

# 特殊な計量を与えた平面上の流体について

三重大学大学院教育学研究科  
教育科学専攻 理数・生活系教育領域  
220M012 川崎裕貴

令和4年2月10日

## 序文

本研究を進めるにあたり、岡本久著「日常現象からの解析学」を用いて変分法やユークリッド空間  $\mathbb{R}^3$  での非圧縮性流体について学習した。非圧縮性流体についての研究は、ユークリッド空間  $\mathbb{R}^3$  上だけでなく、リーマン多様体上でもなされている（三松佳彦，2008，「リーマン多様体上の流体の運動方程式の幾何学的基礎」，ながれ.27(1)，日本流体力学会）。

本論文では、ユークリッド空間ではなく、特殊な計量を与えた平面上での流体の運動について考察する。すなわち、各点  $(x_1, x_2)$  において、ベクトル  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  の標準内積を  $F(x_1, x_2)\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  と取り替えた平面  $M$  上で流体の運動がどの様になるのかを考察する。このように、単に計量を取り替えたとき流体はどの様なふるまいをするのか？それを調べるため、 $M$  上でのオイラー方程式やナビエ・ストークス方程式を導出した。

$F$  を与えることで、 $M$  上でのポワズィエ流（ポワズィエ流）などの定常流で外力が無視できる場合の具体的な例で解を与えることができたので、その結果を報告する。

## 謝辞

本研究を行うにあたり、三重大学教育学部数学教育コースの先生方に多くの激励を頂戴しました。とりわけ、指導教員の森山貴之先生には研究の進め方や枠組みについて多くの助言を頂きました。また、図をつくるにあたって、関数グラフソフト「GRAPES」を使用しました。ここに感謝申し上げます。

## 目次

序文と謝辞	2
1 流体の運動への準備	4
1.1 グリーンの定理とガウスの定理	4
2 非圧縮非粘性流体の運動	4
2.1 流体と圧力	4
2.2 オイラー方程式	5
2.3 具体例	6
3 非圧縮粘性流体の運動	8
3.1 ナヴィエ・ストークス方程式	8
3.2 具体例	9
4 特殊な計量を与えた平面	11
4.1 特殊な計量	12
4.2 グリーンの定理の拡張	12
4.3 ガウスの定理の拡張	18
5 特殊な計量を与えた平面上での流体の運動	20
5.1 オイラー方程式とナヴィエ・ストークス方程式の拡張	20
5.2 具体例	23

## 1 流体の運動への準備

第5章の特殊な計量を与えた平面上の流体の運動について考える前に、ユークリッド空間  $\mathbb{R}^3$  や  $\mathbb{R}^2$  で考えてみよう。流体の運動は、オイラー方程式を解くことによって理解できる。本章では、オイラー方程式を導くための準備をする。

### 1.1 グリーンの定理とガウスの定理

本章から第3章まで、特に断らない限り以下を仮定する。 $\Omega$  を  $\mathbb{R}^3$  上の3次元領域、 $\partial\Omega$  を  $\Omega$  の境界、 $\Omega$  の各点を  $x = (x_1, x_2, x_3)$ 、 $\Omega$  の境界となる  $C^\infty$  級の閉曲面を  $\Gamma$  とする。 $\mathbf{n}$  を  $\Gamma$  の各点で定義された  $\Omega$  の外向きの単位法線ベクトルとしたとき、 $\Gamma$  の各点における  $f$  の  $\mathbf{n}$  方向の微分を  $\frac{\partial f}{\partial n} = \mathbf{n} \cdot \nabla f$  により定める。ここで、 $\nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3} \right)$  である。また、体積要素を  $dV = dx_1 dx_2 dx_3$  とする。

**定理 1.1.** (グリーンの定理)  $\Omega \cup \Gamma$  で定義された微分可能な関数  $f, g$  が与えられたとき、

$$\iiint_{\Omega} f \Delta g \, dV = \iint_{\partial\Omega} f \frac{\partial g}{\partial n} \, d\Gamma - \iiint_{\Omega} (\nabla f \cdot \nabla g) \, dV \quad (1.1)$$

が成り立つ。ここで、 $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}$  であり、 $d\Gamma$  は境界での面積要素である。

なお、 $\Omega$  が2次元領域のときには、 $\Gamma$  を  $\Omega$  の境界となる  $C^\infty$  級の閉曲線、 $dS$  を面積要素として  $dS = dx_1 dx_2$  とすれば、

$$\iint_{\Omega} f \Delta g \, dS = \int_{\partial\Omega} f \frac{\partial g}{\partial n} \, d\Gamma - \iint_{\Omega} (\nabla f \cdot \nabla g) \, dS \quad (1.2)$$

が成り立つ。

**定理 1.2.** (ガウスの定理)  $\Omega$  上のベクトル値関数  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$  に対し、

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u} \, dV = \iint_{\partial\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma \quad (1.3)$$

が成り立つ。ここで、 $\operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$  である。

## 2 非圧縮非粘性流体の運動

本章では非圧縮非粘性流体の運動方程式を確認し、いくつかの具体例を考えてみる。この方程式はオイラー方程式といい、次章のナビエ・ストークス方程式につながる重要な方程式である。

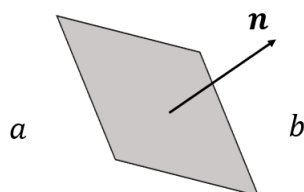
### 2.1 流体と圧力

流体とは、気体と液体の総称である。固体は決まった形があるが、流体には決まった形がない。そのため、流体の運動を記述するには固体とは違った方法をとることになる。もちろん、固体のときと同じように分子1

つひとつを質点とみなして運動方程式などを当てはめても記述できるが、現実的ではない。例えば標準状態で 22.4L に含まれる気体分子の数は約  $6.02 \times 10^{23}$  個になることを考えれば非現実的であることが理解できる。そのため、連続体という概念のもとで流体の運動を考える。では、連続体とみなしたときの流体の速度を定義する。

**定義 2.1.** 流体が  $\mathbb{R}^3$  空間内のある領域  $\Omega$  に連続的に分布しているとする。このとき、 $\Omega$  の各点  $x$  に着目する。今、連続体としたときに点とみなしているものは小領域であるので、その小領域内での分子の速度の平均を定義でき、その点の連続関数であると仮定する。このとき、 $\Omega$  の各点  $x$  で速度が定義できる。速度は  $x$  だけでなく時間  $t$  にも依存するので、速度  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t, x)$  とする。

次に、圧力を定義する。 $\Omega$  内の任意の点  $x$  をとる。この点を通る仮想的な微小平面を考える。この微小平面の



片側を  $a$ 、他方を  $b$  とする。点  $x$  で  $a$  から  $b$  に向かう単位法線ベクトル  $\mathbf{n}$  をとる。このとき、

**完全流体仮説**  $a$  が  $b$  を押す力は単位面積当たり  $p\mathbf{n}$  であり、 $b$  が  $a$  を押す力は単位面積当たり  $-p\mathbf{n}$  である。この  $p$  は  $(t, x)$  の関数であるが、平面の選び方に依存しない。すなわち  $\mathbf{n}$  に依存しない。

が成り立つと仮定する。すなわち、完全流体とは粘性の無い理想的な流体であり、静止流体と同様に圧力が面に垂直な方向にのみはたらくような流体である。

**定義 2.2.** 完全流体仮説の中の  $p$  を圧力とする。

このように定義した速度  $\mathbf{v}(t, x)$  や圧力  $p(t, x)$  が流体の運動を記述することになる。

## 2.2 オイラー方程式

**命題 2.1.** (オイラー方程式) 領域  $\Omega$  内に流体がつめられているとする。この流体について、密度  $\rho (> 0)$  が一定で完全流体仮説が適用できるとき、流体の運動は  $\Omega$  の各点  $x$  と、時間  $t$  での速度ベクトル  $\mathbf{v}(t, x) = (v_1(t, x), v_2(t, x), v_3(t, x))$  と圧力  $p(t, x)$  だけで決定され、 $\mathbf{v}, p$  は次の偏微分方程式

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{f}, \quad (2.1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (2.2)$$

を解くことで決定される。ここで、 $\mathbf{f}$  は外力で、重力などの流体に直接作用する力である。

式 (2.1) オイラーの運動方程式といい、式 (2.2) を非圧縮性条件という。なお、非圧縮という条件は式 (2.2) が成り立つことであるが、これは流体の密度が定数であることを意味する。圧力を加えても体積が変わらない非圧縮という条件に加え、質量保存則を仮定することで、密度  $\rho$  は一定となるということである。このオイラー方程式の解を 1 つに特定するには、次の初期条件  $\mathbf{v}_0$  と境界条件  $g$  が必要である。

$$\mathbf{v}(0, x) = \mathbf{v}_0(x) \quad (x \in \Omega), \quad (2.3)$$

$$\mathbf{v}(t, x) \cdot \mathbf{n} = g(t, x) \quad (x \in \partial\Omega, 0 \leq t) \quad (2.4)$$

$\Omega$  の形が変わらない場合や  $\Omega$  の境界で流体の出入りが無い場合、すなわち境界が固体の壁のように静止しているとき、 $g \equiv 0$  となる。そうでない場合は  $g$  は与えられた関数になる。なお、圧力  $p$  に関する条件はない。次節の具体例では境界条件について、

$$\mathbf{v}(t, x) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (2.5)$$

という場合でのみ考えることとする。

## 2.3 具体例

本節では、オイラー方程式の解の具体例を 1 つ挙げる。なお、ここでは外力  $\mathbf{f} \equiv 0$  とする。また、定常流を考えることとする。定常流とは、速度ベクトル場  $\mathbf{v}$  や圧力  $p$  が時間  $t$  に依存しない流れのことである。すなわち、位置  $x$  にのみ依存する。さらに、渦なしの流れを考える。ここで、渦なしの流れについて定義しておく。

**定義 2.3.** ベクトル場  $\mathbf{u} = (u_1(x_1, x_2, x_3), u_2(x_1, x_2, x_3), u_3(x_1, x_2, x_3))$  が与えられたとき、ベクトル場  $\text{curl } \mathbf{u}$  を

$$\text{curl } \mathbf{u} = \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}, \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}, \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)$$

とする。

なお、 $\text{curl}$  は  $\text{rot}$  と書かれることもある。

**定義 2.4.** 速度ベクトル場  $\mathbf{v}$  について、次のベクトル場

$$\boldsymbol{\omega} \equiv \text{curl } \mathbf{v}$$

を渦度という。

**定義 2.5.** 領域  $\Omega$  全体で  $\boldsymbol{\omega} \equiv 0$  を満たすオイラー方程式の解  $\mathbf{v}$  を渦なしの流れという。

ここで、 $\text{curl } \mathbf{v} \equiv 0$  のとき、 $\mathbf{v} = \nabla \phi$  を満たすスカラー関数  $\phi$  が存在する。また、 $\mathbf{v} = \nabla \phi$  のとき、 $\text{curl } \mathbf{v} \equiv 0$  である。この関数  $\phi$  を速度ポテンシャルという。ここでは、 $\Omega$  全体で速度ポテンシャルが存在すると仮定する。

**定理 2.1.** 渦なしの流れの速度ポテンシャルは調和関数である。

証明. 式 (2.2) に  $\mathbf{u} = \nabla \phi$  を代入すると、

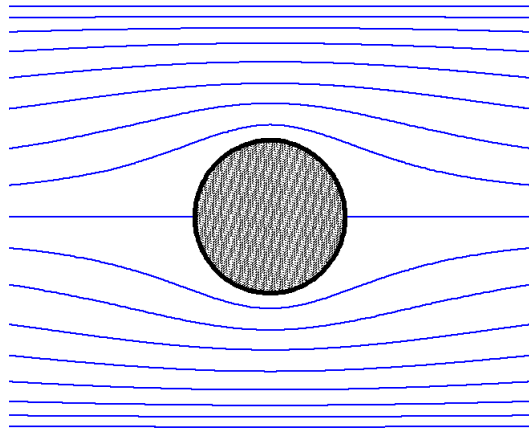
$$\Delta \phi = 0$$

となる。 □

つまり、定理 2.1 は速度ポテンシャルが調和関数であることと式 (2.2) の非圧縮性条件が成り立つことが同値であることを示している。さらに、式 (2.1) のオイラーの運動方程式において圧力  $p \equiv 0$  のとき、速度ポテンシャルが調和関数であることとオイラー方程式が成り立つことが同値であることも示している。

**例 2.1 (球を過ぎる渦なしの流れ)** 中心が原点で半径が  $a$  である球面の外側を流れる流体の運動を考えてみる。すなわち、領域  $\Omega = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | a^2 < x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < \infty\}$  全体で渦なしとなり、圧力  $p \equiv 0$  で、無限遠方で一様流  $(U, 0, 0)$  に漸近する速度ベクトル場  $\mathbf{v}$  を見つける。このとき、 $\Omega$  で定義されたスカラー関数

$$\phi(x_1, x_2, x_3) = Ux_1 \left( 1 + \frac{a^3}{2r^3} \right) \quad \left( r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \right)$$



球を過ぎる渦なしの流れの  $x_1x_2$  平面での流線のイメージ図

に対し、 $\mathbf{v} = \nabla\phi$  となることが分かる。まず、オイラー方程式を満たすことを確かめてみる。

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{r} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left\{ (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{-\frac{1}{2}} \right\} = -\frac{x_1}{r^3}$$

となるので、 $\phi = Ux_1 - \frac{Ua^3}{2} \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{r}$  と書ける。 $\frac{1}{r}$  は調和関数なので、 $\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{r}$  も調和関数である。 $Ux_1$  も調和関数であるので、 $\phi$  は調和関数となる。よって、オイラー方程式を満たす。次に境界条件  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$  を満たすことを確かめる。

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \nabla \phi \cdot \mathbf{n} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$$

を示せばよい。単位法線ベクトルは  $\mathbf{n} = -\frac{1}{a}(x_1, x_2, x_3)$  であるので、

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \mathbf{n} \cdot \nabla \phi = -\frac{1}{a} \left( x_1 \frac{\partial \phi}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial \phi}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial \phi}{\partial x_3} \right)$$

となり、極座標において、

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial r} + \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial r} + \frac{\partial \phi}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial r} = \frac{1}{r} \left( x_1 \frac{\partial \phi}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial \phi}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial \phi}{\partial x_3} \right)$$

となる.  $\frac{\partial x_1}{\partial r} = \frac{x_1}{r}$  であり, 境界では  $r = a$  となるので,

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = -\frac{\partial \phi}{\partial r} = -\left\{U\left(1 + \frac{a^3}{2r^3}\right)\frac{\partial x_1}{\partial r} + Ux_1\left(\frac{-3a^3}{2r^4}\right)\right\} = 0$$

となる. よって, 境界条件を満たす. 次に, 無限遠方で一様流  $(U, 0, 0)$  に漸近することを確認する.  $\phi = Ux_1 + \frac{Ua^3}{2}x_1(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{-\frac{3}{2}}$  と展開できるので,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi}{\partial x_1} &= U + \frac{Ua^3}{2}(r^{-3} - 3x_1^2r^{-5}) \rightarrow U \quad (r \rightarrow \infty), \\ \frac{\partial \phi}{\partial x_2} &= \frac{Ua^3}{2}x_1(3x_2r^{-5}) \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow \infty), \\ \frac{\partial \phi}{\partial x_3} &= \frac{Ua^3}{2}x_1(3x_3r^{-5}) \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow \infty)\end{aligned}$$

となる. よって,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \nabla \phi \rightarrow (U, 0, 0)$$

となる. 従って,

$$v_1 = U + \frac{Ua^3}{2r^3}\left(1 - \frac{3x_1^2}{r^2}\right), \quad v_2 = \frac{3Ua^3x_1x_2}{2r^5}, \quad v_3 = \frac{3Ua^3x_1x_3}{2r^5}$$

はこの流体の速度ベクトルとなる.

### 3 非圧縮粘性流体の運動

本章では非圧縮粘性流体の運動方程式を確認し, いくつかの具体例を考えてみる. この方程式をナヴィエ・ストークス方程式といい, 前章では無かった粘性を考慮することで非常に複雑になる.

#### 3.1 ナヴィエ・ストークス方程式

**命題 3.1.** (ナヴィエ・ストークス方程式) 動粘性係数を  $\nu$  とし, 正の定数とする. このとき流体の運動は領域  $\Omega$  の各点  $x$  と, 時間  $t$  での速度ベクトル  $\mathbf{v}(t, x) = (v_1(t, x), v_2(t, x), v_3(t, x))$  と圧力  $p(t, x)$  だけで決定され,  $\mathbf{v}, p$  は次の偏微分方程式

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} &= \nu \Delta \mathbf{v} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{f}, \\ \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0\end{aligned}\tag{3.1}$$

を解くことで決定される.

式 (3.1) ナヴィエ・ストークスの運動方程式という. 非圧縮性条件については, オイラー方程式のときの式 (2.2) と変わらない.  $\nu$  については, 物質やその温度によって値が異なる. このナヴィエ・ストークス方程式の解を特定するには, 次の初期条件  $\mathbf{v}_0$  と境界条件  $\mathbf{g}$  が必要である. (境界条件は粘着条件という.)

$$\begin{aligned}\mathbf{v}(0, x) &= \mathbf{v}_0(x) \quad (x \in \Omega), \\ \mathbf{v}(t, x) &= \mathbf{g}(t, x) \quad (x \in \partial\Omega)\end{aligned}$$



初期条件はオイラー方程式のときと同じであるが、境界条件は異なる．オイラー方程式のときの境界条件は、速度ベクトルの法線成分のみ与え、接線成分については何も定めていなかったが、ナヴィエ・ストークス方程式のときは、速度ベクトルの全ての成分を与えることになる．オイラー方程式は完全流体で考えていたため、境界では速度ベクトルの法線成分のみを与えていたわけである．境界が固体の壁のように静止しているとき、 $\mathbf{g} \equiv 0$  となり、

$$\mathbf{v}(t, x) = 0 \quad (x \in \partial\Omega) \quad (3.2)$$

となる．次節の具体例では、式 (3.2) を仮定する．

### 3.2 具体例

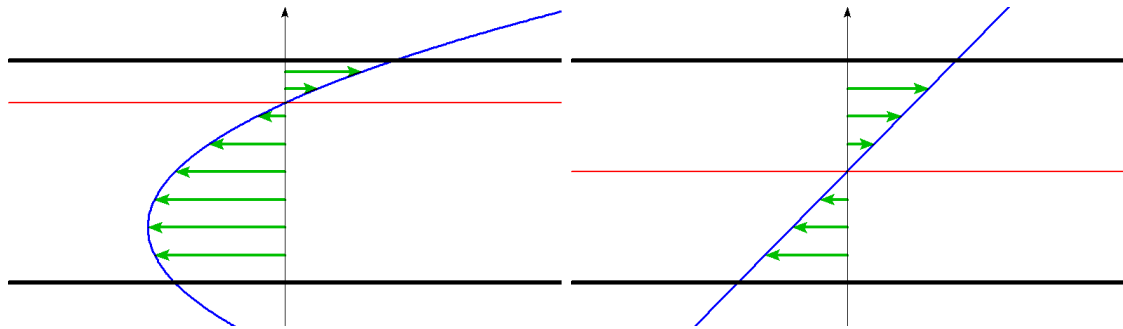
ここでは、ナヴィエ・ストークス方程式の具体例を挙げる．なお、ここでは外力  $\mathbf{f} \equiv 0$  とする．また、定常流を考えることとする．

**例 3.1 (平面クエット流)** 2つの平行板が互いに逆向きに動くとき、その間の流体の運動を考えてみる．領域  $\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid -\infty < x_1 < \infty, -b < x_2 < b\}$  で、 $x_2 = b$  にある板は速度  $c$  で右に、 $x_2 = -b$  にある板は速度  $c$  で左に動いている．このとき、 $\Omega$  内の速度ベクトル場  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$  は次の境界条件を満たすとする．

$$\begin{aligned} x_2 = b \text{ のとき, } v_1 &= c, v_2 = 0, \\ x_2 = -b \text{ のとき, } v_1 &= -c, v_2 = 0 \end{aligned}$$

このような  $\mathbf{v}, p$  として、

$$v_1 = \frac{c}{b}x_2 + \frac{a}{2\nu\rho}(x_2 + b)(x_2 - b), \quad v_2 = 0, \quad p = ax_1 + d \quad (a, d \text{ は定数}) \quad (3.3)$$



$x_2$  軸はベクトルの始点をわかりやすくするために描画した．左図は  $a > 0$ ，右図は  $a = 0$ ．

が存在する．この解の求め方を記述しておこう． $\mathbf{v} = (v_1(x_2), 0)$  とする．今、ナヴィエ・ストークス方程式は、

$$v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} = \nu \Delta v_1 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_1}, \quad (3.4)$$

$$v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = \nu \Delta v_2 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_2}, \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = 0 \quad (3.6)$$

となる。式 (3.4),(3.5) から,

$$\nu \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_1} = 0, \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_2} = 0 \quad (3.8)$$

となる。なお、非圧縮性条件を満たすことは直ちにわかる。式 (3.8) から、 $p = p(x_1)$  となるので、

$$p(x_1) = ax_1 + d \quad (a, d \text{ は定数})$$

とすると、式 (3.7) から、

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} = \frac{a}{\nu \rho}$$

となるので、

$$v_1 = \frac{a}{2\nu\rho} x_2^2 + \beta x_2 + \gamma \quad (\beta, \gamma \text{ は定数})$$

となる。境界条件から、

$$v_1(b) = \frac{a}{2\nu\rho} b^2 + \beta b + \gamma = c,$$

$$v_1(-b) = \frac{a}{2\nu\rho} b^2 - \beta b + \gamma = -c$$

となる。ここから、

$$\beta = \frac{c}{b}, \quad \gamma = -\frac{a}{2\nu\rho} b^2$$

となるので、

$$v_1(x_2) = \frac{c}{b} x_2 + \frac{a}{2\nu\rho} (x_2 + b)(x_2 - b)$$

となり、式 (3.3) が解となる。特に、 $a = 0$  のとき、

$$v_1 = \frac{c}{b} x_2, \quad v_2 = 0, \quad p = d \quad (d \text{ は定数})$$

となり、これを平面クエット流という。

**例 3.2 (ポワズィーユ流)**  $x_1$  軸に平行な筒領域の端から圧力を加えたときの筒内部の流体の運動を考えてみる。すなわち、領域  $\Omega = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | 0 < x_1 < b, -a < x_2 < a, -a < x_3 < a\}$  の  $x_1 = 0$  から圧力を加えたときの  $\Omega$  内の流体の運動を考える。速度ベクトル場  $\mathbf{v}$  はナヴィエ・ストークス方程式を満たすとする。境界条件  $\mathbf{v} = 0$  を  $\partial\Omega = \{0 < x_1 < b, x_2^2 + x_3^2 = a^2\}$  に課す。なお、 $x_1 = 0$  には課さない。このような  $\mathbf{v}, p$  として、

$$v_1 = \frac{c}{4\nu\rho} (a^2 - x_2^2 - x_3^2), \quad v_2 = 0, \quad v_3 = 0, \quad p = -cx_1 + d \quad (c, d \text{ は定数}) \quad (3.9)$$

が存在する。この解の求め方を記述しておこう。 $\mathbf{v} = (v_1(x_2, x_3), 0, 0)$  とする。非圧縮性条件を満たすことは直ちにわかる。また、 $\mathbf{v} \cdot \nabla = v_1 \frac{\partial}{\partial x_1}$  となるので、式 (3.1) は

$$v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} (v_1, 0, 0) = \nu \left( \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_3^2}, 0, 0 \right) - \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial x_1}, \frac{\partial p}{\partial x_2}, \frac{\partial p}{\partial x_3} \right)$$

となる。整理すると,

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = \nu\rho \left( \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_3^2} \right), \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_2} = 0, \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_3} = 0 \quad (3.12)$$

となる。式 (3.11), (3.12) から,  $p(x_1, x_2, x_3) = p(x_1)$  となる。また, 式 (3.10) から,  $p(x_1) = -cx_1 + d$  ( $c, d$  は定数) となる。このとき, 式 (3.10) は

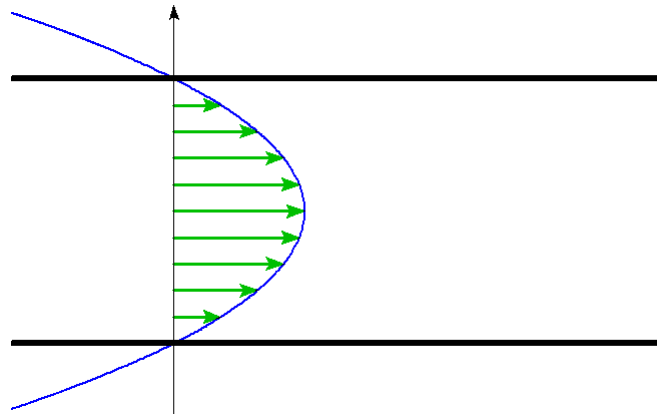
$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_3^2} = -\frac{c}{\nu\rho}$$

となる。(これはポアソン方程式である。) 上式と境界条件から,

$$v_1 = \frac{c}{4\nu\rho}(a^2 - x_2^2 - x_3^2)$$

となるので, 式 (3.9) が解である。これを 3 次元ポワズィーユ流という。また, 流れが  $x_3$  方向に一様なときも記述可能である。 $\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | 0 < x_1 < b, -a < x_2 < a\}$  の  $x_1 = 0$  から圧力を加えたときの  $\Omega$  内の流体の運動を考える。速度ベクトル場  $\mathbf{v}$  はナビエ・ストークス方程式を満たすとする。境界条件  $\mathbf{v} = 0$  を  $\partial\Omega = \{0 < x_1 < b, x_2 = \pm a\}$  に課す。なお,  $x_1 = 0$  には課さない。このような  $\mathbf{v}, p$  として,

$$v_1 = \frac{c}{2\nu\rho}(a^2 - x_2^2), \quad v_2 = 0, \quad p = -cx_1 + d \quad (c, d \text{ は定数})$$



$x_2$  軸はベクトルの始点をわかりやすくするために描画した。

が存在する。この解の求め方は 3 次元のときと同様なので省略する。これを 2 次元ポワズィーユ流という。

## 4 特殊な計量を与えた平面

これまでの内容はユークリッド空間で考えていたが, 特殊な計量を与えた平面での流体の運動について考えたい。本章ではそのための準備をする。

## 4.1 特殊な計量

ユークリッド空間における計量とは、 $n$  次元空間  $\mathbb{R}^n$  の各点でのベクトルの大きさと角度のことである。すなわち、ベクトルの内積

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \theta$$

である。そこで、関数  $F(x_1, x_2)$  ( $> 0$ ) によって取り替えた計量

$$F \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \quad (*)$$

を与えた特殊な平面での流体の運動を考えることとする。このように、内積を替えると流体の運動はどう変わるのだろうか？それは、オイラー方程式やナビエ・ストークス方程式がどう変わるのかを調べることで理解できる。特殊な平面でオイラー方程式などを考えるために、まずはグリーンの定理がどう変わるのか調べてみる。

## 4.2 グリーンの定理の拡張

本章以降、特に断らない限り以下を仮定する。 $M$  を (\*) で定まる計量を与えた平面、 $\Omega$  を  $M$  上の滑らかな閉曲面、 $\partial\Omega$  を  $\Omega$  の境界、 $\Omega$  の各点を  $x = (x_1, x_2)$ 、 $\Omega$  の境界となる  $C^\infty$  級の閉曲線を  $\Gamma'$  とする。 $\mathbf{n}'$  を  $\Gamma'$  の各点で定義された  $\Omega$  の外向きの単位法線ベクトルとしたとき、 $\Gamma'$  の各点における  $f$  の  $\mathbf{n}'$  方向の微分を  $\frac{\partial f}{\partial n'} = \mathbf{n}' \cdot \nabla f$  により定める。また、 $M$  上の向きによらない面積要素を  $dA = F dS = F dx_1 dx_2$  とする。

**補題 4.1.**  $\mathbb{R}^2$  上で定義された微分可能な関数  $f, g$  が与えられたとき、長方形領域  $A_k = [\xi_{1k}, \xi_{2k}] \times [\alpha_k, \alpha_k + \delta\alpha]$  において、

$$\begin{aligned} \iint_{A_k} \frac{\partial f}{\partial x_1} g dx_1 dx_2 + \iint_{A_k} f \frac{\partial g}{\partial x_1} dx_1 dx_2 \\ = \int_{\alpha_k}^{\alpha_k + \delta\alpha} f(\xi_{2k}, x_2) g(\xi_{2k}, x_2) dx_2 - \int_{\alpha_k}^{\alpha_k + \delta\alpha} f(\xi_{1k}, x_2) g(\xi_{1k}, x_2) dx_2 \end{aligned}$$

が成り立つ。

証明. 積の微分

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(fg) = \frac{\partial f}{\partial x_1} g + f \frac{\partial g}{\partial x_1}$$

より、

$$\iint_{A_k} \frac{\partial}{\partial x_1}(fg) dx_1 dx_2 = \iint_{A_k} \frac{\partial f}{\partial x_1} g dx_1 dx_2 + \iint_{A_k} f \frac{\partial g}{\partial x_1} dx_1 dx_2$$

となる。ここで、左辺について、

$$\begin{aligned} \iint_{A_k} \frac{\partial}{\partial x_1}(fg) dx_1 dx_2 &= \int_{\alpha_k}^{\alpha_k + \delta\alpha} \left\{ \int_{\xi_{1k}}^{\xi_{2k}} \frac{\partial}{\partial x_1}(fg) dx_1 \right\} dx_2 \\ &= \int_{\alpha_k}^{\alpha_k + \delta\alpha} f(\xi_{2k}, x_2) g(\xi_{2k}, x_2) dx_2 - \int_{\alpha_k}^{\alpha_k + \delta\alpha} f(\xi_{1k}, x_2) g(\xi_{1k}, x_2) dx_2 \end{aligned}$$

となるので、主張が得られる。  $\square$

また, 1 変数での平均値の定理を利用することで, 次の補題を得る.

**補題 4.2.**  $\mathbb{R}^2$  上で定義された微分可能な関数  $f$  が与えられたとき,

$$f(\xi + A, t) = f(\xi, t) + g(\xi, A)A$$

となる  $g$  が存在する.

**証明.**  $x_2$  成分を定数とすると, 平均値の定理より,

$$\frac{f(\xi + A, t) - f(\xi, t)}{A} = f'(c)$$

となる  $c \in (\xi_2, \xi_2 + A)$  が存在する.  $A$  が決まれば  $c$  も決まるので,  $f'(c) = g(\xi, A)$  とすると,

$$\begin{aligned} \frac{f(\xi + A, t) - f(\xi, t)}{A} &= g(\xi, A) \\ f(\xi + A, t) &= f(\xi, t) + g(\xi, A)A \end{aligned}$$

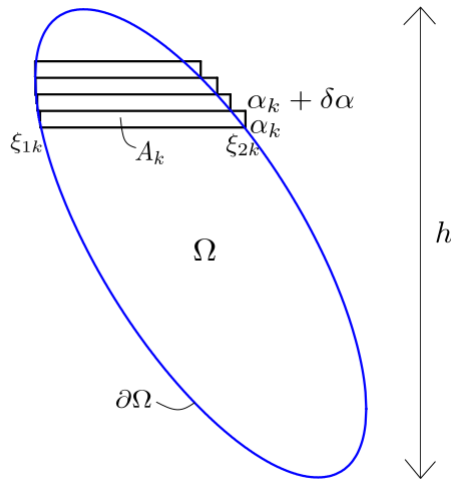
となる. □

**定理 4.1.** (拡張されたグリーンの定理)  $\Omega \cup \Gamma'$  で定義された微分可能な関数  $f, g$  が与えられたとき,

$$\iint_{\Omega} f \Delta g \, dA = \int_{\partial\Omega} f \frac{\partial g}{\partial n'} F \, d\Gamma' - \iint_{\Omega} \nabla f \cdot \nabla g \, dA - \iint_{\Omega} f (\nabla g \cdot \nabla \log F) \, dA \quad (4.1)$$

が成り立つ.

**証明.**  $x_1$  軸に平行な多数の直線を使って,  $\Omega$  を下図のように細かく分割し, 細い長方形領域の和で近似する.



イメージ図.

1 つの長方形領域  $A$  を考える．  $A = [\xi_1, \xi_2] \times [\alpha, \alpha + \delta\alpha]$  とし，  $B = \Omega \cap A$  とする．  $A, B$  の部分領域に関する和を取ったところをそれぞれ  $A_s, B_s$  とする． また， 下から  $k$  番目の  $A$  を  $A_k$  として，  $A_k = [\xi_{1k}, \xi_{2k}] \times [\alpha_k, \alpha_k + \delta\alpha]$  とする． ここで， 以下の積分を考える．

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_1} dA = \iint_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_1} \sqrt{E_1 E_2 - E_3^2} dx_1 dx_2$$

なお， 上式の  $E_1, E_2, E_3$  は第一基本量である． ユークリッド空間  $\mathbb{R}^2$  では，

$$\begin{aligned} E_1 &= p_u \cdot p_u = (1, 0) \cdot (1, 0) = 1, \\ E_2 &= p_u \cdot p_v = (1, 0) \cdot (0, 1) = 0, \\ E_3 &= p_v \cdot p_v = (0, 1) \cdot (0, 1) = 1 \end{aligned}$$

となるので  $M$  上では，

$$\begin{aligned} E_1 &= F(x_1, x_2) p_u \cdot p_u = F(x_1, x_2), \\ E_2 &= F(x_1, x_2) p_u \cdot p_v = 0, \\ E_3 &= F(x_1, x_2) p_v \cdot p_v = F(x_1, x_2) \end{aligned}$$

となる． 定義より  $F(x_1, x_2) > 0$  であることから，

$$\sqrt{E_1 E_2 - E_3^2} = \sqrt{F(x_1, x_2)^2} = |F(x_1, x_2)| = F(x_1, x_2)$$

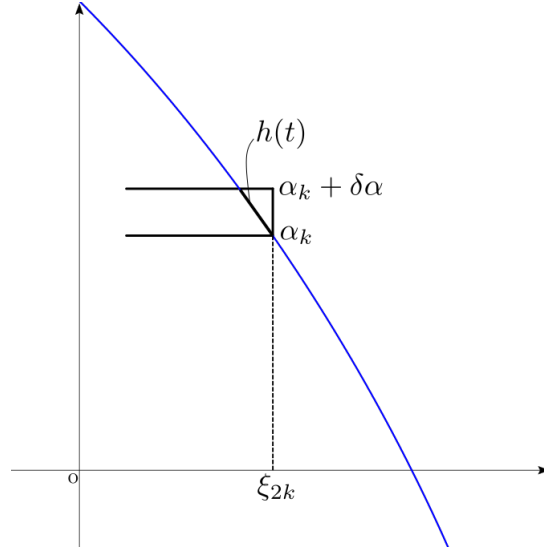
となる． よって， 考えたい積分は，

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_1} F dx_1 dx_2 &= \iint_{B_s} \frac{\partial f}{\partial x_1} F dx_1 dx_2 \\ &= \iint_{A_s} \frac{\partial f}{\partial x_1} F dx_1 dx_2 \quad (\delta\alpha \rightarrow 0) \\ &= \iint_{A_1} \frac{\partial f}{\partial x_1} F dx_1 dx_2 + \iint_{A_2} \frac{\partial f}{\partial x_1} F dx_1 dx_2 + \cdots + \iint_{A_n} \frac{\partial f}{\partial x_1} F dx_1 dx_2 \end{aligned} \quad (4.2)$$

となる． 式 (4.2) の  $k$  番目について， 補題 4.1 より，

$$\begin{aligned} \iint_{A_k} \frac{\partial f}{\partial x_1} F dx_1 dx_2 &= \int_{\alpha_k}^{\alpha_k + \delta\alpha} f(\xi_{2k}, x_2) F(\xi_{2k}, x_2) dx_2 - \int_{\alpha_k}^{\alpha_k + \delta\alpha} f(\xi_{1k}, x_2) F(\xi_{1k}, x_2) dx_2 \\ &\quad - \iint_{A_k} f \frac{\partial F}{\partial x_1} dx_1 dx_2 \end{aligned} \quad (4.3)$$

となる． ここで， 式 (4.3) の右辺の第 1 項と第 2 項について， 細い長方形領域  $A_k$  の右端と左端に着目して変形することを考える． まず， 右端について，  $t \in [\alpha_k, \alpha_k + \delta\alpha]$  に対し  $x_2 = t$  とすると  $x_1$  は  $t$  の関数となるの



で,  $x_1 = h(t)$  と表せる.  $\Gamma'$  が  $C^\infty$  級なので,  $h(t)$  も  $C^\infty$  級である. よって,  $t = \alpha_k$  における有限テーラー展開により,

$$\begin{aligned} h(t) &= h(\alpha_k) + h'(\alpha_k)(t - \alpha_k) \frac{1}{1!} + h''(\alpha_k)(t - \alpha_k)^2 \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{h^{(n)}(\alpha_k + \theta(t - \alpha_k))}{n!} (t - \alpha_k)^n \\ &= \xi_{2k} + \left\{ h'(\alpha_k) + h''(\alpha_k)(t - \alpha_k) \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{h^{(n)}(\alpha_k + \theta(t - \alpha_k))}{n!} (t - \alpha_k)^{n-1} \right\} (t - \alpha_k) \end{aligned}$$

となる  $\theta \in (0, 1)$  が存在する.  $C_h(t, \alpha_k) = h'(\alpha_k) + h''(\alpha_k)(t - \alpha_k) \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{h^{(n)}(\alpha_k + \theta(t - \alpha_k))}{n!} (t - \alpha_k)^{n-1}$  とすると,  $h(t) = \xi_{2k} + (t - \alpha_k)C_h$  となる. 補題 4.2 より,

$$f(h(t), t) = f(\xi_{2k} + (t - \alpha_k)C_h, t) = f(\xi_{2k}, t) + C_{f2}(t - \alpha_k)$$

となる. ここで,  $C_{f2} = g(\xi_{2k}, (t - \alpha_k)C_h)C_h$  とおいた. 同様に,

$$F(h(t), t) = F(\xi_{2k} + (t - \alpha_k)C_h, t) = F(\xi_{2k}, t) + C_{F2}(t - \alpha_k)$$

となる. ここで,  $C_{F2} = G(\xi_{2k}, (t - \alpha_k)C_h)C_h$  とおいた. よって,

$$\begin{aligned} &\int_{\alpha_k}^{\alpha_k + \delta\alpha} f(x_1, x_2) F(x_1, x_2) dx_2 \\ &= \int_{\alpha_k}^{\alpha_k + \delta\alpha} f(h(t), t) F(h(t), t) dx_2 \\ &= \int_{\alpha_k}^{\alpha_k + \delta\alpha} \{f(\xi_{2k}, t) + (t - \alpha_k)C_{f2}\} \{F(\xi_{2k}, t) + (t - \alpha_k)C_{F2}\} dt \\ &= \int_{\alpha_k}^{\alpha_k + \delta\alpha} f(\xi_{2k}, t) F(\xi_{2k}, t) dt + \int_{\alpha_k}^{\alpha_k + \delta\alpha} H(\xi_{2k}, t)(t - \alpha_k) dt \end{aligned} \quad (4.4)$$

となる. ここで,  $H(\xi_{2k}, t) = f(\xi_{2k}, t)C_{F2} + F(\xi_{2k}, t)C_{f2} + (t - \alpha_k)C_{f2}C_{F2}$  とおいた.  $A_k$  の左端についても同様に,

$$\int_{\alpha_k + \delta\alpha}^{\alpha_k} f(x_1, x_2) F(x_1, x_2) dx_2 = - \int_{\alpha_k}^{\alpha_k + \delta\alpha} f(\xi_{1k}, t) F(\xi_{1k}, t) dt - \int_{\alpha_k}^{\alpha_k + \delta\alpha} H(\xi_{1k}, t)(t - \alpha_k) dt \quad (4.5)$$

となる．なお， $C_{f1}(t, \alpha_k) = g(\xi_{1k}, (t - \alpha_k)C_i)C_i$ ,  $C_{F1}(t, \alpha_k) = g(\xi_{1k}, (t - \alpha_k)C_i)C_i$ ,  $C_i(t, \alpha_k) = i'(\alpha_k) + i''(\alpha_k)(t - \alpha_k)\frac{1}{2!} + \dots + \frac{i^{(n)}(\alpha_k + \theta(t - \alpha_k))}{n!}(t - \alpha_k)^{n-1}$ ,  $i(t) = \xi_{1k} + (t - \alpha_k)C_i$  である．ここで， $\int_{\alpha_k}^{\alpha_k + \delta\alpha} H(\xi_{2k}, t)(t - \alpha_k) dt$  について考える． $H(\xi_{2k}, t)(t - \alpha_k)$  は連続な関数の和や積であるので連続である．また， $t \in [\alpha_k, \alpha_k + \delta\alpha]$  なので， $t$  は有界である．よって， $H(\xi_{2k}, t)(t - \alpha_k)$  も有界であるので，ある  $m \geq 0$  が存在して，

$$\begin{aligned} |H(\xi_{2k}, t)| &\leq m \\ |H(\xi_{2k}, t)(t - \alpha_k)| &\leq m|t - \alpha_k| \end{aligned}$$

となる．この左辺の積分を考える．

$$\begin{aligned} \left| \int_{\alpha_k}^{\alpha_k + \delta\alpha} H(\xi_{2k}, t)(t - \alpha_k) dt \right| &\leq \int_{\alpha_k}^{\alpha_k + \delta\alpha} |H(\xi_{2k}, t)(t - \alpha_k)| dt \\ &\leq m \int_{\alpha_k}^{\alpha_k + \delta\alpha} (t - \alpha_k) dt = \frac{m}{2}(\delta\alpha)^2 \end{aligned}$$

となる．よって， $\left| \int_{\alpha_k}^{\alpha_k + \delta\alpha} H(\xi_{2k}, t)(t - \alpha_k) dt \right|$  は  $(\delta\alpha)^2$  でおさえられる． $\int_{\alpha_k}^{\alpha_k + \delta\alpha} H(\xi_{1k}, t)(t - \alpha_k) dt$  についても同様にすることで，

$$\begin{aligned} \left| \int_{\alpha_k}^{\alpha_k + \delta\alpha} H(\xi_{2k}, t)(t - \alpha_k) dt \right| &\leq (\delta\alpha)^2, \\ \left| \int_{\alpha_k}^{\alpha_k + \delta\alpha} H(\xi_{1k}, t)(t - \alpha_k) dt \right| &\leq (\delta\alpha)^2 \end{aligned}$$

となる．すなわち，式 (4.4), (4.5) は  $\delta\alpha \rightarrow 0$  のとき，ランダウ記号  $o$  を用いて，

$$\int_{\alpha_k}^{\alpha_k + \delta\alpha} f(h(t), t)F(h(t), t) dt = \int_{\alpha_k}^{\alpha_k + \delta\alpha} f(\xi_{2k}, t)F(\xi_{2k}, t) dt + o(\delta\alpha), \quad (4.6)$$

$$- \int_{\alpha_k}^{\alpha_k + \delta\alpha} f(i(t), t)F(i(t), t) dt = - \int_{\alpha_k}^{\alpha_k + \delta\alpha} f(\xi_{1k}, t)F(\xi_{1k}, t) dt - o(\delta\alpha) \quad (4.7)$$

となる．ところで， $\mathbb{R}^2$  空間では  $d\Gamma = \frac{1}{n_1} dx_2$  である． $M$  上では  $\|\mathbf{u}\|^2 = F\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$  から  $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{F}\sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}$  となり， $M$  上の単位法線ベクトル  $\mathbf{n}'$  とユークリッド空間  $\mathbb{R}^2$  での単位法線ベクトル  $\mathbf{n}$  の関係は  $\mathbf{n}' = \frac{1}{\sqrt{F}}\mathbf{n}$  であるので， $d\Gamma' = \frac{1}{n_1'} dx_2$  となる．この式の両辺に  $fF\mathbf{n}_1'$  を掛けて積分すると，

$$\int_{\partial\Omega} fF\mathbf{n}_1' d\Gamma' = \int_{\partial\Omega} fF dx_2$$



となる. よって, 上式と式 (4.6), (4.7) より,

$$\begin{aligned}
& \int_{\partial\Omega} f F n_1' d\Gamma' \\
&= \int_{\partial\Omega} f F dx_2 \\
&= \int_{\alpha_1}^{\alpha_1+\delta\alpha} f(\xi_{21}, x_2) F(\xi_{21}, x_2) dx_2 - \int_{\alpha_1}^{\alpha_1+\delta\alpha} f(\xi_{11}, x_2) F(\xi_{11}, x_2) dx_2 \\
&\quad + \int_{\alpha_2}^{\alpha_2+\delta\alpha} f(\xi_{22}, x_2) F(\xi_{22}, x_2) dx_2 - \int_{\alpha_2}^{\alpha_2+\delta\alpha} f(\xi_{12}, x_2) F(\xi_{12}, x_2) dx_2 \\
&\quad + \cdots + \int_{\alpha_n}^{\alpha_n+\delta\alpha} f(\xi_{2n}, x_2) F(\xi_{2n}, x_2) dx_2 - \int_{\alpha_n}^{\alpha_n+\delta\alpha} f(\xi_{1n}, x_2) F(\xi_{1n}, x_2) dx_2 \\
&\quad + n \cdot o(\delta\alpha) - n \cdot o(\delta\alpha)
\end{aligned} \tag{4.8}$$

となる. ここで,  $\delta\alpha = \frac{h}{n}$  となる. (この  $\delta\alpha$  は不連続であるので,  $n = [\frac{h}{\delta\alpha} + 1]$  などと定義した方が不都合がない.)  $\delta\alpha \rightarrow 0$  のとき,  $n \rightarrow \infty$  となるが,  $n \cdot o(\delta\alpha) \rightarrow 0$  となることに注意して, 式 (4.2) から,

$$\begin{aligned}
& \iint_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_1} F dx_1 dx_2 \\
&= \iint_{B_s} \frac{\partial f}{\partial x_1} F dx_1 dx_2 \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{A_s} \frac{\partial f}{\partial x_1} F dx_1 dx_2 \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \iint_{A_k} \frac{\partial f}{\partial x_1} F dx_1 dx_2 \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left\{ \int_{\alpha_k}^{\alpha_k+\delta\alpha} f(\xi_{2k}, x_2) F(\xi_{2k}, x_2) dx_2 - \int_{\alpha_k}^{\alpha_k+\delta\alpha} f(\xi_{1k}, x_2) F(\xi_{1k}, x_2) dx_2 \right\} \\
&\quad - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \iint_{A_k} f \frac{\partial F}{\partial x_1} dx_1 dx_2 \quad (\because \text{式 (4.3) より}) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left\{ \int_{\alpha_k}^{\alpha_k+\delta\alpha} f(\xi_{2k}, x_2) F(\xi_{2k}, x_2) dx_2 - \int_{\alpha_k}^{\alpha_k+\delta\alpha} f(\xi_{1k}, x_2) F(\xi_{1k}, x_2) dx_2 \right. \\
&\quad \left. + n \cdot o(\delta\alpha) - n \cdot o(\delta\alpha) \right\} - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \iint_{A_k} f \frac{\partial F}{\partial x_1} dx_1 dx_2 \\
&= \int_{\partial\Omega} f F n_1' d\Gamma' - \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{A_s} f \frac{\partial F}{\partial x_1} dx_1 dx_2 \quad (\because \text{式 (4.8) より}) \\
&= \int_{\partial\Omega} f F n_1' d\Gamma' - \iint_{\Omega} f \frac{\partial F}{\partial x_1} dx_1 dx_2
\end{aligned}$$

となる. すなわち,

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_1} F dx_1 dx_2 = \int_{\partial\Omega} f F n_1' d\Gamma' - \iint_{\Omega} f \frac{\partial F}{\partial x_1} dx_1 dx_2 \tag{4.9}$$

である. ここまで  $x_1$  軸に平行な多数の直線を使って  $\Omega$  を細かく分割して考えてきたが,  $x_2$  軸に平行な多数の直線を使って  $\Omega$  を細かく分割した場合についても同様に考えると,

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_2} F dx_1 dx_2 = \int_{\partial\Omega} f F n_2' d\Gamma' - \iint_{\Omega} f \frac{\partial F}{\partial x_2} dx_1 dx_2 \tag{4.10}$$

となる。式 (4.9) で  $f = f \frac{\partial g}{\partial x_1}$ , 式 (4.10) で  $f = f \frac{\partial g}{\partial x_2}$  とすると,

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( f \frac{\partial g}{\partial x_1} \right) F dx_1 dx_2 &= \int_{\partial\Omega} \left( f \frac{\partial g}{\partial x_1} \right) F n_1' d\Gamma' - \iint_{\Omega} \left( f \frac{\partial g}{\partial x_1} \right) \frac{\partial F}{\partial x_1} dx_1 dx_2, \\ \iint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_2} \left( f \frac{\partial g}{\partial x_2} \right) F dx_1 dx_2 &= \int_{\partial\Omega} \left( f \frac{\partial g}{\partial x_2} \right) F n_2' d\Gamma' - \iint_{\Omega} \left( f \frac{\partial g}{\partial x_2} \right) \frac{\partial F}{\partial x_2} dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

となる。これらの式を加えて,

$$\begin{aligned} &\iint_{\Omega} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \left( f \frac{\partial g}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( f \frac{\partial g}{\partial x_2} \right) \right\} F dx_1 dx_2 \\ &= \int_{\partial\Omega} f \left( \frac{\partial g}{\partial x_1} n_1' + \frac{\partial g}{\partial x_2} n_2' \right) F d\Gamma' - \iint_{\Omega} f \left( \frac{\partial g}{\partial x_1} \frac{\partial F}{\partial x_1} + \frac{\partial g}{\partial x_2} \frac{\partial F}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 \\ &= \int_{\partial\Omega} f(\mathbf{n}' \cdot \nabla g) F d\Gamma' - \iint_{\Omega} f(\nabla g \cdot \nabla F) dx_1 dx_2 \\ &= \int_{\partial\Omega} f \frac{\partial g}{\partial n'} F d\Gamma' - \iint_{\Omega} f(\nabla g \cdot \nabla F) dx_1 dx_2 \end{aligned} \quad (4.11)$$

となる。ここで,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( f \frac{\partial g}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( f \frac{\partial g}{\partial x_2} \right) &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial g}{\partial x_1} + f \frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial g}{\partial x_2} + f \frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2} \\ &= f \left( \frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2} \right) + \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2} \right) \cdot \left( \frac{\partial g}{\partial x_1}, \frac{\partial g}{\partial x_2} \right) \\ &= f \Delta g + \nabla f \cdot \nabla g \end{aligned}$$

となるので, 式 (4.11) は  $\iint_{\Omega} (f \Delta g + \nabla f \cdot \nabla g) F dx_1 dx_2 = \int_{\Gamma'} f \frac{\partial g}{\partial n'} F d\Gamma' - \iint_{\Omega} f(\nabla g \cdot \nabla F) dx_1 dx_2$  となるから,

$$\iint_{\Omega} f \Delta g dA = \int_{\partial\Omega} f \frac{\partial g}{\partial n'} F d\Gamma' - \iint_{\Omega} \nabla f \cdot \nabla g dA - \iint_{\Omega} f(\nabla g \cdot \nabla \log F) dA$$

となる。 □

### 4.3 ガウスの定理の拡張

拡張されたグリーンの定理から, 次の拡張されたガウスの定理が得られる。

**定理 4.2.** (拡張されたガウスの定理)  $\Omega$  上のベクトル値関数  $\mathbf{u}$  に対し,

$$\iint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u} dA + \iint_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \nabla \log F dA = \int_{\partial\Omega} F \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}' d\Gamma' \quad (4.12)$$

が成り立つ。

**証明.** 式 (4.1) において,  $f = u_1, g = x_1$  とすると,

$$\iint_{\Omega} u_1 \Delta x_1 dA = \int_{\partial\Omega} F u_1 \frac{\partial x_1}{\partial n'} d\Gamma' - \iint_{\Omega} \nabla u_1 \cdot \nabla x_1 dA - \iint_{\Omega} u_1 (\nabla x_1 \cdot \nabla \log F) dA \quad (4.13)$$

となる。ここで,

$$\begin{aligned}\Delta x_1 &= 0, \\ \nabla u_1 \cdot \nabla x_1 &= \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \cdot \left( \frac{\partial x_1}{\partial x_1}, \frac{\partial x_1}{\partial x_2} \right) = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \\ \nabla x_1 \cdot \nabla \log F &= \left( \frac{\partial x_1}{\partial x_1}, \frac{\partial x_1}{\partial x_2} \right) \cdot \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \log F, \frac{\partial}{\partial x_2} \log F \right) = \frac{\partial}{\partial x_1} \log F, \\ \frac{\partial x_1}{\partial n'} &= \mathbf{n}' \cdot \nabla x_1 = (n_1', n_2') \cdot \left( \frac{\partial x_1}{\partial x_1}, \frac{\partial x_1}{\partial x_2} \right) = n_1'\end{aligned}$$

より, 式 (4.13) は

$$\int_{\partial\Omega} F u_1 n_1' d\Gamma' = \iint_{\Omega} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dA + \iint_{\Omega} u_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \log F dA$$

となる。同様に,  $f = u_2, g = x_2$  としたときを考えると,

$$\int_{\partial\Omega} F u_2 n_2' d\Gamma' = \iint_{\Omega} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} dA + \iint_{\Omega} u_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \log F dA$$

となる。これら 2 つの式を加えると,

$$\int_{\partial\Omega} F (u_1 n_1' + u_2 n_2') d\Gamma' = \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) dA + \iint_{\Omega} \left( u_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \log F + u_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \log F \right) dA$$

となり, 整理すると

$$\iint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u} dA + \iint_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \nabla \log F dA = \int_{\partial\Omega} F \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}' d\Gamma'$$

となる。 □

**定理 4.3.** 定理 4.1 と定理 4.2 は同値である。

証明. 拡張されたガウスの定理から拡張されたグリーンの定理を導けばよい。式 (4.12) において,  $\mathbf{u} = f \nabla g$  とすると,

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathbf{u} &= \operatorname{div} (f \nabla g) = f \Delta g + \nabla f \cdot \nabla g, \\ \mathbf{u} \cdot \nabla \log F &= f \nabla g \cdot \nabla \log F, \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}' &= f \nabla g \cdot \mathbf{n}' = f \frac{\partial g}{\partial n'}\end{aligned}$$

より,

$$\iint_{\Omega} (f \Delta g + \nabla f \cdot \nabla g) dA + \iint_{\Omega} f (\nabla g \cdot \nabla \log F) dA = \int_{\partial\Omega} F f \frac{\partial g}{\partial n'} d\Gamma'$$

となり, 整理すると

$$\iint_{\Omega} f \Delta g dA = \int_{\partial\Omega} f \frac{\partial g}{\partial n'} F d\Gamma' - \iint_{\Omega} \nabla f \cdot \nabla g dA - \iint_{\Omega} f (\nabla g \cdot \nabla \log F) dA$$

となる。 □

## 5 特殊な計量を与えた平面上での流体の運動

本章では、拡張されたガウスの定理から特殊な平面上でのオイラー方程式とナビエ・ストークス方程式を導き、その具体例を示す。

### 5.1 オイラー方程式とナビエ・ストークス方程式の拡張

第2章の第2.1節で完全流体仮説があったが、 $M$ 上では以下のようにになると仮定する。

$M$ 上での完全流体仮説

$a$ が $b$ を押す力は単位面積当たり  $Fp\mathbf{n}'$  であり、 $b$ が $a$ を押す力は単位面積当たり  $-Fp\mathbf{n}'$  である。この  $p$  は  $(t, x)$  の関数であるが、平面の選び方に依存しない。すなわち  $\mathbf{n}'$  に依存しない。

**定義 5.1.**  $M$  上での完全流体仮説の中の  $p$  を  $M$  上における圧力とする。

なお、速度については定義 2.1 がそのまま成り立つとする。このように定義した速度  $\mathbf{v}(t, x)$  や圧力  $p(t, x)$  が  $M$  上での流体の運動を記述することになる。では、 $M$  上でのオイラー方程式を示そう。次の式 (5.1) がオイラーの運動方程式を拡張したもので、式 (5.2) が非圧縮性条件を拡張したものである。

**命題 5.1.** (拡張されたオイラー方程式) 領域  $\Omega$  内に流体がつめられているとする。この流体について、密度  $\rho (> 0)$  が一定で完全流体仮説が適用できるとき、流体の運動は  $\Omega$  の各点  $x$  での  $F(x)$  と、時間  $t$  と  $x$  での速度ベクトル  $\mathbf{v}(t, x) = (v_1(t, x), v_2(t, x))$  と圧力  $p(t, x)$  だけで決定され、 $\mathbf{v}, p$  は次の偏微分方程式

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} (\nabla p + p \nabla \log F) + \mathbf{f}, \quad (5.1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \log F = 0 \quad (5.2)$$

を解くことで決定される。ここで、 $\mathbf{f}$  は外力で、重力などの流体に直接作用する力である。

**証明.** まず、式 (5.2) を導く。領域  $\Omega$  内に流体がつめられているとする。(\*) で定まる計量での質量保存則を仮定すると、流体が突然生まれたり消えたりしない。よって、流れにより境界  $\partial\Omega$  を出入りする質量の総和は 0 であるとする、

$$\iint_{\partial\Omega} \rho F \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}' d\Gamma' = 0$$

が成り立つと仮定できる。式 (4.12) の両辺に定数  $\rho$  を掛けて、

$$\begin{aligned} \rho \iint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u} dA + \rho \iint_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \nabla \log F dA &= \int_{\partial\Omega} \rho F \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}' d\Gamma' \\ \rho \iint_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \log F) dA &= 0 \end{aligned}$$

となる。 $\Omega$  は任意であるので、上式の左辺の被積分関数は 0 である。よって、

$$\operatorname{div} \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \log F = 0$$

となる．次に，式 (5.1) を導く．(\*) で定まる計量での運動量保存則を仮定すると，ある領域  $\Omega$  での「流体の運動量の時間変化と境界での運動量の和」は「 $\Omega$  内の流体に直接作用する外力と境界からおよぼされる力の和」に等しい．すなわち，

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Omega} \rho \mathbf{v} dA + \int_{\partial\Omega} \rho (F \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}') \mathbf{v} d\Gamma' = \iint_{\Omega} \rho \mathbf{f} dA - \int_{\partial\Omega} F p \mathbf{n}' d\Gamma' \quad (5.3)$$

が成り立つことを仮定する．ただし， $\mathbf{f}$  は既知の関数とする．ところで， $\operatorname{div} \mathbf{u}$  について  $\mathbf{u} = v_1 \mathbf{v}$  とすると，

$$\operatorname{div} (v_1 \mathbf{v}) = v_1 \operatorname{div} \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla v_1$$

となる．よって，

$$\iint_{\Omega} \operatorname{div} (v_1 \mathbf{v}) dA = \iint_{\Omega} (v_1 \operatorname{div} \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla v_1) dA$$

となるので，

$$\iint_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \nabla v_1 dA = \iint_{\Omega} \operatorname{div} (v_1 \mathbf{v}) dA - \iint_{\Omega} v_1 \operatorname{div} \mathbf{v} dA$$

となる．式 (4.12) より，

$$\iint_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \nabla v_1 dA = - \iint_{\Omega} v_1 \mathbf{v} \cdot \nabla \log F dA + \int_{\partial\Omega} F \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}' v_1 d\Gamma' - \iint_{\Omega} v_1 \operatorname{div} \mathbf{v} dA$$

となる． $\operatorname{div} \mathbf{u}$  について  $\mathbf{u} = v_2 \mathbf{v}$  としたときも同様に，

$$\iint_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \nabla v_2 dA = - \iint_{\Omega} v_2 \mathbf{v} \cdot \nabla \log F dA + \int_{\partial\Omega} F \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}' v_2 d\Gamma' - \iint_{\Omega} v_2 \operatorname{div} \mathbf{v} dA$$

となるので，まとめると

$$\iint_{\Omega} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} dA = - \iint_{\Omega} (\mathbf{v} \cdot \nabla \log F) \mathbf{v} dA + \int_{\partial\Omega} F (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}') \mathbf{v} d\Gamma' - \iint_{\Omega} \mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{v} dA$$

となる．式 (5.2) より，

$$\int_{\partial\Omega} F (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}') \mathbf{v} d\Gamma' = \iint_{\Omega} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} dA$$

となる．また，圧力  $p$  について，式 (4.12) で  $u_1 = p, u_2 = 0$  とすると，

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial p}{\partial x_1} dA + \iint_{\Omega} p \frac{\partial}{\partial x_1} \log F dA = \int_{\partial\Omega} F p n_1' d\Gamma'$$

となる．同様に，式 (4.12) で  $u_1 = 0, u_2 = p$  とすると，

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial p}{\partial x_2} dA + \iint_{\Omega} p \frac{\partial}{\partial x_2} \log F dA = \int_{\partial\Omega} F p n_2' d\Gamma'$$

となるので，まとめると

$$\int_{\partial\Omega} F p \mathbf{n}' d\Gamma' = \iint_{\Omega} \nabla p dA + \iint_{\Omega} p \nabla \log F dA \quad (5.4)$$

となる．式 (5.1), (5.4) を式 (5.3) に代入すると，

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Omega} \rho \mathbf{v} dA + \iint_{\Omega} \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} dA = \iint_{\Omega} \rho \mathbf{f} dA - \iint_{\Omega} (\nabla p + p \nabla \log F) dA$$

となる． $\Omega$  は任意なので，

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} (\nabla p + p \nabla \log F) + \mathbf{f}$$

となる． □

この拡張されたオイラー方程式の解を 1 つに特定するには、次の初期条件  $\mathbf{v}_0$  と境界条件  $g$  が必要である。

$$\begin{aligned}\mathbf{v}(0, x) &= \mathbf{v}_0(x) \quad (x \in \Omega), \\ F\mathbf{v}(t, x) \cdot \mathbf{n} &= g(t, x) \quad (x \in \partial\Omega, 0 \leq t)\end{aligned}$$

ユークリッド空間のときと同様に、 $\Omega$  の形が変わらない場合や  $\Omega$  の境界で流体の出入りが無い場合、すなわち境界が固体の壁のように静止しているとき、 $g \equiv 0$  となる。そうでない場合は  $g$  は与えられた関数になる。なお、圧力  $p$  に関する条件はない。次の式 (5.5) がナビエ・ストークスの運動方程式を拡張したものである。非圧縮性条件については流体の粘性の影響を受けないので、式 (5.2) と変わらない。

**命題 5.2.** (拡張されたナビエ・ストークス方程式) 動粘性係数を  $\nu$  とし、正の定数とする。このとき流体の運動は  $\Omega$  の各点  $x$  での  $F(x)$  と、時間  $t$  と  $x$  での速度ベクトル  $\mathbf{v}(t, x) = (v_1(t, x), v_2(t, x))$  と圧力  $p(t, x)$  だけで決定され、 $\mathbf{v}, p$  は次の偏微分方程式

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} &= \nu(\Delta \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v} \cdot \nabla \log F) - \frac{1}{\rho}(\nabla p + p \nabla \log F) + \mathbf{f}, \\ \operatorname{div} \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \log F &= 0\end{aligned}\tag{5.5}$$

を解くことで決定される。

**証明.** (\*) で定まる計量での運動量保存則を仮定すると、ある領域  $\Omega$  での「流体の運動量の時間変化と境界での運動量の和」は「 $\Omega$  内の流体に直接作用する外力と境界からおよぼされる力の和」に等しい。すなわち、

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Omega} \rho \mathbf{v} dA + \int_{\partial\Omega} \rho(F\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}') \mathbf{v} d\Gamma' = \iint_{\Omega} \rho \mathbf{f} dA - \int_{\partial\Omega} F p \mathbf{n}' d\Gamma' + \int_{\partial\Omega} F \nu \rho (\nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}') d\Gamma'$$

が成り立つことを仮定する。ただし、 $\mathbf{f}$  は既知の関数とする。式 (5.1), (5.4) を上式に代入すると、

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Omega} \rho \mathbf{v} dA + \iint_{\Omega} \rho(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} dA = \iint_{\Omega} \rho \mathbf{f} dA - \iint_{\Omega} (\nabla p + p \nabla \log F) dA + \int_{\partial\Omega} F \nu \rho (\nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}') d\Gamma'\tag{5.6}$$

となる。よって、上式の右辺の第 3 項を変形することを考える。式 (4.12) に  $u_1 = \frac{\partial v_1}{\partial x_1}, u_2 = \frac{\partial v_1}{\partial x_2}$  を代入すると、

$$\iint_{\Omega} \left( \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} \right) dA + \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \log F + \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} \log F \right) dA = \int_{\partial\Omega} F \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_1} n_1' + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} n_2' \right) d\Gamma'$$

となり、

$$\iint_{\Omega} \Delta v_1 dA + \iint_{\Omega} \nabla v_1 \cdot \nabla \log F dA = \int_{\partial\Omega} F \nabla v_1 \cdot \mathbf{n}' d\Gamma'$$

となる。同様に、 $u_1 = \frac{\partial v_2}{\partial x_1}, u_2 = \frac{\partial v_2}{\partial x_2}$  を代入すると、

$$\iint_{\Omega} \Delta v_2 dA + \iint_{\Omega} \nabla v_2 \cdot \nabla \log F dA = \int_{\partial\Omega} F \nabla v_2 \cdot \mathbf{n}' d\Gamma'$$

となるので、まとめると、

$$\iint_{\Omega} \Delta \mathbf{v} dA + \iint_{\Omega} \nabla \mathbf{v} \cdot \nabla \log F dA = \int_{\partial\Omega} F \nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}' d\Gamma'$$

となる。よって、上式を式 (5.6) に代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Omega} \rho \mathbf{v} dA + \iint_{\Omega} \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} dA \\ = \iint_{\Omega} \rho \mathbf{f} dA - \iint_{\Omega} (\nabla p + p \nabla \log F) dA + \iint_{\Omega} \nu \rho (\Delta \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v} \cdot \nabla \log F) dA \end{aligned}$$

となる。  $\Omega$  は任意なので、

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \nu (\Delta \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v} \cdot \nabla \log F) - \frac{1}{\rho} (\nabla p + p \nabla \log F) + \mathbf{f}$$

となる。 □

このナビエ・ストークス方程式の解を特定するには、次の初期条件  $\mathbf{v}_0$  と境界条件  $\mathbf{g}$  が必要である。(境界条件は粘着条件という。)

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(0, x) &= \mathbf{v}_0(x) \quad (x \in \Omega), \\ \mathbf{v}(t, x) &= \mathbf{g}(t, x) \quad (x \in \partial\Omega) \end{aligned}$$

境界が固体の壁のように静止しているとき、 $\mathbf{g} \equiv 0$  となり、

$$\mathbf{v}(t, x) = 0 \quad (x \in \partial\Omega) \tag{5.7}$$

となる。次節の具体例では、式 (5.7) を仮定する。

## 5.2 具体例

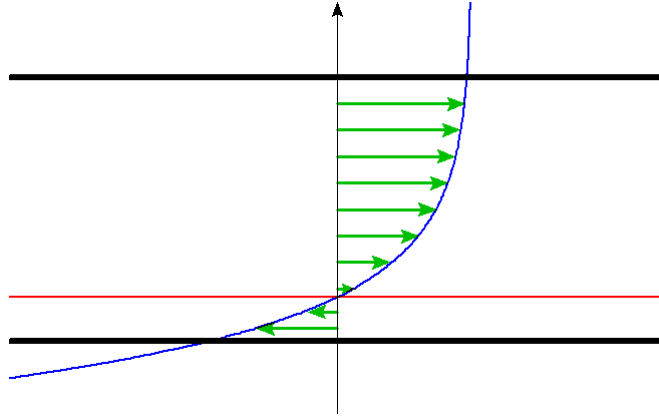
ここでは、拡張されたナビエ・ストークス方程式の具体例を挙げる。なお、この具体例では外力  $\mathbf{f} \equiv 0$  とする。また、定常流を考えることとする。

**例 5.1** 例 3.1 の平面クエット流を  $M$  上でも考えてみる。  $\Omega = \{(x_1, x_2) \in M \mid -\infty < x_1 < \infty, -b < x_2 < b\}$  で、  $x_2 = b$  にある板は速度  $c$  で右に、  $x_2 = -b$  にある板は速度  $c$  で左に動いている。このとき、  $\Omega$  内の速度ベクトル場  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$  は次の境界条件を満たすとする。

$$\begin{aligned} x_2 = b \text{ のとき, } v_1 &= c, v_2 = 0, \\ x_2 = -b \text{ のとき, } v_1 &= -c, v_2 = 0 \end{aligned}$$

これを満たす  $\mathbf{v}, p, F$  として、

$$v_1 = \frac{2c}{1 - e^{2kb}} (e^{-kx_2 + kb} - 1) + c, \quad v_2 = 0, \quad p = de^{-kx_2}, \quad F = e^{kx_2} \quad (d \text{ は定数, } k \text{ は } 0 \text{ 以外の定数}) \tag{5.8}$$



$x_2$  軸はベクトルの始点をわかりやすくするために描画した。

が存在する．この解の求め方を記述しておこう． $\mathbf{v} = (v_1(x_2), 0)$ ,  $F = e^{kx_2}$  とする．今，拡張されたナヴィエ・ストークス方程式は，

$$v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} = \nu(\Delta v_1 + \nabla v_1 \cdot \nabla \log F) - \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial x_1} + p \frac{\partial}{\partial x_1} \log F \right), \quad (5.9)$$

$$v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = \nu(\Delta v_2 + \nabla v_2 \cdot \nabla \log F) - \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial x_2} + p \frac{\partial}{\partial x_2} \log F \right), \quad (5.10)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \log F + v_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \log F = 0 \quad (5.11)$$

となる．式 (5.9), (5.10) から，

$$\nu \left( \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} + k \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_1} = 0, \quad (5.12)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_2} + kp = 0 \quad (5.13)$$

となる．なお，拡張された非圧縮性条件を満たすことは直ちにわかる． $p = p(x_2)$  とすると，式 (5.13) から，

$$p = de^{-kx_2} \quad (d \text{ は定数})$$

となる．また，式 (5.12) から，

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} + k \frac{\partial v_1}{\partial x_2} = 0 \quad (5.14)$$

となるので， $k \neq 0$  のときの一般解は

$$v_1 = C_1 e^{-kx_2} + C_2 \quad (C_1, C_2 \text{ は定数})$$

となる．境界条件から，

$$v_1(b) = C_1 e^{-kb} + C_2 = c,$$

$$v_1(-b) = C_1 e^{kb} + C_2 = -c$$

となる．ここから，

$$C_1 = \frac{2ce^{kb}}{1 - e^{2kb}}, \quad C_2 = c - \frac{2c}{1 - e^{2kb}}$$



となるので,

$$v_1 = \frac{2c}{1 - e^{2kb}} (e^{-kx_2 + kb} - 1) + c$$

となる. 一方,  $k = 0$  とすると, 式 (5.14) の一般解は,

$$v = C_3 x_2 + C_4 \quad (C_3, C_4 \text{ は定数})$$

となる. 境界条件から,

$$\begin{aligned} v_1(b) &= C_3 b + C_4 = c \\ v_1(-b) &= -C_3 b + C_4 = -c \end{aligned}$$

となる. ここから,

$$C_3 = \frac{c}{b}, \quad C_4 = 0$$

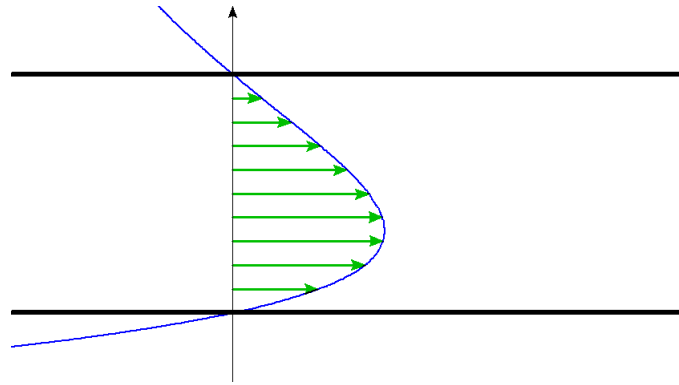
となるので,

$$v_1 = \frac{c}{b} x_2$$

となる. よって,  $\mathbb{R}^2$  で平面クエット流となる.

**例 5.2** 例 3.2 の 2 次元ポワズーユ流を  $M$  上でも考えてみる. 領域  $\Omega = \{(x_1, x_2) \in M \mid 0 < x_1 < a, -b < x_2 < b\}$  の  $x_1 = 0$  から圧力を加えたときの  $\Omega$  内の流体の運動を考える. 速度ベクトル場  $\mathbf{v}$  は拡張されたナビエ・ストークス方程式を満たすとする. 境界条件  $\mathbf{v} = 0$  を  $\partial\Omega = \{0 < x_1 < a, x_2 = \pm b\}$  に課す. なお,  $x_1 = 0$  には課さない. このような  $\mathbf{v}, p, F$  として,

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{dC_1}{k\nu\rho} \left\{ \frac{2b}{e^{kb} - e^{-kb}} - \left( \frac{e^{kb} + e^{-kb}}{e^{kb} - e^{-kb}} b + x_2 \right) e^{-kx_2} \right\}, \quad v_2 = 0, \\ p &= d(C_1 x_1 + C_2) e^{-kx_2}, \quad F = e^{kx_2} \quad (C_1, C_2, d \text{ は定数}, k \text{ は } 0 \text{ 以外の定数}) \end{aligned} \quad (5.15)$$



$x_2$  軸はベクトルの始点をわかりやすくするために描画した.

が存在する. この解の求め方を記述しておこう.  $\mathbf{v} = (v_1(x_2), 0)$ ,  $F(x_1, x_2) = e^{kx_2}$  とする. 拡張された非圧縮性条件を満たすことは直ちにわかる. 式 (5.9), (5.10) から,

$$\nu \left( \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} + k \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_1} = 0, \quad (5.16)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_2} + kp = 0 \quad (5.17)$$

となる。ここで、式 (5.16) から、 $\frac{\partial p}{\partial x_1} = g(x_2)$  ( $g$  は  $x_2$  の関数) となるので、

$$p = (C_1 x_1 + C_2) g(x_2) \quad (C_1, C_2 \text{ は定数})$$

となる。よって、式 (5.17) から、

$$\frac{\partial g}{\partial x_2} + k g = 0$$

となるので、 $g(x_2) = d e^{-k x_2}$  ( $d$  は定数) となる。よって、

$$p = d(C_1 x_1 + C_2) e^{-k x_2}$$

となる。また、式 (5.16) から、

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} + k \frac{\partial v_1}{\partial x_2} = \frac{d C_1}{\nu \rho} e^{-k x_2} \quad (5.18)$$

となる。(これは 2 階定係数線形非同次微分方程式である。)  $k \neq 0$  のときの一般解は、

$$v_1 = C_3 + \left( C_4 - \frac{d C_1}{k \nu \rho} x_2 \right) e^{-k x_2} \quad (C_3, C_4 \text{ は定数})$$

となる。境界条件から、

$$\begin{aligned} v_1(b) &= C_3 + \left( C_4 - \frac{d C_1}{k \nu \rho} b \right) e^{-k b} = 0, \\ v_1(-b) &= C_3 + \left( C_4 + \frac{d C_1}{k \nu \rho} b \right) e^{k b} = 0 \end{aligned}$$

となる。ここから、

$$C_3 = \frac{2 b d C_1}{k \nu \rho} \frac{1}{e^{k b} - e^{-k b}}, \quad C_4 = -\frac{b d C_1}{k \nu \rho} \frac{e^{k b} + e^{-k b}}{e^{k b} - e^{-k b}}$$

となるので、

$$v_1 = \frac{d C_1}{k \nu \rho} \left\{ \frac{2 b}{e^{k b} - e^{-k b}} - \left( \frac{e^{k b} + e^{-k b}}{e^{k b} - e^{-k b}} b + x_2 \right) e^{-k x_2} \right\}$$

となる。一方、 $k = 0$  とすると、式 (5.18) の一般解は、

$$v_1 = \frac{d C_1}{2 \nu \rho} x_2^2 + C_5 x_2 + C_6 \quad (C_5, C_6 \text{ は定数})$$

となる。境界条件から、

$$\begin{aligned} v_1(b) &= \frac{d C_1}{2 \nu \rho} b^2 + C_5 b + C_6 = 0, \\ v_1(-b) &= \frac{d C_1}{2 \nu \rho} b^2 - C_5 b + C_6 = 0 \end{aligned}$$

となる。ここから、

$$C_5 = 0, \quad C_6 = -\frac{d C_1}{2 \nu \rho} b^2$$

となるので、

$$v_1 = \frac{d C_1}{2 \nu \rho} (x_2^2 - b^2)$$

となる。よって、 $\mathbb{R}^2$  でのポワズィーユ流となる。

**例 5.3** さらに、 $k \neq 0$  のとき、境界条件が  $v_1(b) = \alpha$ ,  $v_1(-b) = \beta$  となる場合を考えてみよう。

$$\begin{aligned} v_1(b) &= C_3 + \left( C_4 - \frac{dC_1}{k\nu\rho} b \right) e^{-kb} = \alpha, \\ v_1(-b) &= C_3 + \left( C_4 + \frac{dC_1}{k\nu\rho} b \right) e^{kb} = \beta \end{aligned}$$

となる。ここから、

$$C_3 = \frac{\alpha e^{kb} - \beta e^{-kb}}{e^{kb} - e^{-kb}} + \frac{2bdC_1}{k\nu\rho} \frac{1}{e^{kb} - e^{-kb}}, \quad C_4 = \frac{\beta - \alpha}{e^{kb} - e^{-kb}} - \frac{bdC_1}{k\nu\rho} \frac{e^{kb} + e^{-kb}}{e^{kb} - e^{-kb}}$$

となるので、

$$v_1 = \frac{\alpha - \beta}{1 - e^{2kb}} (e^{-kx_2+kb} - 1) + \alpha + \frac{dC_1}{k\nu\rho} \left\{ \frac{2b}{e^{kb} - e^{-kb}} - \left( \frac{e^{kb} + e^{-kb}}{e^{kb} - e^{-kb}} b + x_2 \right) e^{-kx_2} \right\}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{\alpha - \beta}{1 - e^{2kb}} (e^{-kx_2+kb} - 1) + \alpha + \frac{dC_1}{k\nu\rho} \left\{ \frac{2b}{e^{kb} - e^{-kb}} - \left( \frac{e^{kb} + e^{-kb}}{e^{kb} - e^{-kb}} b + x_2 \right) e^{-kx_2} \right\}, \quad v_2 = 0, \\ p &= d(C_1 x_1 + C_2) e^{-kx_2}, \quad F = e^{kx_2} \quad (C_1, C_2, d \text{ は定数, } k \text{ は } 0 \text{ 以外の定数}) \end{aligned}$$

がナヴィエ・ストークス方程式の解となる。

## 参考文献

- [1] 岡本久 (2016), 「日常現象からの解析学」, 近代科学者.
- [2] 三松佳彦 (2008), 「リーマン多様体上の流体の運動方程式の幾何学的基礎」, ながれ.27(1), 日本流体力学会.
- [3] 三宅敏恒 (1992), 「入門微分積分」, 培風館.
- [4] 石村園子 (2003), 「やさしく学べる微分方程式」, 共立出版株式会社.
- [5] 梅原雅顕, 山田光太郎 (2015), 「曲線と曲面 -微分幾何的アプローチ-」, 裳華房.