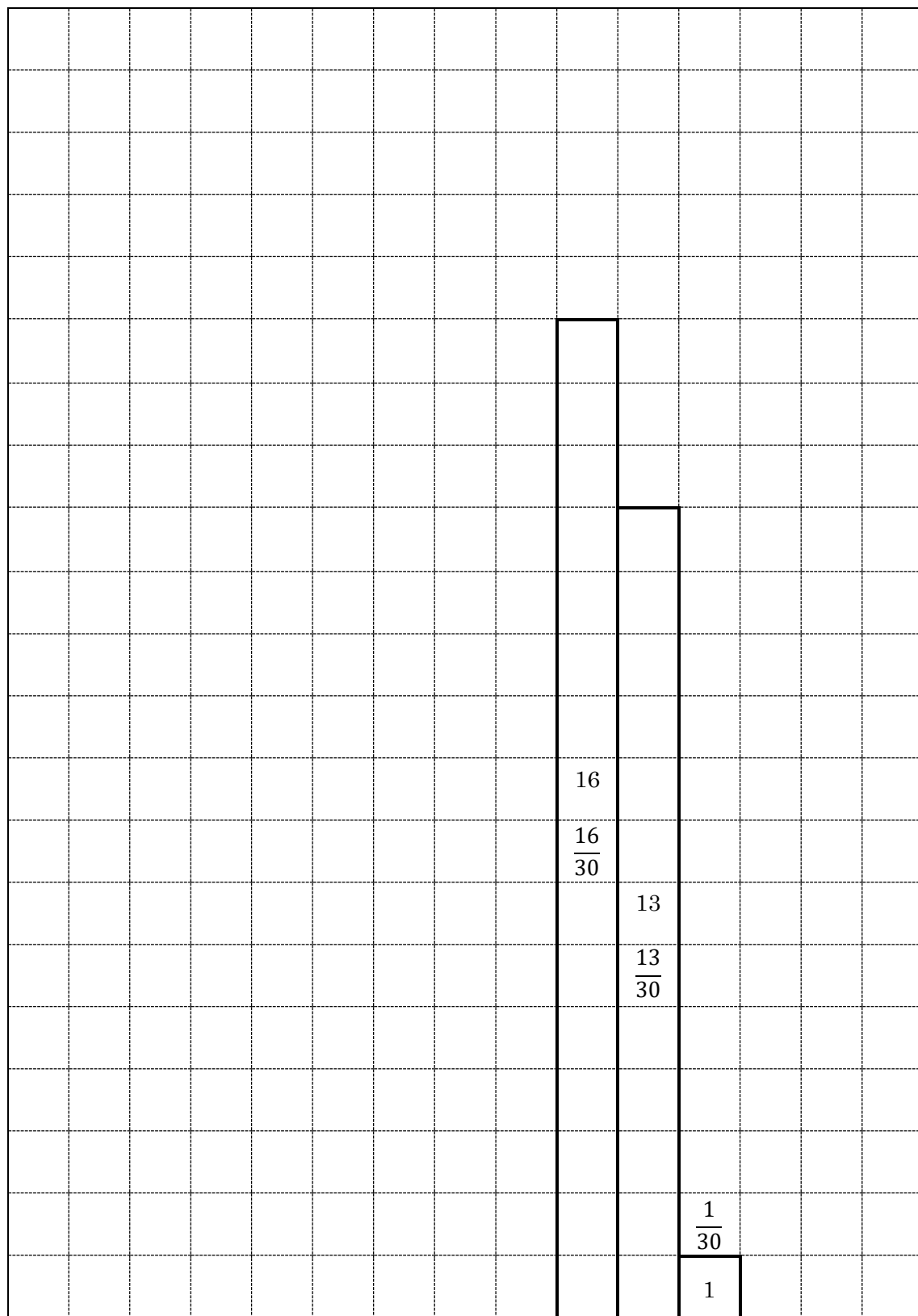
先生：これで 2 つ目のグラフができあがりました。

(例 3) 10cm テープカットの記録



0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 (cm)

(例 4) 10cm テープカットの記録



0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 (cm)

(黒板)

棒グラフ : 高さ (度数) → 高さ (相対度数) … 確率
ヒストグラム : 長方形の面積 (度数) → 長方形の面積 (相対度数)

先生 : ということは, 2 つ目のグラフでは確率はどこに表れていますか。

生徒 : 長方形の面積です。

先生 : そうですね。2 つ目のグラフでは確率は長方形の面積として表されています。

(黒板)

棒グラフ : 高さ (度数) → 高さ (相対度数) … 確率
ヒストグラム : 長方形の面積 (度数) → 長方形の面積 (相対度数) … 確率

先生 : さて, これらのことから 2 つのグラフにおける確率の表し方に違いがあることがわかりました。では, なぜ同じ「確率」にもかかわらず表し方に違いが生じたのでしょうか。1 時間目にそのことについてふれていましたが, 少し話し合ってみてください。

生徒 : (話し合っている)

先生 : (机間巡視で話し合いの進行具合を確認)

先生 : (話し合いが落ち着いてきたら) では, 話し合ったことを聞かせてください。

生徒 : (模範解答) 棒グラフでは目が 2.5 のような値にはならず, 2 や 3 のようにはっきりと決まるので幅を考える必要がなかったのに対して, ヒストグラムでは, 長さは正確に測ることができなかつたのでそれが入る幅を考えなければならず, 高さで確率を表すことができなかったからだと思います。

先生 : その通りです。大事なのは, 棒グラフははっきりと値が分かるけど, ヒストグラムははっきりとした値が分からないということですね。

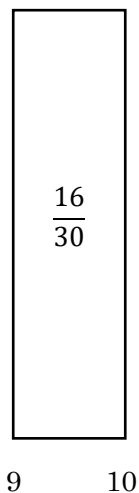
(黒板)

棒グラフ : はっきりと値が分かる → 高さ (度数) → 高さ (相対度数) … 確率
ヒストグラム : はっきりと値が分からない → 長方形の面積 (度数) → 長方形の面積 (相対度数) … 確率

先生：では、今からヒストグラムについて深く考えましょう。

そのために、プリントの例の 9cm 以上 10cm 未満の長方形について考えます。

(黒板)



先生：この長方形の横は何を表していますか。

生徒：長さです。

先生：そうですね。では面積は何を表していますか。

生徒：確率です。

先生：その通りです。では縦はいったい何を表していると思いますか。

生徒：???

先生：それを解決するのに小学校のことを思い出してください。「〇〇あたりの××」という表現に聞き覚えはありませんか。例えば、「1km²あたりの人口」という表現を小学校で習ったと思います。この「1km²あたりの人数」のことを何といいましたか。

生徒：人口密度です。

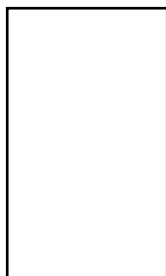
先生：そうでしたね。このように「〇〇あたりの××」というのは××の密度、つまり××のこみ具合のことを指します。

先生：ではこれを式で表すとどうなりますか。

生徒：人口密度×広さ＝総人口です。（人口密度＝総人口÷広さ）

先生：そうですね。

（黒板）



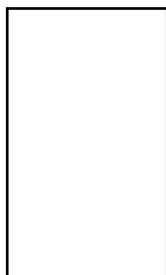
$$(\text{人口密度}) \times (\text{広さ}) = (\text{総人口})$$

先生：ではこの式を，人口密度を求める式にするとどうなりますか。

生徒：人口密度＝総人口÷広さです。

先生：その通りです。

（黒板）



$$\begin{aligned} (\text{人口密度}) \times (\text{広さ}) &= (\text{総人口}) \\ (\text{人口密度}) &= (\text{総人口}) \div (\text{広さ}) \end{aligned}$$

先生：さて，黒板に書いた長方形の縦，横，面積はいったい何を表していると思いますか。
相談してください

生徒：???

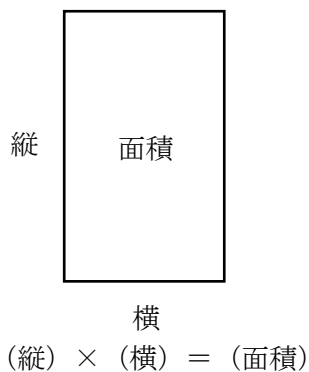
先生：意見が出ないのでヒントを出します。

では長方形の面積はどのようにして求めましたか。

生徒：縦×横です。

先生：そうですね。

(黒板)

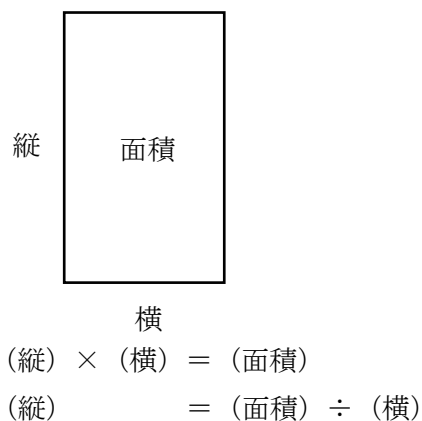


先生：縦の長さを求める式に直すとどうなりますか。

生徒：縦＝面積÷横です。

先生：いいですね。

(黒板)



先生：さあ、これで見えてきたと思います。長方形の縦、横、面積は何を表していますか。

生徒：縦が人口密度で、横が広さ、面積が総人口を表しています。

先生：その通りです。

(黒板)



$$\begin{aligned}(\text{人口密度}) \times (\text{広さ}) &= (\text{総人口}) \\ (\text{人口密度}) &= (\text{総人口}) \div (\text{広さ})\end{aligned}$$

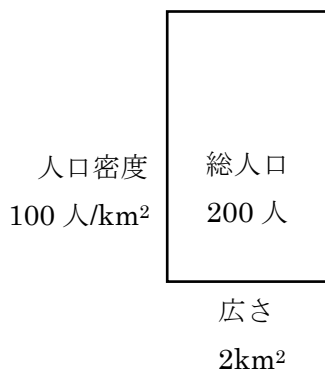
先生：では、これを具体的な例で考えてみましょう。

総人口が 200 人，広さが 2km^2 のとき人口密度を求めるとどのような計算をしますか。単位も含めて教えてください。

生徒： $200 \text{人} \div 2\text{km}^2 = 100 \text{人}/\text{km}^2$ です。

先生：そうですね。

(黒板)



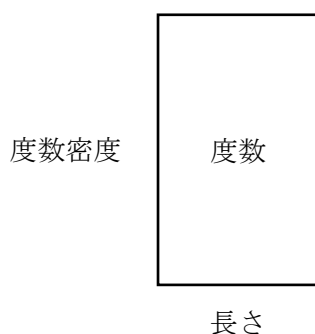
$$\begin{aligned}200 \text{人} \div 2\text{km}^2 \\ = 100 \text{人}/\text{km}^2\end{aligned}$$

先生：では話をもどして、ヒストグラムの長方形の高さ(縦の長さ)は何を表していますか。

生徒：(度数) 密度です。

先生：つまり長方形の縦の長さは密度を表し、横が範囲を表し、面積が度数を表しています。
ここで重要なのは、密度（つまり具合）が高さ（縦の長さ）によって表されているということです。例えば、総人口 400 人、広さが 4km^2 のときも、総人口 100 人、広さが 1km^2 のときも、人口密度は $100\text{人}/\text{km}^2$ と変わらないので、長方形の高さ（縦の長さ）は同じになります。（黒板に示しながら説明する）
このように、かけ算は長方形を使って表すことが数学ではたびたびあります。

（黒板）



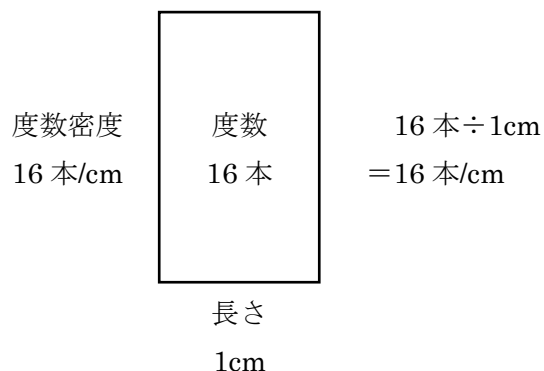
先生：これについても、プリント 2 の例を使って具体的に考えていきましょう。
 9cm 以上 10cm 未満の間に入ったテープが 16 本のとき、度数密度はどのように求めますか。単位も含めて教えてください。

生徒： $16\text{本} \div 1\text{cm} = 16\text{本}/\text{cm}$ です。

先生：はい、その通りですね。

$16\text{本}/\text{cm}$ は 1cm あたりに 16 本のみ具合を表しているので、 1cm の中に 16 本つまっているということです。ここでも重要なのは、この長方形の高さは密度を表しているということです。例えば、 2cm の間に 32 本のテープがあるのも、 0.5cm の間に 8 本のテープがあるのも、密度を考えればどれも $16\text{本}/\text{cm}$ であり、長方形の高さが同じになるということです。（黒板に示しながら説明する）

(黒板)



先生：さてそれでは、確率を表すヒストグラムの場合、度数ヒストグラムに対応させると、長方形の縦、横、面積はどうなりますか。

生徒：度数密度が確率密度で、横は変わらず長さで、度数は確率になります。

先生：その通りです。

(黒板)



先生：では、これも先ほどの例で具体的に考えましょう。確率密度を求める式はどうなりますか。

生徒： $\frac{16}{30} \div 1\text{cm} = \frac{16}{30} ? /\text{cm}$

先生：そうですね。確率の単位ってよくわかりませんよね。

ではこの $\frac{16}{30}$ という確率はどのようにして求めましたか。単位も教えてください。

生徒：16本 ÷ 30本です。

先生：そうでしたね。実はこの計算では数値と単位がそれぞれ計算されています。

(黒板)

$$16 \text{ 本} \div 30 \text{ 本} = \left(\frac{16 \div 30}{\text{本} \div \text{本}} \right)$$

先生：そして単位の「本」を文字と同じように考えると約分されて1と考えることができます。

(黒板)

$$16 \text{ 本} \div 30 \text{ 本} = \left(\frac{16 \div 30}{\text{本} \div \text{本}} \right) = \frac{16}{30} (1)$$

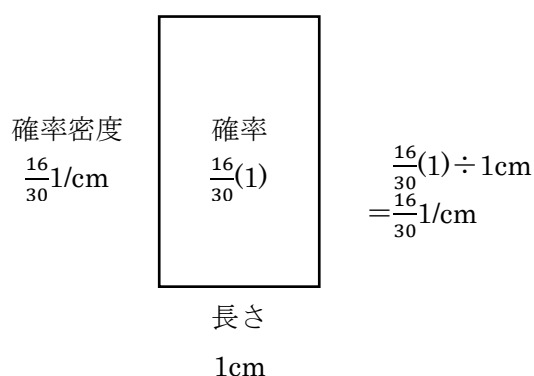
先生：このように確率の単位を「1」と考えると先ほどの確率密度を求める式はどうなりますか。

生徒： $\frac{16}{30}(1) \div 1\text{cm} = \frac{16}{30}1/\text{cm}$ です。

先生：その通りです。

確率はすべて足すと1でそのうち $\frac{16}{30}$ がこの1cmの間につまっているということです。もっといえば、さっきのテープの中からランダムに1つ選んだものが9cm以上10cm未満である確率が $\frac{16}{30}$ ということです。

(黒板)



先生：というわけで、確率を表すヒストグラムにおいて長方形の高さは確率密度を表していることが分かりました。

(黒板)

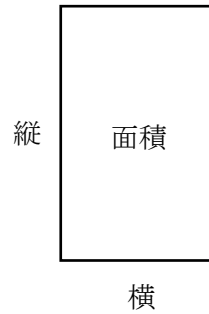
棒グラフ : はっきりと値が分かる → 高さ (度数) → 高さ (相対度数) … 確率

ヒストグラム : はっきりと値が分からない → 長方形の面積 (度数) → 長方形の面積 (相対度数) … 確率

高さ (度数密度) → 高さ (相対度数密度) … 確率密度

2つのグラフの比較

棒グラフ : はっきりと値が分かる →高さ (度数) →高さ (相対度数) …確率
 ヒストグラム : はっきりと値が分からない →長方形の面積 (度数) →長方形の面積 (相対度数) …確率
 高さ (度数密度) →高さ (相対度数密度) …確率密度



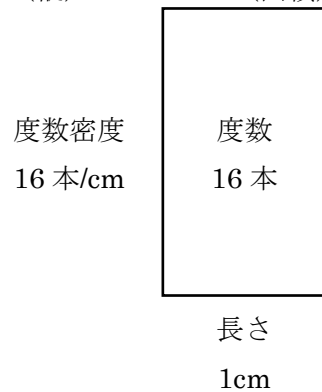
人口密度
100 人/km²



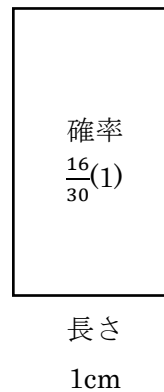
$$200 \text{ 人} \div 2\text{km}^2 = 100 \text{ 人/km}^2$$

$$\begin{aligned} (\text{縦}) \times (\text{横}) &= (\text{面積}) \\ (\text{縦}) &= (\text{面積}) \div (\text{横}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\text{人口密度}) \times (\text{広さ}) &= (\text{総人口}) \\ (\text{人口密度}) &= (\text{総人口}) \div (\text{広さ}) \end{aligned}$$



$$16 \text{ 本} \div 1\text{cm} = 16 \text{ 本/cm}$$



$$\frac{16}{30}(1) \div 1\text{cm} = \frac{16}{30}1/\text{cm}$$

(例 2)

(例 4)

第3時

目標

- ① 度数を多くすれば階級の幅を小さくしてより詳しい分布が分かることを知る。
- ② ヒストグラムの階級の幅を狭くしていくとグラフの概形が滑らかになり，確率密度曲線になることが分かる。
- ③ 確率密度関数を知る。

準備物

先生：グラフ4種類，感想用紙（生徒用）

<シミュレーション>

先生：1回目の授業で皆さんがやってくれたテープカットの記録を合わせたものを度数のヒストグラムとしてまとめてきたので，まずはそれを見てみましょう。

（こちらでまとめたグラフを示す）

先生：では，このグラフと自分の30本のヒストグラムと比較して気づいたことを話し合ってください。

生徒：（話し合っている）

先生：では，話し合ったことを聞かせてください。

生徒：（予測される生徒の反応）

- ・9cm から 11cm あたりに集中していて，そこから離れるにつれて少なくなっています。
- ・グラフが全体的に高くなっています。
- ・階級が多くなっています。

先生：そうですね。全体の度数が多くなったのでヒストグラム全体が高くなりました。また，階級も増えました。すると，（グラフ上に示しながら）だいたいこのような山の形をしていますね。

先生：では次に，これの相対度数のヒストグラムについて見てみましょう。
（相対度数ヒストグラムを示す）

先生：全体の数量は200本でした。なので、(グラフを示しながら)例えばこの長方形の確率は $\frac{n}{200}$ になります。(すべての長方形に $\frac{n}{200}$ を書き込む)

先生：では、質問します。このグラフの各長方形の確率を全て合計するといくつになりますか。

生徒：1になります。

先生：そうですね。確率の合計は1になるので、この場合についても1になります。

先生：次に、このヒストグラムの高さに注目してください。例えば、この長方形の高さは $\frac{n}{200} \div 1\text{cm} = \frac{n}{200}(1/\text{cm})$ です。各長方形の高さは1より大きくなることはありますか。分からない人は高さの単位に注目してください。さあ、どうですか。

生徒：1より大きくなることはありません。

先生：その通りです。各長方形の確率は1以下なので確率密度も1より小さくなります。

先生：このように度数を多くすれば、度数のヒストグラムの高さは高くなりますが、相対度数のヒストグラムの高さは1より小さくなるのが分かりました。

先生：さて、これで大体の傾向は分かったのですが、データが多いのもう少し細かい傾向を知るために、階級の幅を**0.5cm**にしてまとめたグラフも用意しました。(グラフを示す)

先生：先ほどのグラフと比べてどうですか。もう一度話し合ってください

生徒：(考えながら話し合っている)

先生：では、気づいたことを教えてください。

生徒：さっきよりもさらに山の形に近づいたと思います。

先生：そうですね。階級の幅が狭くなったことで長方形が細くなり先ほどのグラフよりもさらに山の形になりましたね。

先生：では、例えばこの長方形の確率は $\frac{n}{200}$ です。(いくつか例をあげる) このとき、このグラフの各長方形の確率を全て合計するといくつになりますか。

生徒：1 です。

先生：その通りです。グラフの幅が変わっても確率の合計は1のままです。

先生：さらに細かい傾向を知るためにもう1つグラフを用意しました。今度は階級の幅を**0.25cm**にしました。

(グラフを示す)

先生：このグラフを見るとさらに概形がさらに滑らかな山の形になったのが分かります。

先生：さて、しつこいようですが、このグラフの各長方形につまっている確率を全て合計するといくつになりますか。

生徒：1 です。

先生：そうですね。これも確率の合計なのでやはり1になります。

先生：では今はテープの本数は600本ですが、これを1000, 10000, …とどんどん増やせば、グラフの階級の幅をさらに細かくすることができます。このようにして、グラフの階級の幅を細かくしていくと、グラフはどのようになるのでしょうか。少し話し合ってみてください。

生徒：(話し合っている)

先生：では、どのようになると思えますか。

生徒：さらに滑らかな山になります。

先生：そうですね。このようにして、グラフの階級の幅を目に見えないくらい細かくすれば、グラフの概形は滑らかな山の曲線のような形になります。(グラフを示す) ではこの曲線の高さはいったい何を表していますか。

生徒：確率の密度です。

先生：その通りです。というわけで、この曲線のことを「確率密度曲線」といいます。また、この曲線を表す関数のことを「確率密度関数」といい、「 $f(x)$ 」と表します。

(黒板)

(グラフに書き込む)

先生：では、この曲線のグラフにおいて、ランダムに選んだテープが 9cm 以上 11cm 未満である確率はどこに表れていますか。少し話し合ってみてください。

生徒：(話し合っている)

先生：では、教えてください。

生徒：9cm から 11cm の間で曲線に囲まれた部分の面積です。

先生：そうですね。やはり、グラフが長方形から曲線に変わっても確率は囲まれた部分の面積で表されています。

先生：では、この曲線に囲まれた部分の面積の求め方について考えてみましょう。そのために、まずは階級幅が 0.25cm の相対度数ヒストグラムの場合について考えます。このヒストグラムの 9cm から 11cm の確率を求めるとどうなりますか。式も答えてください。

生徒： $\frac{n_1}{200} + \frac{n_2}{200} + \frac{n_3}{200} + \frac{n_4}{200} + \frac{n_5}{200} + \frac{n_6}{200} + \frac{n_7}{200} + \frac{n_8}{200} = \frac{N}{200}$ です。

(板書)

$$\frac{n_1}{200} + \frac{n_2}{200} + \frac{n_3}{200} + \frac{n_4}{200} + \frac{n_5}{200} + \frac{n_6}{200} + \frac{n_7}{200} + \frac{n_8}{200} = \frac{N}{200}$$

先生：そうですね。(1cm の方に戻って) 9cm から 10cm の確率と 10cm から 11cm の確率を合わせたものと同じですね。なぜなら、細くしただけですからね。

先生：では各長方形の確率はどのように求めましたか。

生徒：確率密度×0.25cm です。

先生：0.25cm というのは具体的に何でしたか。

生徒：階級の幅です。

先生：そうですね。長方形の確率＝確率密度×階級の幅でした。なので、具体的に（グラフの長方形を1つ指しながら）この長方形の確率密度なら $\frac{n}{200} \div 0.25 = \frac{4n}{200}$ となりますね。では、他の長方形についても計算してみてください。

生徒：（計算している）

先生：（計算が終わったのを確認してから）ということで、先ほどの式はこのようになりませぬ。

（黒板）

$$\frac{4n_1}{200} \times 0.25 + \frac{4n_2}{200} \times 0.25 + \frac{4n_3}{200} \times 0.25 + \frac{4n_4}{200} \times 0.25 + \frac{4n_5}{200} \times 0.25 + \frac{4n_6}{200} \times 0.25 + \frac{4n_7}{200} \times 0.25 + \frac{4n_8}{200} \times 0.25 = \frac{N}{200}$$

先生：ではこれを基に、曲線の場合について考えてみましょう。

先生：（曲線を示しながら）この曲線の9cmから11cmまでの間を先ほどは8等分しましたが、数えられないほどという意味で、 n 等分したときの1つ分の幅を Δx とします。つまり、この Δx が階級の幅になります。このようにしてできた各階級の長方形の確率密度を $f(x_n)$ とすると求める確率は一般的にこのようになります。

（黒板）

$$\begin{array}{ccccccc} f(x_1) & \times & \Delta x & + f(x_2) \times \Delta x + \cdots + f(x_n) \times \Delta x \\ \text{確率密度} & & \text{階級の幅} & & & & \end{array}$$

先生：これは和の記号を用いるとこうなりますね。

(黒板)

$$f(x_1) \times \Delta x + f(x_2) \times \Delta x + \cdots + f(x_n) \times \Delta x = \sum_{k=1}^n f(x_k) \times \Delta x$$

先生：そして、この Δx をものすごく小さくするとき数学ではこのように書きます。

(黒板)

$$\int_9^{11} f(x) dx$$

先生：(数式を示しながら) この式は、9cm から 11cm の間の確率を求める式です。今日学習したことがこのように載っています。(教科書を示す) ここに載っていることを今日までの 3 時間で学習しました。また、 dx は Δx をものすごく小さくした値のことを表しています。というわけで、曲線で囲まれた部分の面積(確率)を求めるには、みなさんが数学Ⅱで習った積分の記号を使います。

先生：これで私の授業を終わりますが、最後に今日までの 3 回の授業を振り返って、分かったことや、分からなかったこと、その他感想等を今から配る紙に書いて提出してください。

第三節 実践の授業記録

2020年1月に高等学校、2月に中学校の実践を行う予定であった。しかし、高等学校の実践は予定通りに行えたが、中学校の実践は2月の緊急事態宣言により、突如できなくなった。そこで中学校は1年後の実践となった。

1. 中学校

2021年2月には、三重県では緊急警戒宣言が発令されたが、実践校との交渉により実践可能となった。ただし、当初3時間分を予定していたが、各クラス2時間分のみとされ、予定の3分の2しか実践できなかった。

第1時（令和3年2月2日，公立中学校，第1学年5組，32名）

先生：まず，プリントを配ります。足りなかったらまた言ってください。

（プリント1を配る）

生徒：（プリント1を受け取る）

先生：プリントが回ってきたら名前を書いてください。

生徒：（プリント1に名前を書く）

プリント 1

12. 以下の長さは 10cm あります。よく見てください。



13. よく見たら、これとだいたい同じ長さのテープになるように 1 本切ってください。

14. 切り終わったら、定規を使って何 cm だったか測り、下に記入してください。

_____ cm

15. 先ほどのテープも含めて、30 本同じように切ってください。

先生：ではテープとはさみも配ります。

これはお隣さんとペアで活動してもらうので、2人で1個取ってください。

(テープとはさみを配り始める)

生徒：(テープとはさみを回している)

先生：(ペアがない生徒が数名いたので,) お隣さんいない人 (はいですか) ?

(挙手を促す)

生徒：(ペアのいない子が手を挙げる)

先生：じゃあ、その人たちは移動してもらおうかな。

生徒：(移動する)

先生：(テープとはさみを配る)

生徒：(テープとはさみを受け取る)

先生：はさみを配ってますが、危ないので余計なことはしないようにしてください。

先生：(テープとはさみがいきわたったのを確認してから)

じゃあ、プリントの表側の青い四角 (10cm の例) を見てください。

生徒：(10cm の例を見ている)

先生：その (プリント 1 の) 青い四角の横の長さが 10cm になるように印刷してきました。

今から 10 秒数えるので、その間にその長さ (10cm の例) を見て覚えてください。

じゃあ、カウントします。10, 9, 8, . . .。

生徒：(10cm の例の長さを覚えている)

先生：2, 1, 0。はい、じゃあプリントを裏向けてください。

生徒：(プリント 1 を裏向ける)

先生：では今から、みなさんの直観力をテストします。

さっき配ったテープとはさみを使って、1人1本、お隣さんと協力し合って、覚えた10cm だと思ふところでカットしてください。

生徒：(ペアで協力してテープをカットする)



先生：(机間巡視)

先生：(だいたい生徒が切り終えたのを確認してから)

切れた人はカットしたテープを上を挙げてください。

生徒：(カットしたテープを上を挙げる)

先生：みなさんできましたね。では定規を出してください。

持ってない人はお隣さんに借りてください。

生徒：(定規を出す)

先生：(生徒が定規を出し終えたら) では先ほどのカットしたテープの長さがどんな感じになったか、定規で測ってみてください。

生徒：(カットしたテープを定規で測る)

先生：ミリの目盛りも読んでください。

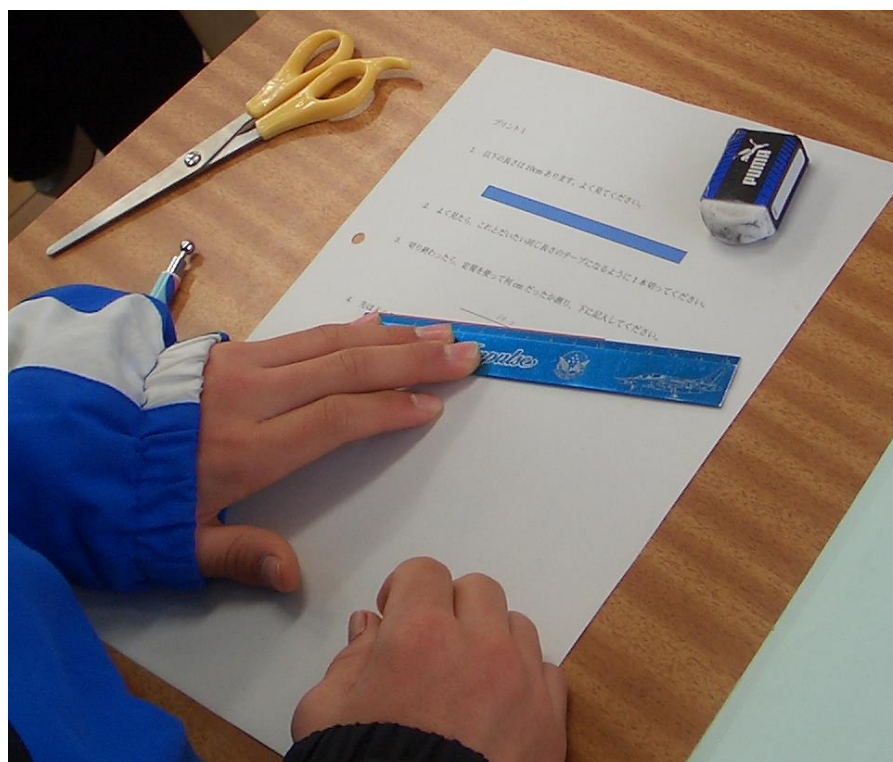
生徒：(測定した値を近くの人と共有している)

先生：では、計り終えたらプリントを表向けてください。

生徒：(プリント 1 を表向ける)

先生：そうしたら、そこ(プリント 1 の 3.) に測った長さを書くところがあるので、何 cm だったか書いてください。小数点第 1 位のところまで書いてください。

生徒：(プリント 1 の 3. に測定値を書き込む)



先生：(机間巡視)

先生：では、みなさんが実際に（カットしたテープが）何 cm になったか聞きます。
一番 10cm に近い自信がある人は手を挙げてください。

生徒：(自信のある生徒数名が手を挙げる)

先生：では、生徒 1 さんは何 cm でしたか？

生徒 1：10.1 (cm) ！

先生：おしいですね。10.1 (cm) よりも近かった人（はいますか）？（挙手を促す）

生徒 2, 3：(手を挙げる)

先生：では、生徒 2 さん。

生徒 2：10.0 (cm) ！

先生：なるほど。生徒 3 さんもそうですか？

生徒 3：(うなづく)

先生：ピッタリ賞ができました。

じゃあ、逆に 10cm よりも短かった人（はどれくらいいますか）？
(挙手を促す)

生徒：(数名が手を挙げる)

先生：意外と少ないですね。10cm よりも長かった人（はどれくらいいますか）？
(挙手を促す)

生徒：(大半の生徒が手を挙げる)

先生：長かった人の方が多かったんですね。

じゃあ、一番（自分のカットしたテープが）長いよって自信がある人（はいですか）？
（挙手を促す）

生徒 4：（手を挙げる）

先生：（生徒 4 を指名して、）何 cm（でしたか）？

生徒 4：19.4（cm）です。

生徒：（笑っている）

先生：（笑顔で）（10cm の例が）2 本分くらいの長さだったんだね。
これよりも長かった人いる？

生徒 5：19.5（cm）。

生徒：（笑っている）

先生：（生徒 4 と生徒 5 の値がほぼ同じという意味で）せってますね 2 人とも。
（生徒 4 と生徒 5 は）ペアだからそんな感じになったんだろうね。

先生：みなさん（がカットしたテープの長さは）いろいろ、バラバラで違ったと思います。
中には同じ人もいましたけど。
ところで、生徒 3 さんは 10.0（cm）って答えてくれましたが、本当にそれ（カットしたテープは）10.0（cm）ぴったりでしたか？

生徒 3：（自信ありげにうなずいている）

先生：本当に？ちょっともう一回定規で測ってみてくれる？

生徒：（笑っている）

生徒 3：（カットしたテープを測り直している）

補助の先生：ぴったりじゃないんじゃない。ちょっと手前やで。

先生：なるほど。ぴったりじゃなかったみたいですね。

じゃあ、他の人ももう一度測り直してみてください。

生徒：(カットしたテープを測り直している)

先生：(生徒がカットしたテープを測り直したのを確認して) 目盛りぴったりじゃなかった人はどれくらいいますか？

(挙手を促す)

生徒：(数名手を挙げる)

先生：あれ、意外と少ないですね。

(カットしたテープが) 目盛りぴったりだった人 (はいますか) ？

生徒：(数名手を挙げる)

先生：(手の上がり具合を見て) どちらにも手を挙げなかった人 (はいますか) ？

生徒：(半分弱の生徒が手を挙げる)

先生：その人たち (どちらにも手を挙げていなかった生徒) はどちらですか？

生徒：(笑っている)

先生：まあでも、たぶんほとんどの人が目盛りぴったりじゃなかったんじゃないですか？

(カットしたテープが目盛り) ぴったりだと手を挙げてくれた人に聞きたいんですが、電子顕微鏡を使ってその長さ (カットしたテープの長さ) を測り直したとしてもぴったりになると思いますか？それともぴったりじゃないと思いますか？

ちょっとお隣さんと話し合ってみてください。

生徒：(隣どうしで話し合っている)

先生：じゃあちょっと聞いてみましょう。ぴったりだと思った人（はいですか）？
（挙手を促す）

生徒 6：（手を挙げる）

先生：一人だけだね。じゃあ、ぴったりじゃないと思う人（手を挙げてください）。

生徒：（ほぼ全員が手を挙げる）

先生：（生徒 6 を指名して）ぴったりだと思いますか？

生徒 6：はい！

先生：本当に？では（先生が）測ってみてもいいですか？

生徒 6：はい！

先生：（測り直してから）ちょっとはみだしてないですか？

生徒 6：えっ！？

生徒：（笑っている）

先生：まあでも、ほとんどの人が手を挙げてくれたみたいに、実際ぴったりの長さって測れるか測れないかでいうとどうですか？

生徒：測れない。

先生：測れないですね。

ということで、みなさんが（最初に）定規で測ってくれたのも、「だいたいこっちの目盛りに近いかな」って感じで決めてもらったんだと思うんです。

じゃあ、正確に測れないものを何とかして数値として表現したい、ということでみなさんがやってくれたことをもうちょっと具体的に見てみましょう。

さっきの 10.0 (cm) だったら、たぶんこんな感じ（板書参照）やったから 10.0cm にしてくれたんですよ。



先生：こういう（板書と同じような）人は、ここ（10.0cm）とここ（10.1cm）の間、もしくはここ（10.0cm）からここ（約 10.05cm あたり）の間に入っているのだから 10cm にしようかなって決めてくれたんだと思います。

でもこの間がミリ（1mm）だと狭いから、パッと見た感じやと（間に入っているかどうか）分からないよね。この間隔を広げて考えたら、ちょっと離れているところから見てもパッと（テープの端が間に入っていることが）分かりますね。

だいたいこの間隔をどれくらいとったらいいかを、ちょっとグループで話し合ってみてください。

生徒：（話し合っている）

先生：では、聞いてみましょう。

生徒 7 さんはどれくらいでとったらいと思いますか？

生徒 7：0.5（cm）くらい。

先生：0.5cm 間隔がいいと思う人（は手を挙げてください）。

生徒：（半数以上が手を挙げる）

先生：意外にたくさんいますね。

目がよくないからもうちょっと広いほうがいいわって人いますか？

生徒：(誰も手を挙げない)

先生：いないですか？みんな目いいね。

先生だったらもう少し広いほうがいいと思うので、今回は 1cm の幅で考えたいと思います。

そのプリント (プリント 1) を裏向けてください。

そこ (プリント 1 の裏) にあるマス目は横軸が 1cm 刻みになるようにプリントしてきました。

じゃあ次の作業に今から移りますが、次は先ほど 1 本 (テープを) 切ってもらいましたが、それをあと 1 人 9 本切って、合計で (テープの本数が) 10 本になるように、また同じように直観で切っていく作業をしてください。

では、始めてください。

生徒：(ペアで協力してテープを残り 9 本カットする)



先生：(机間巡視) (プリント 2 を配る)

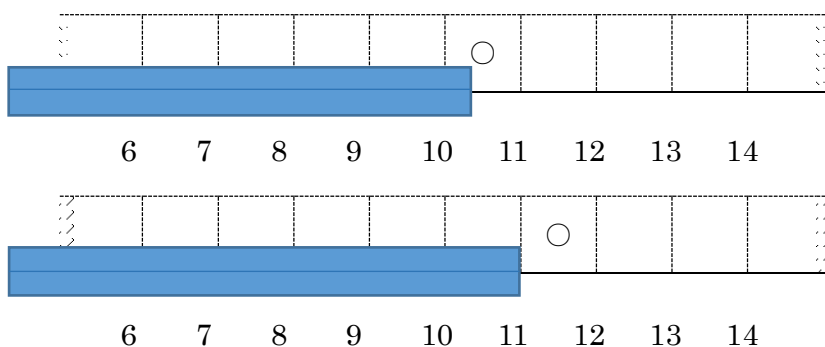
プリント 2

4. 切り終わったら，別紙のグラフの横軸にテープをあて，グラフ上に記録をとってください。（鉛筆で○をしてください）

※短辺を2等分した山折りの線の長さを記録してください。

※テープが線と重なったら繰り上げて記録してください。

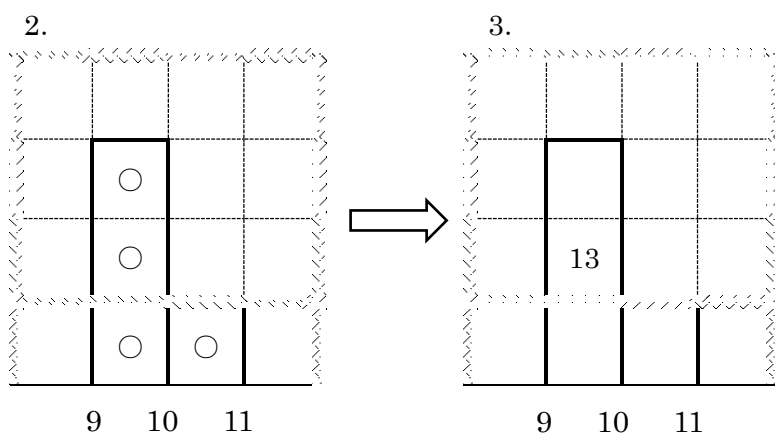
(例)



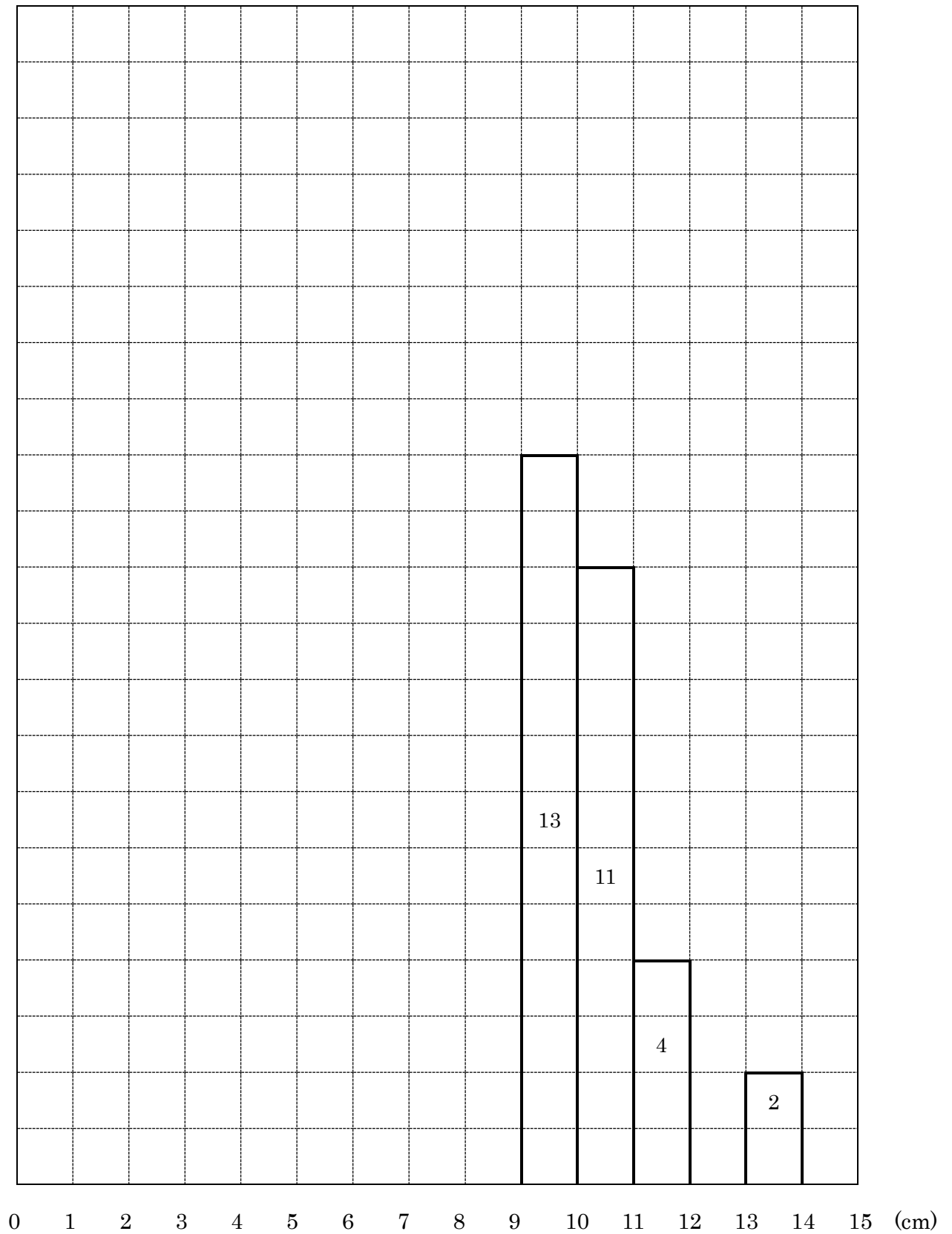
5. ○をつけたところをマス目にそってボールペンで囲んでください。

6. 囲まれた部分の○を個数に置き換えましょう。（○は消してください）

(例)



(例) 10cm テープカットの記録



先生：ほとんどの人が切り終わったみたいなので、作業が途中の人も手を止めて前を見て
ください。

プリント1の裏に書いてあるグラフの0のところに、テープの端っこをあてて、ど
この目盛りの間にあるのかを見てください。

今回だとこの間にあるので、この目盛りと目盛りの間のところの上のマスに○をう
って行ってください。

もう1個当てて同じところだったら、その上に(○を)書いてください。

もし違うところだったら、下に詰めて(○を)書いてください。

本当は線ぴったりに重ならないですけど、パッと見重なっているように見えるとき
は、重なったところの右隣の範囲のところに○をうってください。

じゃあ、続きの作業をしてください。



生徒：(プリント2の1.の作業をする)



先生：(机間巡視)

先生：はい、じゃあだいたいの方ができたので次の指示をします。

作業中の人も手を置いてください。では前を見てください。

みなさん○10個ふってもらったと思うので、次に○を書いたマス囲みます。

囲み方なんですけれども、ボールペンを出してください。

○の囲み方は前の例(板書)でいうとこんな風に縦の列が見て分かるように囲んでください。

横に間違っって線を入れないようにしてくださいね。

(○が)2個だったらその真ん中のところには線をいれないようにして長方形で囲んでください。

はい、じゃあどうぞ。(作業再開を促す意)

生徒：(プリント2の2.の作業をする)

先生：(机間巡視)

先生：(ほとんどの生徒が作業を終えたのを確認して)

だいたいできたと思うので、最後の作業(プリント2の3.)を言いますね。

じゃあ、手を止めて聞いてください。

このシャープペンで書いた○を消してください。

で、(○を)消した長方形の中にまたボールペンで、さっき○が書いてあった個数を書いてください。

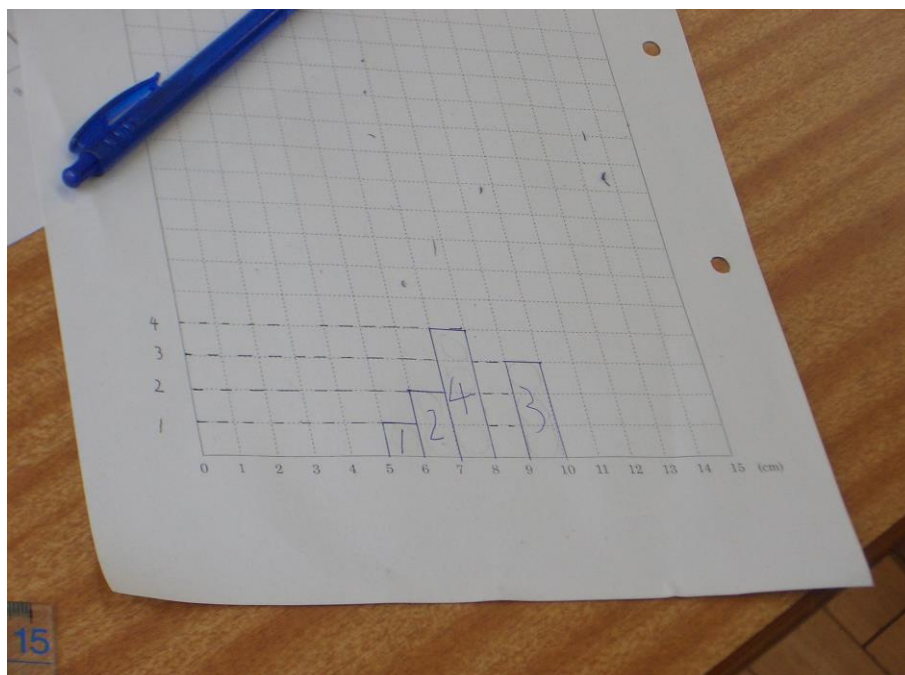
例えばここ(板書の例)だったら、2マス分だったので(長方形の)中に2と書いてください。

分からなかったらお隣さんどうして相談しながらやってください。

生徒：(プリント2の3.の作業をする)

先生：(板書をする)

先生：(机間巡視)



先生：はい、みなさんできましたね。前を向いてください。

では、今日のまとめをするので、今から書くことを今日配ったプリントの空いているところにメモして行ってください。

生徒8さん、10cm～11cmの間に生徒8さん(のカットしたテープ)は何本入っていましたか？

生徒8：1個。

先生：はい。(他に) 1本だった人? 2本だった人?・・・(挙手を促す)

生徒：(自分に当てはまる本数のときに手を挙げている)

先生：6人以上の人? (挙手を促す)

生徒9：(手を挙げる)

先生：何本でしたか?

生徒9：7本です。

先生：すごいですね。では7本を例にしましょう。

10cm から 11cm の間に 7本入っているっていうような言い方をしているんですけども、これを数学の用語を使って格好良く言きましょう。

新しい言葉も出てくるので、メモしながら覚えてください。

10cm から 11cm の間にテープが 7本入っていることを数学の用語を使って、「階級 10cm 以上 11cm 未満の度数は 7」っていう風な表現の仕方をします。

この表現の仕方を覚えておいてください。

で、みんなが唯一聞き覚えのあるであろう言葉は、この赤字で書いたところかというと、「以上」「未満」っていう言い方をしているんですが、この「以上」「未満」っていうのは、みんなが今日グラフを書いたときの計測の仕方でこういう書き方になっています。

どういうことかというと、みなさんピッタリの幅だったときには、右側の範囲だったところに○をふってくださいねって言いましたね。

以上っていうのは 10cm を含むか含まないかでいうとどうですか?

生徒：含む。

先生：そうですね。

10cm を含むので、10cmピッタリに見えるところはちゃんと 10cm から 11cm の間に○をふってくださいって言いました。

11cm の線よりも未満ってことは、11cm を含むか含まないかでいうとどうですか?

生徒：含まない。

先生：そうですね。11cm は含まないので、「未満」を使います。

11cm ピッタりのところだったら、次の 11cm から 12cm のところになるので、「以上」「未満」と言います。

これを今日の活動（テープカットの記録）でいうと、（カットしたテープが目盛りの）線にかかっているといいます。

この「未満」は、線にギリギリかからないということです。

このギリギリというのが大事です。

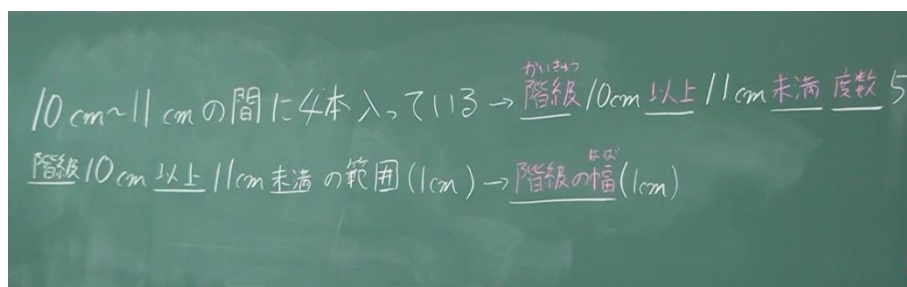
11cm にめちゃくちゃ近いけど 11cm の線にはかかってない、このギリギリを「未満」という表現をするんですね。

これが新しいこと 1 つ目です。そしてもう 1 つ。

階級 10cm 以上 11cm 未満の範囲、今回だったら 10cm から 11cm なので 1cm です
ね。

この範囲のことを「階級の幅」といいます。

階級 10cm 以上 11cm 未満の範囲、この範囲じゃなくてもいいんですけども、こ
ういった範囲のことを階級の幅と表現します。



先生：最後にもう一つだけ新しい言葉をいいます。

これはもしかしたら皆さん小学校のときに習っているかもしれませんね。

さっき皆さんグラフ作って完成しました。

この（完成した）グラフの名前がちゃんとあります。

小学校のときに一度習っています。

じゃあちょっと思い出しながらなんて（グラフの）名前だったか話し合ってみてく
ださい。

生徒：（話し合いを始める）

先生：確か小学校ではグラフを使って鶏の卵の重さを調べる活動が教科書に載っていたと思います。

生徒 10 さん、このグラフの名前何か覚えていますか？

生徒 10：棒線グラフ？

先生：棒線グラフ。棒線グラフだと思う人？

(挙手を促す)

生徒：(数名手を挙げる)

先生：残念、棒線グラフではないです。じゃあ他にこれじゃないかっていうのがある人？

(挙手を促す)

生徒：(誰も手を挙げない)

先生：みなさんいっぱい話し合っていたね。

生徒 11 さん、何ていうのか覚えてますか？

生徒 11：棒グラフ。

先生：棒グラフ。これ棒グラフに見えるけど違うんです。

生徒 12：(手を挙げる)

先生：おっ！(生徒 12 をあてる)

生徒 12：柱状グラフ。

先生：そうです。「柱状グラフ」って言います。覚えていますか？

柱状グラフはこんな字を書きます。

(板書)

柱状グラフ

先生：この柱状グラフのことを中学校では「ヒストグラム」といいます。

(板書)

柱状グラフ ヒストグラム

先生：このヒストグラムという名前も覚えておいてください。

注意して欲しいのが、これグラフなんだけども、「ヒストグラフ」ではなく「ヒストグラム」なので間違えないようにしてください。

さっき「棒グラフと似ている」と言ってくれたと思いますが、棒グラフとヒストグラムは似ているけど何が違うのでしょうか。

長さっていうのは測っても測れなかったですよ。

そのために階級の幅をとって考えてもらったんです。

でも棒グラフってこんな階級の幅をとらなくても良かったですよ。

例えば、好きな食べ物でりんごが何票、バナナが何票は階級の幅はとってないですよ。そういうのを棒グラフといいます。

長さのように値がはっきりと分からないものを扱うときは、階級の幅をとる必要があります。

階級の幅を使って作られた柱状のグラフのことをヒストグラムとか柱状グラフといいます。

この棒グラフとヒストグラムの違いも覚えておいてください。

第2時（令和3年2月3日，公立中学校，第1学年5組，31名）

先生：じゃあちょっと昨日使ったプリントをもう一回出してください。

生徒：（プリント1，2を出す）

先生：はい，今日使うのはプリント2の方です。

昨日はテープをみんなで切って，それらのテープを測って，ヒストグラムを作る活動
をしました。

前の時間はそうやってグラフを作りましたが，そのグラフを今度は表に直すとい
うことをしてみたいと思います。

じゃあ表に直すためのプリントを今から配るので後ろに回してください。

（プリント3を配る）

生徒：（プリント3を受け取る）

先生：一応，無くしても大丈夫なように名前を書いておいてくださいね。

生徒：（プリント3に名前を書く）

度数分布表

階級 (cm)	度数 (本)
cm 以上 cm 未満	
cm 以上 cm 未満	
cm 以上 cm 未満	
cm 以上 cm 未満	
cm 以上 cm 未満	
cm 以上 cm 未満	
cm 以上 cm 未満	
cm 以上 cm 未満	
cm 以上 cm 未満	

度数分布表

階級 (cm)	度数 (本)
cm 以上 cm 未満	
cm 以上 cm 未満	
cm 以上 cm 未満	
cm 以上 cm 未満	
cm 以上 cm 未満	
cm 以上 cm 未満	
cm 以上 cm 未満	
cm 以上 cm 未満	
cm 以上 cm 未満	

先生：(黒板に表を貼る)

そしたらプリント 2 の裏面のグラフの例が書いてある方を見ておいてください。

じゃあ、後でみんなに配ったプリントに自分が作ったグラフを表に直してもらいますが、まずはプリント 2 の裏の例をみんなと一緒にこの黒板のところで表に直していきたいと思います。

まず、プリント 2 を見ると左から 2, 10, 5, 2 一つ飛んで 1 になっています。

左端から見ていくと最初は階級が 8cm 以上 9cm 未満なので、階級 8cm 以上 9cm 未満と記入します。

今回 8cm から 9cm というところは長さがいくつですか？

生徒 1：1cm。

先生：そうですね。階級の幅は 1 と書いておきます。

では、生徒 2 さん 8cm 以上 9cm 未満の階級の度数はいくつですか？

生徒 2：2。

先生：そうですね、2 ですね。

階級というのは当然 1 つではないです。

8cm 以上 9cm 未満のところもあれば、次のところに行くと 9cm 以上 10cm 未満。

で、さらにもう一つ次のところに行くと 10cm 以上 11cm 未満のように階級はたくさんあります。

今とっているのはそれぞれ 1cm 間隔になっているので 1 です。

残りも書きますね。すべて階級の幅は 1 です。

生徒 3 さん、9cm 以上 10cm 未満の度数はいくつになると思いますか？

生徒 3：10。

先生：はい、そうですね。じゃあ生徒 4 さん、10cm 以上 11cm 未満 (の度数) はいくつですか？

生徒 4：5。

先生：はい、正解ですね。

次に生徒 5 さん、11cm 以上 12cm 未満の度数はいくつになりますか？

生徒 5 : 2。

先生 : はい, いいですね。

生徒 6 さん, 12cm 以上 13cm 未満 (の度数) はいくつになっていますか?

生徒 6 : 0。

先生 : そうです。

これは何にも無しなんだけど, 何も無しって場合はちゃんと数字で 0 と表現してください。

生徒 7 さん, 13cm 以上 14cm 未満の度数はいくつですか?

生徒 7 : 1。

先生 : はい, そうですね。このように表をつくっていきます。

できたこの表のことを「度数分布表」といいます。

この言葉 (度数分布表) は新しく出てきた言葉なので, これもまた覚えておいてください。

それではみなさんがプリント 1 の裏に書いたグラフを基に, この前 (の黒板) と同じような形で度数分布表を作ってもらいたいと思います。

生徒 : (プリント 1 を見る)

先生 : はい, 始めてください。

生徒 : (度数分布表を作る)

度数分布表

階級 (cm)		度数 (本)
10 cm 以上	11 cm 未満	5
11 cm 以上	12 cm 未満	3
12 cm 以上	13 cm 未満	2
cm 以上	cm 未満	
cm 以上	cm 未満	
cm 以上	cm 未満	
cm 以上	cm 未満	
cm 以上	cm 未満	
cm 以上	cm 未満	
cm 以上	cm 未満	

先生：(机間巡視)

先生：人によっては階級がたくさんある人もいれば階級がほんのちょっとしかないって人もいますね。

みなさんできましたか？できてない人いますか？大丈夫ですか？

(机間巡視)

みなさんできたようなので授業を進めますね。よく見ていてください。

8cm 以上 9cm 未満からの上 3 つの階級 (8cm 以上 9cm 未満, 9cm 以上 10cm 未満, 10cm 以上 11cm 未満) は (先程の表と) 一緒です。

しかし, この先生の例 (プリント 2 の裏) を見てみると 12cm 以上 13cm 未満の階級にある度数は 0 になっています。

0 のままでももちろん良いのですが, 抜けているみたいで気持ちが悪いです, これを上二つ (階級 11cm 以上 12cm 未満, 階級 13cm 以上 14cm 未満) をくっつけてこの真ん中 (の階級 12cm 以上 13cm 未満) を無くすことをします。

だから, 階級が変わります。

11cm 以上から一つ飛んで 14cm 未満のところまでいきます。

こんなことしていいのかと思うでしょうが, このようにしても大丈夫です。

では生徒 8 さん, 11cm 以上 14cm 未満になったので階級の幅は何 cm ですか？

生徒 8 : 3。

先生 : そう, 3 ですね。

上 (階級 8cm 以上 9cm 未満, 階級 9cm 以上 10cm 未満, 階級 10cm 以上 11cm 未満) はずっと 1cm だったんですが, くっつけたので (階級) 11cm 以上 14cm 未満の階級の幅は 3 になります。

このように階級はみなさんが自由にとってもいいです。

だから 1cm じゃないとだめというわけではなくて, 昨日の授業だったら目盛りの幅が 0.5 でいいんじゃないかと言ってくれたと思いますが, もちろん 0.5 を階級の幅にとってもらっても大丈夫です。

このように (階級の幅が) 1, 1, 1 ときて急に 3 としても大丈夫です。

(階級) 11cm 以上 14cm 未満の階級の幅が 3 になると, 度数は一体いくつになるでしょうか? 生徒 9 さん。

生徒 9 : 3。

先生 : そうですね, 2 本, 0 本, 1 本というのをまとめたので 3 本となります。

このように階級の幅というのは自由にとってもいいし, それは混在していてもいいことがわかりました。

階級の幅を変えた時に, これを今度は逆に表からグラフに戻すと, グラフの形にどんな影響があるのかについて, 今から考えたいと思います。

班の形になってください。

度数分布表				度数分布表			
階級 (cm)		度数 (本)		階級 (cm)		度数 (本)	
8 cm 以上	9 cm 未満	1	2	8 cm 以上	9 cm 未満	1	2
9 cm 以上	10 cm 未満	1	10	9 cm 以上	10 cm 未満	1	10
10 cm 以上	11 cm 未満	1	5	10 cm 以上	11 cm 未満	1	5
11 cm 以上	12 cm 未満	1	2	11 cm 以上	14 cm 未満	3	
12 cm 以上	13 cm 未満	1	0	cm 以上	cm 未満		
13 cm 以上	14 cm 未満	1	1	cm 以上	cm 未満		
cm 以上	cm 未満			cm 以上	cm 未満		
cm 以上	cm 未満			cm 以上	cm 未満		

生徒：(班になる)

先生：(グラフを貼る)

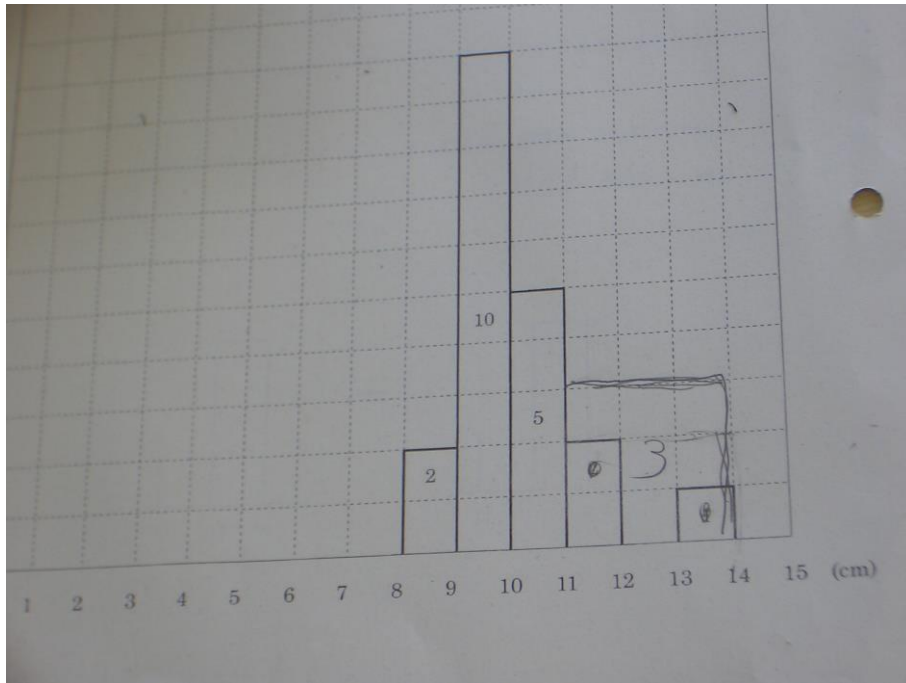
前にみなさんのプリント 2 の方の裏に書いてあるグラフの階級 11cm 以上 14cm 未満が未記入のものを前に用意しました。

みなさんはプリント 2 のところにみんなで話し合って書き込んでください。

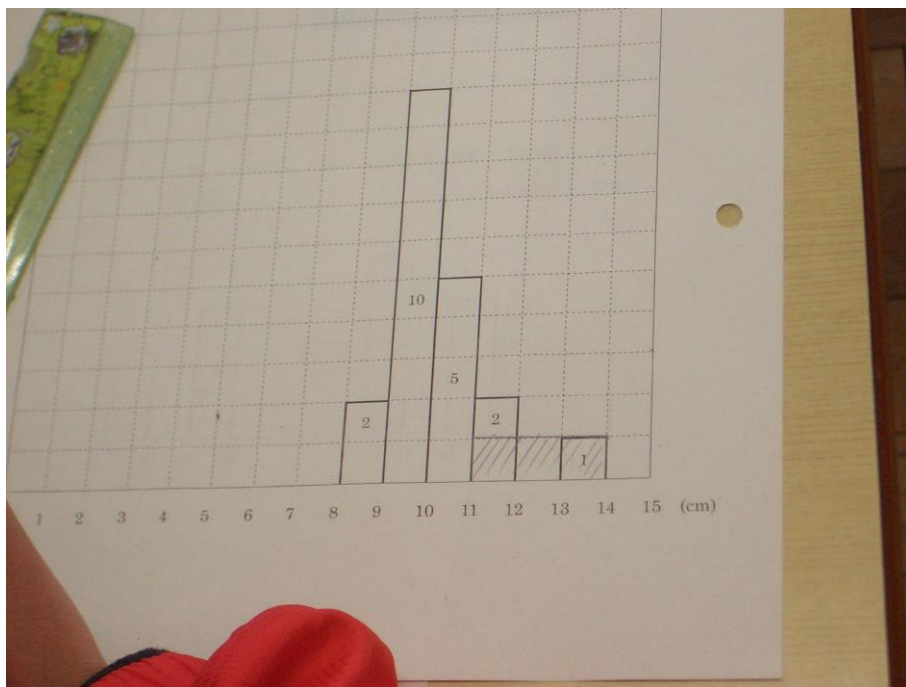
(階級) 11cm 以上 14cm 未満の階級の幅 3 の度数が 3 をこのグラフ (黒板のグラフの例) に書くときにどのように書けばいいのかをグループのみなさんで話し合ってください。

生徒：(班で話し合う)

先生：(机間巡視)

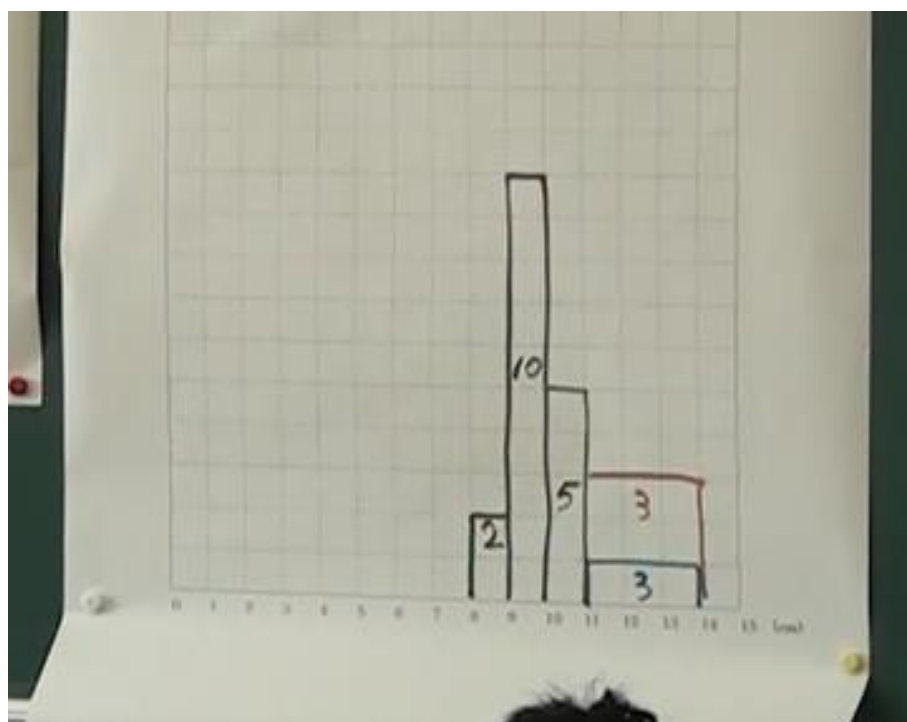


(生徒予想 1)



(生徒予想 2)

先生：(グラフに生徒の予想を書く)



先生：ちょっと前を見てください。

みなさんのグループを回って見ました。

ほとんどのグループが赤い方(生徒予想1)で書いていました。

赤い方のグループだった人(は手を挙げてください)。

生徒：(ほとんどの生徒が手を挙げる)

先生：ほとんどのグループがこっち(生徒予想1)かな。

回っていると青い方(生徒予想2)を書いているグループもいました。

青い方を書いた人はいますか？

生徒：(1つのグループの生徒だけが手を挙げる)

先生：その1つのグループだけ青い方で書いてくれたのかな。

これどっちかが間違っていて、どっちかが正しいんですよ。

じゃあもう一回、意見は途中で変えてもいいので、どっちが正しいのかっていうのを班で話し合ってみてください。

生徒：(話し合う)

先生：(机間巡視)

先生：もう一回聞いてみましょう。赤い方がいいんじゃないかという人 (はいですか) ?

生徒：(挙手の数が減った)

先生：ちょっと減りました。はい、(手を) 下ろしてください。
青い方がいいんじゃないかって思った人 (はいですか) ?

生徒：(挙手の数が増えた)

先生：増えましたね。
じゃあさっき赤 (生徒予想 1) だったグループになんで青 (生徒予想 2) に変えたのか聞いてみます。
(生徒 10 を当てる) なんで赤い方じゃなくて青に変えたんですか?

生徒 10：赤だと縦 3 個あって横 3 個で 11cm 以上から 14cm 未満の幅は 9 個、青は 1 個 1 個 1 個で合わせて 3 個だから青だと思いました。

先生：どうやらこのマス目を数えてくれたみたいです。
そうするとこの赤のマス目の個数はいくつになっていますか?

生徒 11：9。

先生：そうですね、9 個になっていますね。
で、青い方だと 3 個になっているから青い方が正しいんじゃないかということ言ってくれました。
赤い方が正しいと思うってさっき答えてくれた人、もう一回手を挙げてください。

生徒：(誰も手を挙げない) (笑いが起きる)

先生：今の説明聞いてまだ赤じゃないかって思う人 (はいですか) ?

生徒 12 : (手を挙げる)

先生 : お, どうして赤の方 (生徒予想 1) だと思いますか?

生徒 12 : 全部が 1, 1, 1 っていうわけじゃないから, もしかしたら 3, 0, 0 かもしれないから。

先生 : なるほど。この中 (生徒予想 2) にあるやつが全部 1 ずつとは限らないってことかな。
ここ (階級 11cm 以上 12cm 未満) がもしかしたら 3 で, 残り 0, 0 になる可能性もあるから勝手に低くしたらあかんのじゃないかってことを言ってくれました。
ここは 2 個 (階級 11cm 以上 12cm 未満) と 1 個 (階級 13cm 以上 14cm 未満) だったから (グラフの) 形違うよね。

生徒 : (数名が共感する)

先生 : じゃあもう一回それも聞いた上で赤が正しいと思う人?

生徒 : (挙手が増えた)

先生 : 青が正しいと思う人?

生徒 : (挙手が減った)

先生 : じゃあ正解を言いますね。正解は青い方 (生徒予想 2) です。
確かに生徒 12 さんが言ってくれたようにそれも一理あるなと先生も思いました。
元々 2 個, 0 個, 1 個だから勝手に平らにしているのかと先生も思いました。
でも, 良く見てみるとこれ (生徒予想 1) の真ん中に線が入ってないですね。
例えば, (赤い方に点線を入れて) ここに線入ってないですね。
ここ (12cm, 13cm) に線が入ってしまうと階級を区切ってしまうことになります。
でも, 今回は階級を 11cm 以上 14cm 未満という形でくっつけて考えたので, 間を区切らないとを考えます。
そうすると, テープを当てた時にこの 11cm から 14cm の間にテープが何本入るかを考えましたね。
だからここ (階級 11cm 以上 14cm 未満) に入るのは 3 本です。
この 1 マス 1 マスにみんな○をつけてくれました。

そして、下から詰めて書くように言いました。

下から順番に空いてるところを詰めていくと、平らなグラフになります。

だから、さっき生徒 10 さんが言ってくれたように、高さではなく、マス目の個数（面積）が大事です。

これを数学の用語でいうとどうなるかについて話をします。

ここに長方形があります。横と縦があります。縦かける横で何が出ますか？

（生徒 13 を当てる）

生徒 13 : 面積。

先生 : そうです, 面積です。

実はこの長方形(黒板)とこっちで出てきた長方形(グラフ)って対応しているので、今、ここ(グラフの長方形)の面積に当たる部分が 3 (本)になります。

では横は何になりますか？

生徒 14 : 3。

先生 : そうだね, 単位は何か？

生徒 14 : cm。

先生 : そうだね, 3cm になります。このように(ヒストグラムを長方形に)対応させました。

今、縦は(黒板の長方形に)あえて書いてないですが、仮に x とします。

上と下(板書した長方形 2 つ)を対応させます。

生徒 15 さん。縦の長さは面積と横の長さを使ってどうやって求めますか？

生徒 15 : 面積÷横の長さ。

先生 : そうですね。面積÷横の長さですね。

これをみんなが考えてくれた長方形(階級 11cm 以上 14cm 未満, 度数 3)で考えると, x を求める計算はどうなりますか? 生徒 16 さん。

生徒 16 : $3 \div 3$ 。

先生：そうですね， $3 \div 3$ 。

じゃあ，生徒 17 さん単位はどういう計算になりますか？

生徒 17：(考える)

先生：(板書を指差して) 単位だけを見てください。

この 3 (面積の方) っていうのはどっちの 3 ですか？

生徒 17：3 本の方。

先生：前の方が本ですね。

ということは後ろの方 (横の長さ) が **cm** ですね。

という計算をしてもらいました。じゃあこの計算の答えを生徒 18 さん。

生徒 18：1。

先生：1。単位はどうしますか？

生徒 18：cm。

先生：cm？

生徒 18：(困りながら考える)

先生：本 \div cm の単位って一体なんですか？ちょっと話し合ってみてください。

(生徒に問いかけ)

生徒：(話し合ってみる)

先生：こうじゃないかというのがある人はいますか？

生徒：(手が挙がらない)

先生：これ馴染みがないですね。みなさん人口密度って覚えていますか？

(挙手を促す)

生徒：(数名手を挙げる)

先生：生徒 19 さん，人口密度ってどんなものですか？

生徒 19：1cm²あたりにどれぐらいの人がいるのか。

先生：なるほど。1cm²でいいですか？

(cm を強調して聞く)

生徒：(話し合いながら考える)

先生：km²かな？1cm²やったらこんなちっちゃいからね。

(指で平方 cm のサイズを表現する)

こんなちっちゃいところに人は入らないですね。

(少し笑いが起きる)

人口密度っていうのは 1km²あたりに何人，人がいるのかを扱っている単位になります。

これは小学校で習うんだけど，忘れちゃった人もいると思います。

「人/km²」，こんな単位見たことあるって人いますか？

この単位(人口密度)自体はどうでもいいんだけど，この単位の性質を今日は覚えてください。

これ(人/km²)っていうのはここ(km²の前)に1が隠れてて，1km²あたりに何人，人がいるかを表しています。

斜めに線(/)が引っ張ってありますが，これは分数なんです。

人口÷面積をすることで1km²あたりの人口っていうのがわかるんですね。

それを考えると，これ(本÷cm)も同じように考えることができます。

こっち(本÷cm)は1cmあたりの(テープの)本数を表しています。

ここ(cm)に1をつけたらわかりやすいかな。

じゃあ生徒 19 さん，本÷cmは何を表してると思いますか？

生徒 19：(悩んでいる)

先生：これは割り算なのでこの分数みたいな形を使ってこのように(本/cm)に書きます。

読み方は「本毎 cm」と読んでくれたらいいです。

本を cm で割るのでこのような単位になります。

本/cm は一体なんだということですが 1km^2 あたりの人の数っていうのを人口密度と
いいました。

この人が人口のことですね。人口の密度を求めているから人口密度とといいます。

今回この「本」っていうのは元々なんでしたか？

生徒 20 さん、この「本（単位）」は何を表していましたか？

生徒 20 : テープの数。

先生 : そうです。テープの数です。そのテープの数のことを数学ではなんといいましたか？

生徒 20 : (悩んで) 度数？

先生 : 度数ですね。この単位は度数の密度を表しています。

本/cm はヒストグラムの長方形（板書参照）の縦の長さで度数密度を表しています。

元々の意味を考えると、 1cm あたりに何本入っているかを考えています。

階級 11cm 以上 14cm 未満で考えるとこの 3cm の間の中の約 1cm あたりに度数が 1
個ずつ詰まっていることを表しています。

この高さの縦軸は、度数密度で 1cm あたりに入っている今回だったらテープの本数
っていうのを表しています。

他の長方形の例で 10cm 以上 11cm 未満についても考えると、度数は 5 で、階級の幅
は 10cm から 11cm で 1 です。

この時の度数密度を計算するといくつになりますか？

(プリントの) 空いているところに計算してみてください。

生徒 : (計算を始める)

先生 : 生徒 21 さん。そうですか？

生徒 21 : 5？

先生 : そうです、5 ですね。 $5 \div 1$ なので 5 になります。

だから階級の幅が 1 の時はそのまま縦にきた数字がたまたま一致するんです。

$5 \div 1 = 5$, $10 \div 1 = 10$, のように (数字が) 一致します。

ですが階級の幅が、例えば今回みたいに 3 とかって変わってくると、それに応じて
度数と (ヒストグラムの長方形の) 高さが一致しなくなります。

今回だったら度数3で階級の幅が3なので $3 \div 3$ で1になるので、縦軸の数字が変わってきます。

では、まとめをするので机を前に向けてください。

生徒：(机を前に向ける)

先生：ヒストグラムの長方形，横の長さ，縦の長さ，面積にはそれぞれ意味がありました。

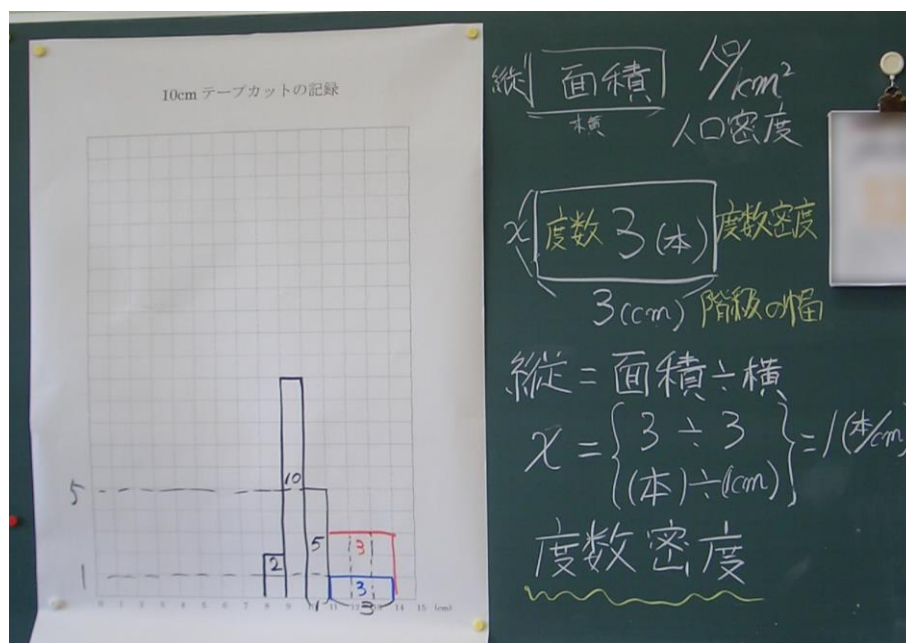
ヒストグラムの面積にあたるのが度数になります。

この横の長さはこの前習った階級の幅を表しています。

ヒストグラムの長方形の縦の長さのことを度数密度といいます。

この度数密度という言葉は教科書に書いてないんですけども，また高校行った時にこの続きがあって，その時に大事な言葉になるので覚えておいてください。

生徒：(板書を写している)



先生：じゃあ書き終わったらファイルに（プリントを）閉じておいてください。

生徒：(ファイルにプリントを閉じる)

先生：はい，じゃあ終わりました。

2. 高等学校

第1時（令和2年1月8日，公立高等学校，第3学年普通科，21名）

先生：じゃあまず，今日のテーマを書きたいと思います。

（黒板）

確率を表す2つのグラフを書こう！

先生：はい，「確率を表す2つのグラフを書こう！」ということで，今日まず1時間目はですね，みなさんに実験を1つしてもらいます。

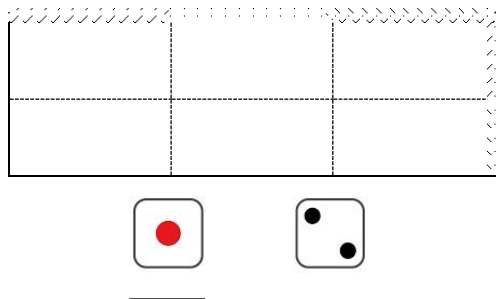
で，確率のデータを収集してもらおうと思います。それではプリントを配ります。

（プリント1を配る）

プリント 1

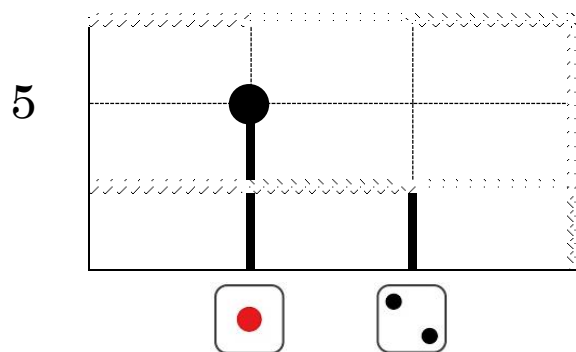
4. サイコロを 30 回振って、その結果を別紙のグラフに記入してください。

(例)  が出たら...



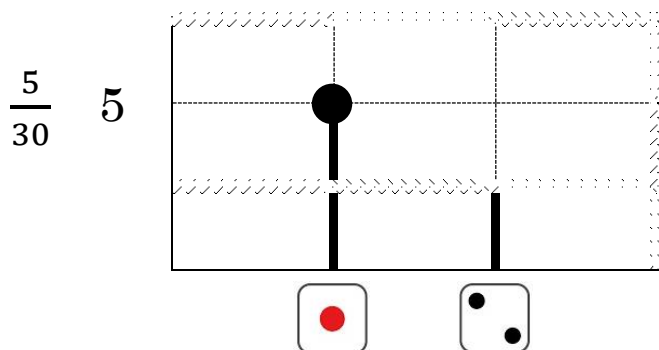
5. 点を線で結び、完成したグラフに合わせての縦軸に数値を記入してください。

(例)



6. 2. で記入した数値の横にそれに対応する確率（相対度数）を記入してください。

(例)



生徒：(プリントを受け取る)

先生：じゃあ、順番に今からこの作業をやってもらいたいですけれども、今からこちらにあるサイコロをみなさんにお渡しします。

サイコロを受け取ったら、まずはプリントの 1. の作業を、サイコロを 30 回振ってください。30 回。

出た目をこの (プリント 1 の) 右側のところのサイコロのマークの下のところです。例えば 1 が出たら 1 のところに正の字の棒を引っ張って行って、まず数を数えてください。

数を数え終わったらそれを、目盛り分けて棒を引いて、印をするというところまでやってもらおうと思います。

では、今からサイコロを配ります。

(サイコロを配る)

生徒：(サイコロを受け取る)

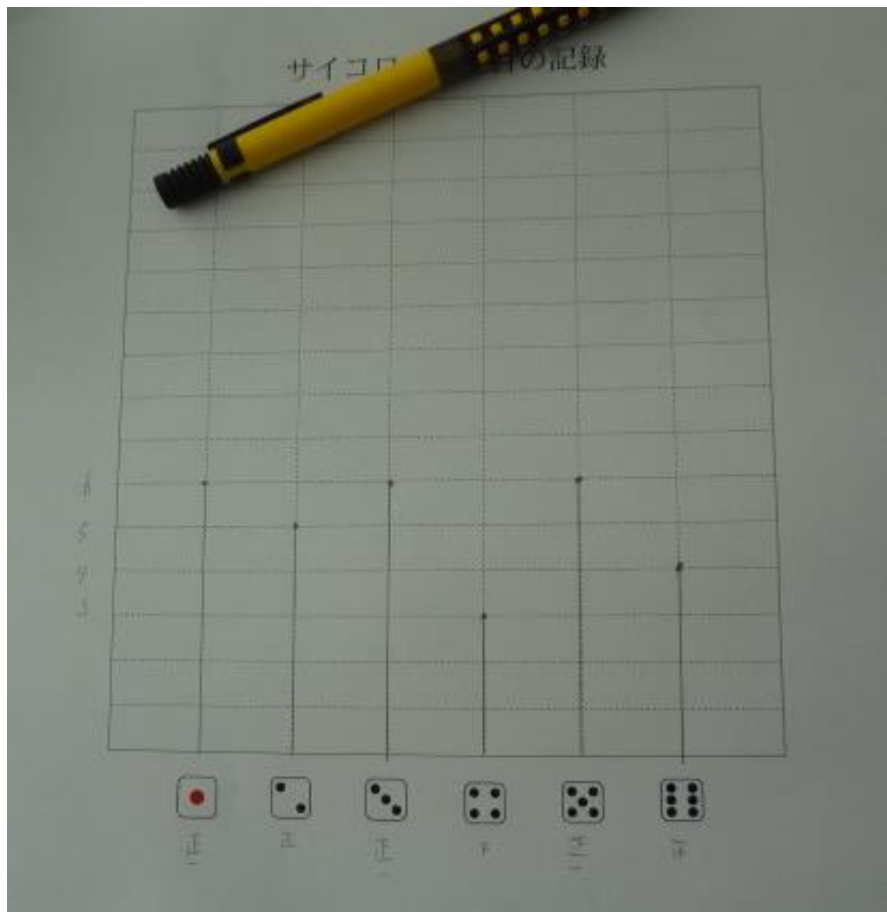
生徒：では、受け取った人から始めてください。

生徒：(サイコロを振って記録を取り始める)

先生：(机間巡視)

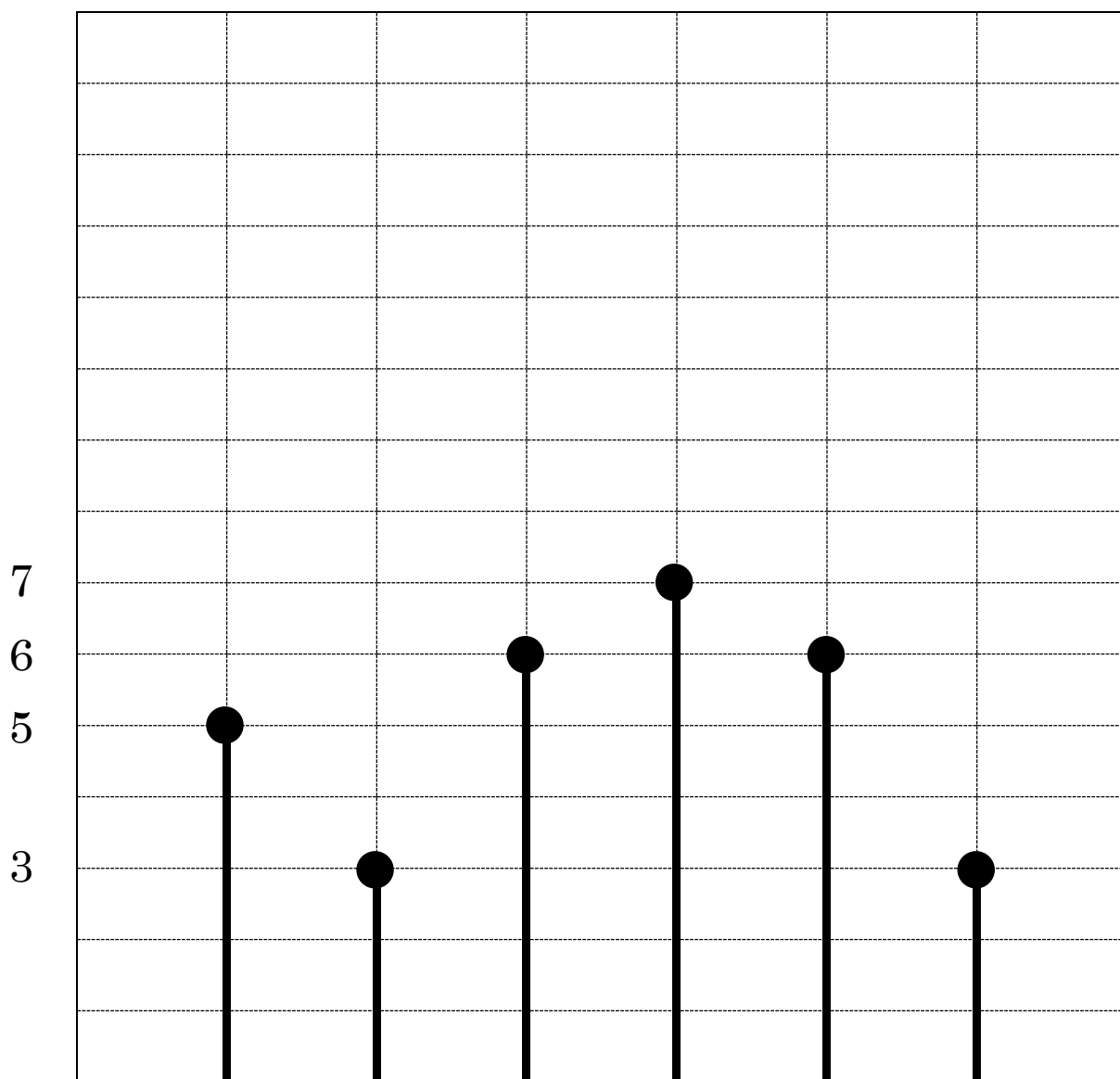
先生：じゃあ、30 回振り終わった人から、(プリントの) 左の例を基にグラフを作ってみてください。

生徒：(作業を続けている)



先生：(黒板にグラフの例を掲示する)

(例 1) サイコロの出た目の記録



正

下

正

正

正

下

一

下

一

先生：はい，こんな感じで，先生が事前にやってきたのはこんな感じになりました。

先生：(少し机間巡視した後に) はい，そうしたら 2. の作業までやっていただきましたね。

早い人はもう 3. の作業に入ってますけれども。

じゃあ，2. の作業ができた人は 3. の作業もやってみてください。

一応おさらいしておくとして，2. は出た目の回数を完成したグラフの横に書いてもらいました。

3. の作業では，その書いてもらった数字が，30 回のうち何回出たかということで，確率を書いてもらいました。

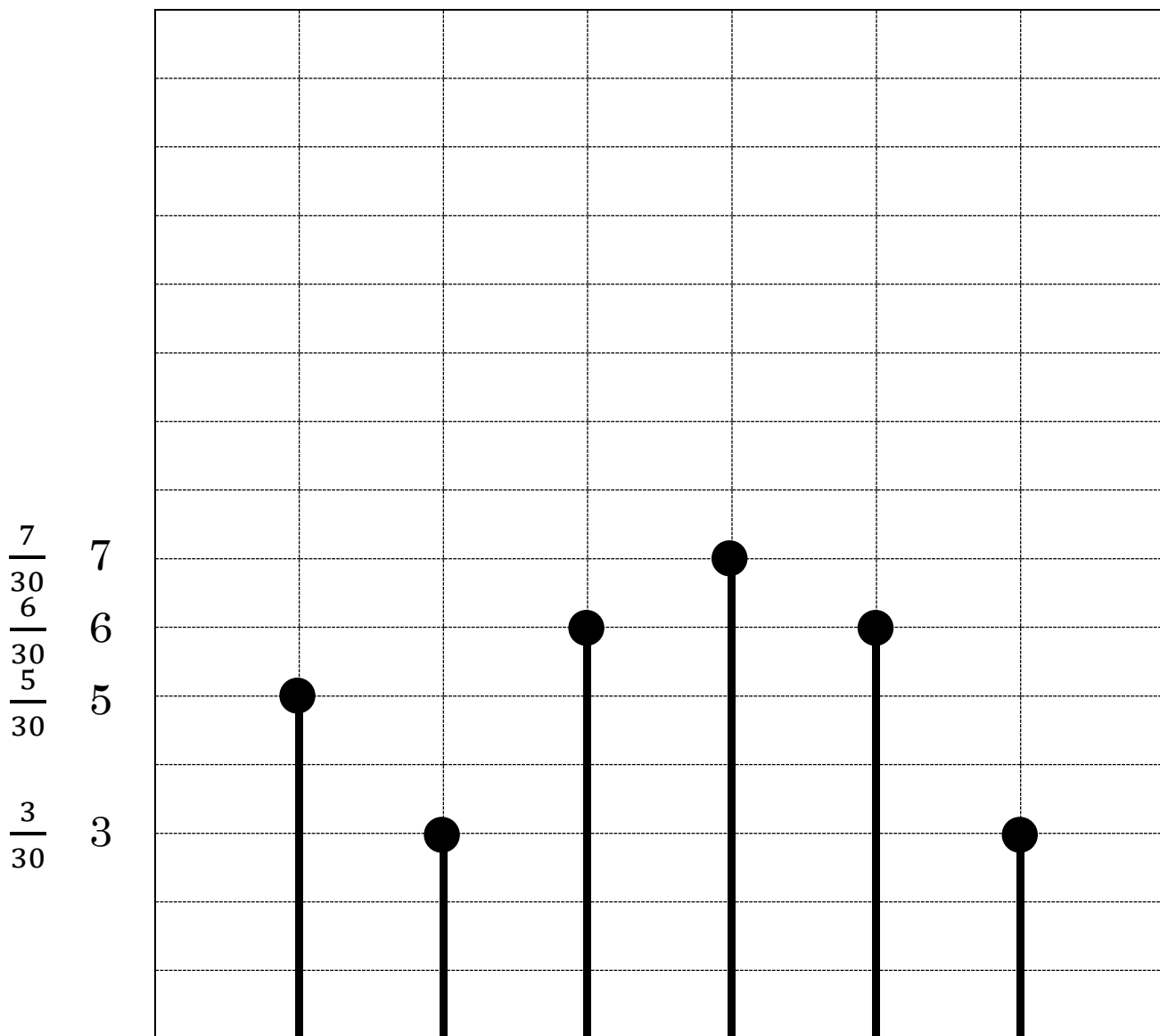
生徒：(作業を続けている)

先生：(机間巡視)

先生：では，大体の人ができてきたので，できてない人も作業しながらでいいので，先に進んでいきたいと思います。

(黒板に確率も書いてあるグラフの例を掲示する)

(例 2) サイコロの出た目の記録



正

下

正

正

正

下

一

下

一

先生：先生がやった時にはこんな感じになりました。みなさん（自分のと）比べてどうですかね。同じようになった人や、違う人やいろいろだと思います。

これで1つ目のグラフが完成しました。

じゃあちょっとみなさんにいまから聞きたいんですけども、今みなさんが書いてくれたグラフの確率、サイコロの出る目の確率というのは、グラフのいったいどこに現れていますか。ちょっと考えてみてください。お隣さんと相談してもいいですよ。

（少し時間をとる）

じゃあ少し聞いてみましょう。

では、（生徒1）さん。今回作ったこの確率のグラフ、確率はいったいどのようにして現れていますか。

生徒1：わかりません。

先生：なるほど。ちなみにちょっと分からないよっていう人？（挙手を促す）

生徒：（半数以上が手を挙げる）

先生：じゃあ、こうじゃないかなっていうのがいる人？（挙手を促す）

生徒：（誰も手を挙げない）

先生：どっちにも手を挙げなかった人？（挙手を促す）

生徒：（誰も手を挙げない）

先生：といっても誰も挙げてくれないんですね。わかりました。

では、分からないに手を挙げてくれた人、もう1回手を挙げてもらってもいいですか？

生徒：（半数以上が手を挙げる）

先生：はい、では分からないに手を挙げていなかった（生徒2）さんに聞いてみましょう。

生徒2：棒の長さ。

先生：棒の長さ。どうですかみなさん。このグラフがあって、(生徒 2)さんは棒の長さが確率を表していると言ってくれました。

そうかなと思う人？(挙手を促す)

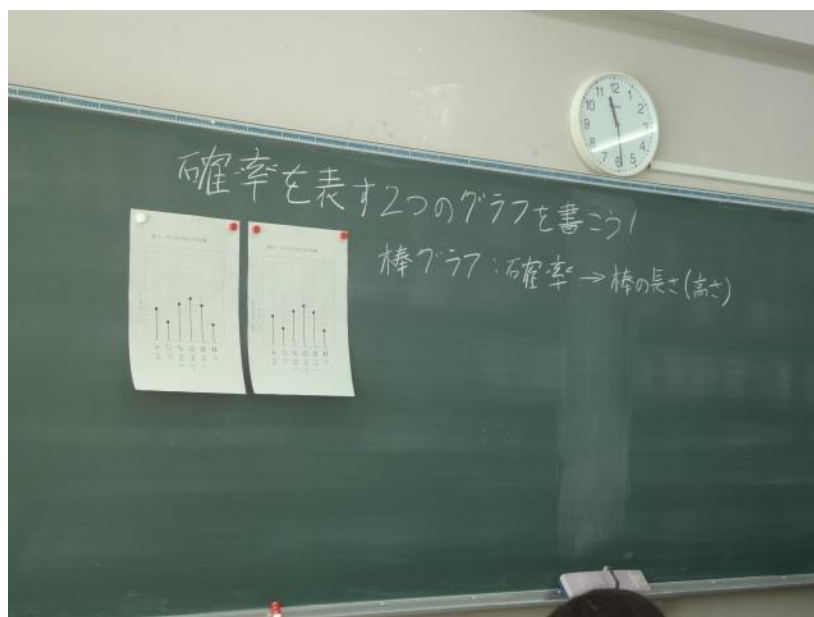
生徒：(何人か手を挙げる)

先生：違うんじゃないと思う人？(挙手を促す)

生徒：(誰も手を挙げない)

先生：(違うんじゃないと思う人)はいないですね。正解です。このグラフは棒グラフですね。みなさん小学校の時にやったことあると思います。1本棒があるだけであまり見かけない棒グラフですけど、これは棒グラフなので高さが確率を表しています。

(黒板)



先生：例えば、この先生の例でいうところの1が出る確率は、(示しながら)この高さのところの横軸を見てあげると、30回出たうちの5回出てるので $\frac{5}{30}$ 、約分すると $\frac{1}{6}$ の確率でこのサイコロは1が出たということがいえると思います。

これがまず1つ目のグラフです。

では次に、もう1枚プリントを配るので、また少し違うグラフを作ってもらおうと思います。(プリント2を配る)

プリント 2

16. 以下の長さは 10cm あります。よく見て下さい。



17. よく見たら、これとだいたい同じ長さのテープになるように 1 本切ってください。

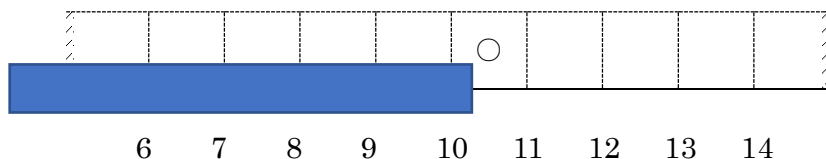
18. 切り終わったら、定規を使って何 cm だったか測り、下に記入して下さい。

_____ cm

19. 先ほどのテープも含めて、30 本同じように切ってください。

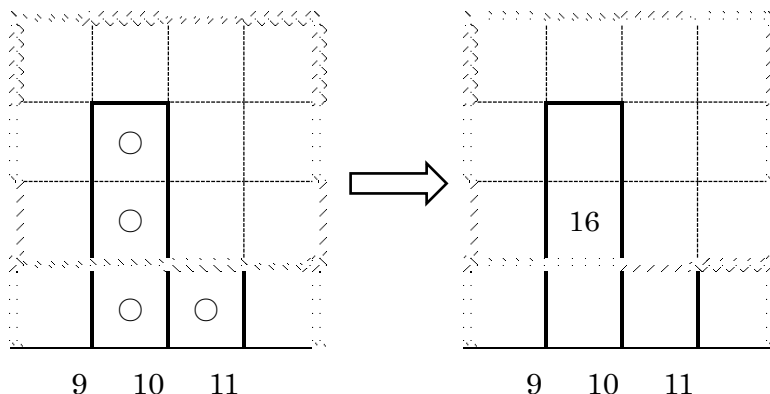
20. 切り終わったら、別紙のグラフの横軸にテープをあて、グラフ上に記録をとってください。(鉛筆で○をしてください)

(例)



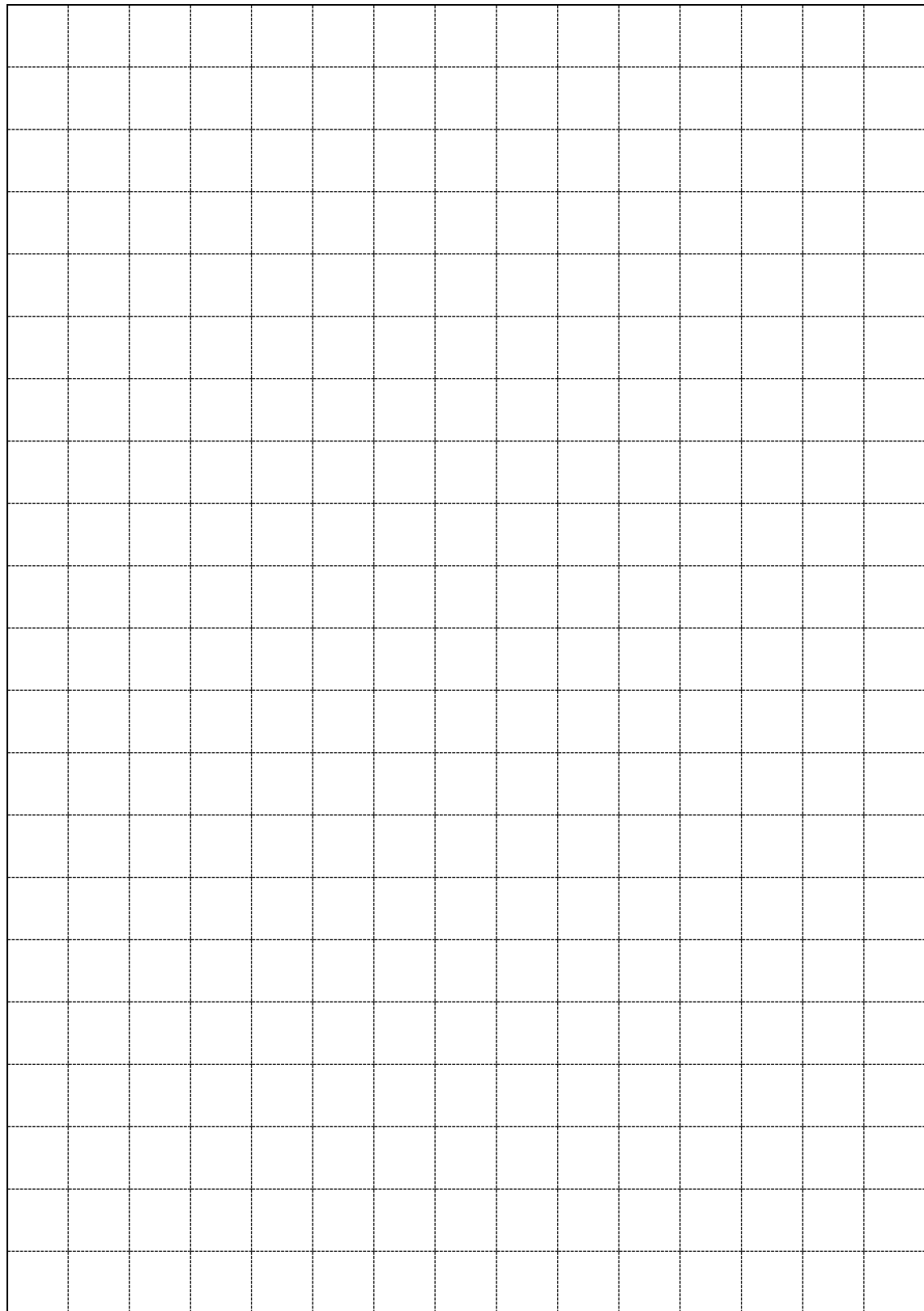
21. ○をつけたところをマス目にそってボールペンで囲み、囲まれた部分の○を個数に置き換えましょう。(○は消して下さい)

(例)



22. 書き込んだ個数それぞれの下にその確率 (相対度数) を書き込んで下さい。(スペースの都合で下が無理な場合は上でも可)

10cm テープカットの記録



0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 (cm)

生徒：(プリントを受け取る)

先生：では今から、そのプリント2の作業をやらしてもらおうと思います。テープを10cmになるように切ってもらいます。ここに(切ってもらう)テープがあるので、これも配ります。もらったプリントにちょうど10cmの見本が書いてあるのわかりますか？灰色の長方形ですね。その長さはぴったり10cmになるように設定しています。なので、それは10cmです。テープ配ってる間にその長さをよく覚えてください。実際にテープを切る時はその10cmを見ないで切ってもらいます。(テープを配る)

生徒：(プリントの10cmを眺めている)

先生：(テープがいきわたってから) そうでしたらですね、プリントを1回裏向けてその10cmを隠してください。

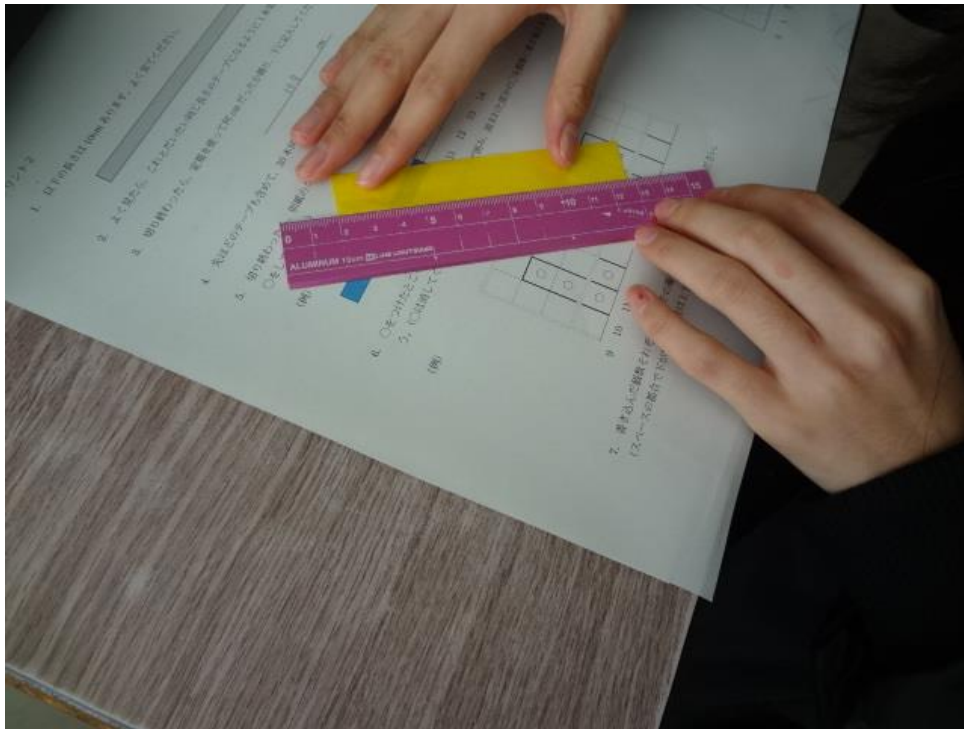
生徒：(プリントを裏返している)

先生：(全員がプリントを裏返したのを確認してから) まずは1本で構いません。10cmだなと思うところで切ってみてください。

生徒：(テープを切っている)

先生：切り終わった人は、それを定規で測ってください。測り終わったらプリントを表むけて何cmだったか書くところがあるので、書いてください。

生徒：(各々作業をしている)



2. よく見たら、これとだいたい同じ長さのテープになるように1本切ってください。

3. 切り終わったら、定規を使って何cmだったか測り、下に記入してください。

8.9 cm

4. 先ほどのテープも含めて、30本同じように切ってください。

5. 切り終ったら、下のグラフに記録をとってください。

グラフ上に記録をとってください。

6. ○をつけたところをマス目によってボールペンで囲み、囲まれた部分の○を個数に記入してください。(○は消してください)

(例)

先生：(机間巡視)

先生：(できたのを確認してから) じゃあ、何人かに聞いてみましょう。

(生徒3) さん、何 cm でしたか？

生徒3：10.9cm です。

先生：おっ、おいしいですね。他にも聞いてみましょう。

(生徒4) さん、何 cm でしたか？

生徒4：13.3cm。

先生：大台に乗ったね。(生徒5) さんは何 cm でしたか？

生徒5：9.6cm。

先生：おお、今一番ニアピンだね。(生徒6) さんは何 cm でしたか？

生徒6：17.5cm。

先生：17.5cm！さらに大台に乗ったね！いいですよ。個性があっていいですね。

中にはこのように長い人もいれば、おいしい人もいますね。

おいしい中でも、10cm を超えている人もそうでない人もいますね。

では(生徒3) さん。10.9cm と答えてくれましたが、本当に 10.9cm でしたか？

生徒：10cm ものさしで測ったので正確ではないと思います。

先生：あっ、なるほど！じゃあ、15cm ものさしで測った人に聞いてみましょう。

(生徒4) さんは 15cm ものさしで測りましたか？

生徒4：(うなずいている)

先生：本当に 13.3cm でしたか？

生徒4：多分。

先生：自信ない？

生徒4：測ったけど……。あつてるはず。

先生：なるほど。どうですか、みなさん。みなさんが測ったその数値、本当にその数値であつてますか。たぶんこつちかなつて決めた人もいたんじゃないかな。
目盛りぴったりだった人？（挙手を促す）

生徒：（誰も手を挙げない）

先生：じゃあ、目盛りちょっとズレてたけど、まあこれでいいかと決めた人？（挙手を促す）

生徒：（何人か手が挙がる）

先生：正確に何 cm だったかといわれると、定規じゃ測れませんよね。なぜなら、目盛りがないからです。
じゃあ、もう1度定規で測ってみてください。もしかしたらぴったりの人がいるかもしれません。
（生徒7に）どうかな、ぴったりだった？

生徒7：（横に首を振っている）

先生：ですよ。ちなみに何 cm にしましたか？

生徒7：12.4cm です。

先生：じゃあ、その12.4cm はぴったりじゃないのにどうやって決めましたか？
12.5cm ではダメだったんですか？

生徒：12.4cm に近いから。

先生：なるほど。そうです。この近いっていうのが大事です。
近い方の目盛りとった人？（挙手を促す）

生徒：（大半が手を挙げる）

先生：この「近い方をとる」、これなんですよ。

これを数学の用語で「近似」というんです。覚えてますか。

本当にその値かどうかは分からないけど、近い方が都合がいいからその値にしてしまおう、として大体の値を出すことを「近似する」といいます。

じゃあ、大体の値ではなくて本当の値っていうのは分かりますか、分かりませんか。ちょっと考える時間をとります。

生徒：(考えている)

先生：(頃合いを見て) じゃあ、聞いてみましょう。どちらかに手を挙げてください。

定規では厳しいけど、もっと細かい目盛りがあれば本当の値が分かると思う人？

(挙手を促す)

生徒：(2, 3 人手を挙げる)

先生：じゃあ逆に、どれだけ目盛りが細かくても測れないだろうと思う人？

(挙手を促す)

生徒：(ほとんどの生徒が手を挙げる)

先生：こちらの方が多いですね。

実はこれは(本当の値は)分からないんですね。どれだけ細かい目盛りがあっても、目に見えないところでちょっとはみ出しているかもしれません。

というわけで、長さは正確な値を測ることはできません。

でも、みなさんは近似して値を出しました。

では、さっきの 12.4cm は 12.3cm よりでしたか。12.5cm よりでしたか。

生徒 7：12.3 よりでした。

先生：ということはきっと、(生徒7)さんは12.35cm以上12.45cm未満のところを12.4cmとみて、そこ(プリント2)に書いてくれたのだと思います。

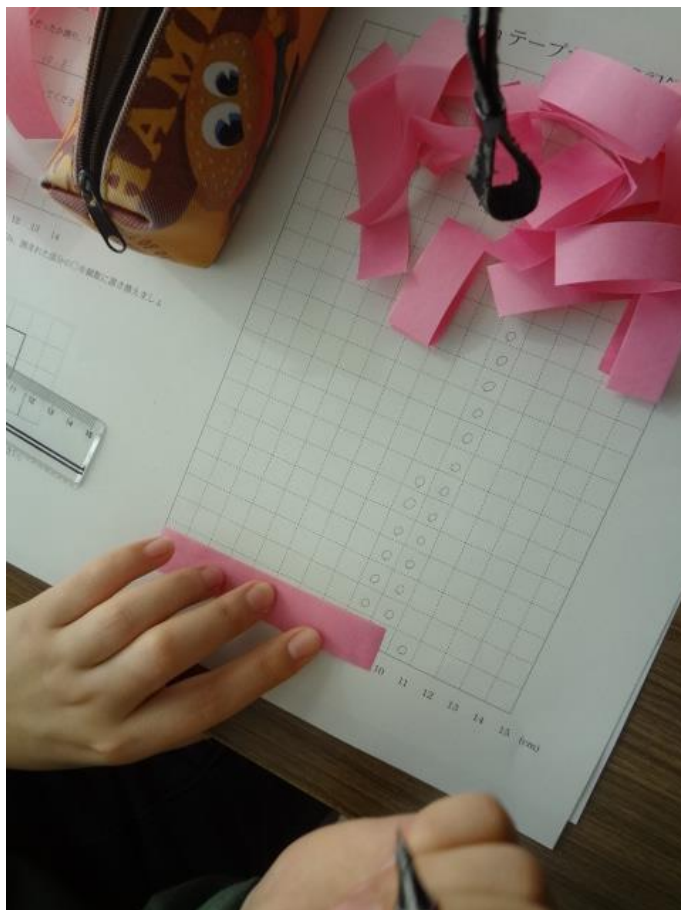
そして、みなさんもそうやってやったのだと思います。

というわけで、正確には分からないです。でも、ある程度幅をとって近似して考えることはできると思います。大事なことは幅をとるということです。

それでは、残り29本(のテープを)切ってもらいます。このプリントのグラフのところの横軸はちょうど1cm刻みの目盛りになっているので、30本切り終わったら、0のところを端っこを当てて、(反対の端が)どこに入るかを(確認して)そこに丸してください。その丸はシャーペンで書いてください。あとで消します。

では周りの人と協力しながら残り29本(のテープを)切ってください。

生徒：(作業をしている)

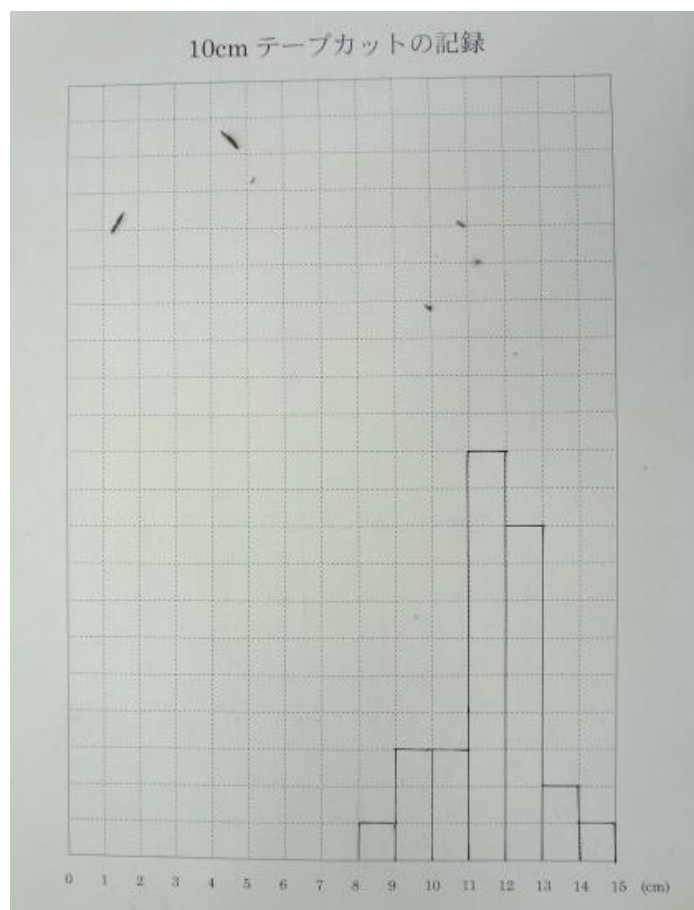


先生：(机間巡視)

(黒板に例を貼る)

先生：(作業が進んだのを確認してから) 30 個丸を書き終わった人は、今度はボールペンで、その丸のところを (プリント 2 の) 例のように長方形で囲んでください。で、ボールペンで囲み終わったら中の丸を消してください。

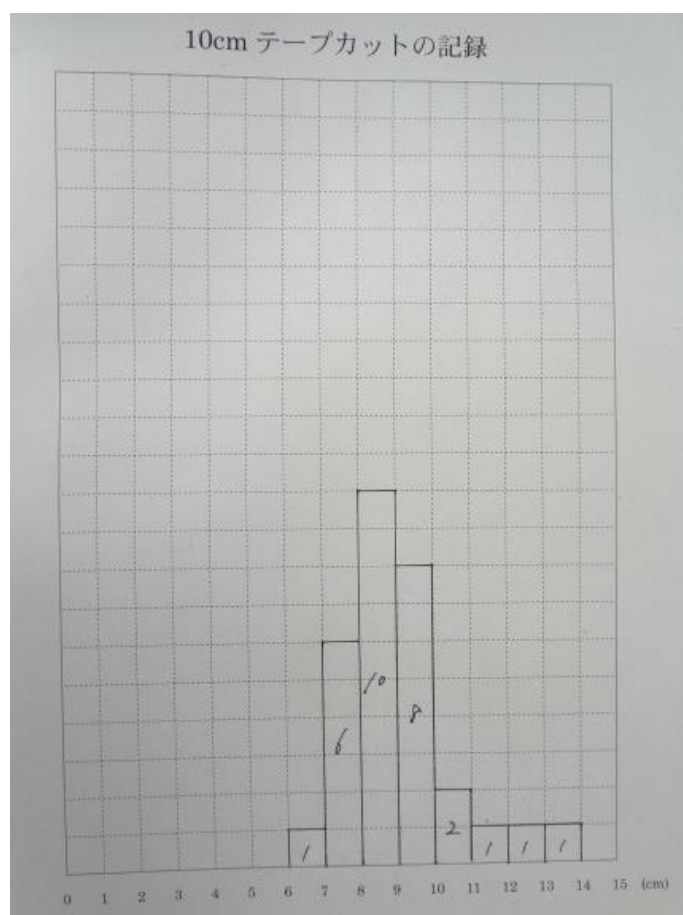
生徒：(作業を続けている)



先生：(机間巡視)

先生：(指示した作業を終えたのを確認してから) 今度は、長方形の中に (テープの本数が) いくつだったかを書き入れてください。

生徒：(作業を再開する)



先生：(机間巡視)

先生：(書き終えたのを確認して) (プリント2の)最後の作業に移りましょう。さっきはサイコロ 30 回振った (時の確率を求めた) のですけど、今度は 30 本のテープの確率を求めてもらいます。

生徒：(確率を求めている)

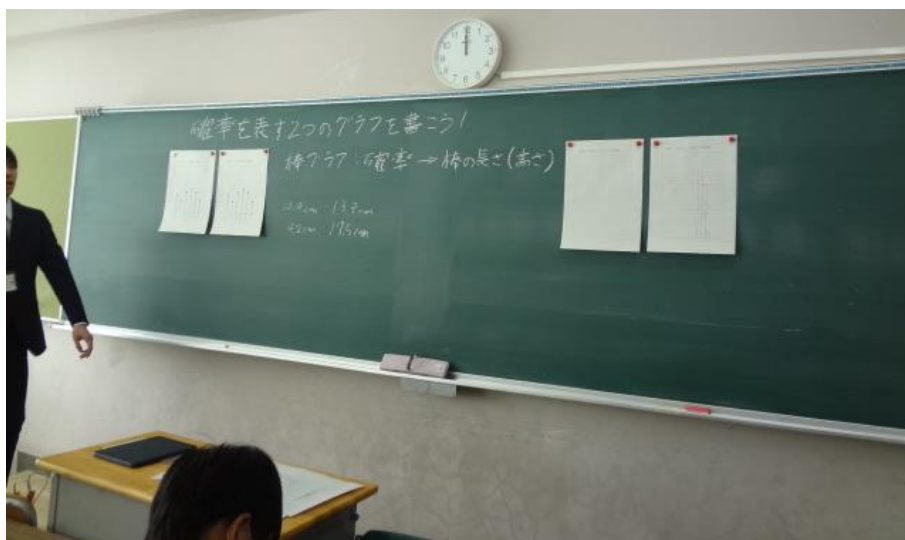
先生：(机間巡視)

先生：(すべての作業を終えたのを確認してから) では、周りの人とどのようなグラフになったかを共有してみてください。

生徒：(できたグラフを見せ合っている)

先生：(机間巡視)

先生：(話し合いが落ち着いてから) はい、これで確率を表す 2 つのグラフが書けました。
次の授業でこの 2 つのグラフを比較したいと思います。



第 2 時 (令和 2 年 1 月 10 日, 公立高等学校, 第 3 学年普通科, 21 名)

先生：前は 2 つの確率を表すグラフを作ってもらいました。
まず 1 つ目のサイコロのグラフ (プリント 1) のことを何グラフというか覚えていますか？

生徒：棒グラフ。

先生：そうですね。ではこのグラフで確率はどこに表れていましたか？

生徒：高さ。

先生：そうですね。

(今回の場合) サイコロを振って目が何回でたかというのを度数といいます。そして、30 回全体を 1 と見たときの度数の割合のことを相対度数といいます。相対度数は確率と同じ考え方をしています。なので、相対度数は確率であるといえます。つまり、度数と相対度数も (棒グラフにおける) 高さで表されます。ここまでは前回の復習です。では 2 つ目のグラフ (プリント 2) を見てください。このグラフの名前を覚えていますか？中学校 1 年生で習っています。覚えていない人？ (挙手を促す)

生徒：(ほとんどの生徒が手を挙げている)

先生：わかりました。

この(プリント2)のように長方形で囲まれたグラフのことをヒストグラムといいます。
ヒストグラムという名前を聞いたことある人？

生徒：(何人か手を挙げている)

先生：思い出してくれた人もいますね。

では、棒グラフは度数を高さで表していましたが、ヒストグラムは度数を何で表していると思いますか？

生徒：高さ。

先生：高さという意見が出ました。高さだと思う人？(挙手を促す)

生徒：(ほぼ全員が手を挙げている)

先生：逆に高さじゃないと思う人？(挙手を促す)

生徒：(誰も手を挙げない)

先生：実は高さではありません。(ヒストグラムでは)長方形の面積に度数が表れています。

なので、みなさんがグラフを書くときにテープの本数は縦軸のところではなく、長方形の中に書いてもらいました。

では、ヒストグラムにおいて相対度数はどこに表れていますか？

生徒：長方形の面積。

先生：そうですね。そして、ヒストグラムにおける相対度数も確率を表しています。

これで2つのグラフ(プリント1, プリント2)の確率がどこに表れているかが分かりました。では、同じ確率を表しているにもかかわらず、なぜグラフの名前が違っていると表し方が変わるのかについて考えてみてください。

生徒：(話し合いながら考えている)

先生：では聞いてみましょう。どうですか？

生徒：決まってるか，決まってないか。

先生：なるほど。今の（説明）で分かった人？（挙手を促す）

生徒：（半分くらいの生徒が手を挙げている）

先生：「どういうこと？」って感じの人？（挙手を促す）

生徒：（半分くらいの生徒が手を挙げている）

先生：もう少し詳しく説明してもらえるかな？

生徒：（プリント 1 の方は） どれが出るかというのが決まっている。ヒストグラムの方は決まってないけど，棒グラフの方は 6 個っていう選択肢がある。

先生：なるほど。言ってくれたことをまとめると，棒グラフは 1 から 6 までで必ず数字が 1 個に決まります。反対にヒストグラムは，この前の授業でやったように，テープの長さははっきりと分からないし，毎回バラバラになります。このことに注目してください。

実際にその通りで，この 2 つのグラフの違いは，値がはっきり決まるか決まらないかにあります。

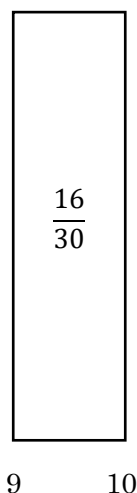
もう一度押さえ直すと，サイコロの目は 2.5 のような値は出ないですね。必ず 1 や 4 のようにはっきりとした値で出ます。これが棒グラフです。

それに対して，テープの方ははっきりとした値が分かりませんでした。それ（はっきりとした値が分からないこと）が長さです。それを扱うのがヒストグラムです。この違いが棒グラフとヒストグラムの違いです。

今回は，この 2 つのうちヒストグラムについて，もう少し詳しく見ていきます。

これは昨日の先生の例です。

(黒板)



先生：先生のグラフの中から1個長方形を取り出すとこんなふうになりました。
この長方形の横軸は何を表していると思いますか？

生徒：cm（センチメートル）。

先生：そうですね。cm（センチメートル）、つまり長さを表していますね。
この例では、9cm から 10cm という幅を表しています。
これを数学の用語で「9cm 以上 10cm 未満の階級」といいます。
そして、長方形の面積が確率を表していると言いました。
では、問題です。この長方形の縦は何を表していると思いますか？
ちょっと考えてみてください。

生徒：(各々考えている)

先生：ちょっと難しいですよ。なので、少し別の例を基に考えてみましょう。
今から小学校で習った算数を思い出してほしいのですが、「〇〇あたりの××」という表現を覚えていますか？例えば、 1km^2 あたりの人口という表現がありますよね。
ちなみに、 1km^2 あたりの人口のことを何といいましたか？

生徒：人口密度。

先生：そうですね。このように、〇〇あたりの××というのは、××の密度を表しています。
では、人口密度を求める公式を覚えていますか？

生徒：(横に首を振っている)

先生：では具体例で考えてみましょう。

2km²の中に200人いたとします。このとき人口密度はいくつになりますか？
式と答えを教えてください。

生徒：200÷2=100

先生：はい。200人÷2km²=100人/km²と求められますね。

これを一般化してあげると、「人口密度=総人口÷広さ」となります。

この式を書き換えると「人口密度×広さ=総人口」となります。

ところで、長方形の面積を求める式は分かりますよね？

どのように求めますか？

生徒：縦×横

先生：これは大丈夫ですね。「縦×横=面積」となります。

では、この2つの式（「人口密度×広さ=総人口」と「縦×横=面積」）を対応させると、「人口密度」、「広さ」、「総人口」は長方形のどの部分に当たりますか？

順番に聞いていきます。横の長さにはどれが入りますか？

生徒：広さ。

先生：その通りです。面積にはどれが入りますか？

生徒：総人口。

先生：そうですね。縦にはどれが入りますか？

生徒：人口密度。

先生：このように人口密度に関する3つの値（人口密度、広さ、総人口）は長方形に当てはめることができるということが分かりました。

このように、かけ算で表される式を、長方形を使って表すことは、数学の世界では多々あります。

では話を戻します。この長方形（先生の例）の横は長さ、面積は確率を表していまし

た。縦は何を表しているか（先ほどのことを踏まえて）考えてください。

生徒：（静かに考えている）

先生：では聞いてみましょう。たぶんでもいいので教えてください。

生徒：確率の割合。

先生：その確率の割合は何に対する割合ですか？

生徒：30

先生：なるほど。では別の人にも聞いてみましょう。

生徒：度数。

先生：なるほど。

先ほどの例に戻ると、ある広さ（ 1km^2 ）あたりの人口のことを人口密度といたしました。

そして、今回みなさんがやった実験の記録である長方形は、ある長さ（ 1cm ）の中に（テープが）入っている確率を考えています。つまり、ある長さ（ 1cm ）あたりの確率です。

それをふまえた上でもう一度だけ聞いてみましょう。

この長方形（先生の例）の縦は何を表していますか？

生徒：密度。

先生：何の密度ですか？

生徒：確率。

先生：その通りです。このように、単位あたりの確率のことを「確率密度」といいます。

先生：では、具体的に確率密度を求める式について見ていきましょう。

この（先生の例）横の長さはいくつですか？

生徒：1cm。

先生：そうですね。確率の値は $\frac{16}{30}$ と書いてありますね。
ところでみなさんは確率の単位を考えたことはありますか？

生徒：(首を傾げている)

先生：そうですね。確率に単位なんかつけないですよ。
ですが、無理やり単位をつけるとすれば、「1」とすることができます。
ではそもそも、この $\frac{16}{30}$ はどのようにして求めましたか？

生徒：16÷30

先生：そうですね。この16って何でしたか？

生徒：30本テープを切って、そのうち9cmから10cmの間に入った本数。

先生：そうでしたね。なので、単位は「本」です。
同じように30の単位も「本」ですね。
このとき、単位の計算を見ると、「本÷本」となっています。
「本」を1つの文字だと考えると、これらは打ち消しあって「1」となります。
ということで、無理やりにはなりますが、確率の単位は「1」とします。
では、それをふまえた上で確率密度を求めてみたいと思います。
確率密度を求める式はどうなりますか？

生徒：確率÷長さ

先生：そうですね。具体的に計算すると $\frac{16}{30}(1) \div 1(\text{cm}) = \frac{16}{30}(1/\text{cm})$ となりますね。
これを一般化すると(先ほど言ってくれたように)「確率÷長さ＝確率密度」となります。
これで、ヒストグラムの高さがか何を表しているかが分かりましたね。
ヒストグラムの高さは何を表していますか？

生徒：確率密度。

先生：そうですね。ヒストグラムの高さは確率密度を表しています。

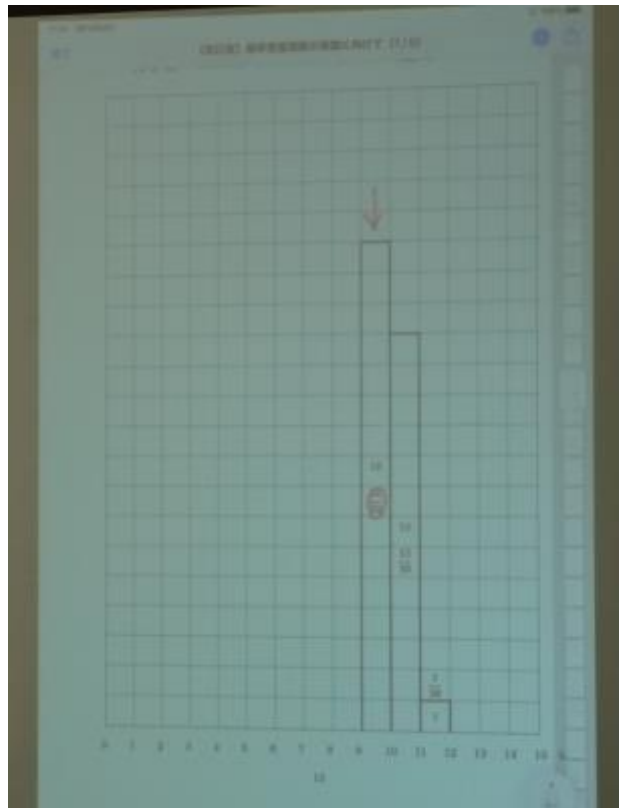


第3時（令和2年1月14日，公立高等学校，第3学年普通科，21名）

先生：ではまず前回の復習から入りたいと思います。

プロジェクターを見てください。

（スクリーン）



先生：この 9cm から 10cm で囲まれた（示しながら）ここの長方形について見ていきましょう。

この長方形を見たときに、切ったテープ 30 本を袋の中に入れてガサガサとかき混ぜた後に 1 本適当にぱっととったテープが 9cm から 10cm の間に入る確率っていうのはいったいどこに表れていたか覚えていますか？

生徒：面積。

先生：そうですね。では（長方形の横を示しながら）ここは何を表していますか？

生徒：cm。

先生：そうですね。つまり長さを表しています。

ちなみに具体的に何 cm ですか？

生徒：1cm。

先生：そうですね。

今、面積が $\frac{16}{30}$ 、横が 1 ということが分かりました。

ではこの長方形の高さはどのように求めればいいですか？

生徒：面積÷横

先生：そうですね。具体的に求めるとどうなりますか？

生徒： $\frac{16}{30} \div 1$

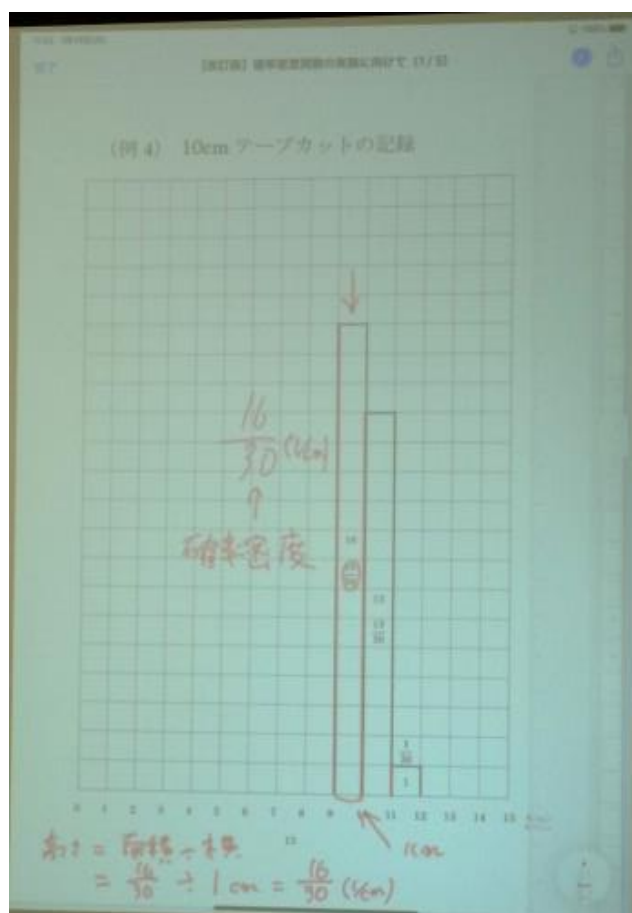
先生：そうですね。計算すると $\frac{16}{30}$ になり単位は「1/cm」となります。

そして前回の授業ではこの「1/cm」と表した長方形の高さの部分のことを「確率密度」ということを学習しました。

（作業に移りますが、）今からやってもらいたいのは、先生が前でやったように自分で作った（ヒストグラムの）長方形の高さのところに赤色で線を引っ張って、そこに確率密度がいくつになるかを計算して書き入れるっていう作業をしてください。

1つの長方形ではなくすべての長方形について求めてください。

気をつけるポイントとして、（長方形の左側に線を引きますが、）必ず右隣の長方形の高さに合わせて線を引っ張ってください。



生徒：(静かに作業をしている)

先生：(机間巡視)

先生：(全員が作業を終えたのを確認して) 次に、各長方形の横の部分に 1cm と書き込んでください。

生徒：(作業を続けている)

先生：(全員が書き終えたのを確認して) これですべての長方形の高さと横の値が分かりました。では、実際にみなさんが作ったグラフの確率の和を求める式を書いていこうと思うのですが、まずは先生の例を見てください。最初の長方形の面積を求める式を教えてください。

生徒： $1 \times \frac{16}{30}$

先生：そうですね。ですが，ここでは便宜上 $\frac{16}{30} \times 1$ としておきます。
次に真ん中の長方形の面積を求める式を教えてください。

生徒： $\frac{13}{30} \times 1$

先生：そうですね。では最後の長方形の面積を求める式も教えてください。

生徒： $\frac{1}{30} \times 1$

先生：そうですね。このように（これらの和をとると）求められます。
ではみなさんもこのような式に表して確率の和を求めてみてください。

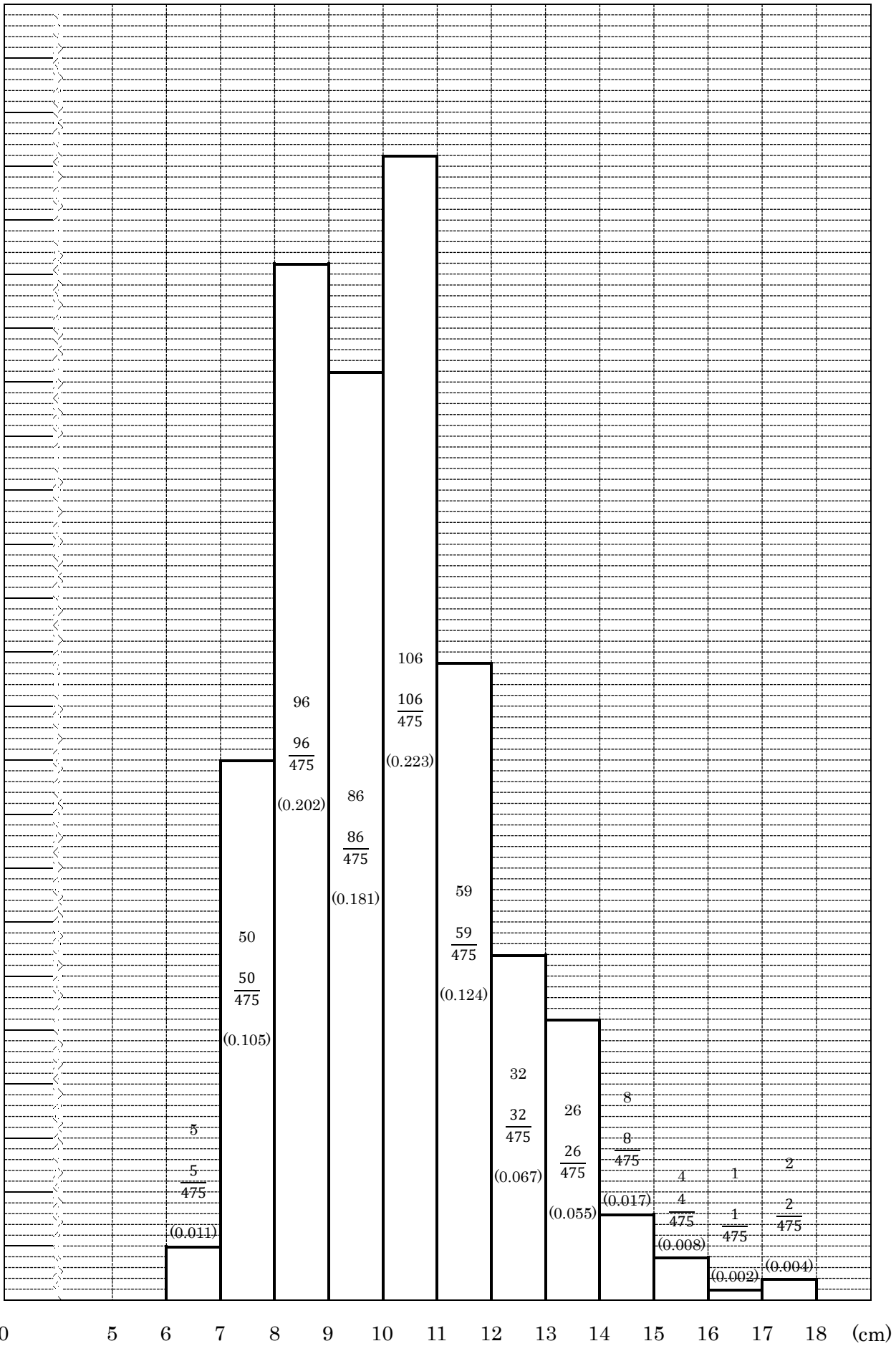
生徒：(計算している)

先生：(机間巡視)

先生：(計算を終えたのを確認してから) これを見てもらえれば分かるとおりに計算すると 1 になります。みなさん違うグラフになったと思いますが，すべての長方形の確率の和を求めると全員 1 になったはずです。これは全事象の確率を足すと 1 になるようにしたので，1 になってない人は計算ミスをしていると思います。
これが，みなさんが 30 本切ったテープについてでした。
先生はみなさんのデータを 1 つにまとめてきました。
今から配るのでみてください。(プリントを配る)

生徒：(プリントを受け取り目を通して)

先生：分布はこのようになりました。



先生：大体真ん中に行くほど本数が多くて、横の方に行けば行くほど少なくなっています。
一番高いところだと 106 本で、確率は 2 割ちょっとくらいですね。
これが 10cm から 11cm の長方形なのでみなさんいい線いってますね。
では今度は（このプリントの）9cm から 11cm に（テープが）入る確率を求めてもらおうと思います。
グラフに確率を書いてありますが、そうではなく先ほどと同じように高さのところに赤線を引っ張って、確率密度を書き込んでから求めてもらおうと思います。
では始めてください。

生徒：（再び作業をしている）

先生：（作業を終えたのを確認してから）では 9cm から 10cm の長方形の確率密度はいくつになりましたか？

生徒： $\frac{86}{475}$

先生：そうですね。そして単位は 1/cm ですね。
ではもう 1 つの方（10cm から 11cm の長方形の確率密度）はいくつになりましたか。

生徒： $\frac{106}{475}$

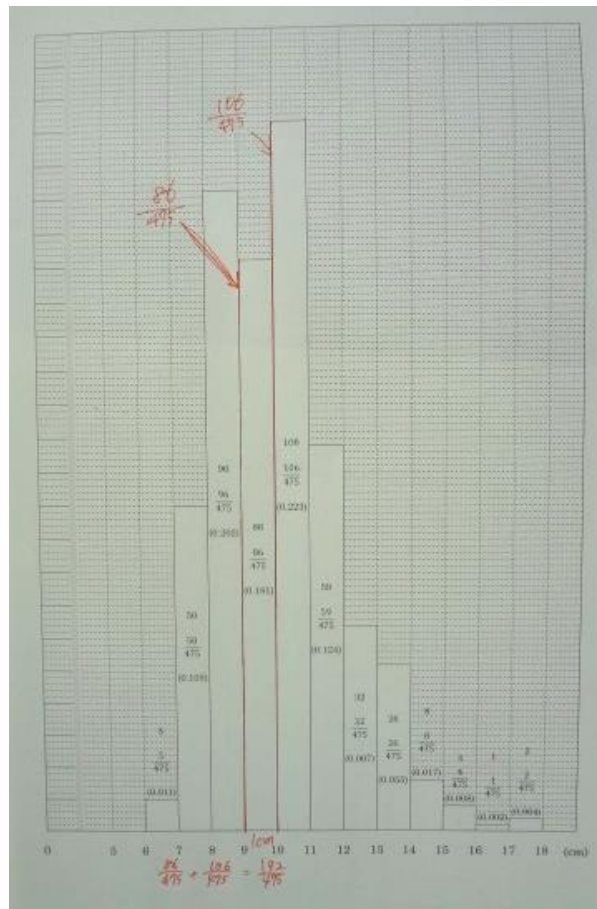
先生：そうですね。では、これを基にみなさんが切ったテープの中からランダムに取り出したテープが 9cm から 11cm に入る確率を先ほどと同じ方法で表してください。

生徒：（計算している）

先生：（計算し終えたのを確認してから）では式を教えてください。

生徒： $\frac{86}{475} \times 1 + \frac{106}{475} \times 1 = \frac{192}{475}$

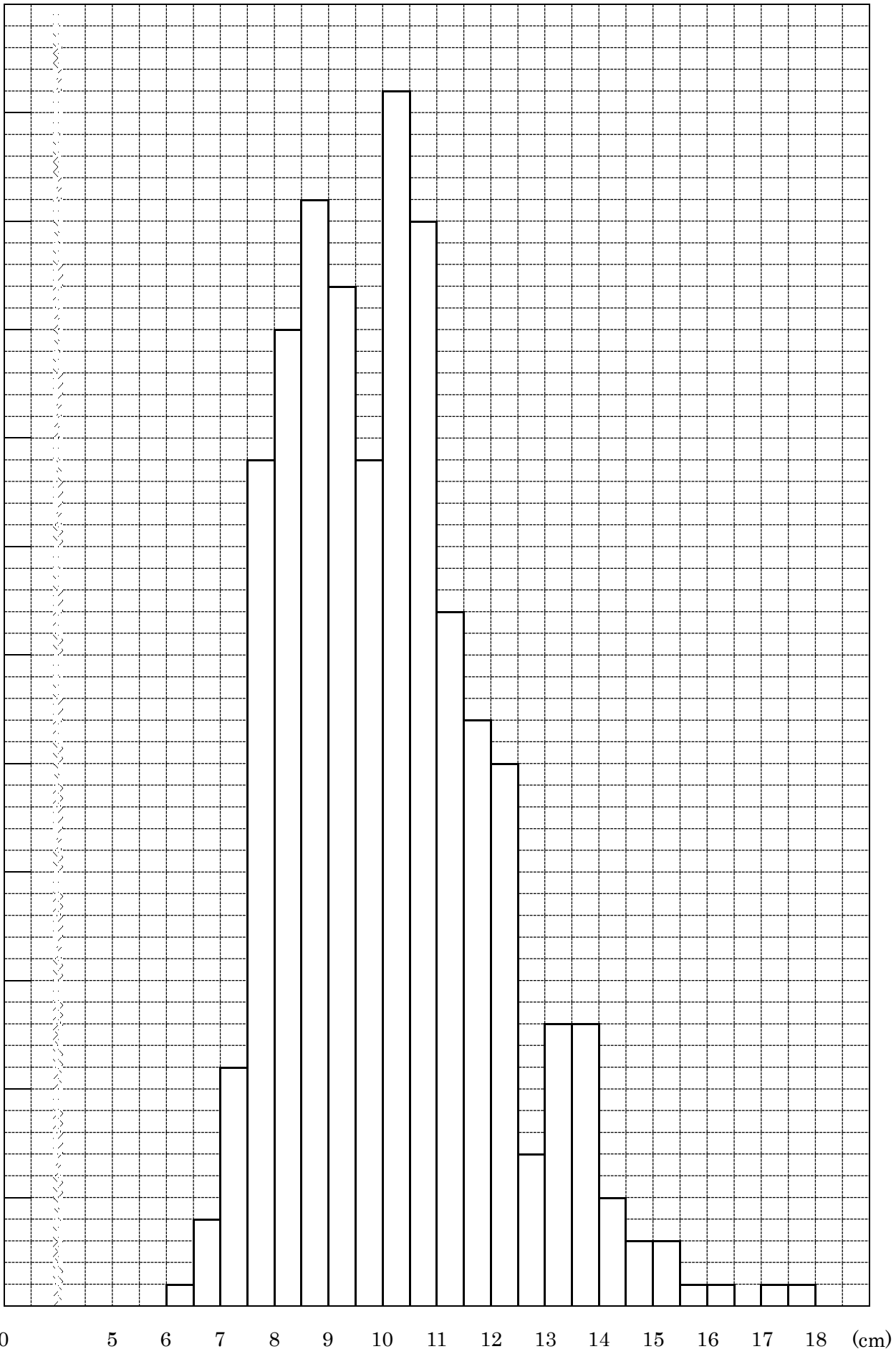
先生：いいですね。これが 9cm から 11cm に入る確率になります。だいたい 4 割くらいですね。



先生：ここまでは 1cm 刻みで考えましたが、データの量が多いのもっと詳しい分布が見れると思ったので、もう少し細かいものを用意してきました。それをまた配ります。
(プリントを配る)

生徒：(プリントを受け取り眺めている)

先生：今度は 0.5cm 刻みでグラフを作ってきました。
これについても同じように求めていこうと思います。
(グラフに入らなかった数値を口頭で伝える)



先生：それではまた赤で線を引いて数値を記入し，確率密度を記入してください。
確率密度は自分で計算してください。

生徒：(静かに作業をしている)

先生：(机間巡視)

先生：(できたのを確認してから) では聞いてみましょう。
一番左側(階級 9.0cm 以上 9.5cm 未満)の長方形の確率密度はいくつになりましたか？

生徒： $\frac{94}{475}$

先生：そうですね。では次のところ(階級 9.5cm 以上 10.0cm 未満の確率密度)はどうになりましたか？

生徒： $\frac{78}{475}$

先生：そうですね。次(階級 10.0cm 以上 10.5cm 未満の確率密度)はどうですか？

生徒： $\frac{112}{475}$

先生：そうですね。では最後(階級 10.5cm 以上 11.0cm 未満の確率密度)も教えてください。

生徒： $\frac{100}{475}$

先生：そうですね。これで確率密度がいくつか分かりました。
ということで，また(ランダムに取り出したテープが 9cm から 11cm に入る)確率を求めてください。

生徒：(計算をしている)

先生：(机間巡視)

先生：(全員が終えたのを確認してから) では式を教えてください。

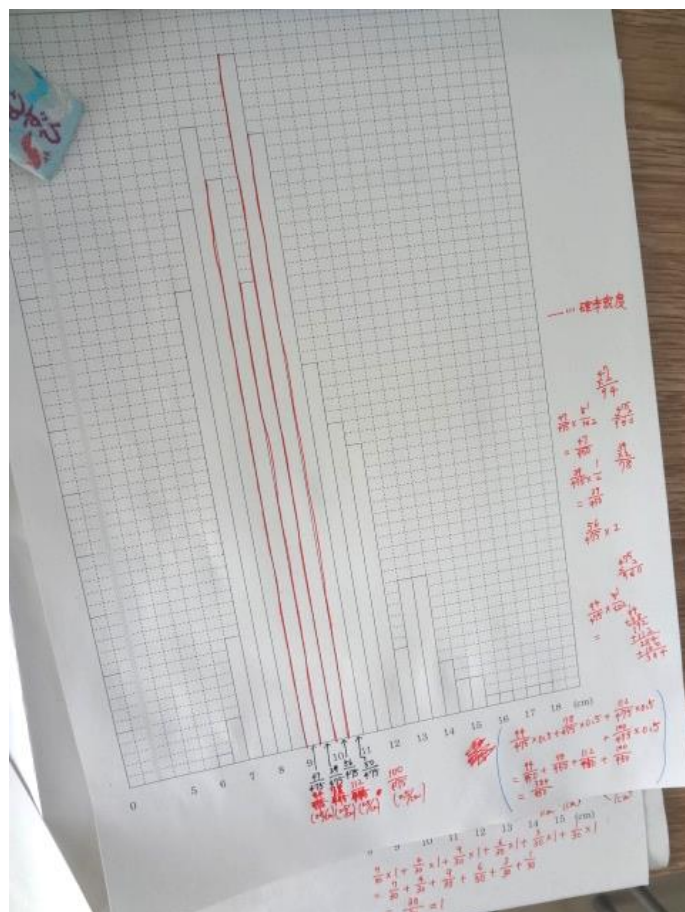
生徒： $\frac{94}{475} \times 0.5 + \frac{78}{475} \times 0.5 + \frac{112}{475} \times 0.5 + \frac{100}{475} \times 0.5$

先生：いいですね。では答えも教えてください。

生徒： $\frac{384}{950}$

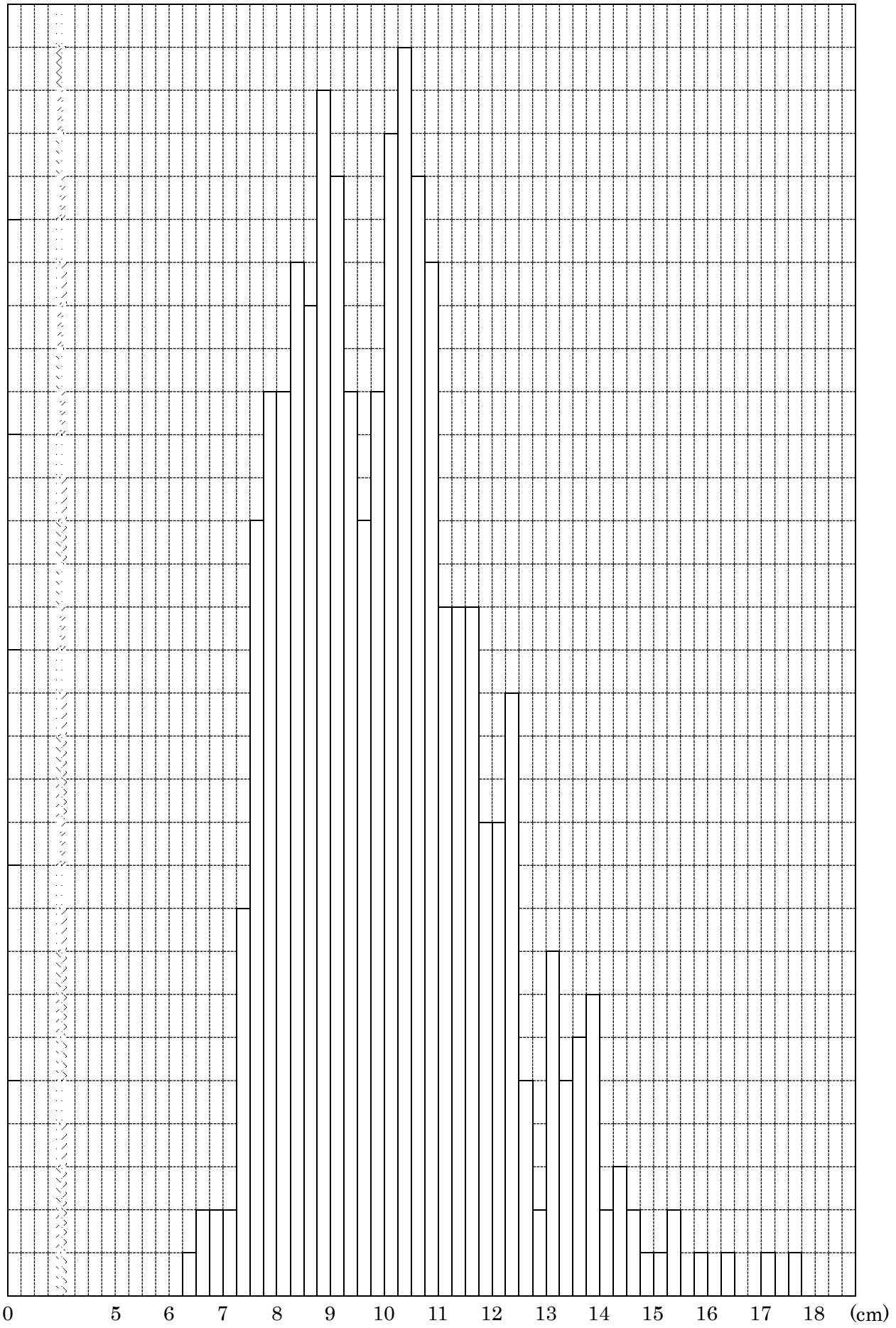
先生：そうですね。 $\frac{1}{2}$ をかけたので分母が変わっていますが、約分してあげると $\frac{192}{475}$ になりますね。

これは当たり前ですが、同じデータを詳しくしただけなので1つ前のデータと比べてみても値が一致していますね。



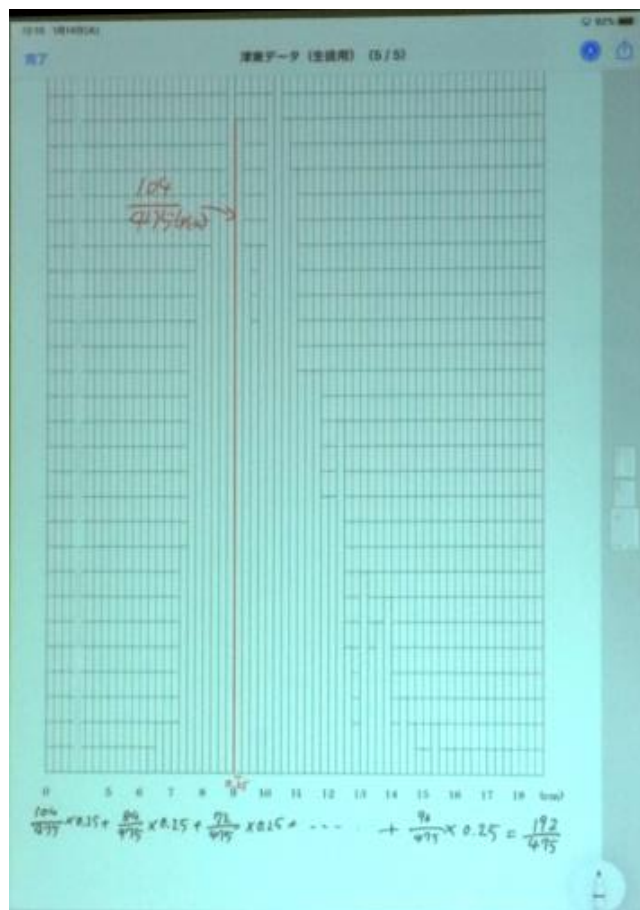
先生：実はさらに細かいデータも用意してきました。

前のプロジェクターを見てください。こんな感じになりました。



先生：また，9cm から 11cm の確率を求めようと思ったら，高さをまず求めなければいけないので，（前で示しながら）こんな風に今度は 8 本の長方形に線を引きます。横の幅は先ほどの半分の 0.25cm です。計算式を書くと，このようになります。

（スクリーン）



先生：これを計算すると先ほどの $\frac{192}{475}$ と同じ値になります。

このようにどんどん細かくなっていっても同じように足し算をすれば確率を求めることができます。

幅を細かくすればより詳しいデータを知ることができますが，これまでの3つのグラフを比べると，最初のグラフは綺麗な山の形をしています，どんどん細かくなるにつれてなんだかガタガタな凹んだ部分のある形になっていると思います。

なぜこのようになるかという，データの数が足りないからです。もっとデータが多くなれば（0.25cm 刻みのグラフも）ガタガタがなくなると思います。

データの数を増やして階級の幅もどんどん狭くして，この 9cm から 11cm の幅を n 等分する場合について考えたいと思います。

では、 n 等分した時の横幅を Δx とします。最初のところ（の横軸の値）を x_1 、最後のところ（の横軸の値）を x_n とします。そしてこの高さ、例えば最初のところの値 x_1 に対する高さの値を $f(x_1)$ と表すことにします。そうすると確率を求める式がどのようなかという、

$$f(x_1) \times \Delta x + f(x_2) \times \Delta x + \dots + f(x_n) \times \Delta x$$

となります。

これを数列と同じように見立てて数列の和の記号を用いて表すことができます。

$$\sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$$

今この式は n が有限、つまり数字がはっきりと分かっている場合を考えていますが、もっともっと細かくしていくと次のような式に変わります。

$$\int_{x_1}^{x_i} f(x) dx$$

みなさん見たことありますよね？積分記号です。

実は今回作ったグラフは積分を使って確率を求めることができます。

そして、今回みなさんに覚えてもらいたい数式はこれです。

$$P(a \leq x \leq b) = \int_b^a f(x) dx$$

先生：この P は「probability」、確率という意味の英語の頭文字をとって、確率のことを表しています。かつこの中に書いてあるのは x の範囲を表していて a から b の範囲を表しています。例えば先ほどの例でいうと a が9、 b が11になります。このように a から b の確率を求めるときは積分をします。 a から b までの定積分ですね。そして、今回出てきたこの $f(x)$ というのは確率密度を表しています。今回はグラフがガタガタでしたが、どんどん細かくしていくと、最終的には曲線の形になります。その曲線のことを確率密度曲線といいます。さらにそれを関数の式で表したものが $f(x)$ で、確率密度関数といいます。

数学Ⅱでは、積分は微分の逆演算と習いましたが、積分の本質は、曲線の中にたくさん長方形を敷き詰めて、その長方形の和を求めることで、曲線で囲まれた部分の面積を求めることにあります。

第四節 成果と課題

1. 中学校

第1時（令和3年2月2日）

第1時はヒストグラムを作成する活動を行った。また、ヒストグラムを作成する際、連続量は真の値が分からないため、一定の幅を用いて考えなければならないことが分かることを目標とした。

生徒の様子は、事前に授業見学をさせていただいた際に顔を合わせていたこともあり明るく、挙手を促すと積極的に手を挙げる姿が印象的だった。また、学校での積極的な取り組みもあり、グループ活動による対話的な学びに慣れており、生徒どうして活発に議論する様子もうかがえた。

ヒストグラムを作成するにあたって、今回はテープカットを題材として用いた。この題材の良い点は、だいたいの感覚で目標の長さを切り取るので、データとしてまとまりはありつつ、ほどよくばらけるという点である。また、グラフ用紙の横軸を実際の長さに対応させることによって、切ったテープの長さが直接グラフに反映されるという点も、活動と記録が直結する実感を持った理解の促進につながると考えられる。実際、生徒の記録を机間巡視時に確認すると、だいたいの生徒の記録にテープの長さの散らばりが見られた。

目標を達成するために、カットしたテープを定規で測定する活動を行った。そして測定した値に対して、本当にその値だったかと発問することによって、測定した値が真の値でないことに気づくと考えた。実際に、発問の直後の話し合いの中で真の値の測定は不可能なのではないかという意見がでており、その後の全体への問いかけにおいてもほぼすべての生徒が理解している様子だった。

本時の主な反省点としては、真の値は分からないということは理解させることができたが、幅をとってその間に入るかどうかを調べればよいということに気づかせられず、教師からの説明になってしまった。学校の先生方ともこれについて話し合ったが、良い発問や活動が考えられなかったため、今後の課題となった。

また、授業の方法論に関する反省として、板書と生徒に配るプリントを統一することが挙げられた。

第2時（令和3年2月3日）

第2時は第1時で作成したヒストグラムを度数分布表で表す活動及び、ヒストグラムの理解を深める指導を行った。その中で、ヒストグラムの度数は長方形の面積で表されていること、ヒストグラムの長方形の各面積は各階級の度数に比例すること、ヒストグラムの長方形の高さが度数の密度を表すことの3つを理解することを目標とした。

第1時と同じく明るく活発な印象を受けた。終盤の理論的な内容の部分で生徒の集中が

途切れてしまうことも考えていたが、大体の生徒が集中を切らさずに授業に臨んでいた。

授業はまず初めに、度数分布表を作った上で度数が 0 となる階級を無くすためにはどうすればよいかを考えさせた。度数が 0 となる階級を含む教師の例を基に考えさせたが、同じように度数が 0 となる階級を含む生徒が半数近くいたため、当事者意識を持ちながら考えているようだった。階級の幅を変えるという結論にスムーズに達していた。中には、階級 11cm 以上 14cm 未満にする際にグラフの目盛りから 12cm と 13cm を無くせばよいといった意見も出ていたが、それ以外の方法で考えるように指示することで軌道を修正した。

次にヒストグラムの長方形の面積が度数を表すことについては、階級の幅を変えた場合におけるヒストグラムの長方形の形について考えさせた。ここでは予想通り、長方形の高さで度数を表す派と長方形の面積で度数を表す派に意見が分かれ、生徒同士で議論する場面を作ることができた。その結果、最終的にはほぼすべての生徒が長方形の面積が度数を表すことに対して自ら理解を深めていた。ごく一部の生徒が生徒同士の話し合いの中で、長方形の面積が度数を表すことに納得していなかったが、教師が説明することで理解している様子だった。

最後にヒストグラムの長方形の高さが度数の密度を表すことについて考えさせた。できる限り生徒のもつ知識を引き出し統合させることで度数の密度を理解させることを試みた。しかし、それでも生徒らが度数の密度を完全に理解したとは言い難い印象を受けた。教師が予想するより、中学生にとって密度の概念を理解することは難しいのではないだろうか。

本時の内容は生徒の認識からすると、少なくとも 2 時間分を要するのではないかと感じた。生徒に考えを深めさせたいポイントが階級の幅を変えてもよいということと、ヒストグラムの長方形の面積が度数を表すことの 2 点あったが、それぞれに時間をしっかりととって、生徒が考える機会を設けることによって理解もより深められたのではないだろうか。

<生徒の振り返り>

1. テープを使って記録できた。新しい用語も使っていこうとおもいます。
階級の幅 3cm の時、度数の合計が 3 だったので (図) でもじっくりくると思ったけど、先生が「5 よりも大きく見える」と言っていたので、たしかに。と感じた。
2. ○cm～○cm の間の本数の表し方を知った。
ヒストグラムは○を使わないから階級を表すとつながって横に広がる。その縦は密度。
3. すこしいろいろとわかった。
今日は、すごくよかったと思った。わからないところもあったけどとけてうれしかった。
4. 今日はテープを使った授業をしました。テープを使うと授業が分かりやすくて良かったです。
今日は度数分布表をかきました。面積、横、縦の意味することも分かったので良かったです。

5. 今日は、階級と度数などのことがわかりました。
今日、度数密度などのことをやって、難しくあまり覚えられていないので復習して覚えたいです。
6. 10cm のテープを目で見て覚えて切るのは難しいことがわかった。
度数分布表で、0 が空いていたらしょうりやくする方法がわかった。ヒストグラムは度数密度などの方があることがわかった。
7. 10cm ぴったりにするのが、難しかった。
度数÷階級の幅 で密度を求めることができる。また、ちがう単位どうしは / を使って表す。
8. 数学用語で cm を表し方は階級で表すことが分かった。
度数密度がたてだと分かり求め方は 面積 (度数) ÷ 横階級のはば で求めると分かった。
9. 覚えた長さで切ってみると全ぜん長さが合わなくて難しいと思った。
度数分布表の書き方がよく分かった。
10. 階級、度数ということばをしれた。
昨日の用語もいまいちだったところに、また新しい用語がでてきてよけいわからなくなってきたので、復習を、がんばりたい。
11. メモリは、ぴったりではなく、ほぼだいたいということがわかった。
12. $3 \div 3$ のとき 1m ピッタリに切れませんでした。私はぜんぜん cm のかんかくないんだなって思いました。
縦 3 横 3 でかいていて、いわかんがあつたけど、なにがおかしいのか気がつけなかったなので、よく考えたいです。
13. 10~11 の間とかは階級とわかりました。
度数とか、最初は、何やろとか思っていたけど、グラフの書き方とかきいているとわかりました。
14. かなり理解できた。
階級度数ということばをおぼえる。
15. 資料を活用するのがグラフに表らわせるのがよかった。
度数密度をならって新しくなったのは (本/cm) とかてなった。
16. 資料の活用をがんばって分かるようにしたい。
度数分布表のことについて知れてよかった。度数密度についても。
17. 階級など数学用語がわかってよかった。
度数密度についてわかりました。
18. あたらしい言葉のいみをりかひできた。
縦、横、面積それぞれに、意味があることをしつたのと、それにともなって単位もあることをしつた。

19. 今日のじゅぎょうすごくわかりやすかったです。すごく楽しかったです。
20. 新しい用語ができた。
度数，階級の幅，度数みつ度が分かった。
21. 10～11の間は階級10以上11未満ということがわかった。
資料の活用は覚えなければいけないから家でも復習しようと思いました。
22. ふつうにたのしかったです。
すごいわかりやすい説明をしてくれてよかった。新しいことをしれてよかった。
23. ぴったり10cmにするのは難しかったけど，楽しかった。
単位と単位をわることができる分かった。
24. さいしょは何いってるのかわからなかったけどなんとなくわかった。
25. 階級がわかった。
ヒストグラムは面積によって分布されていることがわかった。度数密度がわかった。
26. 今日はあたらしいところをした。むずかしくて，ぜんぜん分からなかった。
今日は，たくさんのことばをならった。昨日より，できたし，けっこう理解できた。でも，ことばは忘れそうなのでがんばりたいです。
27. 少しむずかしかったけどだいたいわかったしおもしろかった
度数密度がどういうものなのかわかった。
28. わかりやすかった。
面せき，よこ，たてすうがくようごがわかった。
29. 少しむずかったけど分かった。
ヒストグラムは面積で表すことが分かった。単位とでも割り算できることが分かって○/○で表すことが分かった。
30. 以上，未満のことを復習しておきたい。
今日は新しい言葉をけっこう習ったから忘れずにおぼえておけるよう工夫していきたいなと思う。
31. 度数が1ではなく3になった場合の書き方が分かった。
面積：テープの本数（本）←度数
横：幅（cm）←階級の幅
縦：テープの本数の密度（本/cm）←度数密度
と言う事が分かった。
32. 問題があまりよく分かりませんでした。
今日は，少し分かったけど，まだ少し単位の分り算が分からなかったので近くの席の人に聞こうと思います。

【考察】

生徒の振り返りから、授業の内容や新出の用語について分かった、知ったと書いている生徒は全体の約6割だった(※)。逆に1割弱の生徒が「分からない」、「難しい」といった趣旨を記述していた。残りの生徒は授業を受けた感想を書いていた。

(※)の生徒の記述のほとんどは具体的なことが書かれておらず、形式的に書いただけの可能性も考えられるため、本当に理解しているのかを判断するのは難しい。しかし、その中でも1.の「階級の幅3cmの時、度数の合計が3だったので(図)でもじっくりくると思ったけど、先生が『5よりも大きく見える』と言っていたので、たしかに。と感じた。」という記述には具体的な場面が書かれており、実感を伴って理解しているように見受けられる。

授業の目標に対する生徒の達成度合いについては、次のようなことが考えられる。第1時は11.の「メモリは、ぴったりではなく、ほぼだいたいと言うことがわかった。」という振り返りから、長さを連続量として捉えている様子が見える。また、21.「10~11の間は階級10以上11未満ということがわかった。」や、25.の「階級がわかった。」という振り返りから、階級をとることを理解していると考えられる。しかし、階級を用いることの必然性に関する記述がないことから、深い理解には到達していないのではないだろうか。第2時は25.の「ヒストグラムは面積によって分布されていることがわかった。」や、29.の「ヒストグラムは面積で表すことが分かった。」という記述から、ヒストグラムの長方形の面積が度数を表すことを理解していることが分かる。しかし、長方形の面積が度数に比例しているといった言葉がないことから、感覚的な理解にとどまっていると考えられる。また、7.の「度数÷階級の幅で密度を求めることができる。」や、8.の「度数密度がただと分かり求め方は面積(度数)÷横階級のはばで求めると分かった。」という度数密度に関する記述は見られるものの、この記述からだけでは、度数密度の概念を真に理解しているかどうかは分からない。

以上のことから、大半の生徒が授業内容について「分かった」としているものの、実際にどの程度理解しているのかを確認するには至らなかった。しかしながら、授業中の生徒の活動の様子からすると、活動を通して理解していく姿が多々見受けられた。

2. 高等学校

第1時（令和2年1月8日）

第1時は確率密度関数の理解に対する手がかりとなる、確率を表す離散型と連続型のグラフを作成する活動を行った。また、連続型のグラフを作成する際、連続量は真の値が分からないため、一定の幅を用いて考えなければならないことが分かることを目標とした。

生徒の様子は、初対面ということもあり非常におとなしく、こちらから挙手して発言するように促しても手が上がらないことがほとんどだった。しかし、こちらの発問に対して考えはおり、こちらから指名して発言を促すとしっかりと考えを述べていた。

連続型の確率を表すグラフを作成するにあたって、今回はテープカットを題材として用いた。この題材の良い点は、だいたいの感覚で目標の長さを切り取るので、データとしてまとまりはありつつ、ほどよくばらけるという点である。また、グラフ用紙の横軸を実際の長さに対応させることによって、切ったテープの長さが直接グラフに反映されるという点も、活動と記録が直結する実感を伴った理解の促進につながると考えられる。実際、生徒の記録したグラフを回収し確認を行ったところ、ほぼすべてのグラフが山型となっていた。また、離散型のグラフと書き方が異なることも理解しながら連続型のグラフを書いているようだった。

目標を達成するために、カットしたテープを定規で測定する活動を行った。そして測定した値に対して、本当にその値だったかと発問することによって、測定した値が真の値でないことに気づくと考えた。実際には、最初の発問の段階で真の値の測定が不可能だと考える生徒は過半数以上で、残りの生徒もそのことを確認したうえでもう一度測定させると理解している様子だった。

本時の反省点としては、真の値は分からないということは理解させることができたが、真の値の時は幅をとってその間に入るかどうかを考えなければならないことを分からせることができなかった点である。この幅をとるとということが階級を考える基となる部分であるため、もう少し強調すべきだった。

第2時（令和2年1月10日）

第2時は第1時で作成した2つのグラフを比較することによって、連続型の確率を表すグラフ（ヒストグラム）の理解を深める指導を行った。その中で、ヒストグラムの相対度数が確率を表していること、ヒストグラムの確率は長方形の面積で表されていること、ヒストグラムの長方形の高さが確率密度を表していることの3つを理解することを目標とした。

第1時に比べると手が上がる印象はあったものの、依然として手が上がりにくい状況だった。さらに、第1時は作業が中心の授業だったが、本時は考えることが中心の授業だったため、生徒の表情が曇る場面も多かった。

授業ではまず初めに、相対度数が確率を表すということを押さえた上で、離散型と連続型

のグラフでは確率の表し方が異なることを示し、なぜ異なるのかを考えさせた。第 1 時での学習にヒントがあることをほのめかし、考える時間を多めにとったため、ほとんどの生徒が、横軸の値が離散型のときは、はっきりと決まるが、連続型のときは、はっきりと決まらないので確率の表し方が異なるということを理解していた。

次に、ヒストグラムの長方形の高さが確率密度を表すことを学習するために、かけわり図や人口密度の例を基に授業を展開した。しかし、具体的な計算はできるが抽象化して考えることが困難のように見受けられた。本来であれば既習事項であるため、すぐに理解を深められると予想していたが、あまり定着していない様子だったため、より丁寧な指導を心がけた。

反省点としては、生徒の実態を把握しきれていなかったこともあり、準備が不足していたことが挙げられる。特に「密度」という概念をこれまでに学習していないようだったので、これに対する指導についても見つめ直す必要があると考えた。

第 3 時（令和 2 年 1 月 14 日）

第 3 時は生徒が個々に作成したデータを 1 つにまとめたものをより細かく見ることによって、ヒストグラムから確率密度関数への移行と確率密度関数に関するまとめを行った。また、第 2 時の様子から授業展開の修正が必要だと判断し、当初の計画と異なる流れで授業を行った。そして、実際に確率を求める活動を通して、連続型の確率の求め方を一般化し、理解することを目標とした。

第 2 時までの生徒の様子を考慮して、本時は挙手によって発言させるのではなく、指名して発言を促した。ただし、わからなくてこちらの発問に答えることができない生徒もいるということも踏まえて、最初に「分からないときは正直に分からないといってくればよいですよ。」と指示した。また、本時は計算などの活動が多く、プロジェクターを用いたこともあり、生徒の様子は第 2 時に比べると明るかったように感じた。

第 2 時ではグラフの長方形を 1 つ取り出して考えていたが、本時ではグラフに直接書き入れたことにより、自分たちの活動と結びつけて理解することができたと考えられる。また、グラフの階級の幅を狭めながら同じように計算して確率を繰り返し求めることにより、理解が深まり定着しているように感じた。具体例から一般化するときにも、具体例の計算の下に対応させて一般化した式を書き入れることにより、一般化した式の構造理解につながったと考えられる。

授業の反省点としては、作業の指示があいまいだったことが挙げられる。実際に、机間巡視で計算しているところを確認すると、間違った立式をしている生徒が何人かいた。今回はこのような生徒には個別に対処したが、具体的な計算の例を 1 か所示すなど、作業の指示を明確にする必要があると考えられる。また、今回の授業では確率密度曲線を実際に示していないので、今回の学習と確率密度関数が結びついていない可能性がある。

終章 まとめと総括

第一節 研究の成果

第一章

先行研究を考察することにより、戦後の学校教育における統計教育の歴史には、大きく分けて5つの転換期があったことを示した。また、最新の学習指導要領では木村の提案した統計的探究プロセスモデルである「とらえるーあつめるーまとめるーよみとるーいかす」が体系化されようとしていることも明らかにした。

第二章

現在の統計の学習内容の3つの欠点を明らかにした。1つ目は「面積図」が教えられていないこと、2つ目は「度数分布表→ドットプロット図→ヒストグラム」の流れはあるものの、変数 x が分離量から連続量へ変わったとき、散らばり具合を視覚化するために、どうして高さから広さに変えなければならないのかの説明がなされていないこと、3つ目は、積分を「単位あたり量×いくら分＝全体の量」を利用した区分求積法で説明していないので、積分することは何を求めていることなのかが理解できないことである。

また、これらの欠点を補うための要素を4点挙げ解決策を明らかにした。1つ目は「面積図」を教えること、2つ目は変数 x が分離量から連続量へ変わったとき、散らばり具合を視覚化するために、どうして高さから広さに変えなければならないのかを教えること、3つ目は区分求積法で積分を説明し、積分することは何を求めていることなのかを理解させること、4つ目は「なぜ「密度関数」という名称が使われるのか」についての説明やそれを想起させられる授業をすることである。

第三章

最終的に確率密度を理解するためには、かけわり図（分離量型）→ かけわり図（連続量型）→ 「単位あたり量×いくら分＝全体の量」（連続量型）の面積図 → 度数のヒストグラムのそれぞれの長方形の縦の長さが度数の密度（度数密度） → 相対度数のヒストグラムのそれぞれの長方形の縦の長さが確率の密度（確率密度） → $y=f(x)$ の y の値が確率密度の順に指導すべきことを明らかにした。

さらに、棒グラフとヒストグラムと確率密度関数の関係についても明確にした。

第四章

アンケート調査により、小・中の教員や教育学部学生のヒストグラムの意味に関する正しい理解が不十分であることを明らかにした。高等学校の教員は確率密度関数に対する理解や、指導上の留意点についてはある一定の見解を持っていることを明らかにした。

第五章

連続量を意識させる指導は、ヒストグラムの意味及びヒストグラムと確率密度関数の関係を理解させる上で有効であることを明らかにした。実際にテープをカットし、その記録からグラフができあがっていく過程を通して生徒が実感を伴って理解できたことは、テープカットを用いたヒストグラムや確率密度関数の指導も有効であったことを示している。

第二節 今後の課題

以下の2点が今後の課題である。

- ・連続量に対して階級という概念を用いなければならない必然性を、生徒から引き出すための発問を考案すること。
- ・生徒の「密度」に対する認識を明確にし、その改善のための指導方法を開発すること。

謝辞

本論文を書くにあたって、論文の内容全般にわたって、三重大大学の中西正治先生にご教授いただきました。専門的な内容では、同大学の玉城政和先生にご教授いただきました。また、授業実践では、同大学の田中伸明先生、三重県立津東高等学校の校長先生をはじめ数学科の先生方、三重県津市立一身田中学校の校長先生をはじめ数学科の先生方に大変お世話になりました。現場の先生方には研究授業の打ち合わせや、授業中のサポートなど全面的なご支援とご協力をいただきました。ここに謹んでお礼申し上げます。