三重大学教育学部研究紀要　第73巻　教育科学（2022）143－150頁

同分母分数のたし算に関する一考察
― $\frac{3}{10}+\frac{4}{10}=\frac{7}{20}$ はまちがいなのか ―

中 西 正 治*

A study on the addition of the same denominator fractions

― Is $\frac{3}{10}+\frac{4}{10}=\frac{7}{20}$ incorrect ? ―

Masaharu Nakanishi*

要　旨

同分母分数のたし算では、「どうして分母はそのままで分子だけをたせばよいのか」の理解が本質的な学習内容となる。その説明の過程で、例えば $\frac{3}{10}+\frac{4}{10}=\frac{7}{10}$ が正しくて、$\frac{3}{10}+\frac{4}{10}=\frac{7}{20}$ が間違っていることを理解させる。いろいろな説明が行われるが、それらの説明では、$\frac{7}{20}$ は間違いであるという前提に立っている。本稿はむしろ $\frac{7}{20}$ を積極的に認め、分母は 10＋10 で 20、分子は 3＋4 で 7 と考えた児童の意見を大切にする授業の構想を提案している。その指導で大きな役割を果たすのが、分割量分数である。授業の構想の提案と同時に分割量分数の重要性と利便性を指摘している。

キーワード：同分母、たし算、分割量分数、量分数

1．問題の所在

小学校 3 年生で同分母分数のたし算を学習する。そのときに利用している図は、学校図書(1)と東京書籍(2)はリットル枡のみ、啓林館(3)と教育出版(4)と大日本出版(5)と日本文教出版(6)はリットル枡と数直線の 2 つである。リットル枡がすべての教科書に共通している。

同分母分数のたし算では「どうして分母はそのままで分子だけをたせばよいのか」の理解が本質的な学習内容となる。その説明の過程で、例えば $\frac{3}{10}+\frac{4}{10}=\frac{7}{10}$ が正しくて、$\frac{3}{10}+\frac{4}{10}=\frac{7}{20}$ が間違っていることを理解させる。リットル枡を利用している実践では以下のような説明がしばしばされる。

ⅰ）もし $\frac{7}{20}$ L が答えとすると、$\frac{7}{20}$ L は L を 20 等分した 7 つ分である。$\frac{7}{20}$ L は、1L を 10 等分した 3 つ分 $\frac{3}{10}$ L と 10 等分した 4 つ分 $\frac{4}{10}$ L を足した量より少ないから、$\frac{3}{10}+\frac{4}{10}$ は $\frac{7}{20}$ にはならない。

ⅱ）リットル枡だけでなく、数直線やテープ図でも考えさせる。

ⅲ）黒板に書いている図を見て、1L を 10 に分けた 3 つ分と 10 に分けた 4 つ分を足せば、1L を 10 に分けた 7 つ分になることを確かめる。

ⅳ）児童の目の前で実演すると、実際に $\frac{3}{10}$ L＋$\frac{4}{10}$ L＝$\frac{7}{10}$ L になる。

＊三重大学教育学部

これらの説明はどれも、分母は10＋10で20、分子は3+4で7と考えた$\frac{7}{20}$は間違いであるという前提に立っている。初めて分数のたし算を学習するのであるから、$\frac{7}{20}$を答えとした方が自然である。分母はそのままで分子だけ足すが、どうして分母は足さなくてそのままでよいのか、どうして分子だけたせばよいのかについて説明できる児童は少ないであろう。

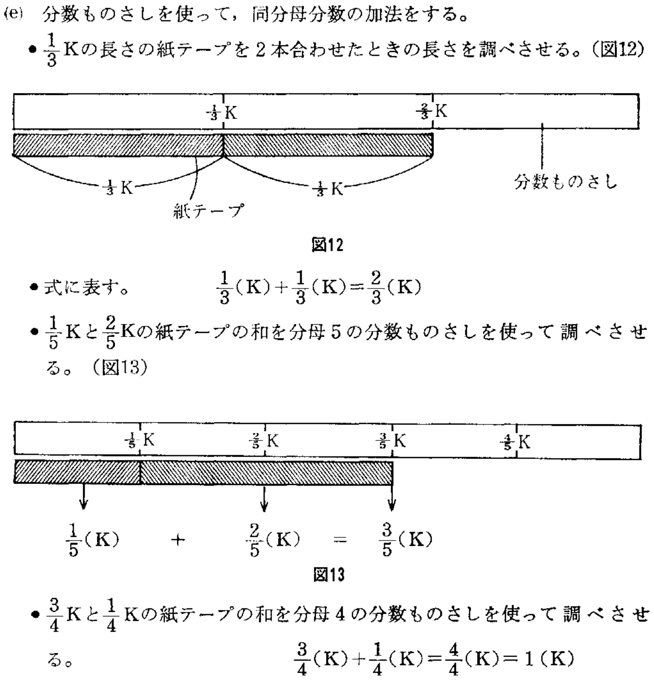
本稿は、$\frac{7}{20}$は間違いであるという前提を捨てて、むしろ$\frac{7}{20}$を積極的に認め、分母に目を向けて 10＋10＝20を考えた児童の意見を大切にする授業の構想を提案することを目的とする。

２．先行研究

筆者は同分母分数のたし算に関する論文や授業研究を検索した限り、そのほとんどが分割分数や量分数で説明されており、それ以外の分数を使って説明しているものはほとんど見つけられなかった。

本稿で使用する分数の概念に近いものに、岡森博和編『算数・数学教育の研究と実践』[7]で扱っている任意の長さを表す「K」があった。そこでは、テープの長さを「K」として、「$\frac{1}{3}$K」「$\frac{3}{5}$K」などの長さを考えさせ、その後「K」を普遍単位「m」に変換することで、量分数「$\frac{1}{3}$m」「$\frac{3}{5}$m」などを指導するという授業を提案している。

同分母分数のたし算は、この「K」を利用して説明している。そこでは、$\frac{1}{5}$K＋$\frac{2}{5}$K＝$\frac{3}{5}$Kを「分数ものさし」を使って、量分数の説明と同じ説明がされている［図1］。


(e) 分数ものさしを使って，同分母分数の加法をする。

• $\frac{1}{3}$Kの長さの紙テープを2本合わせたときの長さを調べさせる。(図12)

図12

• 式に表す。　$\frac{1}{3}(K)+\frac{1}{3}(K)=\frac{2}{3}(K)$

• $\frac{1}{5}$Kと$\frac{2}{5}$Kの紙テープの和を分母5の分数ものさしを使って調べさせる。(図13)

図13

• $\frac{3}{4}$Kと$\frac{1}{4}$Kの紙テープの和を分母4の分数ものさしを使って調べさせる。　$\frac{3}{4}(K)+\frac{1}{4}(K)=\frac{4}{4}(K)=1(K)$

［図1］岡森博和編『算数・数学教育の研究と実践』p.49

「K」は長さのみに限定され、「K」以外の個別単位は出てこない。「K」は他の量まで一般化されていない。本稿で使用する分割量分数は種々の量の個別単位を対象としており、「K」より一般化された概念である。詳しくは４．で述べる。

先行研究には分割量分数による同分母分数のたし算の説明はないものと考えられる。

３．$\frac{7}{20}$を生かした指導

リットル枡を使った説明はすべての教科書に共通しているので、本稿でもリットル枡を使った説明とする。

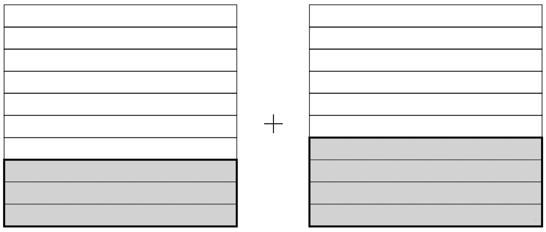
リットル枡を使った授業では、おおよそ以下のように展開される。

例えば「$\frac{3}{10}$Lのコーヒーと$\frac{4}{10}$Lの牛乳を合わせると、何Lのコーヒー牛乳ができますか。」という課題を与え、個人や班でその式や答えを考えさせた後、式と答えを発表させる。

授業で扱う代表的な式と答えは、以下の2つである。教科書に習って式には単位をつけない。

（ア）$\frac{3}{10}+\frac{4}{10}=\frac{7}{10}$　答え $\frac{7}{10}$ L　　　　（イ）$\frac{3}{10}+\frac{4}{10}=\frac{7}{20}$　答え $\frac{7}{20}$ L

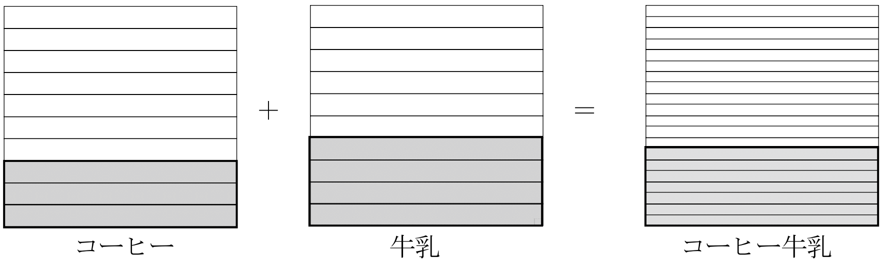
その後、この 2 つの考え方について、意見を発表させる。
そのとき、黒板には［図 2］のような $\frac{3}{10}$ L と $\frac{4}{10}$ L の図を黒板で示し、真ん中に「$\overset{\text{たす}}{+}$」の記号を書いていることが多い。



［図 2］

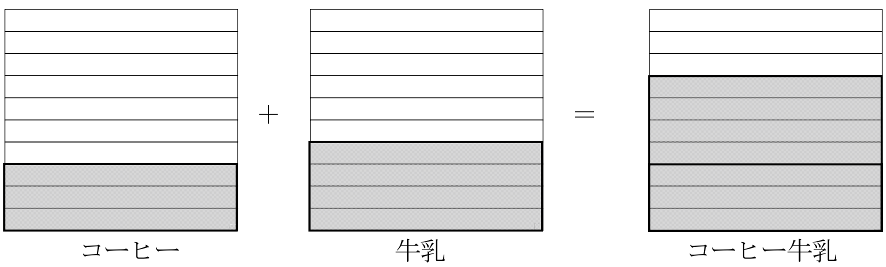
様々な意見が出されたのち、教師はそれらの意見を整理しながら説明に入る。（ア）の意見が正しいことを教えるために、逆にいえば $\frac{3}{10}+\frac{4}{10}=\frac{7}{20}$ が間違いであること教えるために、一般に以下の説明を試みる。

$\frac{7}{20}$ は間違いであることを示すために、$\frac{7}{20}$ を量分数と捉え、$\frac{7}{20}$ L は 1L を 20 等分した 7 つ分である［図 3］とし、足して量が減ることはおかしい。だから $\frac{7}{20}$ L は間違いであると結論付ける。



［図 3］

そして $\frac{3}{10}+\frac{4}{10}=\frac{7}{10}$ の方が正しいことを示すために、実際に実験（例えば、コーヒーと牛乳を混ぜてコーヒー牛乳を作る）を行い、$\frac{3}{10}+\frac{4}{10}=\frac{7}{10}$ となることを説明する［図 4］。



［図 4］

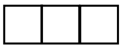
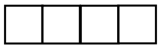
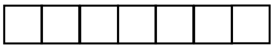
前半の説明は、等分の仕方を変えて無理やり納得させている感がある。分数のたし算を知らない児童にとっては、これまで通りのたし算をしているだけである。分母は分母どうし足して 10＋10＝20、分子は分子ど

うし足して3＋4＝7としているだけで、$\frac{7}{20}$を量分数と意識して、$\frac{7}{20}$ Lとまでは考えていない。

後半の説明には合併と増加がある。合併の場合は、別の空いているコップに、同時に左右からコーヒーと牛乳を入れる。増加の場合は、コーヒーの入れ物に牛乳を入れる。どちらにしてもその結果としての図が［図4］である。

$\frac{3}{10}+\frac{4}{10}=\frac{7}{20}$を積極的に認め$\frac{3}{10}+\frac{4}{10}=\frac{7}{10}$となることを導くことができければ、$\frac{7}{20}$を誤答とすることなく、同分母分数のたし算を教えることができる。

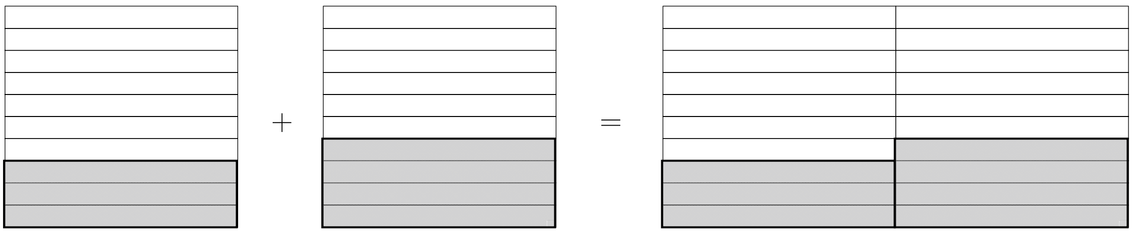
ここから、筆者の考える説明となる。

小学校1年生のときの「3＋4＝7」の説明では、ブロックタイルを利用して、とを両手で寄せるとになるからだとしている。

同様にして$\frac{3}{10}$ Lと$\frac{4}{10}$ Lを寄せると［図5］のようになる。

ここで10、3、4、7、20の図における意味を確認する。

「分母は分母どうし足して10＋10＝20」は、左辺の左リットル枡の1Lの10等分と右リットル枡の1Lの10等分を足すと右辺の<u>2L分のリットル枡20等分</u>になることを示しており、「分子は分子どうし足して3＋4＝7」は、左辺の左リットル枡の1Lの10等分の3つ分と右リットル枡の1Lの10等分の4つ分を足すと右辺の<u>2L分のリットル枡を20等分した7つ分</u>になることを示している。



［図5］

筆者は式を次のように捉える。

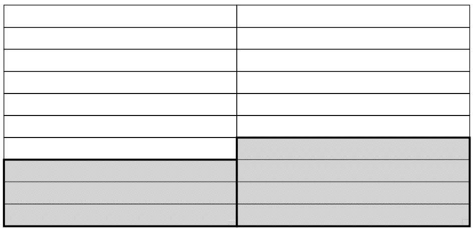
$\frac{3}{10}+\frac{4}{10}=\frac{7}{10}$は、$\frac{3}{10}$ L＋$\frac{4}{10}$ L＝$\frac{7}{10}$ L（量分数のたし算）であり、

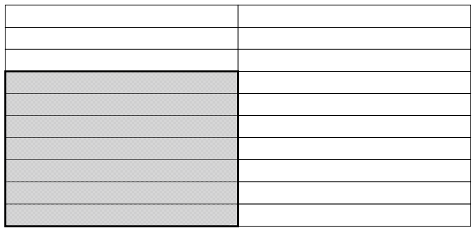
$\frac{3}{10}+\frac{4}{10}=\frac{7}{20}$は、$\frac{3}{10}$（L）＋$\frac{4}{10}$（L）＝$\frac{7}{20}$（2L）（分割量分数のたし算）である。

ここで重要なことは、$\frac{3}{10}$（L）や$\frac{7}{20}$（2L）の理解である。

$\frac{3}{10}$（L）はLを10等分した3つ分を集めた大きさを表し、$\frac{7}{20}$（2L）は2Lを20等分した7つ分を集めた大きさを表している。$\frac{3}{10}$（L）のLも、$\frac{7}{20}$（2L）の2Lも単位量（個別単位）とみていることである。

実際

（ウ）と

（エ）

は、同じ量である。

（ウ）は$\frac{3}{10}$(L)と$\frac{4}{10}$(L)を寄せた結果であり、（エ）は、2L を 20 等分した 7 つ分を集めた大きさである。

以上のことを、式でかけば、

$$\frac{3}{10}\,(\mathrm{L})+\frac{4}{10}\,(\mathrm{L})=\frac{7}{20}\,(2\mathrm{L})=\frac{7}{10}\,(\mathrm{L})\text{（分割量分数）}$$

となる。$\frac{7}{20}$(2L)が$\frac{7}{10}$(L)となるのは、空のリットル枡は要らなくなったから捨て、残った枡を見ると$\frac{7}{10}$(L)になっているということである。

分割量分数の特別な場合が量分数であるから、$\frac{3}{10}$(L)は$\frac{3}{10}$L となり、$\frac{4}{10}$(L)は$\frac{4}{10}$L となり、$\frac{7}{10}$(L)は$\frac{7}{10}$L となる。よって、

$$\frac{3}{10}\mathrm{L}+\frac{4}{10}\mathrm{L}=\frac{7}{10}\mathrm{L}\text{（量分数）}$$

となる。すなわち、同分母分数のたし算は「分母はそのままで分子だけを足せばよい」ということになる。

$\frac{7}{20}$を認め、等分の仕方は変えないで、$\frac{7}{10}$と説明することができる。

この指導のポイントは、分割量分数$\frac{3}{10}$(L)や$\frac{7}{20}$(2L)の理解である。では分割量分数とはどのような分数なのであろうか、改めて確認しておこう。

４．分割量分数

分割量分数の定義は「ある単位量Ａ（個別単位または普遍単位）を *a* 等分したものの *b* 個分の大きさを表す数のことを**分割量分数**という[(8)]。」である。

例：$\frac{2}{3}$A

量Ａがピザのとき、$\frac{2}{3}$(ピザ)

量Ａがカップのとき、牛乳$\frac{1}{4}$(カップ)

量Ａが未測定（テープＡ）のとき、$\frac{2}{3}$（テープＡ）

量Ａが普遍単位の単位量(1m)のとき、$\frac{2}{3}(\mathrm{m})=\frac{2}{3}$ m（数値は一致する）

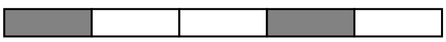
量Ａが普遍単位の単位量ではない(5m)とき、$\frac{2}{3}(5\mathrm{m})=\frac{10}{3}$ m（数値にずれが生じる）

分割量分数は、量Ａを等分したいくつ分を集めた大きさを表している。「何を」を常に意識させた量の大きさを表した表現である。「何を」が「m」（普遍単位）のとき量分数となる。

子どもは$\frac{2}{3}$m の「$\frac{2}{3}$」に目が行って、「m」に意識がいっていない。その結果、2m の$\frac{2}{3}$を$\frac{2}{3}$m と勘違いしてしまう。2m の$\frac{2}{3}$は$\frac{2}{3}$(2m)である。「何を」の部分を意識させる必要がある。

量分数の指導中に、「$\frac{2}{5}$m の長さだけ色を塗りましょう」という問いに対して（ア）や（イ）のように間を空けて捉える児童が何人か出る。児童は暗黙に 2 つを合わせたものとして答えているかもしれない。しかし$\frac{2}{5}$m の表現としては（ウ）や（エ）のようにつながっていなければその長さにならない。

（ア）

（イ）

（ウ）
（エ）


学校図書の教科書には「分母は、1m や 1L などのもとになる大きさを何等分したかを表し、分子は、それを何こ集めたかを表しています。」[9]、啓林館の教科書には「$\frac{2}{5}$ は $\frac{1}{5}$ を 2 こ集めた数です。」[10]のように、集めた大きさであることに注意を払った説明をしている。そこで本稿では、「いくつ分を集めること」を意識させ、量分数の定義[1]~[6]を「普遍単位を等分割したもののいくつ分を集めた大きさを表す数」とすることを提案したい。

5．実践に向けての注意

実践をするにあたり 3 つの注意がある。1 つ目は分母の数についてである。

筆者が関わった津市にある公立小学校での研究授業で同分母分数のたし算の授業が行われた[11]。その授業の課題は「$\frac{3}{10}$ L のコーヒーと $\frac{4}{10}$ L の牛乳を合わせて、コーヒー牛乳を作ります。コーヒー牛乳は、何 L できるでしょうか。」であった。研究授業に先立ち、計画された授業案で先行授業が行われた。そのクラスでのエピソードである。

$\frac{3}{10}$ は 0.3 であることは学習済みなので、児童は $\frac{3}{10}+\frac{4}{10}=\frac{7}{10}$ の説明を、小数を使って行った。$\frac{3}{10}$ は 0.3、$\frac{4}{10}$ は 0.4 だから 0.3＋0.4＝0.7、0.7 は $\frac{7}{10}$ だから、$\frac{3}{10}+\frac{4}{10}=\frac{7}{10}$ になると説明をした。児童は既習事項を使って説明しようとするから、小数に直して（小数の世界で）説明しようとするのも当然である。その結果、ほとんどの子どもが小数の説明で納得してしまい、他の説明を求めても意見が出なくなってしまったのである。

小数に直しての説明は分母が 10 であるから容易くできるのであって、$\frac{3}{11}+\frac{4}{11}=\frac{7}{11}$ の場合では、小数に直しての説明が面倒になり、理解できる児童が少なくなることは容易に想像できる。東京書籍では分母を 10 で説明しているため、先行授業のような結果になってしまったと考えられる。小数を使って説明するのも間違っているわけではないが、$\frac{3}{10}+\frac{4}{10}=\frac{7}{10}$ は分数のたし算であるので、分数の世界で理解させたい。

以上のことから、同分母分数のたし算の説明では分母が 10 の分数は使用しない方がよいことがわかる。東京書籍以外は分母を 5 としている[1]~[6]。単位分数は避けて $\frac{2}{7}+\frac{3}{7}=\frac{5}{7}$ などは約分もなく説明に適しているのではないか。本稿で分母を 10 としているのは、三重県では東京書籍の採択数が多いからである。

2 つ目は、分割量分数の指導である。量分数は分割量分数の特別な場合なので、まず分割量分数を教えてから量分数を教えること、できれば $\frac{1}{2}$ (3m)＝$\frac{3}{2}$ m や $\frac{2}{5}$ (3L)＝$\frac{6}{5}$ L などの分割量分数と量分数の関係も理解させておくことが肝要である。

3 つ目は、同分母分数のたし算の説明で、分母どうしのたし算、分子どうしのたし算と考えても良いことを強調しすぎてしまうと、異分母分数のたし算のときも、分母どうし、分子どうし足しても良いという勘違いをさせてしまう恐れがある。分母の数が同じ場合だけであることを強調しておく必要がある。

6．まとめ

分割量分数が同分母分数のたし算の説明で重要な役割を果たしていることが分かる。

分割量分数を扱わなければ、$\frac{7}{20}$ は間違った考え方となる。子どもの自然な捉え方を生かせないままで終わってしまう。量分数は分割量分数の特別な場合であるから、量分数の導入時においても分割量分数から量分数へ円滑に教えることができる[12]。分割量分数を取り入れる重要性や利便性は極めて大きい。

〔引用文献・参考文献・注〕

(1) 学校図書『みんなと学ぶ小学校算数 3 年下』令和 2 年 6 月 1 日発行

同分母分数の和の説明は、分母を 5 で説明している。(p.94)

（量分数の定義）1m を 4 等分した 1 こ分の長さを $\frac{1}{4}$ m と書き、**四分の一メートル**と読みます。(p.86)

$\frac{1}{4}$ m の 3 こ分の長さを $\frac{3}{4}$ m と書き、**四分の三メートル**と読みます。(p.88)

(2) 東京書籍『新しい算数 3 下』令和 2 年 7 月 10 日発行

同分母分数の和の説明は、分母を 10 で説明している。(p.46)

（量分数の定義）1m の $\frac{1}{3}$ の長さを $\frac{1}{3}$ **m** と書き、「三分の一メートル」と読みます。(p.37)

1m を 3 等分した 2 こ分の長さを、1m の $\frac{2}{3}$ (**三分の二**) といいます。1m の $\frac{2}{3}$ の長さを $\frac{2}{3}$ **m** と書き、「三分の二メートル」と読みます。(p.39)

(3) 啓林館『わくわく算数 3 下』令和 2 年 5 月 10 日発行

同分母分数の和の説明は、分母を 5 で説明している。(p.47)

（量分数の定義）1m のテープを 3 等分した 1 こ分の長さは、**1m の** $\frac{1}{3}$ (3 分の 1) になります。(p.41)

1m の $\frac{1}{3}$ の長さを $\frac{1}{3}$ **m** とかき、「**3 分の 1 メートル**」とよみます。$\frac{1}{3}$ m の 2 こ分を $\frac{2}{3}$ **m** とかき、「**3 分の 2 メートル**」とよ

みます。(p.42)

(4) 教育出版『小学算数 3 下』令和 2 年 6 月 20 日発行

同分母分数の和の説明は、分母を 5 で説明している。(pp.44-45)

（量分数の定義）1m の $\frac{1}{4}$ の長さを**四分の一メートル**といい、$\frac{1}{4}$ **m** と書きます。(p.38)

$\frac{1}{3}$ m の 2 こ分の長さを**三分の二メートル**といい、$\frac{2}{3}$ **m** と書きます。(p.40)

(5) 大日本図書『たのしい算数 3 年』令和 2 年 2 月 5 日発行

同分母分数の和の説明は、分母を 5 で説明している。(p.172)

（量分数の定義）1m の $\frac{1}{3}$ の長さを $\frac{1}{3}$ **m** と書き、**三分の一メートル**と読みます。(p.164)

1m を 3 等分した 2 つ分の長さを、1m の $\frac{2}{3}$(**三分の二**) といいます。1m の $\frac{2}{3}$ の長さを $\frac{2}{3}$ **m** と書き、**三分の二メートル**と読みます。$\frac{2}{3}$ m は、$\frac{1}{3}$ m の 2 つ分の長さです。(p.165)

(6) 日本文教出版『小学算数 3 年下』令和 2 年 6 月 8 日発行

同分母分数の和の説明は、分母を 5 で説明している。(p.58)

（量分数の定義）1m を 3 等分した 1 つ分の長さを、1m の**三分の一**といいます。1m の三分の一の長さを「三分の一メートル」といい、$\frac{1}{3}$ m とかきます。(p.50)

1m を 3 等分した 2 つ分の長さを 1m の**三分の二**といいます。1m の三分の二の長さは、「三分の二メートル」といい、$\frac{1}{3}$ m

の 2 つ分で $\frac{2}{3}$ m とかきます。(p.51)

(7) 岡森博和編『算数・数学教育の研究と実践』第一法規 昭和 58 年 2 月 25 日初版発行、pp.44-51

(8) 松下佳代 松井幹夫 小島順 上垣渉著『分数指導の新しい方向をもとめて』数教協研究局 1997 年 8 月発行、pp.14-16

この書における分割量分数の定義は、「ある単位量 A（個別単位または普遍単位）を *a* 等分したものの *b* 個分の大きさを表す数のことを**分割量分数**という。」である。前後の文脈からすると、この定義には暗黙に「*b* 個分を集めた」が含意されていると考えられる。

(9) 上掲書（1）p.89

(10) 上掲書（3）p.44

(11) 津市内の公立小学校において、2016 年 11 月 30 日に 3 年生 34 人を対象として行われた研究授業のための先行授業でのことである。

(12) 中西正治・西村徳寿「分割分数から量分数への指導に関する一考察」、大阪教育大学数学教室『数学教育研究』第 45 号、2016 年 7 月 31 日発行、pp.11-24