三重大学教育学部研究紀要　第74巻　第1号　自然科学（2022）1－17頁

特殊な計量を与えた平面上の流体について

川崎裕貴[*1]・森山貴之[*2]

A fluid on a plane with a special metric

Yuki KAWASAKI and Takayuki MORIYAMA

要旨

本論文は川崎の修士論文 [6] の一部をまとめたものである．森山はこの修士論文の指導にあたった．ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の標準内積（計量）を $F(x_1, x_2)\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ と単に取り替えた平面上で流体の運動はどのように変わるのかを考察した．計量を上記のように取り替えるだけでも，流体の運動が変わることがわかった．

序文

本研究を進めるにあたり，岡本久著「日常現象からの解析学」を用いて変分法やユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ での非圧縮性流体について学習した．非圧縮性流体についての研究は，ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ 上だけでなく，リーマン多様体上でもなされている [5].

計量を取り替えたときのオイラー方程式やナヴィエ・ストークス方程式を示し，F を与えることで，ポワズィーユ流（ポワズイユ流）などの定常流で外力が無視できる場合の具体的な例で解を与えることができたので，その結果を報告する．なお，ここで拡張されたナヴィエ・ストークス方程式に関しては，粘性項の実質的な考察は行っておらず，現実にそぐわないものとなっている可能性がある．粘性項についての厳密な考察については，テイラーや三松-矢野によって考察が行われている [6][8][9].

1　特殊な計量を与えた平面

これまでの内容はユークリッド空間で考えていたが，特殊な計量を与えた平面での流体の運動について考えたい．本章ではそのための準備をする．

1.1　特殊な計量

ユークリッド空間における計量とは，n 次元空間 $\mathbb{R}^n$ の各点でのベクトルの大きさと角度のことである．すなわち，ベクトルの内積

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\| \cos\theta$$

である．そこで，関数 $F(x_1, x_2)$（> 0）によって取り替えた計量

$$F\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \tag{$*$}$$

を与えた特殊な平面での流体の運動を考えることとする．このように，内積を替えると流体の運動はどう変わるのだろうか？それは，オイラー方程式やナヴィエ・ストークス方程式がどう変わるのかを調べることで理

---

*1 三重大学教育学研究科
*2 三重大学教育学研究科

解できる．特殊な平面でオイラー方程式などを考えるために，まずはグリーンの定理がどう変るのか調べてみる．

1.2　グリーンの定理の拡張

本章以降，特に断らない限り以下を仮定する．M を $(*)$ で定まる計量を与えた平面，Ω を M 上の滑らかな閉曲面，$\partial\Omega$ を Ω の境界，Ω の各点を $x=(x_1,x_2)$，Ω の境界となる C^∞ 級の閉曲線を Γ' とする．$\boldsymbol{n}'$ を Γ' の各点で定義された Ω の外向きの単位法線ベクトルとしたとき，Γ' の各点における f の $\boldsymbol{n}'$ 方向の微分を $\frac{\partial f}{\partial n'}=\boldsymbol{n}'\cdot\nabla f$ により定める．また，M 上の向きによらない面積要素を $dA=F\,dS=Fdx_1dx_2$ とする．

補題 1.1. $\mathbb{R}^2$ 上で定義された微分可能な関数 f,g が与えられたとき，長方形領域 $A_k=[\xi_{1k},\xi_{2k}]\times[\alpha_k,\alpha_k+\delta\alpha]$ において，

$$\begin{aligned}\iint_{A_k}\frac{\partial f}{\partial x_1}g\,dx_1dx_2+\iint_{A_k}f\frac{\partial g}{\partial x_1}\,dx_1dx_2\\ =\int_{\alpha_k}^{\alpha_k+\delta\alpha}f(\xi_{2k},x_2)g(\xi_{2k},x_2)\,dx_2-\int_{\alpha_k}^{\alpha_k+\delta\alpha}f(\xi_{1k},x_2)g(\xi_{1k},x_2)\,dx_2\end{aligned}$$

が成り立つ．

証明. 積の微分

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(fg)=\frac{\partial f}{\partial x_1}g+f\frac{\partial g}{\partial x_1}$$

より，

$$\iint_{A_k}\frac{\partial}{\partial x_1}(fg)\,dx_1dx_2=\iint_{A_k}\frac{\partial f}{\partial x_1}g\,dx_1dx_2+\iint_{A_k}f\frac{\partial g}{\partial x_1}\,dx_1dx_2$$

となる．ここで，左辺について，

$$\begin{aligned}\iint_{A_k}\frac{\partial}{\partial x_1}(fg)\,dx_1dx_2&=\int_{\alpha_k}^{\alpha_k+\delta\alpha}\left\{\int_{\xi_{1k}}^{\xi_{2k}}\frac{\partial}{\partial x_1}(fg)dx_1\right\}dx_2\\&=\int_{\alpha_k}^{\alpha_k+\delta\alpha}f(\xi_{2k},x_2)g(\xi_{2k},x_2)\,dx_2-\int_{\alpha_k}^{\alpha_k+\delta\alpha}f(\xi_{1k},x_2)g(\xi_{1k},x_2)\,dx_2\end{aligned}$$

となるので，主張が得られる． □

また，1 変数での平均値の定理を利用することで，次の補題を得る．

補題 1.2. $\mathbb{R}^2$ 上で定義された微分可能な関数 f が与えられたとき，

$$f(\xi+A,t)=f(\xi,t)+g(\xi,A)A$$

となる g が存在する．

証明. x_2 成分を定数とすると，平均値の定理より，

$$\frac{f(\xi+A,t)-f(\xi,t)}{A}=f'(c)$$

となる $c \in (\xi_2, \xi_2 + A)$ が存在する．A が決まれば c も決まるので，$f'(c) = g(\xi, A)$ とすると，

$$\frac{f(\xi + A, t) - f(\xi, t)}{A} = g(\xi, A)$$
$$f(\xi + A, t) = f(\xi, t) + g(\xi, A)A$$

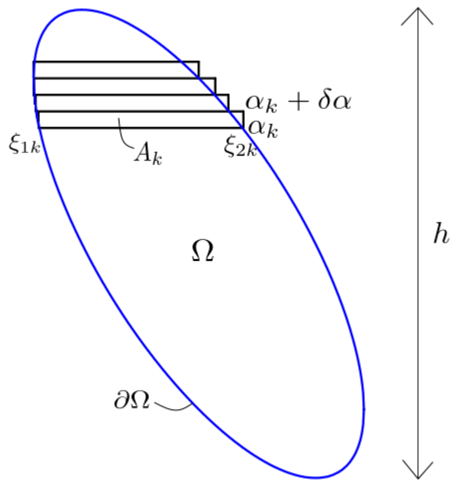
となる．□

定理 1.1. （拡張されたグリーンの定理）$\Omega \cup \Gamma'$ で定義された微分可能な関数 f, g が与えられたとき，

$$\iint_\Omega f \Delta g \, dA = \int_{\partial\Omega} f \frac{\partial g}{\partial n'} F \, d\Gamma' - \iint_\Omega \nabla f \cdot \nabla g \, dA - \iint_\Omega f(\nabla g \cdot \nabla \log F) \, dA \tag{1.1}$$

が成り立つ．

証明. x_1 軸に平行な多数の直線を使って，Ω を下図のように細かく分割し，細い長方形領域の和で近似する．



イメージ図．

1 つの長方形領域 A を考える．$A = [\xi_1, \xi_2] \times [\alpha, \alpha + \delta\alpha]$ とし，$B = \Omega \cap A$ とする．A, B の部分領域に関する和を取ったところをそれぞれ A_s, B_s とする．また，下から k 番目の A を A_k として，$A_k = [\xi_{1k}, \xi_{2k}] \times [\alpha_k, \alpha_k + \delta\alpha]$ とする．ここで，以下の積分を考える．

$$\iint_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_1} dA = \iint_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_1} \sqrt{E_1 E_2 - {E_3}^2} \, dx_1 dx_2$$

なお，上式の E_1, E_2, E_3 は第一基本量である．ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ では，

$$E_1 = p_u \cdot p_u = (1, 0) \cdot (1, 0) = 1,$$
$$E_2 = p_u \cdot p_v = (1, 0) \cdot (0, 1) = 0,$$
$$E_3 = p_v \cdot p_v = (0, 1) \cdot (0, 1) = 1$$

となるので M 上では，

$$
\begin{aligned}
E_1 &= F(x_1,x_2)p_u \cdot p_u = F(x_1,x_2),\\
E_2 &= F(x_1,x_2)p_u \cdot p_v = 0,\\
E_3 &= F(x_1,x_2)p_v \cdot p_v = F(x_1,x_2)
\end{aligned}
$$

となる．定義より $F(x_1,x_2) > 0$ であることから，

$$
\sqrt{E_1E_2 - {E_3}^2} = \sqrt{F(x_1,x_2)^2} = |F(x_1,x_2)| = F(x_1,x_2)
$$

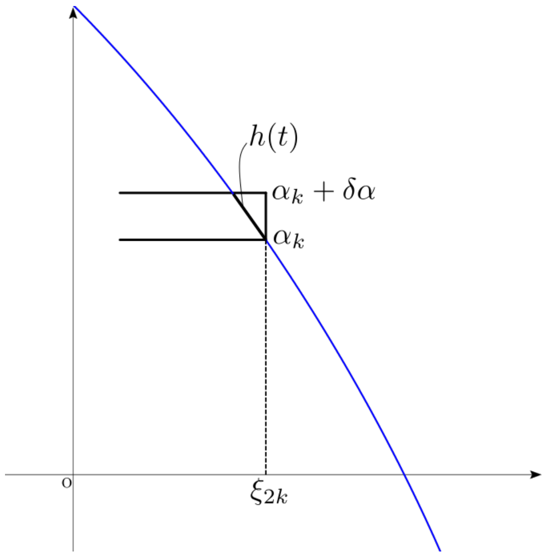
となる．よって，考えたい積分は，

$$
\begin{aligned}
\iint_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_1} F\,dx_1dx_2 &= \iint_{B_s} \frac{\partial f}{\partial x_1} F\,dx_1dx_2\\
&= \iint_{A_s} \frac{\partial f}{\partial x_1} F\,dx_1dx_2 \ (\delta\alpha \to 0)\\
&= \iint_{A_1} \frac{\partial f}{\partial x_1} F\,dx_1dx_2 + \iint_{A_2} \frac{\partial f}{\partial x_1} F\,dx_1dx_2 + \cdots + \iint_{A_n} \frac{\partial f}{\partial x_1} F\,dx_1dx_2 \qquad (1.2)
\end{aligned}
$$

となる．式 (1.2) の k 番目について，補題 1.1 より，

$$
\begin{aligned}
\iint_{A_k} \frac{\partial f}{\partial x_1} F\,dx_1dx_2 = \int_{\alpha_k}^{\alpha_k+\delta\alpha} f(\xi_{2k},x_2)F(\xi_{2k},x_2)\,dx_2 &- \int_{\alpha_k}^{\alpha_k+\delta\alpha} f(\xi_{1k},x_2)F(\xi_{1k},x_2)\,dx_2\\
&- \iint_{A_k} f\frac{\partial F}{\partial x_1}\,dx_1dx_2 \qquad (1.3)
\end{aligned}
$$

となる．ここで，式 (1.3) の右辺の第 1 項と第 2 項について，細い長方形領域 A_k の右端と左端に着目して変形することを考える．まず，右端について，$t \in [\alpha_k, \alpha_k+\delta\alpha]$ に対し $x_2 = t$ とすると x_1 は t の関数となるの



で，$x_1 = h(t)$ と表せる．Γ' が C^∞ 級なので，$h(t)$ も C^∞ 級である．よって，$t = \alpha_k$ における有限テーラー

展開により，

$$h(t) = h(\alpha_k) + h'(\alpha_k)(t-\alpha_k)\frac{1}{1!} + h''(\alpha_k)(t-\alpha_k)^2\frac{1}{2!} + \cdots + \frac{h^{(n)}(\alpha_k+\theta(t-\alpha_k))}{n!}(t-\alpha_k)^n$$
$$= \xi_{2k} + \left\{ h'(\alpha_k) + h''(\alpha_k)(t-\alpha_k)\frac{1}{2!} + \cdots + \frac{h^{(n)}(\alpha_k+\theta(t-\alpha_k))}{n!}(t-\alpha_k)^{n-1} \right\}(t-\alpha_k)$$

となる $\theta \in (0,1)$ が存在する．$C_h(t,\alpha_k) = h'(\alpha_k) + h''(\alpha_k)(t-\alpha_k)\frac{1}{2!} + \cdots + \frac{h^{(n)}(\alpha_k+\theta(t-\alpha_k))}{n!}(t-\alpha_k)^{n-1}$ とすると，$h(t) = \xi_{2k} + (t-\alpha_k)C_h$ となる．補題 1.2 より，

$$f(h(t),t) = f(\xi_{2k} + (t-\alpha_k)C_h, t) = f(\xi_{2k},t) + C_{f2}(t-\alpha_k)$$

となる．ここで，$C_{f2} = g(\xi_{2k}, (t-\alpha_k)C_h)C_h$ とおいた．同様に，

$$F(h(t),t) = F(\xi_{2k} + (t-\alpha_k)C_h, t) = F(\xi_{2k},t) + C_{F2}(t-\alpha_k)$$

となる．ここで，$C_{F2} = G(\xi_{2k}, (t-\alpha_k)C_h)C_h$ とおいた．よって，

$$\begin{aligned}
&\int_{\alpha_k}^{\alpha_k+\delta\alpha} f(x_1,x_2)F(x_1,x_2)\,dx_2 \\
&= \int_{\alpha_k}^{\alpha_k+\delta\alpha} f(h(t),t)F(h(t),t)\,dx_2 \\
&= \int_{\alpha_k}^{\alpha_k+\delta\alpha} \{f(\xi_{2k},t) + (t-\alpha_k)C_{f2}\}\{F(\xi_{2k},t) + (t-\alpha_k)C_{F2}\}\,dt \\
&= \int_{\alpha_k}^{\alpha_k+\delta\alpha} f(\xi_{2k},t)F(\xi_{2k},t)\,dt + \int_{\alpha_k}^{\alpha_k+\delta\alpha} H(\xi_{2k},t)(t-\alpha_k)\,dt \qquad (1.4)
\end{aligned}$$

となる．ここで，$H(\xi_{2k},t) = f(\xi_{2k},t)C_{F2} + F(\xi_{2k},t)C_{f2} + (t-\alpha_k)C_{f2}C_{F2}$ とおいた．A_k の左端についても同様に，

$$\int_{\alpha_k+\delta\alpha}^{\alpha_k} f(x_1,x_2)F(x_1,x_2)\,dx_2 = -\int_{\alpha_k}^{\alpha_k+\delta\alpha} f(\xi_{1k},t)F(\xi_{1k},t)\,dt - \int_{\alpha_k}^{\alpha_k+\delta\alpha} H(\xi_{1k},t)(t-\alpha_k)\,dt \qquad (1.5)$$

となる．なお，$C_{f1}(t,\alpha_k) = g(\xi_{1k},(t-\alpha_k)C_i)C_i, C_{F1}(t,\alpha_k) = g(\xi_{1k},(t-\alpha_k)C_i)C_i, C_i(t,\alpha_k) = i'(\alpha_k) + i''(\alpha_k)(t-\alpha_k)\frac{1}{2!} + \cdots + \frac{i^{(n)}(\alpha_k+\theta(t-\alpha_k))}{n!}(t-\alpha_k)^{n-1}, i(t) = \xi_{1k} + (t-\alpha_k)C_i$ である．ここで，$\int_{\alpha_k}^{\alpha_k+\delta\alpha} H(\xi_{2k},t)(t-\alpha_k)\,dt$ について考える．$H(\xi_{2k},t)(t-\alpha_k)$ は連続な関数の和や積であるので連続である．また，$t \in [\alpha_k, \alpha_k+\delta\alpha]$ なので，t は有界である．よって，$H(\xi_{2k},t)(t-\alpha_k)$ も有界であるので，ある $m \geq 0$ が存在して，

$$|H(\xi_{2k},t)| \leq m$$
$$|H(\xi_{2k},t)(t-\alpha_k)| \leq m|t-\alpha_k|$$

となる．この左辺の積分を考える．

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\alpha_k}^{\alpha_k+\delta\alpha} H(\xi_{2k},t)(t-\alpha_k)\,dt \right| &\leq \int_{\alpha_k}^{\alpha_k+\delta\alpha} |H(\xi_{2k},t)(t-\alpha_k)|\,dt \\
&\leq m\int_{\alpha_k}^{\alpha_k+\delta\alpha} (t-\alpha_k)\,dt = \frac{m}{2}(\delta\alpha)^2
\end{aligned}$$

となる．よって，$\left|\int_{\alpha_k}^{\alpha_k+\delta\alpha} H(\xi_{2k},t)(t-\alpha_k)\,dt\right|$ は $(\delta\alpha)^2$ でおさえられる．$\int_{\alpha_k}^{\alpha_k+\delta\alpha} H(\xi_{1k},t)(t-\alpha_k)\,dt$ についても同様にすることで，

$$\left|\int_{\alpha_k}^{\alpha_k+\delta\alpha} H(\xi_{2k},t)(t-\alpha_k)\,dt\right| \leq (\delta\alpha)^2,$$
$$\left|\int_{\alpha_k}^{\alpha_k+\delta\alpha} H(\xi_{1k},t)(t-\alpha_k)\,dt\right| \leq (\delta\alpha)^2$$

となる．すなわち，式 (1.4),(1.5) は $\delta\alpha \to 0$ のとき，ランダウ記号 o を用いて，

$$\int_{\alpha_k}^{\alpha_k+\delta\alpha} f(h(t),t)F(h(t),t)\,dt = \int_{\alpha_k}^{\alpha_k+\delta\alpha} f(\xi_{2k},t)F(\xi_{2k},t)\,dt + o(\delta\alpha), \tag{1.6}$$
$$-\int_{\alpha_k}^{\alpha_k+\delta\alpha} f(i(t),t)F(i(t),t)\,dt = -\int_{\alpha_k}^{\alpha_k+\delta\alpha} f(\xi_{1k},t)F(\xi_{1k},t)\,dt - o(\delta\alpha) \tag{1.7}$$

となる．ところで，$\mathbb{R}^2$ 空間では $d\Gamma = \frac{1}{n_1}dx_2$ である．M 上では $\|\boldsymbol{u}\|^2 = F\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}$ から $\|\boldsymbol{u}\| = \sqrt{F}\sqrt{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}}$ となり，M 上の単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}'$ とユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ での単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ の関係は $\boldsymbol{n}' = \frac{1}{\sqrt{F}}\boldsymbol{n}$ であるので，$d\Gamma' = \frac{1}{{n_1}'}\,dx_2$ となる．この式の両辺に $fF{n_1}'$ を掛けて積分すると，

$$\int_{\partial\Omega} fF{n_1}'\,d\Gamma' = \int_{\partial\Omega} fF\,dx_2$$

となる．よって，上式と式 (1.6),(1.7) より，

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial\Omega} fF{n_1}'\,d\Gamma' \\
=&\int_{\partial\Omega} fF\,dx_2 \\
=&\int_{\alpha_1}^{\alpha_1+\delta\alpha} f(\xi_{21},x_2)F(\xi_{21},x_2)\,dx_2 - \int_{\alpha_1}^{\alpha_1+\delta\alpha} f(\xi_{11},x_2)F(\xi_{11},x_2)\,dx_2 \\
&+ \int_{\alpha_2}^{\alpha_2+\delta\alpha} f(\xi_{22},x_2)F(\xi_{22},x_2)\,dx_2 - \int_{\alpha_2}^{\alpha_2+\delta\alpha} f(\xi_{12},x_2)F(\xi_{12},x_2)\,dx_2 \\
&+ \cdots + \int_{\alpha_n}^{\alpha_n+\delta\alpha} f(\xi_{2n},x_2)F(\xi_{2n},x_2)\,dx_2 - \int_{\alpha_n}^{\alpha_n+\delta\alpha} f(\xi_{1n},x_2)F(\xi_{1n},x_2)\,dx_2 \\
&+ n\cdot o(\delta\alpha) - n\cdot o(\delta\alpha)
\end{aligned} \tag{1.8}$$

となる．ここで，$\delta\alpha = \frac{h}{n}$ となる．（この $\delta\alpha$ は不連続であるので，$n = [\frac{h}{\delta\alpha} + 1]$ などと定義した方が不都合が

ない.）$\delta\alpha \to 0$ のとき，$n \to \infty$ となるが，$n \cdot o(\delta\alpha) \to 0$ となることに注意して，式 (1.2) から，

$$
\begin{aligned}
&\iint_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_1} F\, dx_1 dx_2 \\
&= \iint_{B_s} \frac{\partial f}{\partial x_1} F\, dx_1 dx_2 \\
&= \lim_{n\to\infty} \iint_{A_s} \frac{\partial f}{\partial x_1} F\, dx_1 dx_2 \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \iint_{A_k} \frac{\partial f}{\partial x_1} F\, dx_1 dx_2 \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left\{ \int_{\alpha_k}^{\alpha_k+\delta\alpha} f(\xi_{2k}, x_2) F(\xi_{2k}, x_2)\, dx_2 - \int_{\alpha_k}^{\alpha_k+\delta\alpha} f(\xi_{1k}, x_2) F(\xi_{1k}, x_2)\, dx_2 \right\} \\
&\qquad\qquad - \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \iint_{A_k} f \frac{\partial F}{\partial x_1}\, dx_1 dx_2 \text{（∵ 式 (1.3) より）} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left\{ \int_{\alpha_k}^{\alpha_k+\delta\alpha} f(\xi_{2k}, x_2) F(\xi_{2k}, x_2)\, dx_2 - \int_{\alpha_k}^{\alpha_k+\delta\alpha} f(\xi_{1k}, x_2) F(\xi_{1k}, x_2)\, dx_2 \right. \\
&\qquad\qquad \left. + n \cdot o(\delta\alpha) - n \cdot o(\delta\alpha) \right\} - \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \iint_{A_k} f \frac{\partial F}{\partial x_1}\, dx_1 dx_2 \\
&= \int_{\partial\Omega} f F {n_1}'\, d\Gamma' - \lim_{n\to\infty} \iint_{A_s} f \frac{\partial F}{\partial x_1}\, dx_1 dx_2 \text{（∵ 式 (1.8) より）} \\
&= \int_{\partial\Omega} f F {n_1}'\, d\Gamma' - \iint_\Omega f \frac{\partial F}{\partial x_1}\, dx_1 dx_2
\end{aligned}
$$

となる．すなわち，

$$
\iint_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_1} F\, dx_1 dx_2 = \int_{\partial\Omega} f F {n_1}'\, d\Gamma' - \iint_\Omega f \frac{\partial F}{\partial x_1}\, dx_1 dx_2 \tag{1.9}
$$

である．ここまで x_1 軸に平行な多数の直線を使って Ω を細かく分割して考えてきたが，x_2 軸に平行な多数の直線を使って Ω を細かく分割した場合についても同様にして考えると，

$$
\iint_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_2} F\, dx_1 dx_2 = \int_{\partial\Omega} f F {n_2}'\, d\Gamma' - \iint_\Omega f \frac{\partial F}{\partial x_2}\, dx_1 dx_2 \tag{1.10}
$$

となる．式 (1.9) で $f = f\frac{\partial g}{\partial x_1}$，式 (1.10) で $f = f\frac{\partial g}{\partial x_2}$ とすると，

$$
\begin{aligned}
\iint_\Omega \frac{\partial}{\partial x_1}\left(f\frac{\partial g}{\partial x_1}\right) F\, dx_1 dx_2 &= \int_{\partial\Omega} \left(f\frac{\partial g}{\partial x_1}\right) F {n_1}'\, d\Gamma' - \iint_\Omega \left(f\frac{\partial g}{\partial x_1}\right) \frac{\partial F}{\partial x_1}\, dx_1 dx_2, \\
\iint_\Omega \frac{\partial}{\partial x_2}\left(f\frac{\partial g}{\partial x_2}\right) F\, dx_1 dx_2 &= \int_{\partial\Omega} \left(f\frac{\partial g}{\partial x_2}\right) F {n_2}'\, d\Gamma' - \iint_\Omega \left(f\frac{\partial g}{\partial x_2}\right) \frac{\partial F}{\partial x_2}\, dx_1 dx_2
\end{aligned}
$$

となる．これらの式を加えて，

$$
\begin{aligned}
&\iint_{\Omega}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}\left(f\frac{\partial g}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(f\frac{\partial g}{\partial x_2}\right)\right\}F\,dx_1dx_2\\
&=\int_{\partial\Omega}f\left(\frac{\partial g}{\partial x_1}{n_1}'+\frac{\partial g}{\partial x_2}{n_2}'\right)F\,d\Gamma'-\iint_{\Omega}f\left(\frac{\partial g}{\partial x_1}\frac{\partial F}{\partial x_1}+\frac{\partial g}{\partial x_2}\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)dx_1dx_2\\
&=\int_{\partial\Omega}f(\boldsymbol{n}'\cdot\nabla g)F\,d\Gamma'-\iint_{\Omega}f(\nabla g\cdot\nabla F)\,dx_1dx_2\\
&=\int_{\partial\Omega}f\frac{\partial g}{\partial n'}F\,d\Gamma'-\iint_{\Omega}f(\nabla g\cdot\nabla F)\,dx_1dx_2
\end{aligned}
\tag{1.11}
$$

となる．ここで，

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_1}\left(f\frac{\partial g}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(f\frac{\partial g}{\partial x_2}\right)=&\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial g}{\partial x_1}+f\frac{\partial^2 g}{\partial {x_1}^2}+\frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial g}{\partial x_2}+f\frac{\partial^2 g}{\partial {x_2}^2}\\
=&f\left(\frac{\partial^2 g}{\partial {x_1}^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial {x_2}^2}\right)+\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)\cdot\left(\frac{\partial g}{\partial x_1},\frac{\partial g}{\partial x_2}\right)\\
=&f\Delta g+\nabla f\cdot\nabla g
\end{aligned}
$$

となるので，式 (1.11) は $\iint_{\Omega}(f\Delta g+\nabla f\cdot\nabla g)F\,dx_1dx_2=\int_{\Gamma'}f\frac{\partial g}{\partial n'}F\,d\Gamma'-\iint_{\Omega}f(\nabla g\cdot\nabla F)\,dx_1dx_2$ となるから，

$$
\iint_{\Omega}f\Delta g\,dA=\int_{\partial\Omega}f\frac{\partial g}{\partial n'}F\,d\Gamma'-\iint_{\Omega}\nabla f\cdot\nabla g\,dA-\iint_{\Omega}f(\nabla g\cdot\nabla\log F)\,dA
$$

となる． □

1.3　ガウスの定理の拡張

拡張されたグリーンの定理から，次の拡張されたガウスの定理が得られる．

定理 1.2. （拡張されたガウスの定理）Ω 上のベクトル値関数 $\boldsymbol{u}$ に対し，

$$
\iint_{\Omega}\operatorname{div}\boldsymbol{u}\,dA+\iint_{\Omega}\boldsymbol{u}\cdot\nabla\log F\,dA=\int_{\partial\Omega}F\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}'\,d\Gamma'
\tag{1.12}
$$

が成り立つ．

証明. 式 (1.1) において，$f=u_1, g=x_1$ とすると，

$$
\iint_{\Omega}u_1\Delta x_1\,dA=\int_{\partial\Omega}Fu_1\frac{\partial x_1}{\partial n'}\,d\Gamma'-\iint_{\Omega}\nabla u_1\cdot\nabla x_1\,dA-\iint_{\Omega}u_1(\nabla x_1\cdot\nabla\log F)\,dA
\tag{1.13}
$$

となる．ここで，

$$
\begin{aligned}
\Delta x_1=&0,\\
\nabla u_1\cdot\nabla x_1=&\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1},\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)\cdot\left(\frac{\partial x_1}{\partial x_1},\frac{\partial x_1}{\partial x_2}\right)=\frac{\partial u_1}{\partial x_1},\\
\nabla x_1\cdot\nabla\log F=&\left(\frac{\partial x_1}{\partial x_1},\frac{\partial x_1}{\partial x_2}\right)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\log F,\frac{\partial}{\partial x_2}\log F\right)=\frac{\partial}{\partial x_1}\log F,\\
\frac{\partial x_1}{\partial n'}=&\boldsymbol{n}'\cdot\nabla x_1=({n_1}',{n_2}')\cdot\left(\frac{\partial x_1}{\partial x_1},\frac{\partial x_1}{\partial x_2}\right)={n_1}'
\end{aligned}
$$

より，式 (1.13) は

$$\int_{\partial\Omega} F u_1 {n_1}' \, d\Gamma' = \iint_\Omega \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \, dA + \iint_\Omega u_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \log F \, dA$$

となる．同様に，$f = u_2, g = x_2$ としたときを考えると，

$$\int_{\partial\Omega} F u_2 {n_2}' \, d\Gamma' = \iint_\Omega \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \, dA + \iint_\Omega u_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \log F \, dA$$

となる．これら 2 つの式を加えると，

$$\int_{\partial\Omega} F(u_1 {n_1}' + u_2 {n_2}') \, d\Gamma' = \iint_\Omega \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) dA + \iint_\Omega \left(u_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \log F + u_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \log F \right) dA$$

となり，整理すると

$$\iint_\Omega \operatorname{div} \boldsymbol{u} \, dA + \iint_\Omega \boldsymbol{u} \cdot \nabla \log F \, dA = \int_{\partial\Omega} F \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n}' \, d\Gamma'$$

となる． □

定理 1.3. 定理 1.1 と定理 1.2 は同値である．

証明. 拡張されたガウスの定理から拡張されたグリーンの定理を導けばよい．式 (1.12) において，$\boldsymbol{u} = f\nabla g$ とすると，

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \boldsymbol{u} =& \operatorname{div} (f\nabla g) = f\Delta g + \nabla f \cdot \nabla g, \\ \boldsymbol{u} \cdot \nabla \log F =& f\nabla g \cdot \nabla \log F, \\ \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n}' =& f\nabla g \cdot \boldsymbol{n}' = f \frac{\partial g}{\partial n'} \end{aligned}$$

より，

$$\iint_\Omega (f\Delta g + \nabla f \cdot \nabla g) \, dA + \iint_\Omega f(\nabla g \cdot \nabla \log F) \, dA = \int_{\partial\Omega} F f \frac{\partial g}{\partial n'} \, d\Gamma'$$

となり，整理すると

$$\iint_\Omega f\Delta g \, dA = \int_{\partial\Omega} f \frac{\partial g}{\partial n'} F \, d\Gamma' - \iint_\Omega \nabla f \cdot \nabla g \, dA - \iint_\Omega f(\nabla g \cdot \nabla \log F) \, dA$$

となる． □

2 特殊な計量を与えた平面上での流体の運動

本章では，拡張されたガウスの定理から特殊な平面上でのオイラー方程式とナヴィエ・ストークス方程式を導き，その具体例を示す．

2.1　オイラー方程式とナヴィエ・ストークス方程式の拡張

流体とは，気体と液体の総称である．固体は決まった形があるが，流体には決まった形がない．そのため，流体の運動を記述するには固体とは違った方法をとることになる．もちろん，固体のときと同じように分子 1 つひとつを質点とみなして運動方程式などを当てはめても記述できるが，現実的ではない．例えば標準状態で 22.4L に含まれる気体分子の数は約 6.02×10^{23} 個になることを考えれば非現実的であることが理解できる．そのため，連続体という概念のもとで流体の運動を考える．では，連続体とみなしたときの流体の速度を定義する．

定義 2.1. 流体が $\mathbb{R}^3$ 空間内のある領域 Ω に連続的に分布しているとする．このとき，Ω の各点 x に着目する．今，連続体としたときに点とみなしているものは小領域であるので，その小領域内での分子の速度の平均を定義でき，その点の連続関数であると仮定する．このとき，Ω の各点 x で速度が定義できる．速度は x だけでなく時間 t にも依存するので，速度 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(t, x)$ とする．

上の定義は $\mathbb{R}^3$ 上のものであるが，これが M 上でも成り立つとする．ユークリッド空間上での完全流体仮説があるが，M 上では以下のようになると仮定する．

$\boxed{M \text{ 上での完全流体仮説}}$

a が b を押す力は単位面積当たり $Fp\boldsymbol{n}'$ であり，b が a を押す力は単位面積当たり $-Fp\boldsymbol{n}'$ である．この p は (t, x) の関数であるが，平面の選び方に依存しない．すなわち $\boldsymbol{n}'$ に依存しない．

定義 2.2. M 上での完全流体仮説の中の p を M 上における圧力とする．

このように定義した速度 $\boldsymbol{v}(t, x)$ や圧力 $p(t, x)$ が M 上での流体の運動を記述することになる．では，M 上でのオイラー方程式を示そう．次の式 (2.1) がオイラーの運動方程式を拡張したもので，式 (2.2) が非圧縮性条件を拡張したものである．

命題 2.1. （拡張されたオイラー方程式）領域 Ω 内に流体がつめられているとする．この流体について，密度 $\rho\ (>0)$ が一定で完全流体仮説が適用できるとき，流体の運動は Ω の各点 x での $F(x)$ と，時間 t と x での速度ベクトル $\boldsymbol{v}(t, x) = (v_1(t, x), v_2(t, x))$ と圧力 $p(t, x)$ だけで決定され，$\boldsymbol{v}, p$ は次の偏微分方程式

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}(\nabla p + p\nabla \log F) + \boldsymbol{f}, \tag{2.1}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \log F = 0 \tag{2.2}$$

を解くことで決定される．ここで，$\boldsymbol{f}$ は外力で，重力などの流体に直接作用する力である．

証明. まず，式 (2.2) を導く．領域 Ω 内に流体がつめられているとする．$(*)$ で定まる計量での質量保存則を仮定すると，流体が突然生まれたり消えたりしない．よって，流れにより境界 $\partial\Omega$ を出入りする質量の総和は 0 であるとすると，

$$\iint_{\partial\Omega} \rho F \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}' \, d\Gamma' = 0$$

が成り立つと仮定できる．式 (1.12) の両辺に定数 ρ を掛けて，

$$\begin{aligned}\rho\iint_\Omega \operatorname{div}\boldsymbol{u}\,dA+\rho\iint_\Omega \boldsymbol{u}\cdot\nabla\log F\,dA=&\int_{\partial\Omega}\rho F\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}'\,d\Gamma'\\ \rho\iint_\Omega(\operatorname{div}\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}\cdot\nabla\log F)\,dA=&0\end{aligned}$$

となる．Ω は任意であるので，上式の左辺の被積分関数は 0 である．よって，

$$\operatorname{div}\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla\log F=0$$

となる．次に，式 (2.1) を導く．$(*)$ で定まる計量での運動量保存則を仮定すると，ある領域 Ω での「流体の運動量の時間変化と境界での運動量の和」は「Ω 内の流体に直接作用する外力と境界からおよぼされる力の和」に等しい．すなわち，

$$\frac{\partial}{\partial t}\iint_\Omega\rho\boldsymbol{v}\,dA+\int_{\partial\Omega}\rho(F\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}')\boldsymbol{v}\,d\Gamma'=\iint_\Omega\rho\boldsymbol{f}\,dA-\int_{\partial\Omega}Fp\boldsymbol{n}'\,d\Gamma' \tag{2.3}$$

が成り立つことを仮定する．ただし，$\boldsymbol{f}$ は既知の関数とする．ところで，$\operatorname{div}\boldsymbol{u}$ について $\boldsymbol{u}=v_1\boldsymbol{v}$ とすると，

$$\operatorname{div}(v_1\boldsymbol{v})=v_1\operatorname{div}\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla v_1$$

となる．よって，

$$\iint_\Omega\operatorname{div}(v_1\boldsymbol{v})\,dA=\iint_\Omega(v_1\operatorname{div}\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla v_1)\,dA$$

となるので，

$$\iint_\Omega\boldsymbol{v}\cdot\nabla v_1\,dA=\iint_\Omega\operatorname{div}(v_1\boldsymbol{v})\,dA-\iint_\Omega v_1\operatorname{div}\boldsymbol{v}\,dA$$

となる．式 (1.12) より，

$$\iint_\Omega\boldsymbol{v}\cdot\nabla v_1\,dA=-\iint_\Omega v_1\boldsymbol{v}\cdot\nabla\log F\,dA+\int_{\partial\Omega}F\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}'v_1\,d\Gamma'-\iint_\Omega v_1\operatorname{div}\boldsymbol{v}\,dA$$

となる．$\operatorname{div}\boldsymbol{u}$ について $\boldsymbol{u}=v_2\boldsymbol{v}$ としたときも同様に，

$$\iint_\Omega\boldsymbol{v}\cdot\nabla v_2\,dA=-\iint_\Omega v_2\boldsymbol{v}\cdot\nabla\log F\,dA+\int_{\partial\Omega}F\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}'v_2\,d\Gamma'-\iint_\Omega v_2\operatorname{div}\boldsymbol{v}\,dA$$

となるので，まとめると

$$\iint_\Omega(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}\,dA=-\iint_\Omega(\boldsymbol{v}\cdot\nabla\log F)\boldsymbol{v}\,dA+\int_{\partial\Omega}F(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}')\boldsymbol{v}\,d\Gamma'-\iint_\Omega\boldsymbol{v}\operatorname{div}\boldsymbol{v}\,dA$$

となる．式 (2.2) より，

$$\int_{\partial\Omega}F(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}')\boldsymbol{v}\,d\Gamma'=\iint_\Omega(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}\,dA$$

となる．また，圧力 p について，式 (1.12) で $u_1=p,u_2=0$ とすると，

$$\iint_\Omega\frac{\partial p}{\partial x_1}\,dA+\iint_\Omega p\frac{\partial}{\partial x_1}\log F\,dA=\int_{\partial\Omega}Fp{n_1}'\,d\Gamma'$$

となる．同様に，式 (1.12) で $u_1=0,u_2=p$ とすると，

$$\iint_\Omega\frac{\partial p}{\partial x_2}\,dA+\iint_\Omega p\frac{\partial}{\partial x_2}\log F\,dA=\int_{\partial\Omega}Fp{n_2}'\,d\Gamma'$$

となるので，まとめると

$$\int_{\partial\Omega} Fp\boldsymbol{n}'\,d\Gamma' = \iint_{\Omega} \nabla p\,dA + \iint_{\Omega} p\nabla\log F\,dA \tag{2.4}$$

となる．式 (2.1),(2.4) を式 (2.3) に代入すると，

$$\frac{\partial}{\partial t}\iint_{\Omega}\rho\boldsymbol{v}\,dA + \iint_{\Omega}\rho(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}\,dA = \iint_{\Omega}\rho\boldsymbol{f}\,dA - \iint_{\Omega}(\nabla p + p\nabla\log F)\,dA$$

となる．Ω は任意なので，

$$\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}(\nabla p + p\nabla\log F) + \boldsymbol{f}$$

となる．　□

この拡張されたオイラー方程式の解を 1 つに特定するには，次の初期条件 $\boldsymbol{v}_0$ と境界条件 g が必要である．

$$\boldsymbol{v}(0,x) = \boldsymbol{v}_0(x)\ (x\in\Omega),$$
$$F\boldsymbol{v}(t,x)\cdot\boldsymbol{n} = g(t,x)\ (x\in\partial\Omega, 0\le t)$$

ユークリッド空間のときと同様に，Ω の形が変わらない場合や Ω の境界で流体の出入りが無い場合，すなわち境界が固体の壁のように静止しているとき，$g\equiv 0$ となる．そうでない場合は g は与えられた関数になる．なお，圧力 p に関する条件はない．次の式 (2.5) がナヴィエ・ストークスの運動方程式を拡張したものである．非圧縮性条件については流体の粘性の影響を受けないので，式 (2.2) と変わらない．

命題 2.2. （拡張されたナヴィエ・ストークス方程式）動粘性係数を ν とし，正の定数とする．このとき流体の運動は Ω の各点 x での $F(x)$ と，時間 t と x での速度ベクトル $\boldsymbol{v}(t,x) = (v_1(t,x), v_2(t,x))$ と圧力 $p(t,x)$ だけで決定され，$\boldsymbol{v}, p$ は次の偏微分方程式

$$\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} = \nu(\Delta\boldsymbol{v} + \nabla\boldsymbol{v}\cdot\nabla\log F) - \frac{1}{\rho}(\nabla p + p\nabla\log F) + \boldsymbol{f}, \tag{2.5}$$
$$\operatorname{div}\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\log F = 0$$

を解くことで決定される．

証明． $(*)$ で定まる計量での運動量保存則を仮定すると，ある領域 Ω での「流体の運動量の時間変化と境界での運動量の和」は「Ω 内の流体に直接作用する外力と境界からおよぼされる力の和」に等しい．すなわち，

$$\frac{\partial}{\partial t}\iint_{\Omega}\rho\boldsymbol{v}\,dA + \int_{\partial\Omega}\rho(F\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}')\boldsymbol{v}\,d\Gamma' = \iint_{\Omega}\rho\boldsymbol{f}\,dA - \int_{\partial\Omega}Fp\boldsymbol{n}'\,d\Gamma' + \int_{\partial\Omega}F\nu\rho(\nabla\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}')\,d\Gamma'$$

が成り立つことを仮定する．ただし，$\boldsymbol{f}$ は既知の関数とする．式 (2.1),(2.4) を上式に代入すると，

$$\frac{\partial}{\partial t}\iint_{\Omega}\rho\boldsymbol{v}\,dA + \iint_{\Omega}\rho(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}\,dA = \iint_{\Omega}\rho\boldsymbol{f}\,dA - \iint_{\Omega}(\nabla p + p\nabla\log F)\,dA + \int_{\partial\Omega}F\nu\rho(\nabla\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}')\,d\Gamma' \tag{2.6}$$

となる．よって，上式の右辺の第 3 項を変形することを考える．式 (1.12) に $u_1 = \frac{\partial v_1}{\partial x_1}, u_2 = \frac{\partial v_1}{\partial x_2}$ を代入すると，

$$\iint_{\Omega}\left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial {x_1}^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial {x_2}^2}\right)dA + \iint_{\Omega}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_1}\log F + \frac{\partial v_1}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_2}\log F\right)dA = \int_{\partial\Omega}F\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}{n_1}' + \frac{\partial v_1}{\partial x_2}{n_2}'\right)d\Gamma'$$

となり，

$$\iint_\Omega \Delta v_1 \, dA + \iint_\Omega \nabla v_1 \cdot \nabla \log F \, dA = \int_{\partial\Omega} F \nabla v_1 \cdot \boldsymbol{n}' \, d\Gamma'$$

となる．同様に，$u_1 = \frac{\partial v_2}{\partial x_1}, u_2 = \frac{\partial v_2}{\partial x_2}$ を代入すると，

$$\iint_\Omega \Delta v_2 \, dA + \iint_\Omega \nabla v_2 \cdot \nabla \log F \, dA = \int_{\partial\Omega} F \nabla v_2 \cdot \boldsymbol{n}' \, d\Gamma'$$

となるので，まとめると，

$$\iint_\Omega \Delta \boldsymbol{v} \, dA + \iint_\Omega \nabla \boldsymbol{v} \cdot \nabla \log F \, dA = \int_{\partial\Omega} F \nabla \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}' \, d\Gamma'$$

となる．よって，上式を式 (2.6) に代入すると，

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \iint_\Omega \rho \boldsymbol{v} \, dA + & \iint_\Omega \rho (\boldsymbol{v} \cdot \nabla) \boldsymbol{v} \, dA \\ &= \iint_\Omega \rho \boldsymbol{f} \, dA - \iint_\Omega (\nabla p + p \nabla \log F) \, dA + \iint_\Omega \nu \rho (\Delta \boldsymbol{v} + \nabla \boldsymbol{v} \cdot \nabla \log F) \, dA \end{aligned}$$

となる．Ω は任意なので，

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla) \boldsymbol{v} = \nu (\Delta \boldsymbol{v} + \nabla \boldsymbol{v} \cdot \nabla \log F) - \frac{1}{\rho} (\nabla p + p \nabla \log F) + \boldsymbol{f}$$

となる． □

このナヴィエ・ストークス方程式の解を特定するには，次の初期条件 $\boldsymbol{v}_0$ と境界条件 $\boldsymbol{g}$ が必要である．（境界条件は粘着条件という．）

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}(0, x) &= \boldsymbol{v}_0(x) \ (x \in \Omega), \\ \boldsymbol{v}(t, x) &= \boldsymbol{g}(t, x) \ (x \in \partial\Omega) \end{aligned}$$

境界が固体の壁のように静止しているとき，$\boldsymbol{g} \equiv 0$ となり，

$$\boldsymbol{v}(t, x) = 0 \ (x \in \partial\Omega) \tag{2.7}$$

となる．次節の具体例では，式 (2.7) を仮定する．

2.2 具体例

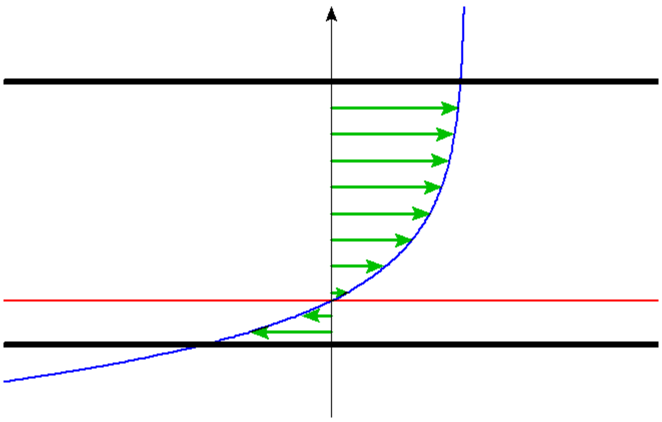
ここでは，拡張されたナヴィエ・ストークス方程式の具体例を挙げる．なお，この具体例では外力 $\boldsymbol{f} \equiv 0$ とする．また，定常流を考えることとする．

例 2.1 領域 $\Omega = \{(x_1, x_2) \in M | -\infty < x_1 < \infty, -b < x_2 < b\}$ で，$x_2 = b$ にある板は速度 c で右に，$x_2 = -b$ にある板は速度 c で左に動いている．このとき，Ω 内の速度ベクトル場 $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)$ は次の境界条件を満たすとする．

$$\begin{aligned} x_2 = b \text{ のとき，} & v_1 = c, v_2 = 0, \\ x_2 = -\, b \text{ のとき，} & v_1 = -c, v_2 = 0 \end{aligned}$$

これを満たす $\boldsymbol{v}, p, F$ として，

$$v_1 = \frac{2c}{1-e^{2kb}}(e^{-kx_2+kb}-1)+c,\ v_2=0,\ p=de^{-kx_2},\ F=e^{kx_2}\ (d\text{ は定数，}k\text{ は 0 以外の定数}) \tag{2.8}$$



x_2 軸はベクトルの始点をわかりやすくするために描画した．

が存在する．この解の求め方を記述しておこう．$\boldsymbol{v} = (v_1(x_2), 0), F = e^{kx_2}$ とする．今，拡張されたナヴィエ・ストークス方程式は，

$$v_1\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2\frac{\partial v_1}{\partial x_2} = \nu(\Delta v_1 + \nabla v_1 \cdot \nabla \log F) - \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x_1} + p\frac{\partial}{\partial x_1}\log F\right), \tag{2.9}$$

$$v_1\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_2\frac{\partial v_2}{\partial x_2} = \nu(\Delta v_2 + \nabla v_2 \cdot \nabla \log F) - \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x_2} + p\frac{\partial}{\partial x_2}\log F\right), \tag{2.10}$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + v_1\frac{\partial}{\partial x_1}\log F + v_2\frac{\partial}{\partial x_2}\log F = 0 \tag{2.11}$$

となる．式 (2.9),(2.10) から，

$$\nu\left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial {x_2}^2} + k\frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_1} = 0, \tag{2.12}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_2} + kp = 0 \tag{2.13}$$

となる．なお，拡張された非圧縮性条件を満たすことは直ちにわかる．$p = p(x_2)$ とすると，式 (2.13) から，

$$p = de^{-kx_2}\ (d\text{ は定数})$$

となる．また，式 (2.12) から，

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial {x_2}^2} + k\frac{\partial v_1}{\partial x_2} = 0 \tag{2.14}$$

となるので，$k \neq 0$ のときの一般解は

$$v_1 = C_1e^{-kx_2} + C_2\ (C_1, C_2\text{は定数})$$

となる．境界条件から，

$$v_1(b) = C_1e^{-kb} + C_2 = c,$$
$$v_1(-b) = C_1e^{kb} + C_2 = -c$$

となる．ここから，

$$C_1 = \frac{2ce^{kb}}{1-e^{2kb}},\ C_2 = c - \frac{2c}{1-e^{2kb}}$$

となるので，

$$v_1 = \frac{2c}{1-e^{2kb}}(e^{-kx_2+kb} - 1) + c$$

となる．一方，$k = 0$ とすると，式 (2.14) の一般解は，

$$v = C_3x_2 + C_4\ (C_3, C_4 \text{は定数})$$

となる．境界条件から，

$$v_1(b) = C_3b + C_4 = c$$
$$v_1(-b) = -C_3b + C_4 = -c$$

となる．ここから，

$$C_3 = \frac{c}{b},\ C_4 = 0$$

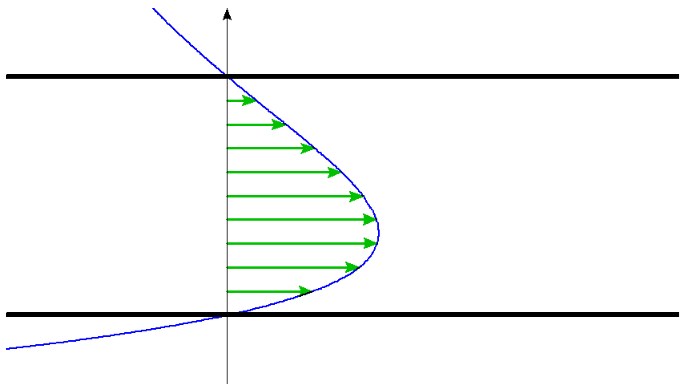
となるので，

$$v_1 = \frac{c}{b}x_2$$

となる．よって，$\mathbb{R}^2$ での平面クエット流となる．

例 2.2 領域 $\Omega = \{(x_1, x_2) \in M | 0 < x_1 < a, -b < x_2 < b\}$ の $x_1 = 0$ から圧力を加えたときの Ω 内の流体の運動を考える．速度ベクトル場 $\boldsymbol{v}$ は拡張されたナヴィエ・ストークス方程式を満たすとする．境界条件 $\boldsymbol{v} = 0$ を $\partial\Omega = \{0 < x_1 < a, x_2 = \pm b\}$ に課す．なお，$x_1 = 0$ には課さない．このような $\boldsymbol{v}, p, F$ として，

$$v_1 = \frac{dC_1}{k\nu\rho}\left\{\frac{2b}{e^{kb}-e^{-kb}} - \left(\frac{e^{kb}+e^{-kb}}{e^{kb}-e^{-kb}}b + x_2\right)e^{-kx_2}\right\},\ v_2 = 0,$$
$$p = d(C_1x_1 + C_2)e^{-kx_2},\ F = e^{kx_2}\ (C_1, C_2, d \text{ は定数，} k \text{ は } 0 \text{ 以外の定数}) \tag{2.15}$$



x_2 軸はベクトルの始点をわかりやすくするために描画した．

が存在する．この解の求め方を記述しておこう．$\boldsymbol{v} = (v_1(x_2), 0), F(x_1, x_2) = e^{kx_2}$ とする．拡張された非圧縮性条件を満たすことは直ちにわかる．式 (2.9),(2.10) から，

$$\nu \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial {x_2}^2} + k \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_1} = 0, \tag{2.16}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_2} + kp = 0 \tag{2.17}$$

となる．ここで，式 (2.16) から，$\frac{\partial p}{\partial x_1} = g(x_2)$ (g は x_2の関数) となるので，

$$p = (C_1 x_1 + C_2) g(x_2) \ (C_1, C_2\text{は定数})$$

となる．よって，式 (2.17) から，

$$\frac{\partial g}{\partial x_2} + kg = 0$$

となるので，$g(x_2) = de^{-kx_2}$ (d は定数) となる．よって，

$$p = d(C_1 x_1 + C_2) e^{-kx_2}$$

となる．また，式 (2.16) から，

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial {x_2}^2} + k \frac{\partial v_1}{\partial x_2} = \frac{dC_1}{\nu\rho} e^{-kx_2} \tag{2.18}$$

となる．（これは 2 階定係数線形非同次微分方程式である．）$k \neq 0$ のときの一般解は，

$$v_1 = C_3 + \left(C_4 - \frac{dC_1}{k\nu\rho} x_2 \right) e^{-kx_2} \ (C_3, C_4\text{は定数})$$

となる．境界条件から，

$$v_1(b) = C_3 + \left(C_4 - \frac{dC_1}{k\nu\rho} b \right) e^{-kb} = 0,$$
$$v_1(-b) = C_3 + \left(C_4 + \frac{dC_1}{k\nu\rho} b \right) e^{kb} = 0$$

となる．ここから，

$$C_3 = \frac{2bdC_1}{k\nu\rho} \frac{1}{e^{kb} - e^{-kb}},\ C_4 = -\frac{bdC_1}{k\nu\rho} \frac{e^{kb} + e^{-kb}}{e^{kb} - e^{-kb}}$$

となるので，

$$v_1 = \frac{dC_1}{k\nu\rho} \left\{ \frac{2b}{e^{kb} - e^{-kb}} - \left(\frac{e^{kb} + e^{-kb}}{e^{kb} - e^{-kb}} b + x_2 \right) e^{-kx_2} \right\}$$

となる．一方，$k = 0$ とすると，式 (2.18) の一般解は，

$$v_1 = \frac{dC_1}{2\nu\rho} {x_2}^2 + C_5 x_2 + C_6 \ (C_5, C_6\text{は定数})$$

となる．境界条件から，

$$v_1(b) = \frac{dC_1}{2\nu\rho} b^2 + C_5 b + C_6 = 0,$$
$$v_1(-b) = \frac{dC_1}{2\nu\rho} b^2 - C_5 b + C_6 = 0$$

となる．ここから，

$$C_5 = 0,\ C_6 = -\frac{dC_1}{2\nu\rho}b^2$$

となるので，

$$v_1 = \frac{dC_1}{2\nu\rho}({x_2}^2 - b^2)$$

となる．よって，$\mathbb{R}^2$ でのポワズィーユ流となる．

<u>**例 2.3**</u> さらに，$k \neq 0$ のとき，境界条件が $v_1(b) = \alpha,\ v_1(-b) = \beta$ となる場合を考えてみよう．

$$v_1(b) = C_3 + \left(C_4 - \frac{dC_1}{k\nu\rho}b\right)e^{-kb} = \alpha,$$
$$v_1(-b) = C_3 + \left(C_4 + \frac{dC_1}{k\nu\rho}b\right)e^{k}b = \beta$$

となる．ここから，

$$C_3 = \frac{\alpha e^{kb} - \beta e^{-kb}}{e^{kb} - e^{-kb}} + \frac{2bdC_1}{k\nu\rho}\frac{1}{e^{kb} - e^{-kb}},\ C_4 = \frac{\beta - \alpha}{e^{kb} - e^{-kb}} - \frac{bdC_1}{k\nu\rho}\frac{e^{kb} + e^{-kb}}{e^{kb} - e^{-kb}}$$

となるので，

$$v_1 = \frac{\alpha - \beta}{1 - e^{2kb}}(e^{-kx_2 + kb} - 1) + \alpha + \frac{dC_1}{k\nu\rho}\left\{\frac{2b}{e^{kb} - e^{-kb}} - \left(\frac{e^{kb} + e^{-kb}}{e^{kb} - e^{-kb}}b + x_2\right)e^{-kx_2}\right\}$$

となる．よって，

$$v_1 = \frac{\alpha - \beta}{1 - e^{2kb}}(e^{-kx_2 + kb} - 1) + \alpha + \frac{dC_1}{k\nu\rho}\left\{\frac{2b}{e^{kb} - e^{-kb}} - \left(\frac{e^{kb} + e^{-kb}}{e^{kb} - e^{-kb}}b + x_2\right)e^{-kx_2}\right\},\ v_2 = 0,$$
$$p = d(C_1x_1 + C_2)e^{-kx_2},\ F = e^{kx_2}\ (C_1, C_2, d \text{ は定数，} k \text{ は } 0 \text{ 以外の定数})$$

がナヴィエ・ストークス方程式の解となる．

参考文献

[1] 石村園子（2003)，「やさしく学べる微分方程式」，共立出版株式会社.

[2] 梅原雅顕，山田光太郎（2015)，「曲線と曲面　-微分幾何的アプローチ-」，裳華房.

[3] 岡本久 (2016)，「日常現象からの解析学」，近代科学者.

[4] 川崎裕貴（2022)，「特殊な計量を与えた平面上の流体について」，三重大学大学院教育学研究科修士論文.

[5] 三松佳彦 (2008)，「リーマン多様体上の流体の運動方程式の幾何学的基礎」，ながれ.27(1)，日本流体力学会.

[6] 三松佳彦，矢野泰久:Riemann 多様体上の非圧縮流体の幾何, 京都大学数理解析研究所講究録 1260「幾何学的力学系理論とその周辺」,(2002), 33–47.

[7] 三宅敏恒（1992)，「入門微分積分」，培風館.

[8] Taylor, M. E. : Analysis on Morrey spaces and ap-plications to Navier-Stokes and other evolution equa-tions, Commun. P. D. E.,17-9 & 10 (1992), 1407–1456.

[9] Taylor, M. E. :Partial Differential Equations III, Non-linear Equations,Applied Mathematical Sciences117.Springer-Verlag (1996).