

直線描画による純正率フレットの位置決定

野 呂 雄 一

要 旨

弦楽器の多くは振動させる弦の長さを変えることで音の高さをコントロールしている。例えば、ギターでは指板上に規則的に並んだフレットという突起の位置に合わせて弦を押さえることで、弦が決まった長さに固定されて所定の音高が得られるようになっている。そのため、フレットは音階を構成する個々の音毎に正しい位置に配置される必要があり、計算式や専用尺を使ってその位置が決定されている。一般的な音階である十二平均律については定規やコンパスを使った幾何学的な作図によってフレットの位置を決める方法も知られており、音楽と数学の関係性に興味を持たせる題材としても利用されている。本稿では、これと同様に純正律について作図によりフレットの位置を決定する独自の手順を考案したので、紹介する。

はじめに

ギターやバイオリンに代表される弦楽器では、楽器に張られた弦を指で押さえることによって弦の振動する部分の長さを変えて音の高さ（以下、音高）を調節する。バイオリンのように奏者の感覚で押さえる位置を自由に変更できるものもあれば、ギターのように規則的に並んだフレットという突起によって決められた位置を選択するものもある。弦の振動の基本振動数は張力が一定であれば弦の長さに反比例するため、フレットを有する楽器では音階に合った音高となるようそれらの位置が決められて製作されている。したがって奏者は出したい音に対応するフレットの位置で弦を押えれば正しい音高を得ることができる。このようにフレットの位置は弦の振動という物理現象や音階を構成する音高（周波数）と密接に関係しており、数学的に算定することが可能である。ピアノやギターをはじめ多くの楽器で使われている十二平均律という音階を構成する音高の並びには規則性があり、フレットの位置を数学的に求めることは比較的容易である。また、数式に基づく計算を幾何学的な作図作業に置き換えることで、計算機を使わずにコンパスと定規だけでフレットの位置を決める方法もあり、音楽と数学との関係性に興味を持たせる理科工作の題材として取り上げられることもある。

さて、音階には十二平均律以外にも和音の響きが美しいとされる純正律があるが、この音階を構成する音高の並びは十二平均律とは異なっており、上述のような作図作業のみによってフレットの位置を決める方法（手順化されたもの）は現状見当たらない。筆者は純正律と十二平均律の違いを市民向けの公開講座などで説明する際に、数式を使わずにフレットの位置を決定できることの面白さを伝えたいと思い、純正律についても作図作業のみによってフレットの位置を決定できる手法を独自に手順化した。この手順は、理科工作の題材としても使えるようにデザイン性にも配慮したうえで、長方形の用紙、その対角線を描くのに必要な長さの定規、筆記具だけを使ってフレットの位置を正確に割り出すことができるものである。

1. 音階について

ここでは音階について本稿を読み進めるうえで必要な範囲で解説する。(小方 2007 他)

1.1. 十二平均律

十二平均律は様々な調の音楽を楽器の再調整を必要とせず演奏できるよう、ド・レ・ミ・ファ・ソ・ラ・シの7音に5つの半音を加えた12音を1オクターブの中に均等に配置した音階である(表1)。この場合の均等という意味は12音の音高を対数軸上に等間隔に並べることであり、隣り合う音の周波数比が $\sqrt[12]{2} = 2^{1/12}$ で一定となっているのがこの音階の特徴である。ピアノに代表される多くの楽器で採用されている。

表1 十二平均律音階における音名と音高(基本周波数)の関係

音名(和名)	ド	レ	ミ	ファ	ソ	ラ	シ	ド					
音名(英名)	C ₄	C ₄ [#] D ₄ ^b	D ₄	D ₄ [#] E ₄ ^b	E ₄	F ₄	F ₄ [#] G ₄ ^b	G ₄	G ₄ [#] A ₄ ^b	A ₄	A ₄ [#] B ₄ ^b	B ₄	C ₅
周波数比	2 ^{0/12}	2 ^{1/12}	2 ^{2/12}	2 ^{3/12}	2 ^{4/12}	2 ^{5/12}	2 ^{6/12}	2 ^{7/12}	2 ^{8/12}	2 ^{9/12}	2 ^{10/12}	2 ^{11/12}	2 ^{12/12}
周波数(Hz)*	262	277	294	311	330	349	370	392	415	440	466	494	523

*A₄を440Hzとした場合の概算値

1.2. 純正律

和音の響きが美しくなるように、ド・レ・ミ・ファ・ソ・ラ・シの7音の周波数が単純な整数比となるように定められた音階である(表2)。半音は特に定義されていない。

表2 純正律音階における音名と音高(基本周波数)との関係

音名(和名)	ド	レ	ミ	ファ	ソ	ラ	シ	ド
音名(英名)	C ₄	D ₄	E ₄	F ₄	G ₄	A ₄	B ₄	C ₅
周波数比	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{15}{8}$	2
周波数(Hz)*	264	297	330	352	396	440	495	528

*A₄を440Hzとした場合の概算値

2. 弦楽器の構造と発音原理

ギターを例にフレットを有する楽器の大まかな構造を図1に示す。弦は一端がボディに、他端がヘッドのペグ(糸巻き)に巻き付けられた状態で一定の張力が加えられて固定される。ボディ側にはサドルという部品があり、弦を一定の高さに持ち上げると共に弦の振動をボディに伝える働きをして

直線描画による純正率フレットの位置決定

いる。一方、ペグ側にもナットという部品があり、弦をフレットより高い位置に保持している。つまり弦を押さえない状態（開放弦）では弦はサドルとナット間の長さで振動することになる。この弦の長さを基準スケール長と呼ぶ。そして、ネック上で弦を押さえるとフレットの位置で弦が固定され、弦の長さが変化し、その長さに応じた音が出る仕組みである。

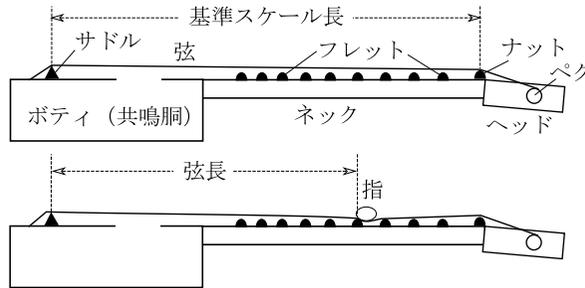


図1 弦楽器（ギター）の構造

弦の振動現象は高校物理でも学習する内容であり、弦の基本振動数 f [Hz]は次式で定まる。

$$f = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{S}{\rho}}$$

ここで、 L は弦の長さ[m]、 S は弦にかかる張力[N]、 ρ は弦の線密度[kg/m]である。つまり、張力と線密度が一定であれば、弦の基本振動数は長さ L に反比例して決まることになる。ただし、ここでは弦を押さえることによる張力の変化は無視できるものとしている。音高は弦の基本振動数と一致するので、音高も弦の長さに反比例して定まる。ちなみに開放弦に対して音高が2倍、すなわち1オクターブ上の音を出すには、弦の長さを半分にするだけでよい。

3. 十二平均律を実現するために必要な弦の長さとはフレットの位置の決定

先に説明したように十二平均律では半音違いの隣合う音の周波数比は常に $2^{1/12}$ で一定である。したがって、まず開放弦の音高より半音高い音を出すために、基準スケール長 L に対して弦の長さが

$$\frac{L}{2^{1/12}} = L \times 2^{-1/12}$$

となる位置にフレットを配置する。このフレットを第1フレットという。さらに半音高い音を出すには、第1フレットに比べて弦の長さを $2^{-1/12}$ 倍にすればよく、 L を使って表したとき

$$L \times 2^{-1/12} \times 2^{-1/12} = L \times 2^{-2/12}$$

の長さとなる位置にフレットを置けばよい。これを第2フレットという。以下同様に、第 n フレットは弦の長さが $L \times 2^{-n/12}$ となる位置に置く。このようにフレットの位置を決める計算は電卓を用いれば比較的容易である。

ところで、基準スケール長から始めて長さを $2^{-1/12}$ 倍ずつしていく操作は図2に示すような幾何学的な作図作業に置き換えることが可能である。（工房ミネハラ Web サイト 2020.8 閲覧）

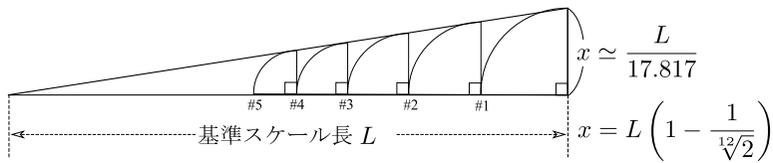


図 2 十二平均律のフレット位置の作図による決定法

まず、基準スケール長 L の水平線を引き、この長さを 17.817 で割った長さ x の垂線を右端に描く。そして水平線と垂線を 2 辺とする直角三角形の斜辺も描いておく。次に、垂線の足を中心にコンパスを使って半径 x の円を垂線の左側に描き、水平線（底辺）との交点を第 1 フレットの位置（図中の #1）とする。次に、#1 から改めて垂線を描き斜辺との交点を求める。再びコンパスを使って #1 を中心に斜辺との交点までの距離を半径とする円を描いて、底辺と交わる点を第 2 フレットの位置（#2）とする。このような作図を繰り返すことにより順次半音ずつ高いフレットの位置が決定されていく。

この作図手順によりフレットの位置が決定される原理を以下で簡単に説明する。まず第 1 フレットの位置での弦の長さは $L-x$ であり、開放弦の長さとの比は

$$\frac{L-x}{L} = 1 - \frac{x}{L}$$

である。ここで、 x は L を 17.817 で割った値であると記述したが、図 2 に示すように正確には $x=L(1-2^{-1/12})$ であるので、これを上式に代入すると弦の長さの比は $2^{-1/12}$ となり、開放弦よりも半音高い音が出ることが分かる。第 2 フレットの位置も図形の相似性から、第 1 フレットに対して弦の長さが $2^{-1/12}$ 倍となっており、さらに半音高い音が出ることが分かる。以下のフレットについても同様である。

4. 純正律音階を実現するフレット位置と提案する作図によるその決定手順

4.1. 必要となる弦の長さの比

十二平均律と純正律の違いは表 1 と表 2 を比較すればわかる通り、基準となる音ド（C）に対する他の音の周波数比の違いである。純正律の場合、周波数比は簡単な分数で表されることになるが、隣り合う音同士に一定の関係性がないためフレットの位置決定は十二平均律のような単純な作図の繰り返しでは実現できない。まずは、1 オクターブ分の音を実現するために必要な弦の長さを求めておく。開放弦すなわち基準スケール長でド（C）の音が出るものとすれば、各音を出すために必要な弦の長さの比は表 2 の周波数比の逆数として表 3 のように整理される。

表 3 純正律音階を実現するために必要な弦の長さの比率

音名（和名）	ド	レ	ミ	ファ	ソ	ラ	シ	ド
音名（英名）	C	D	E	F	G	A	B	C
弦長の比	1	$\frac{8}{9}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{2}$

表3に示すように開放弦に対する長さの比は分数で表され、分母には2, 3, 4, 5, 9, 15の数値が並ぶ。ここで、 $9=3 \times 3$ 、 $15=5 \times 3$ であることから、図3に示すように基準スケール長を1とすれば、その3等分点、4等分点、5等分点、さらにそのまた3等分点をとっていくことでフレットの位置を割り出すことが可能である。

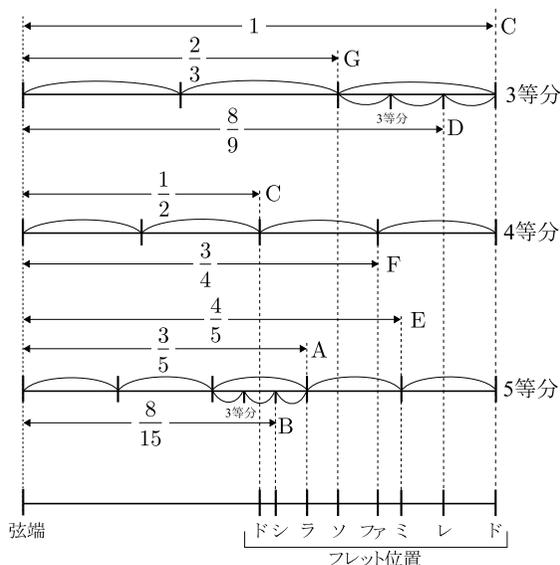


図3 純正律を実現するフレットの位置の相対関係

4.2. 作図により長さを等分する方法

4等分点は作図以外でも用紙を二つ折りする作業を2回繰り返す等で容易に求めることができる。一方で3等分点や5等分点を正確に作図で求める方法(加藤2003他)の認知度は低いと思われる。一例として長方形(の用紙)に対して2等分点を基に各辺の3等分点から5等分点までを順次求める方法を図4に示す。図4(a)では左右の辺の2等分点を結んで元の長方形を上下2つの長方形に分けてそれぞれに右下がりの対角線を描き、元の長方形には右上がりの対角線を描いている。このとき、これらの3本の対角線の2つの交点は元の長方形の各辺を3等分する座標点となっている。例えば、図中の左下側の交点の座標は元の長方形の幅を w 、高さを h とすると、 $(w/3, h/3)$ となる。この3等分点に基づいて図3(b)のように長方形を縦に3分割した長方形にそれぞれ右下がりの対角線を描き、図3(a)と同様に分割前の対角線との交点を求めれば、これら3つの交点は各辺を4等分する座標点となっている。同様の作図を繰り返すことで図3(c)のように4等分点から5等分点を得ることも可能である。このような等分点を求める作図法を提案する純正律のフレットの位置決定に利用している。

4.3. 提案する作図手順

まず提案する手順について説明する。この手順は任意のサイズの長方形の用紙を使って、その縦方向の長さを基準スケール長として純正律音階の1オクターブ分のフレットを作ることを目的としている。楽器に例えるなら、用紙の下辺がサドル、上辺がナットの位置に相当する。具体的な手順を表4に、縦長の用紙をイメージして手順に従って描く線と手順の説明に使用する交点の番号を図5に示す。

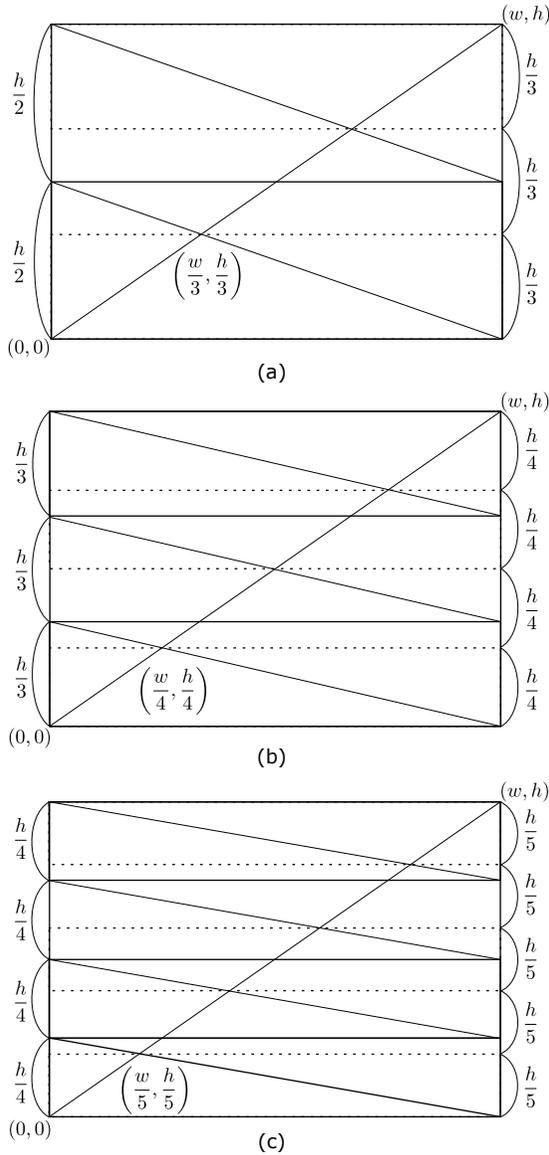


図4 長方形の各辺の等分点を作図により求める方法

直線を描く毎に生じる新たな交点については必要に応じて番号を付すとともに表中にその座標を記した。なお、この座標は用紙の左下(図5の点1)を原点とし、幅(x軸方向)と高さ(y軸方向)に対する比として記載されている。また、表4の手順の番号にa, bなどの添字があるものは左右対称もしくは上下対称の作図作業である。原理的には必ずしも左右対称に作図をする必要はないが、これにはデザイン性への配慮と共に上下の辺に対して平行な線を描き易くする意味がある。手順2を除き、全ての作図は指定された2点を結ぶ(あるいは通る)直線を描く作業であり、コンパスを使用しなくてよいように配慮されている。

以下、各手順について概説する。

手順0は用紙の4つの頂点の番号の定義である。手順1~2で用紙を上下に2分する線(線分6-7)を描いているが、これは用紙を二つ折りにする作業でも代用可能である。点5は用紙の中心点であり、用紙の高さ(基準スケール長)を2分する点であり、1オクターブ高いド(C)のフレットの位置になる。

手順3は上下に2分された長方形に対してそれぞれ対角線を描く作業であり、対角線の交点から高さの4等分点を求めている。上側の長方形の中心点は下辺から用紙の高さの3/4の距離にあり、ファ(F)のフレットの位置になる。

手順4は用紙を左右に2等分する垂線(線分14-15)を、手順5は用紙を上下左右に等分割した4つの長方形に対して対角線を描く作業である。そして手順6で先の手順3で求めたFのフレットを通る水平線を描いている。

手順7では図4(a)に示したように上下に2分された長方形の対角線と元の用紙の対角線の交点(点11と点12)が各辺の長さの3等分点であることを利用して、下辺から用紙の高さの2/3の距離にあるソ(G)のフレットの位置(点26)を決定している。

手順8~9では図4(c)に示したように上下に4分された長方形の対角線と元の用紙の対角線の交点(点27と点28)が各辺の長さの5等分点であることを利用して、下辺から用紙の高さの4/5の距離にあるミ(E)のフレットの位置(点29)を決定している。

以下、導出過程は省略するが、手順10~11でラ(A)、手順12~14でレ(D)、手順15~17でシ(B)のフレットの位置を決定し、最終的に垂直2等分線上の点15, 39, 29, 13, 26, 32, 44, 5がド・レ・ミ・ファ・ソ・ラ・シ・ドの純正律1オクターブ分のフレットの位置となる。図6は図5にいくつかの対角線を描き加え、工作用にギターのようなイメージさせるようにしたものである。実際の工作事例として、A4用紙に手順通りに描いたものを空き箱に貼り付けて作った一弦琴(モノコード)を図7に示す。

まとめ

紙面の都合上、基準スケール長に対して8/9や8/15となる位置を作図で割り出す手順を着想する過程までは詳述できなかった。しかし、これらの位置決定は単純な2直線の交点を求める問題であり、表4に各点の座標値も示されていることから、その妥当性は容易に検証可能である。作図の手順は提案した以外にも無数に考えられることから、さらに簡便なものが見つかるかもしれないが、本稿の作図手順は理科教室などでの工作題材としての利用も考え、直線がなるべく重ならないことに配慮して決定したものである。実際に児童や学生に数学や音楽に対する興味を持たせるための題材として活用して頂ければ幸いである。

参考文献

小方厚 (2007) 音律と音階の科学. 講談社, 東京.

工房ミネハラ Web サイト (2020.8 閲覧) www.minehara.com/mechnics/guitarmech1.htm

ダイヤグラムグループ編 (1992) 楽器—歴史、形、奏法、構造. マール社, 東京.

加藤竜吾・黒木伸明 (2003) 任意の長方形を3等分するための生徒の思考変化の考察. 日本科学教育学会 年会論文誌 27: 349-350.

表4 提案する作図手順

手順	作業				点の座標	備考		
0	長方形の用紙	を留意し	各頂点をそれぞれ	点1	とする	(0,0)	左下(原点)	
				点2		(0,1)	右下	
				点3		(1,1)	右上	
				点4		(0,1)	左下	
1	a	線分1-3	を描く				対角線	
	b	線分2-4	を描き	線分1-3との交点を	点5	(1/2, 1/2)	フレットCの決定 対角線の交点	
2	点5	を通る水平線を描き	線分1-4	との交点を	点6	(0, 1/2)	左辺の2等分点	
			線分2-3		点7	(1, 1/2)	右辺の2等分点	
3	a	線分1-7	を描き	線分2-5との交点を	点8	(2/3, 1/3)	長短辺の3等分点	
	b	線分2-6	を描き	線分1-5	との交点を	点9	(1/3, 1/3)	長短辺の3等分点
				線分1-7		点10	(1/2, 1/4)	長辺の4等分点
	c	線分3-6	を描き	線分4-5との交点を	点11	(1/3, 2/3)	長短辺の3等分点	
d	線分4-7	を描き	線分3-5	との交点を	点12	(2/3, 2/3)	長短辺の3等分点	
			線分3-11		点13	(1/2, 3/4)	フレットFの決定 長辺の4等分点	
4	線分10(-5)-13	を延長し	線分1-2	との交点を	点14	(1/2, 1)	下辺の2等分点	
			線分3-4		点15	(1/2, 1)	上辺の2等分点	
5	a	線分6-14	を描き	線分1-9	との交点を	点16	(1/4, 1/4)	長短辺の4等分点
				線分1-10		点17	(1/3, 1/6)	長辺の6等分点、短辺の3等分点
	b	線分7-14	を描き	線分2-8	との交点を	点18	(3/4, 1/4)	長短辺の4等分点
				線分2-10		点19	(2/3, 1/6)	長辺の6等分点、短辺の3等分点
c	線分7-15	を描き	線分3-12	との交点を	点20	(3/4, 3/4)	長短辺の4等分点	
			線分3-13		点21	(2/3, 5/6)	長辺の6等分点、短辺の3等分点	
d	線分6-15	を描き	線分4-11	との交点を	点22	(1/4, 3/4)	長短辺の4等分点	
			線分4-13		点23	(1/3, 5/6)	長辺の6等分点、短辺の3等分点	
6	線分20(-13)-22	を延長し	線分3-7	との交点を	点24	(1, 3/4)	右辺の4等分点	
			線分4-6		点25	(0, 3/4)	左辺の4等分点	
7	線分11-12	を描き	線分5-13	との交点を	点26	(1/2, 2/3)	フレットGの決定 長辺の3等分点	
8	a	線分3(-23)-25	を延長し	線分4-22	との交点を	点27	(1/5, 4/5)	長短辺の5等分点
	b	線分4(-21)-24	を延長し	線分3-20	との交点を	点28	(4/5, 4/5)	長短辺の5等分点
9	線分27-28	を描き	線分13-15	との交点を	点29	(1/2, 4/5)	フレットEの決定 長辺の5等分点	
10	a	線分3-8	を描き	線分7-12	との交点を	点30	(4/5, 3/5)	長短辺の5等分点
	b	線分4-9	を描き	線分6-11	との交点を	点31	(1/5, 3/5)	長短辺の5等分点
11	線分30-31	を描き	線分5-26	との交点を	点32	(1/2, 3/5)	フレットAの決定	
12	a	線分17(-9-11)-23	を延長し	線分4-15	との交点を	点33	(1/3, 1)	上辺の3等分点
	b	線分19(-8-12)-21	を延長し	線分3-15	との交点を	点34	(2/3, 1)	上辺の3等分点
13	a	線分15-27	を描き	線分23-33	との交点を	点35	(1/3, 8/9)	長辺の9等分点
				線分4-23		点36	(2/7, 6/7)	長短辺の7等分点
	b	線分15-28	を描き	線分21-34	との交点を	点37	(2/3, 8/9)	長辺の9等分点
				線分3-21		点38	(5/7, 6/7)	長短辺の7等分点
14	線分35-37	を描き	線分15-29	との交点を	点39	(1/2, 8/9)	フレットDの決定	
15	線分16(-10)-18	を延長し	線分1-6	との交点を	点40	(0, 1/4)	左辺の4等分点	
			線分2-7		点41	(1, 1/4)	右辺の4等分点	
16	a	線分36-41	を描き	線分8-12	との交点を	点42	(2/3, 8/15)	長辺の15等分点
	b	線分38-40	を描き	線分9-11	との交点を	点43	(1/3, 8/15)	長辺の15等分点
17	線分42-43	を描き	線分5-32	との交点を	点44	(1/2, 8/15)	フレットBの決定	

直線描画による純正率フレットの位置決定

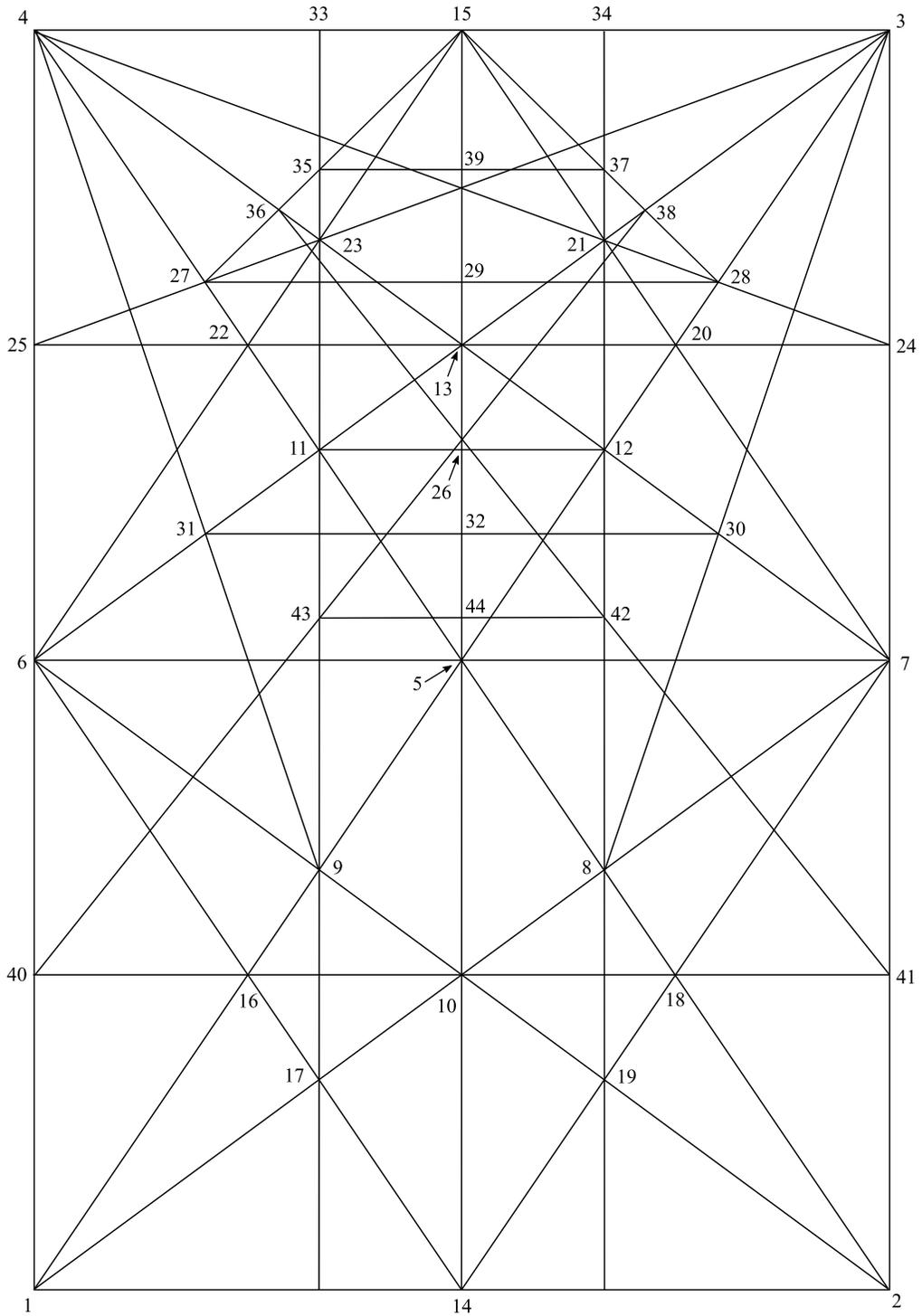


図5 提案する作図手順によって描く直線（線分）と交点の番号

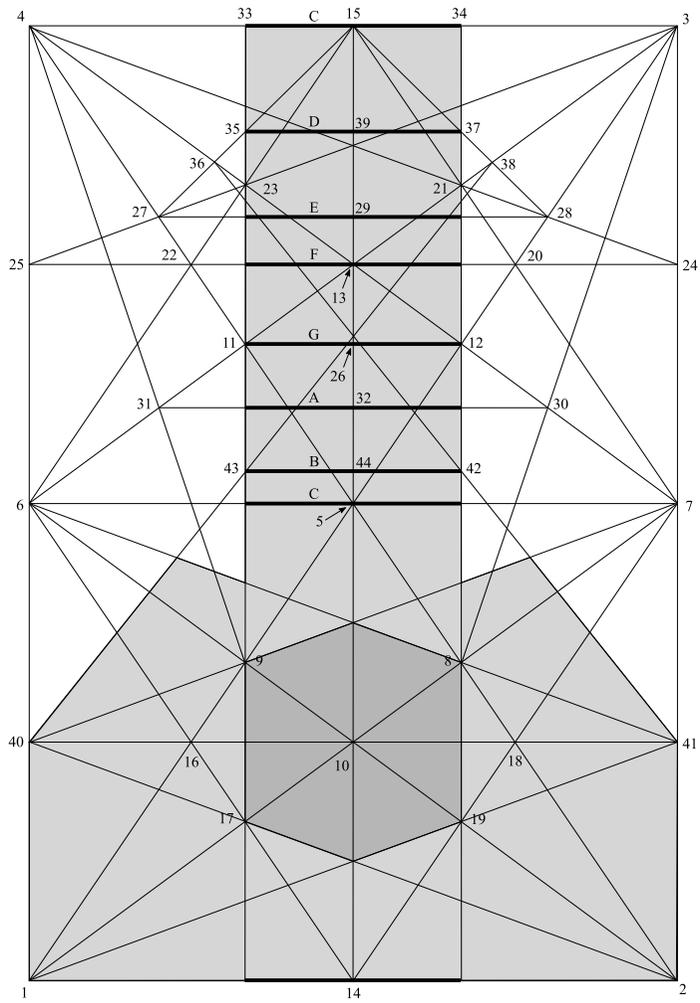


図 6 工作用にデザインされた説明図

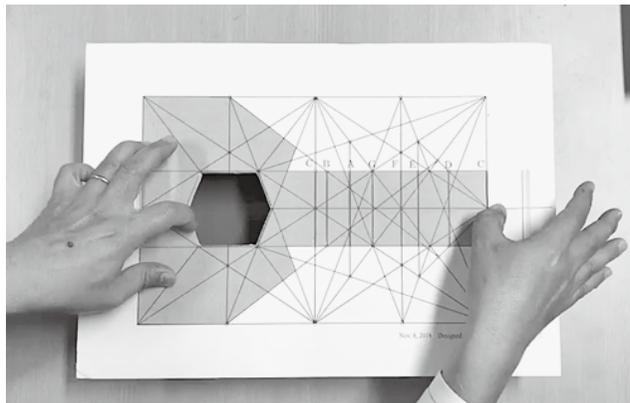


図 7 作図法に従って作った一弦琴（モノコード）の例

Determination of Just Intonation Fret Positions by Drawing Straight Lines

Yuichi NORO

Abstract

Many stringed instruments control the pitch of the generated sound by changing the vibrating string length. For example, in a guitar, a string is fixed to a determined length to obtain a prescribed pitch. A raised line called a fret, which is regularly arranged on the fingerboard, is pressed to produce a particular pitch. Therefore, placing the fret at the correct position to produce each sound that constitutes the musical scale is important. This position is generally determined using a calculation formula or a special scale. For equal temperament, which is a general musical scale, fret position is determined by a well-known method of geometric drawing using a ruler or a compass. It is also used as a subject to get students interested in the relationship between music and mathematics. In this paper, I have introduced a unique procedure to determine the fret positions by drawing for just intonation.