

# 3次元空間曲線の曲率に関する考察

三重大学大学院教育学研究科  
教育科学専攻 理数・生活系教育領域  
220M014 中島友多

令和4年2月10日

## 序文

本研究を進めるにあたり、小林昭七著『曲線と曲面の微分幾何 (改訂版)』と、瀬山士郎著『トポロジー: やわらかい幾何学 [増補版]』を用いて曲線論, 曲面論, 位相幾何学について学習した.

本論文では, 松田の研究 (松田雄斗, (2019), 『回転面の全曲率に関する考察』, 三重大学大学院教育学研究科修士論文) において証明された松田の公式の幾何学的意味について, また, 松田の公式を用いて特殊な場合の曲面 (タジン鍋型曲面) の全曲率の考察について. 次に, 竹内の複素数を用いた平面曲線の全曲率についての研究 (竹内洋介, (2017), 『複素数を用いた平面曲線の全曲率の考察』, 三重大学大学院教育学研究科修士論文.) を基に, 閉曲線  $\gamma(\theta) = \frac{1}{3}z^3 + az^2 + bz + c$  の全曲率について, 多項式の係数を用いて全曲率を求めることについてや, この場合において,  $\dot{\gamma}(\theta) = 0$  の解を  $c_1, c_2$  ( $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ ) とし,  $|c_1| = 1, |c_2| = 1$  とした場合の空間を  $\mathbb{Z}_2$  で割った空間, すなわち解空間のホモロジーについて. (今回, 各  $\theta_1, \theta_2$  に対して,  $\theta_1 = \theta_2$  の場合以外入れ替えが可能であるため,  $\mathbb{Z}_2$  で割ることができる.) 最後に, 2次元平面上の曲線の回転数についての新たな考察, 3次元空間曲線についての新たな考察について述べる.

3次元空間曲線は, 「曲線の大域的性質を論じるとき振率の関係してくるようなことを考えるのは大体において不可能になり, 主に曲率に関することに限られてくる.」とされていた. 『曲線と曲面の微分幾何 (改訂版)

2019 小林昭七』

今回は, 線形代数で学んだシュミットの直交正規化法を用いたり, 接地面を考えることで曲率を新しく考察できないか考えた.

本論文では, それらについて述べ, 主に3次元空間曲線の曲率について考察したことを報告する.

## 目次

序文	2
1 準備	4
1.1 平面の曲線 . . . . .	4
1.2 空間の曲線と曲面 . . . . .	6
1.3 鎖複体 . . . . .	11
2 松田の公式の幾何学的意味	13
3 タジン鍋型曲面の全曲率	17
4 複素数を用いた全曲率の計算についてのさらなる考察	24
5 複素数を用いた全曲率の計算についての幾何学的考察	32
6 基準点から見た 2 次元曲線の回転数	40
7 3 次元空間曲線の曲率についての考察	44
7.1 接地面に応じた曲率について . . . . .	44
7.2 3 次元空間内の曲線を 2 次元平面に射影した際の曲線についての考察 . . . . .	47

# 1 準備

## 1.1 平面の曲線

平面の曲線と閉曲線を次のように定義する.

**定義 1.1.**  $a, b \in \mathbb{R}$  に対し,  $I = [a, b]$  と定める.  $t \in I$  の写像  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  による像

$$\gamma(I) = \{\gamma(t) | t \in I\}$$

を曲線という.

**定義 1.2.** 曲線の中で, 曲線  $\gamma(t)$  の始点と終点一致する, すなわち

$$\gamma(a) = \gamma(b)$$

が成り立つとき,  $\gamma(t)$  を閉曲線という.

以後, 曲線  $\gamma(t)$  は  $C^\infty$  級の閉曲線を表すものとする. 曲線  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$  を  $t$  で 1 回微分したものを

$$\dot{\gamma}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$$

と表す. 以下断らない限り,  $\dot{\gamma}(t) \neq \mathbf{0}$  とする. いま, 曲線  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$  の閉区間  $[a, b]$  における長さを計算すると

$$\int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt = \int_a^b \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} dt$$

となる. すなわちこれは動点  $\gamma(t)$  が時刻  $t = a$  から  $t = b$  まで動いた距離である. 初めの時刻  $t = a$  を固定し,  $b$  の代わりに変数  $t$  を用いて

$$s = \int_a^t |\dot{\gamma}(u)| du$$

と書くと,  $s$  は時刻  $a$  から  $t$  の間に点が動いた距離で  $t$  の関数  $s = s(t)$  になる. そこで変数  $s$  を用いて  $\gamma(t)$  を次のように書き直す.

**定義 1.3.**  $a, b \in \mathbb{R}$  に対し, 曲線  $\gamma(t)$  の閉区間  $[a, t]$  における長さを  $s = \int_a^t |\dot{\gamma}(t)| dt$  とすると, この曲線は

$$\gamma(s) = (x(s), y(s)) \quad (0 \leq s \leq l), \quad l = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt$$

と表される. このときの変数  $s$  を弧長パラメータという.

弧長パラメータ  $s$  による微分を  $\gamma'(s)$  と表し, 一般のパラメータ  $t$  での微分とは区別する. 以下, 断りのない場合は次のように書く.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{dx}{dt}, & \dot{y} &= \frac{dy}{dt}, & \dot{\gamma}(t) &= \left( \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right), \\ x' &= \frac{dx}{ds}, & y' &= \frac{dy}{ds}, & \gamma'(s) &= \left( \frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds} \right). \end{aligned}$$

$\dot{\gamma}(t) \neq \mathbf{0}$  であるから、弧長パラメータ  $s$  は  $t$  で微分すると、微分積分学の基本定理より

$$\frac{ds}{dt} = |\dot{\gamma}(t)| > 0$$

である。  $s$  で表示された曲線  $\gamma(s) = (x(s), y(s))$  を微分すると、合成関数の微分法より

$$\gamma'(s) = \frac{d\gamma}{ds} = \frac{d\gamma}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{\dot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t)|}$$

となるから、 $|\gamma'(s)| \equiv 1$ 、すなわち弧長パラメータ表示された曲線の速度ベクトルの大きさは常に 1 となる。

**定義 1.4.** 曲線  $\gamma(s) = (x(s), y(s))$  に対し、

$$\mathbf{e}(s) = \gamma'(s) = (x'(s), y'(s)) \quad \mathbf{n}(s) = (-y'(s), x'(s))$$

とする。  $\mathbf{e}(s)$  を  $\gamma(s)$  の単位接ベクトル、  $\mathbf{n}(s)$  を  $\gamma(s)$  の単位法線ベクトルという。

単位法線ベクトル  $\mathbf{n}(s)$  は  $\mathbf{e}(s)$  を、原点を中心に  $90^\circ$  回転して得られるベクトルである。ここで

$$\mathbf{e}'(s) = \gamma''(s)$$

を考えると、 $\mathbf{e}'(s)$  は  $\mathbf{e}(s)$  に直交するので、 $\mathbf{e}'(s)$  は  $\mathbf{n}(s)$  に平行となる。そこで次のような定数  $\kappa(s)$  を定義する。

**定義 1.5.** 曲線  $\gamma(s)$  に対し、

$$\mathbf{e}'(s) = \kappa(s)\mathbf{n}(s)$$

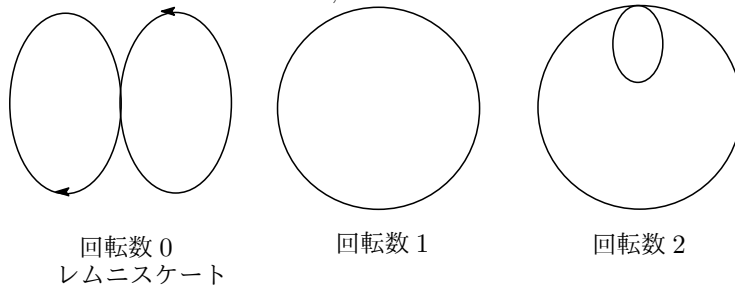
となるような定数  $\kappa(s)$  が存在する。この定数  $\kappa(s)$  を  $\gamma(s)$  の曲率という。

**定義 1.6.** 曲線  $\gamma(s)$  ( $a \leq s \leq b$ ) に対し、曲率を  $\kappa(s)$  とする。  $\kappa(s)$  を  $s = a$  から  $s = b$  まで積分して得られる定数

$$\mu = \int_a^b \kappa(s) ds$$

を  $\gamma(s)$  の全曲率という。またこの両辺を  $2\pi$  で割った値を  $\gamma(s)$  の回転数という。

曲線の向きによって回転数の正負は変わるが、なめらかな閉曲線の回転数は整数となることが示せる。



## 1.2 空間の曲線と曲面

平面の曲線と同様に、空間の曲線の弧長パラメータを次のように定義する.

**定義 1.7.** パラメータ  $t$  を用いて、空間の曲線を

$$\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

と表す. 曲線上の点  $\gamma(a)$  を固定し, 閉区間  $[a, t]$  における長さを  $s = s(t)$  とすると

$$s = \int_a^t |\dot{\gamma}(t)| dt = \int_a^t \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2} dt$$

で与えられ, 弧長パラメータ表示できる.

$l = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| ds$  とする. 弧長パラメータ  $s$  で表された曲線  $\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s))$  ( $0 \leq s \leq l$ ) の速度ベクトル

$$\mathbf{e}_1(s) = \gamma'(s) = (x'(s), y'(s), z'(s))$$

の大きさは平面の曲線のとおり同様に, 長さは常に 1 である. すなわち

$$\mathbf{e}_1(s) \cdot \mathbf{e}_1(s) = x'(s)^2 + y'(s)^2 + z'(s)^2 = 1$$

である. この式をさらに  $s$  で微分すると

$$\mathbf{e}'_1(s) \cdot \mathbf{e}_1(s) + \mathbf{e}_1(s) \cdot \mathbf{e}'_1(s) = 2\mathbf{e}_1(s) \cdot \mathbf{e}'_1(s) = 0$$

であるから,  $\mathbf{e}'_1(s)$  は  $\mathbf{e}_1(s)$  に垂直である.

**定義 1.8.** 曲線  $\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s))$  と速度ベクトル  $\mathbf{e}_1(s) = \gamma'(s)$  に対し,  $\mathbf{e}'_1(s)$  の大きさ

$$|\mathbf{e}'_1(s)| = \sqrt{\mathbf{e}'_1(s) \cdot \mathbf{e}'_1(s)} = \sqrt{x''(s)^2 + y''(s)^2 + z''(s)^2}$$

を曲線  $\gamma(s)$  の曲率といい,  $\kappa(s)$  と書く.

**定義 1.9.**  $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$  は  $uv$  平面上の領域  $D$  で定義された 3 回微分可能な関数とする. Jacobi 行列

$$\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}$$

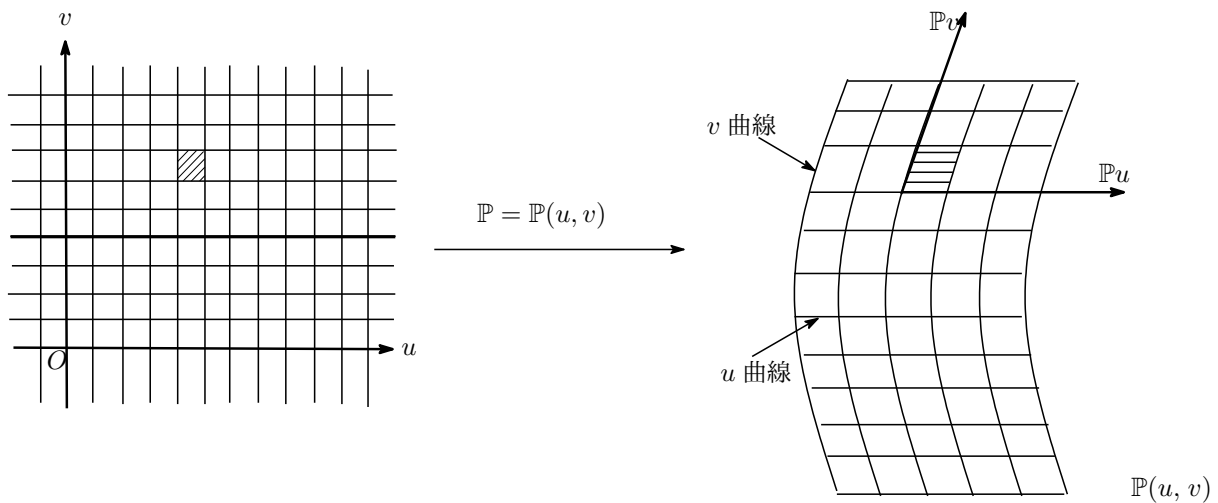
の階数が  $D$  上で 2 であるとき,  $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$  は空間内に曲面片を定義するという.

**定義 1.10.** 空間内の集合  $S$  がいくつかの (無限の) 曲面片の和集合になっているとき,  $S$  を曲面という.

**定義 1.11.**  $S$  が境界をもたないコンパクトな曲面であるとき, これを閉曲面という.

以下断らない限り, 曲面  $\mathbb{P}(u, v)$  は閉曲面とする.

$uv$  平面上の領域  $D$  で定義された  $\mathbb{P}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$  を曲面とする.



において、 $v$  を 1 つ固定したときの対応  $u \mapsto \mathbb{P}(u, v)$  によって決まる曲線を  $u$  曲線といい、 $u$  を 1 つ固定したときの対応  $v \mapsto \mathbb{P}(u, v)$  によって決まる曲線を  $v$  曲線という。これら 2 つの曲線の族は曲面を網のように覆う。ベクトル  $\mathbb{P}_u = \mathbb{P}_u(u, v)$  は  $u$  曲線の各点における速度ベクトルを、ベクトル  $\mathbb{P}_v = \mathbb{P}_v(u, v)$  は  $v$  曲線の各点における速度ベクトルを表す。また点  $\mathbb{P}(u, v)$  で曲面に接するベクトルは  $\mathbb{P}_u, \mathbb{P}_v$  の 1 次結合で表される。したがって点  $\mathbb{P}(u, v)$  を通り、これらの接ベクトルに平行な平面

$$\{\mathbb{P}(u, v) + \alpha\mathbb{P}_u(u, v) + \beta\mathbb{P}_v(u, v) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

が曲面の接平面となる。 $\mathbb{P}_u, \mathbb{P}_v$  の両方に垂直な単位ベクトルは

$$\nu = \frac{\mathbb{P}_u \times \mathbb{P}_v}{|\mathbb{P}_u \times \mathbb{P}_v|}$$

と表される。この  $\nu$  を曲面  $\mathbb{P}(u, v)$  の単位法線ベクトルという。

これらのもとで、次のような関数を定義する。

**定義 1.12.** 曲面  $S : \mathbb{P}(u, v)$  の接ベクトル  $\mathbb{P}_u = \mathbb{P}_u(u, v), \mathbb{P}_v = \mathbb{P}_v(u, v)$  の内積で与えられる 3 つの関数

$$E(u, v) = \mathbb{P}_u \cdot \mathbb{P}_u, \quad F(u, v) = \mathbb{P}_u \cdot \mathbb{P}_v, \quad G(u, v) = \mathbb{P}_v \cdot \mathbb{P}_v$$

を第 1 基本量という。また、 $\mathbb{P}(u, v)$  の 2 回偏微分  $\mathbb{P}_{uu}, \mathbb{P}_{uv}, \mathbb{P}_{vv}$  と単位法線ベクトル  $\nu$  の内積で与えられる 3 つの関数

$$L(u, v) = \mathbb{P}_{uu} \cdot \nu, \quad M(u, v) = \mathbb{P}_{uv} \cdot \nu, \quad N(u, v) = \mathbb{P}_{vv} \cdot \nu$$

を第 2 基本量という。簡単のため、 $E, F, G$  などと略記する。

**定義 1.13.** 曲面  $S : \mathbb{P}(u, v)$  に対し、第 1 基本量  $E, F, G$  と第 2 基本量  $L, M, N$  を用いて表される関数

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

を  $S$  の Gauss 曲率という。

**定義 1.14.** 閉曲面  $S : \mathbb{P}(u, v)$  ( $u(s_1) \leq u \leq u(s_2), 0 \leq v \leq 2\pi$ ) に対し、Gauss 曲率を  $K$  とする。 $S$  における  $K$  の重積分の値

$$\iint_S K dA$$

を  $S$  の全曲率という。ここで  $dA$  は面積要素であり、 $dA = \sqrt{EG - F^2} dudv$  と表される。

例 1.1.  $r > 0$  とする。半径  $r$  の 2次元球面  $S^2$  は

$$\mathbb{P}(u, v) = (r \cos u \cos v, r \cos u \sin v, r \sin u) \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq v \leq 2\pi\right)$$

と表される。

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_u &= (-r \sin u \cos v, -r \sin u \sin v, r \cos u), \\ \mathbb{P}_v &= (-r \cos u \sin v, r \cos u \cos v, 0), \\ \mathbb{P}_u \times \mathbb{P}_v &= -(r^2 \cos^2 u \cos v, r^2 \cos^2 u \sin v, r^2 \sin u \cos u), \quad |\mathbb{P}_u \times \mathbb{P}_v| = r^2 \cos u, \\ \nu &= \frac{\mathbb{P}_u \times \mathbb{P}_v}{|\mathbb{P}_u \times \mathbb{P}_v|} = -(\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u), \\ \mathbb{P}_{uu} &= -(r \cos u \cos v, r \cos u \sin v, r \sin u), \\ \mathbb{P}_{uv} &= (r \sin u \sin v, -r \sin u \cos v, 0), \\ \mathbb{P}_{vv} &= -(r \cos u \cos v, r \cos u \sin v, 0) \end{aligned}$$

より、第 1 基本量  $E, F, G$  と第 2 基本量  $L, M, N$  は

$$\begin{aligned} E &= \mathbb{P}_u \cdot \mathbb{P}_u = r^2, & F &= \mathbb{P}_u \cdot \mathbb{P}_v = 0, & G &= \mathbb{P}_v \cdot \mathbb{P}_v = r^2 \cos^2 u, \\ L &= \mathbb{P}_{uu} \cdot \nu = r, & M &= \mathbb{P}_{uv} \cdot \nu = 0, & N &= \mathbb{P}_{vv} \cdot \nu = r \cos^2 u. \end{aligned}$$

これより  $S^2$  の Gauss 曲率は

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{1}{r^2}.$$

また面積要素は  $dA = \sqrt{EG - F^2} dudv = r^2 \cos u dudv$ . したがって  $S^2$  の全曲率は

$$\iint_{S^2} K dA = \iint_{S^2} \frac{1}{r^2} \cdot r^2 \cos u dudv = \iint_{S^2} \cos u dudv = \left[ \sin u \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[ v \right]_0^{2\pi} = 4\pi$$

となる。 □

定義 1.15.  $xz$  平面上の曲線

$$\gamma(u) = (f(u), g(u)) \quad (f(u) \geq 0)$$

を、 $z$  軸のまわりに 1 回転してできる曲面  $S$  は

$$\mathbb{P}(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u))$$

で与えられる。この曲面  $S$  を回転面という。

回転面の全曲率の計算は、平面上の曲線における通常のパラメータを弧長パラメータに変換してから定義通りに行うことによって計算することができる。

例 1.2.  $R > r > 0$  とする。 $xz$  平面上の円

$$\gamma(s) = (R + r \cos s, r \sin s) \quad (0 \leq s \leq 2\pi)$$

に対し、 $\dot{\gamma}(s) = (-r \sin s, r \cos s)$ . 閉区間  $[0, s]$  に対応する弧長  $u = u(s)$  は

$$u = \int_0^s |\dot{\gamma}(t)| dt = \int_0^s r dt = \left[ rt \right]_0^s = rs \iff s = \frac{u}{r}$$



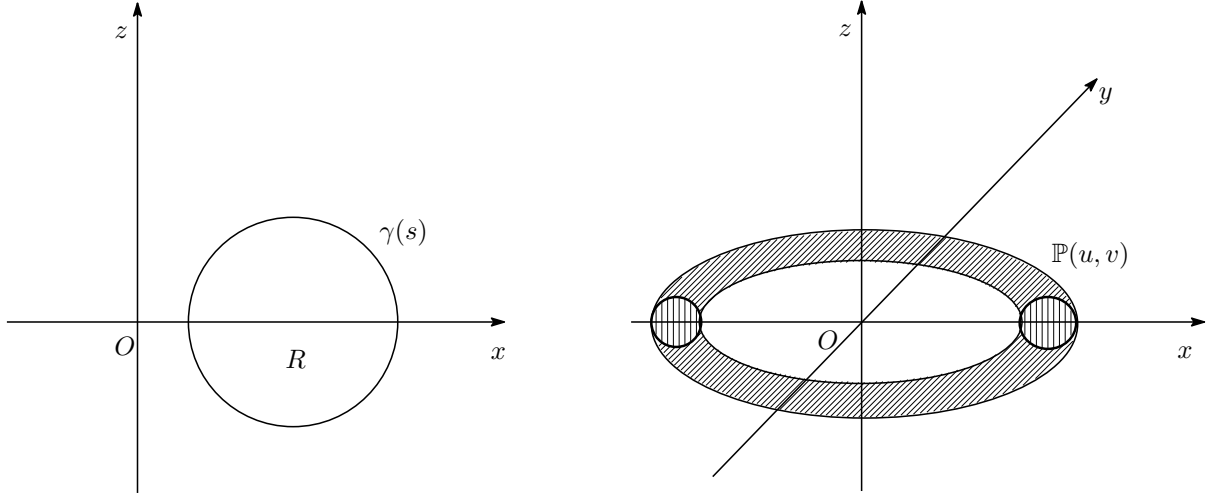
であるから、この円の弧長パラメータ表示は

$$\gamma(u) = \left( R + r \cos \frac{u}{r}, r \sin \frac{u}{r} \right) \quad (0 \leq u \leq 2\pi r)$$

である。この円を  $z$  軸のまわりに 1 回転してできる曲面  $T$  は

$$\mathbb{P}(u, v) = \left( \left( R + r \cos \frac{u}{r} \right) \cos v, \left( R + r \cos \frac{u}{r} \right) \sin v, r \sin \frac{u}{r} \right) \quad (0 \leq u \leq 2\pi r, 0 \leq v \leq 2\pi)$$

で与えられる。この曲面  $T$  をトーラスという。



$$\begin{aligned} \mathbb{P}_u &= \left( -\sin \frac{u}{r} \cos v, -\sin \frac{u}{r} \sin v, \cos \frac{u}{r} \right), \\ \mathbb{P}_v &= \left( -\left( R + r \cos \frac{u}{r} \right) \sin v, \left( R + r \cos \frac{u}{r} \right) \cos v, 0 \right), \\ \mathbb{P}_u \times \mathbb{P}_v &= - \left( \left( R + r \cos \frac{u}{r} \right) \cos \frac{u}{r} \cos v, \left( R + r \cos \frac{u}{r} \right) \cos \frac{u}{r} \sin v, \left( R + r \cos \frac{u}{r} \right) \sin \frac{u}{r} \right), \\ |\mathbb{P}_u \times \mathbb{P}_v| &= R + r \cos \frac{u}{r}, \\ \nu &= \frac{\mathbb{P}_u \times \mathbb{P}_v}{|\mathbb{P}_u \times \mathbb{P}_v|} = - \left( \cos \frac{u}{r} \cos v, \cos \frac{u}{r} \sin v, \sin \frac{u}{r} \right), \\ \mathbb{P}_{uu} &= - \left( \frac{1}{r} \cos \frac{u}{r} \cos v, \frac{1}{r} \cos \frac{u}{r} \sin v, \frac{1}{r} \sin \frac{u}{r} \right), \\ \mathbb{P}_{uv} &= \left( \sin \frac{u}{r} \sin v, -\sin \frac{u}{r} \cos v, 0 \right), \\ \mathbb{P}_{vv} &= - \left( \left( R + r \cos \frac{u}{r} \right) \cos v, \left( R + r \cos \frac{u}{r} \right) \sin v, 0 \right) \end{aligned}$$

より、第 1 基本量  $E, F, G$  と第 2 基本量  $L, M, N$  は

$$\begin{aligned} E &= \mathbb{P}_u \cdot \mathbb{P}_u = 1, & F &= \mathbb{P}_u \cdot \mathbb{P}_v = 0, & G &= \mathbb{P}_v \cdot \mathbb{P}_v = \left( R + r \cos \frac{u}{r} \right)^2, \\ L &= \mathbb{P}_{uu} \cdot \nu = \frac{1}{r}, & M &= \mathbb{P}_{uv} \cdot \nu = 0, & N &= \mathbb{P}_{vv} \cdot \nu = \left( R + r \cos \frac{u}{r} \right) \cos \frac{u}{r}. \end{aligned}$$

これより  $T$  の Gauss 曲率は

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{\cos \frac{u}{r}}{r \left( R + r \cos \frac{u}{r} \right)}.$$

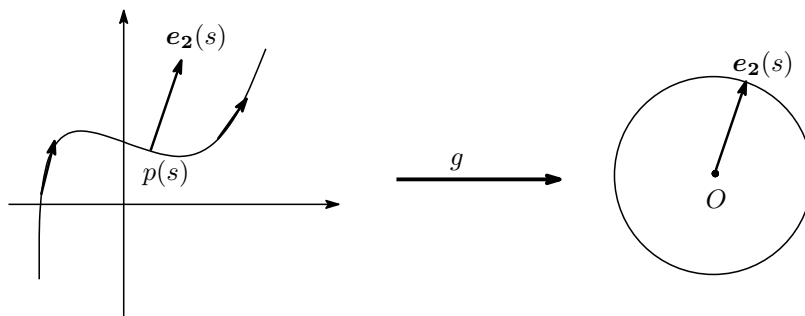
また面積要素は  $dA = \sqrt{EG - F^2} dudv = \left(R + r \cos \frac{u}{r}\right) dudv$ . したがって  $T$  の全曲率は

$$\begin{aligned} \iint_T K dA &= \iint_T \frac{\cos \frac{u}{r}}{r \left(R + r \cos \frac{u}{r}\right)} \cdot \left(R + r \cos \frac{u}{r}\right) dudv = \iint_T \frac{1}{r} \cos \frac{u}{r} dudv \\ &= \left[ \sin \frac{u}{r} \right]_0^{2\pi r} \left[ v \right]_0^{2\pi} = 0 \end{aligned}$$

となる. □

次に, 曲線上の各点に対する単位法線ベクトル  $e_2(s)$  を 2次元平面内の曲線を, 円に写すような写像について紹介する.

**定義 1.16.** 曲線  $p$  の各点  $p(s)$  に対し, 原点から出る単位法線ベクトル  $e_2(s)$  に平行なベクトルを対応させる. この対応を *Gauss* の表示 (*Gaussmap*) と呼ぶ. 詳しくは以下の図を見よ.



### 1.3 鎖複体

鎖複体は幾何と代数の橋渡しをするもので、複体から構成される代数的な構造である。ここでは、鎖複体についてまとめ、ホモロジーについて述べる。

**定義 1.17.**  $K$  を複体とし、 $K$  の全ての  $r$ -単体に向きを付けたものを  $\sigma_1^r, \sigma_2^r, \dots, \sigma_{ar}^r$  とする。ここで、 $ar$  は  $r$ -単体の個数とする。  $\sigma_i^r$  に整数をかけて、形式的な和  $n_1\sigma_1^r + n_2\sigma_2^r + \dots + n_{ar}\sigma_{ar}^r$  を  $r$ -チェイン  $c_r$  と呼び、 $r$ -チェインの全体を  $C_r(K)$  と書く。すなわち、

$$C_r(K) = \{c_r \mid c_r = \sum_{i=1}^{ar} n_i \sigma_i^r, n_i \in \mathbb{Z}\}$$

である。

次に、向きを与えた  $r$ -単体に対して、いくつかの定義を記し、鎖複体を定義する。

**定義 1.18.** これから、向きのついた  $r$ -単体を

$$\sigma^r = (x_0 \cdots x_r)$$

と書くとする。ここで、 $\sigma^r, \sigma^{r-1}$  を向きの付いた  $r, r-1$ -単体とすると、 $\sigma^r$  と  $\sigma^{r-1}$  の結合係数  $[\sigma^r : \sigma^{r-1}]$  を次のように定める。

$$[\sigma^r : \sigma^{r-1}] = \begin{cases} 0 & (\sigma^{r-1} \text{が} \sigma^r \text{の面でないとき),} \\ 1 & (\sigma^{r-1} \text{の向きが} \sigma^r \text{の最初の頂点を除いたものになっているとき),} \\ -1 & (\sigma^{r-1} \text{の向きが} \sigma^r \text{の二番目の頂点を除いたものになっているとき),} \end{cases}$$

**定義 1.19.**  $\partial_r : C_r(K) \rightarrow C_{r-1}(K)$  となる準同型を次のように定める。

(1) 1個の  $r$ -単体  $\sigma^r$  について

$$\partial_r(\sigma^r) = \sum_{j=1}^{ar-1} [\sigma^r : \sigma_j^{r-1}] \sigma_j^{r-1}$$

(2)  $r$ -チェイン  $c_r = \sum_{i=1}^{ar} n_i \sigma_i^r$  について

$$\partial_r(c_r) = \sum_{i=1}^{ar} n_i \partial(\sigma_i^r)$$

この  $\partial_r$  を境界準同型と呼ぶ。

**定義 1.20.**  $K^n$  を  $n$ -複体とすると、境界準同型  $\partial_r$  を用いて、

$$0 \xrightarrow{\partial} C_n(K) \xrightarrow{\partial} C_{n-1}(K) \xrightarrow{\partial} \cdots \xrightarrow{\partial} C_1(K) \xrightarrow{\partial} C_0(K) \xrightarrow{\partial} 0$$

という可換群と準同型の列が得られる。この列を  $C(K)$  と書くとき、 $C(K)$  を  $K$  で決まる鎖複体という。

次に、境界サイクルについての定義を行い、ホモロジーについて定義する。

**定義 1.21.**  $\ker \partial_r$  の元を  $r$ 次元サイクル ( $r$ -サイクル) といい、 $\text{Im} \partial_{r+1}$  の元を  $r$ 次元境界サイクル ( $r$ -境界サイクル) という。ここで、 $r$ -サイクル全体を  $Z_r(K)$ 、 $r$ -境界サイクル全体を  $B_r(K)$  と書く。

この定義を用いてホモロジーについて定義する.

**定義 1.22.**  $Z_r(K)$  の  $B_r(K)$  による剰余群  $Z_r(K)/B_r(K)$  を  $K$  の  $r$  次元ホモロジー群といい,  $H_r(K)$  と書く.  $K$  が  $n$  次元複体であれば,  $H_0(K)$  から  $H_n(K)$  が決まり, その他の次元では  $H_r(K) = 0$  と定める. このとき,

$$H_r(K) = \{[z] \mid z \text{ は } K \text{ の } r\text{-サイクル}\}$$

と表せ, この  $[z]$  を  $z$  の作るホモロジー類と呼ぶ.

## 2 松田の公式の幾何学的意味

松田は、回転体の全曲率について以下の定理 2.1. を得た. (松田雄斗,(2019), 『回転面の全曲率に関する考察』, 三重大学大学院教育学研究科修士論文 []. 証明については『回転面の全曲率に関する考察』[] を見られよ.)

松田の論文では、松田の公式についての証明と、松田の公式を用いていくつかの例題を計算しているが、松田の公式がどのような幾何学的意味を持っているかについての記述は見られない. そこで、この章では松田の公式がどのような幾何学的意味を持つか考察していく.

まず、松田の公式について紹介する.

**定理 2.1.** (松田の公式)  $xz$  平面上の曲線

$$\gamma(t) = (f(t), g(t)) \quad (f(t) > 0)$$

は点  $t = t_1, c_1, c_2, \dots, c_{n-1}, c_n, t_2$  において  $\dot{\gamma}(t) = \mathbf{0}$  であるとする. 开区間  $(t_1, c_1), (c_1, c_2), \dots, (c_n, t_2)$  に対応する広義の弧長  $s_i = s_i(t)$  により、この曲線の弧長パラメータ表示が

$$\gamma(s_i) = (f(s_i), g(s_i))$$

であるとする. この曲線を  $z$  軸の周りに 1 回転してできる曲面は

$$\mathbb{P}(s_i, v) = (f(s_i) \cos v, f(s_i) \sin v, g(s_i))$$

で与えられる. この回転面を  $S$  とすると、 $S$  の全曲率は

$$\begin{aligned} \iint_S K dA &= -2\pi \lim_{t \rightarrow t_2 - 0} \dot{f}(t) \frac{1}{\frac{ds_{n+1}}{dt}} + 2\pi \lim_{t \rightarrow c_n + 0} \dot{f}(t) \frac{1}{\frac{ds_{n+1}}{dt}} \\ &\quad - 2\pi \lim_{t \rightarrow c_n - 0} \dot{f}(t) \frac{1}{\frac{ds_n}{dt}} + 2\pi \lim_{t \rightarrow c_{n-1} + 0} \dot{f}(t) \frac{1}{\frac{ds_n}{dt}} - \dots \\ &\quad - 2\pi \lim_{t \rightarrow c_1 - 0} \dot{f}(t) \frac{1}{\frac{ds_1}{dt}} + 2\pi \lim_{t \rightarrow t_1 + 0} \dot{f}(t) \frac{1}{\frac{ds_1}{dt}} \end{aligned}$$

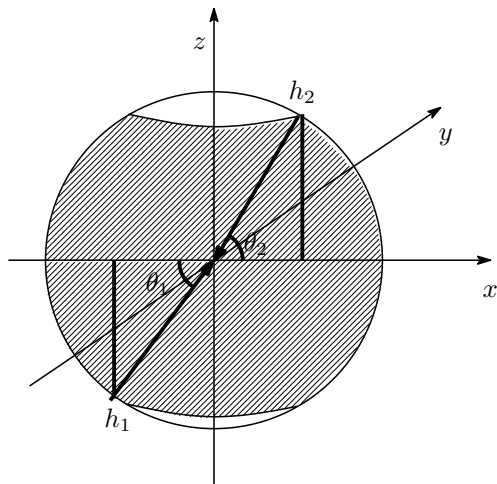
となる.

松田の公式の幾何学的意味を考察するにあたり、全曲率を *Gauss* の表示を用いて求めていく. *Gauss* の表示で写す際に球面上で考える. そのため、球面から一部を平面で切り取った際の表面積 (以下球帯と呼ぶ.) を求める公式を以下に示す.

**定理 2.2.** 半径  $r$  で球帯の底面の正負を含めた高さ、天面の正負を含めた高さをそれぞれ  $h_1, h_2$  とすると、球帯の表面積は

$$S = 2\pi r \int_{h_1}^{h_2} dh = 2\pi r(h_2 - h_1)$$

で求められる.



証明. もとの球の半径を  $r$  とする. このとき, 上記の図の場合の表面積を考える.

$\Delta\theta$  を十分 0 に近い正の数として, 角度が  $\theta$  から  $\theta + \Delta\theta$  の部分 (帯のような図形) の表面積を考える.

周の長さは  $2\pi r \cos \theta$ , 帯の幅は  $r\Delta\theta$  なので, 帯の表面積は

$$\Delta S = 2\pi r^2 \cos \theta \Delta\theta$$

よって, 球帯の表面積は, 球体を  $xz$  軸で切断したときに球帯の底面上の点が  $x$  軸となす角, 天面上の点が  $x$  軸となす角をそれぞれ  $\theta_1, \theta_2$  とすると,

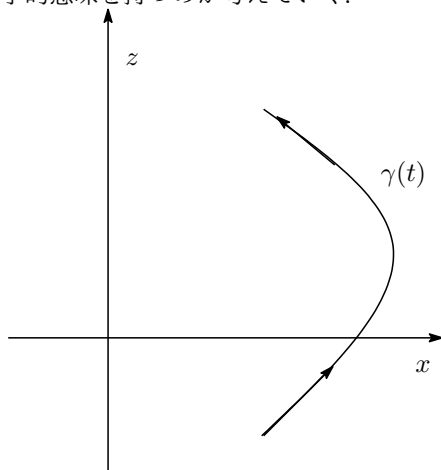
$$S = 2\pi r^2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos \theta d\theta$$

と表される. ここで,  $r \sin \theta = h$  と置換すると  $r \sin \theta_1 = h_1, r \sin \theta_2 = h_2, \frac{dh}{d\theta} = r \cos \theta$  より,

$$S = 2\pi r \int_{h_1}^{h_2} dh = 2\pi r(h_2 - h_1)$$

となる. □

この定理を踏まえ, 図のような曲線を  $z$  軸の周りに 1 回転させたときの全曲率を求める松田の公式はどのような幾何学的意味を持つのか考えていく.



$xz$  平面上の曲線

$$\gamma(t) = (f(t), g(t)) \quad (f(t) > 0)$$

は, 点  $t = t_1, t_2$  において  $\dot{\gamma}(t) = \mathbf{0}$  であるとする. 开区間  $(t_1, t_2)$  に対応する広義の波長  $s = s(t)$  により, この弧長パラメーター表示が

$$\gamma(s) = (f(s), g(s)) \quad (s(t_1) \leq s \leq s(t_2))$$

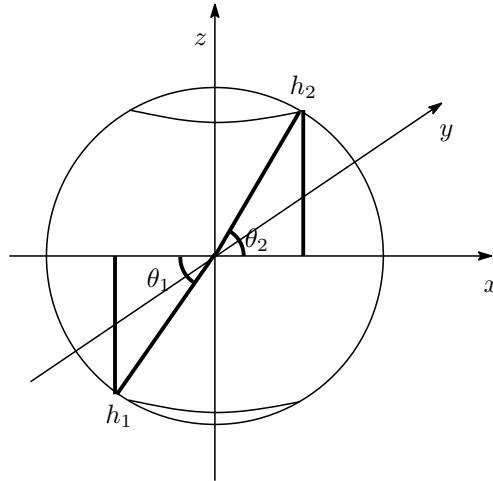
であるとする. この曲線を  $z$  軸の周りに 1 回転してできる曲面は

$$\mathbb{P}(s, v) = (f(s) \cos v, f(s) \sin v, g(s)) \quad (s(t_1) \leq s \leq s(t_2), 0 \leq v \leq 2\pi)$$

で与えられる. この回転面を  $S$  とするときの  $S$  の全曲率を松田の公式の考え方, ガウス曲率を用いた考え方の 2 つの視点から考え, 図で考察していく.

まず *Gauss* の表示を用いて曲面上の単位法線ベクトルを単位球上に写した際の全曲率について考察していく.

特異点  $t = t_1, t_2$  上での単位法線ベクトルが  $x$  軸となす角はそれぞれ  $\theta_1, \theta_2$  となるので, これ *Gauss* の表示を用いて球面に写すと, 下記の図のようになる.



このとき, 求める球面での表面積は, 半径  $r = 1$ , 天面の正負を含めた高さ  $h_2 = \sin \theta_2$ , 底面の正負を含めた高さ  $h_1 = \sin \theta_1$  の球帯の表面積と同等なので, 定理 2.2. を用いて

$$S = 2\pi(\sin \theta_2 - \sin \theta_1)$$

となることがわかる.

次に松田の公式で求める. 今回は特異点が二つのときのトーラス型曲面の全曲率なので松田の公式を用いると,

$$\iint_S K dA = -2\pi \lim_{t \rightarrow t_2-0} \dot{f}(t) \frac{1}{\frac{ds}{dt}} + 2\pi \lim_{t \rightarrow t_1+0} \dot{f}(t) \frac{1}{\frac{ds}{dt}} \quad (1)$$

で求められる.

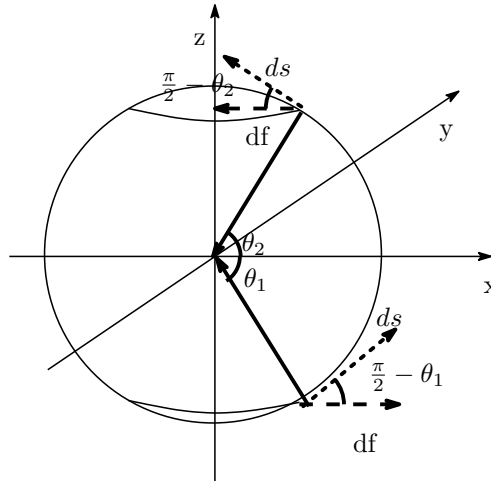
ここで,

$$\dot{f}(t) \frac{1}{\frac{ds}{dt}} = \frac{df(t)}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{df(t)}{ds}$$

となるので, (1) を変形すると

$$\iint_S K dA = -2\pi \lim_{t \rightarrow t_2 - 0} \frac{df(t)}{ds} + 2\pi \lim_{t \rightarrow t_1 + 0} \frac{df(t)}{ds} \quad (2)$$

と表せる.



ここで図のように考え,  $ds$  と  $df(t_1)$ ,  $ds$  と  $df(t_2)$  のなす角をそれぞれ  $\frac{\pi}{2} - \theta_1$ ,  $\frac{\pi}{2} - \theta_2$  とすると  $\frac{df(t_1)}{ds} = \cos(\frac{\pi}{2} - \theta_1)$ ,  $\frac{df(t_2)}{ds} = \cos(\frac{\pi}{2} - \theta_2)$  となるので, (2) より, 求める全曲率は,

$$\begin{aligned} \iint_S K dA &= -2\pi \lim_{t \rightarrow t_2 - 0} \frac{df(t)}{ds} + 2\pi \lim_{t \rightarrow t_1 + 0} \frac{df(t)}{ds} \\ &= -2\pi \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_2\right) + 2\pi \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_1\right) \\ &= -2\pi \sin \theta_2 + 2\pi \sin \theta_1 \\ &= 2\pi(\sin \theta_1 - \sin \theta_2) \end{aligned}$$

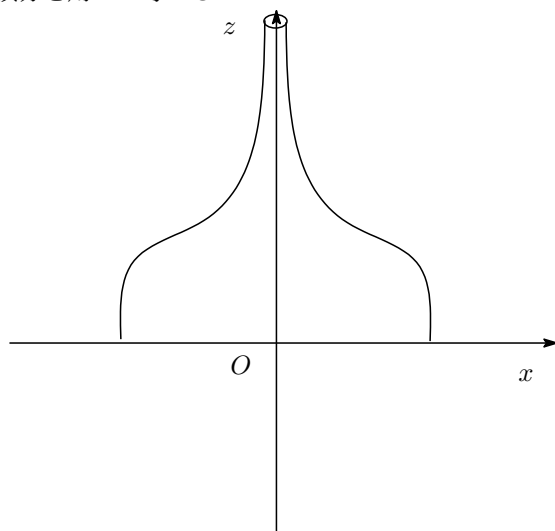
となることがわかる. このことから松田の公式で求める回転面の全曲率は, Gauss の表示を用いて曲面を写した球面上の球帯の負の表面積と同等であることがわかる.



### 3 タジン鍋型曲面の全曲率

今までの曲面は、 $s$  の範囲が有限であるものを考えた。その場合、松田の公式より全曲率を求めることはできた。

今回は、 $\gamma(t) = (f(t), t) (0 \leq t \leq \infty)$  とし、 $f(t)$  の極限が 0 となるような曲線を  $z$  軸の回りに 1 回転させてできる曲面 (タジン鍋型曲面と呼ぶ。以下の図を参考にせよ。) の全曲率について考える。これは端点となる極限のみが  $z$  軸と接するような  $xz$  平面上の曲線を考え、それを回転すればよい。このようにして得られる曲面の全曲率を広義積分を用いて考える。



タジン鍋型曲面の全曲率を求めるために以下の定理を用意する。

**定理 3.1.**  $xz$  平面上の曲線

$$\gamma(t) = (f(t), t) \quad (0 \leq t \leq \infty) (f(t) > 0)$$

は  $\lim_{s \rightarrow \infty} f(t) = 0$  であるとする。開区間  $(0 \leq t \leq \infty)$  に対応する広義の弧長  $s = s(t)$  により、この曲線の弧長パラメータ表示は、 $f(t(s))$  を改めて  $f(s)$  と書くと、

$$\gamma(s) = (f(s), t(s))$$

で表せる。この曲線を  $z$  軸の周りに 1 回転してできる曲面は

$$\mathbb{P}(s, v) = (f(s) \cos v, f(s) \sin v, t(s))$$

で与えられる。この回転面を  $S$  とすると、 $S$  の全曲率は

$$\iint_S K dA = -2\pi \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \left\{ \frac{1}{f(t)} \right\}^2}} + 2\pi \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1 + \left\{ \frac{1}{f(t)} \right\}^2}}$$

証明. 定理 2.1. より,  $S$  の全曲率は

$$\iint_S K dA = -2\pi \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{f}(t) \frac{1}{\frac{ds}{dt}} + 2\pi \lim_{t \rightarrow 0} \dot{f}(t) \frac{1}{\frac{ds}{dt}} \quad (3)$$

と表される. ここで,  $\dot{f}(t) \frac{1}{\frac{ds}{dt}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \{\frac{1}{f(t)}\}^2}}$  となることを示す.

$$\frac{ds}{dt} = |\dot{\gamma}(t)| = \sqrt{\{f'(t)\}^2 + \{g'(t)\}^2}$$

また,  $\dot{g}(t) = 1$  で, これらを元の式に代入すると,

$$\begin{aligned} \dot{f}(t) \frac{1}{\frac{ds}{dt}} &= \frac{\dot{f}(t)}{\sqrt{\{f'(t)\}^2 + \{g'(t)\}^2}} \\ &= \frac{\dot{f}(t)}{\sqrt{\{f'(t)\}^2 + 1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \{\frac{1}{f(t)}\}^2}} \end{aligned}$$

よって, これを (3) に代入すると,

$$\iint_S K dA = -2\pi \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \{\frac{1}{f(t)}\}^2}} + 2\pi \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1 + \{\frac{1}{f(t)}\}^2}}$$

よって, 示せた. □

**定理 3.2.**  $f(x)$  は微分可能で, 極限が存在し,  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \alpha$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ) のとき,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \dot{f}(x) = 0$  となる

証明. 定理の対偶を示す. よって,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \dot{f}(x) \neq 0$  のとき,  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  の極限は存在しないことを示す.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \dot{f}(x) \neq 0$  のとき, 閉区間  $[x-1, x+1]$  において平均値の定理を用いると

$$\dot{f}(x+\theta) = \frac{f(x+1) - f(x-1)}{2}$$

を満たす ( $-1 \leq \theta \leq 1$ ) が存在する. ここで,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \dot{f}(x+\theta) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x+1) - f(x-1)}{2} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x+1)}{2} - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x-1)}{2} \neq 0 \end{aligned}$$

より,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x+1)}{2} \neq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x-1)}{2}.$$

よって, 極限に飛ばした際に極限が一致しないので,  $f(x)$  の極限は存在しない. □

これらの定理を用いて、以下の定理を示す.

**定理 3.3.**  $xz$  平面上の曲線

$$\gamma(t) = (f(t), t) \quad (0 \leq t \leq \infty)(f(t) > 0)$$

は  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$  であるとする. 開区間  $(0 \leq t \leq \infty)$  に対応する広義の弧長  $s = s(t)$  により, この曲線の弧長パラメータ表示が

$$\gamma(s) = (f(s), t(s))$$

であるとする. この曲線を  $z$  軸の周りに 1 回転してできる曲面は

$$\mathbb{P}(s, v) = (f(s) \cos v, f(s) \sin v, t(s))$$

で与えられる. この回転面を  $S$  とすると,  $S$  の全曲率は

$$\iint_S K dA = 2\pi \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1 + \left\{ \frac{1}{f(t)} \right\}^2}}$$

となる.

**証明.** 定理 3.1. より,  $S$  の全曲率は,

$$\iint_S K dA = -2\pi \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \left\{ \frac{1}{f(t)} \right\}^2}} + 2\pi \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1 + \left\{ \frac{1}{f(t)} \right\}^2}}$$

と表せる. ここで, 定理 3.2. より  $\lim_{x \rightarrow \infty} \dot{f}(x) = 0$  が成立するので

$$\begin{aligned} \iint_S K dA &= -2\pi \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \left\{ \frac{1}{f(t)} \right\}^2}} + 2\pi \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1 + \left\{ \frac{1}{f(t)} \right\}^2}} \\ &= 0 + 2\pi \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1 + \left\{ \frac{1}{f(t)} \right\}^2}} \\ &= 2\pi \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1 + \left\{ \frac{1}{f(t)} \right\}^2}}. \end{aligned}$$

よって示された. □

また, 回転体の表面積についての公式も記しておく

定理 3.4.  $[t_1, t_2]$  で連続な関数  $\gamma(t) = (f(t), g(t))$  を,  $z$  軸の回りに一回転してできる回転体の表面積  $S$  は

$$S = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} |f(t)| \sqrt{\{\dot{f}(t)\}^2 + \{\dot{g}(t)\}^2} ds$$

と表される.

証明. 微小区間における  $f(t), g(t)$  の変化量をそれぞれ  $dx, dy$  とする. このとき  $\gamma(t)$  の増加量を  $dl$  とすると,

$$dl^2 = dx^2 + dy^2$$

と表せる. よって,  $dl = \sqrt{\{dx\}^2 + \{dy\}^2}$  が成立するので,

$$\frac{dl}{dt} = \sqrt{\left\{\frac{dx}{dt}\right\}^2 + \left\{\frac{dy}{dt}\right\}^2}$$

より,

$$dl = \sqrt{\{\dot{f}(t)\}^2 + \{\dot{g}(t)\}^2}$$

と表せる. ここで, 微小増加した面積を  $dS$  とすると,

$$dS = 2\pi |f(t)| dl = 2\pi |f(t)| \sqrt{\{\dot{f}(t)\}^2 + \{\dot{g}(t)\}^2} dt$$

と表せる, これを区間  $[t_1, t_2]$  で積分すると,

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dS = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} |f(t)| \sqrt{\{\dot{f}(t)\}^2 + \{\dot{g}(t)\}^2} dt$$

□

この定理を用いて, いくつかの例題を見ていく.

[例 1]

$xz$  平面上の曲線

$$\gamma(t) = \left( \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}}, t \right) \quad (0 \leq t \leq \infty)$$

に対し,  $\dot{\gamma}(t) = \left( \frac{-t}{(t^2 + 1)\sqrt{t^2 + 1}}, 1 \right)$ . 閉区間  $[0, s]$  に対応する弧長  $s = s(t)$  により, この曲線の弧長パラメーター表示が

$$\gamma(s) = (f(s), t(s))$$

であるとする. この曲線を  $z$  軸の回りに 1 回転してできる曲面  $S$  は,

$$\mathbb{P}(s, v) = (f(s) \cos v, f(s) \sin v, t(s))$$

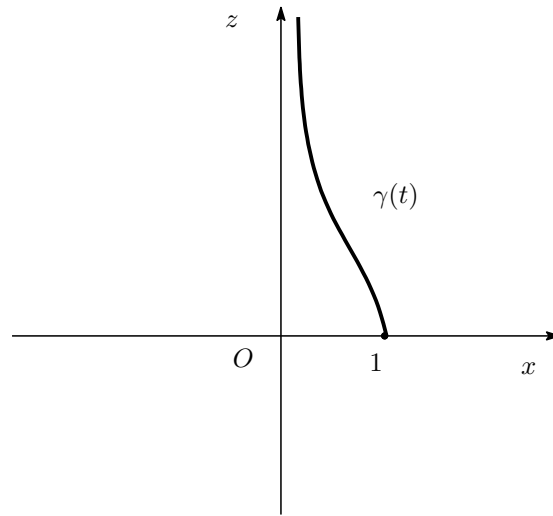
で与えられる. この回転面を  $S$  とすると,

$$\dot{f}(t) = \frac{-t}{(t^2 + 1)\sqrt{t^2 + 1}}$$

と定理 3.3. より,  $S$  の全曲率は,

$$\iint_S K dA = 2\pi \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1 + \left\{\frac{1}{\dot{f}(t)}\right\}^2}} = 2\pi \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1 + \left\{\frac{-t}{(t^2 + 1)\sqrt{t^2 + 1}}\right\}^2}} = 0$$

となる.



[例 2]

$xz$  平面上の曲線

$$\gamma(t) = \left( \frac{1}{t+1}, t \right) \quad (0 \leq t < \infty)$$

に対し,  $\dot{\gamma}(t) = \left( \frac{-1}{(t+1)^2}, 1 \right)$ . 閉区間  $[0, s]$  に対応する弧長  $s = s(t)$  により, この曲線の弧長パラメーター表示が

$$\gamma(s) = (f(s), t(s))$$

であるとする. この曲線を  $z$  軸の周りに 1 回転してできる曲面  $S$  は,

$$\mathbb{P}(s, v) = (f(s) \cos v, f(s) \sin v, t(s))$$

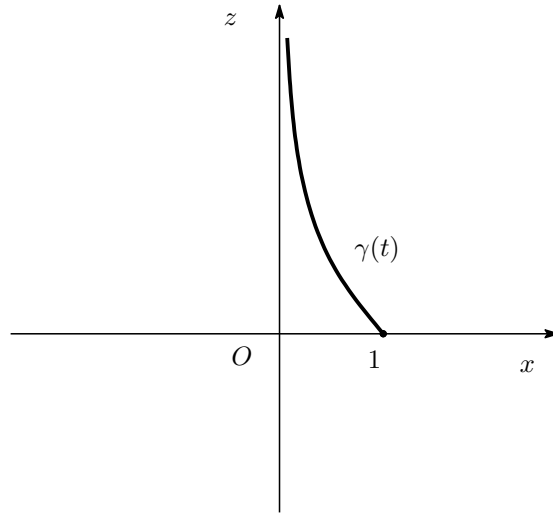
で与えられる. この回転面を  $S$  とすると,

$$\dot{f}(t) = \frac{-1}{(t+1)^2}$$

と定理 3.3. より,  $S$  の全曲率は,

$$\iint_S K dA = 2\pi \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1 + \left\{ \frac{1}{\dot{f}(t)} \right\}^2}} = 2\pi \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1 + \left\{ \frac{-1}{(t+1)^2} \right\}^2}} = 2\pi \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\pi$$

となる.



[例 3]

$xz$  平面上の曲線

$$\gamma(t) = \left( \arctan t - \frac{\pi}{2}, t \right) \quad (0 \leq t < \infty)$$

に対し,  $\dot{\gamma}(t) = \left( \frac{1}{1+t^2}, 1 \right)$ . 閉区間  $[0, s]$  に対応する弧長  $s = s(t)$  により, この曲線の弧長パラメータ表示が

$$\gamma(s) = (f(s), t(s))$$

であるとする. この曲線を  $z$  軸の周りに 1 回転してできる曲面  $S$  は,

$$\mathbb{P}(s, v) = (f(s) \cos v, f(s) \sin v, t(s))$$

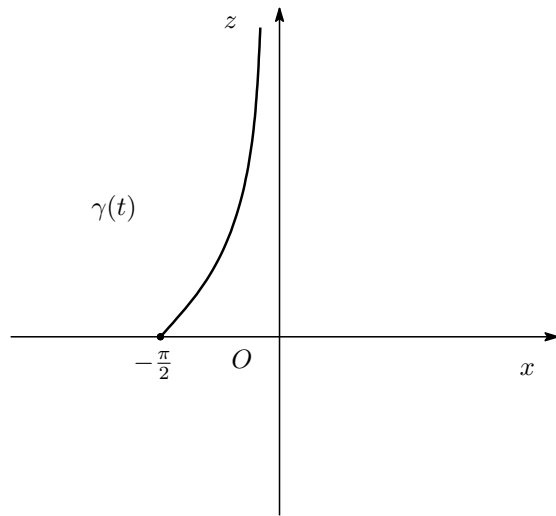
で与えられる. この回転面を  $S$  とすると,

$$\dot{f}(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

と定理 3.3. より,  $S$  の全曲率は,

$$\iint_S K dA = 2\pi \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1 + \left\{ \frac{1}{\dot{f}(t)} \right\}^2}} = 2\pi \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1 + (1+t^2)^2}} = 2\pi \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\pi$$

となる.



## 4 複素数を用いた全曲率の計算についてのさらなる考察

竹内は、複素数を用いた閉曲線の全曲率について以下の定理 4.1. を得た. (竹内洋介,(2018), 『複素数を用いた平面曲線の全曲率の考察』, 三重大学大学院教育学研究科修士論文 []]. 証明については『複素数を用いた平面曲線の全曲率の考察』 [] を見られよ.)

竹内の論文では、複素数を用いた平面曲線  $\gamma(\theta) = az^2 + bz(0 \leq \theta \leq 2\pi \quad a, b \in \mathbb{C})$  の全曲率について、多項式の係数を用いて表すことが示されているが、一般的な閉曲線においては、多項式の係数を用いて全曲率は表されていない。そこで、この章では閉曲線  $\gamma(\theta) = \frac{1}{3}z^3 + az^2 + bz + c$  の全曲率について、多項式の係数を用いて全曲率を求めることについて考察していく。

まず、竹内が示した 2 つの公式を以下に示す。まずは、閉曲線  $\gamma(\theta) = az^2 + bz(0 \leq \theta \leq 2\pi \quad a, b \in \mathbb{C})$  の全曲率を多項式の係数で表したことをまとめた定理が以下の定理である。

**定理 4.1.** 閉曲線  $\gamma(\theta) = az^2 + bz(0 \leq \theta \leq 2\pi \quad a, b \in \mathbb{C})$  の全曲率  $\mu$  は

$$\mu = 3\pi + \frac{1}{2i} \oint \left( \frac{1}{z + \frac{b}{2a}} - \frac{1}{z + \frac{2\bar{a}}{b}} \right) dz$$

となり、 $a, b$  の大きさによって以下に決まる。

$$\mu = \begin{cases} 2\pi & (2|a| < |b|) \\ 3\pi & (2|a| = |b|) \\ 4\pi & (2|a| > |b|) \end{cases}$$

次に、一般的な閉曲線についての全曲率  $\mu$  を求める定理について紹介する。

**定理 4.2.** 0 以上の整数  $m, n$  に対し、

$$\gamma(\theta) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n + a_{n+1} z^{-1} + \cdots + a_{n+m-1} z^{1-m} + a_{n+m} z^{-m} \\ (a_0 \text{ は } 0 \text{ でない複素数であるとする。})$$

で表示される閉曲線の全曲率  $\mu$  は、

$$\mu = (n - m)\pi + \frac{i}{2} \oint \left( \sum_{t=1}^{n+m} \frac{1}{z - \frac{1}{\bar{c}_t} - \sum_{t=1}^{n+m} \frac{1}{z - c_t}} \right) dz \\ (c_1, c_2, \dots, c_{m+n} \text{ は } \dot{\gamma}(\theta) = 0 \text{ の解})$$

で表される。このとき、 $|c_t| < 1$  となる  $c_t$  の数を  $A$ ,  $|c_t| > 1$  となる  $c_t$  の数を  $B$ ,  $|c_t| = 1$  となる  $c_t$  の数を  $C$  とすると、 $\mu$  は以下のように定まる。

$$\mu = (n - m + A - B)\pi.$$



これらの2つの定理を竹内は示している. これらを用いて, 閉曲線  $\gamma(\theta) = \frac{1}{3}z^3 + az^2 + bz + c$  の全曲率について, 多項式の係数を用いて全曲率を求めることを示したものが, 以下の2つの定理である.

まずは, 閉曲線  $\gamma(\theta) = \frac{1}{3}z^3 + az^2 + bz + c$  において, 多項式の係数が実数係数で,  $\dot{\gamma}(\theta) = 0$  の解が実数解であるときの全曲率について求めたものを以下に示す.

**定理 4.3.**  $\gamma(\theta) = \frac{1}{3}z^3 + az^2 + bz + c$  ( $a, b, c \in \mathbb{R}$ ) で,  $\dot{\gamma}(\theta) = 0$  の解を  $c_1, c_2$  ( $c_1 \leq c_2$ ,  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ) とすると, この閉曲線の全曲率  $\mu$  は  $ab$  平面上で以下に決まる.

$$\mu = \begin{cases} \pi & (b < -2a - 1, b < 2a - 1) \\ 2\pi & (b = -2a - 1(a < -1, a > 0)), (b = 2a - 1(a < 0, a > 1)) \\ 3\pi & (-1, 1), (1, 1), (0, -1), (b > 2a - 1, b < -2a - 1 (a < 0)), (b > -2a - 1, b < 2a - 1 (a > 0)) \\ 4\pi & (b = -2a - 1(-1 < a < 0)), (b = 2a - 1(0 < a < 1)), (b = a^2(-1 < a < 1)) \\ 5\pi & (a^2 > b, b > 2a - 1, b > -2a - 1) \end{cases}$$

証明.

$$\dot{\gamma}(\theta) = z^2 + 2az + b$$

より,  $\dot{\gamma}(\theta) = 0$  となる  $c_1, c_2$  は解の公式を用いて

$$\begin{aligned} z &= \frac{-2a \pm \sqrt{4a^2 - 4b}}{2} \\ &= -a \pm \sqrt{a^2 - b} \end{aligned}$$

と表せる. ここで,  $c_1 = -a - \sqrt{a^2 - b}, c_2 = -a + \sqrt{a^2 - b}$  とする. ( $a^2 > b$ )

定理 4.2 より, この閉曲線の全曲率  $\mu$  は,  $\mu = (3 - 0 + A - B)\pi$  と表せるので,  $|c_1|, |c_2|$  の値を分けて考え,  $\mu$  を求める.

(I)  $|c_1| < 1$  のとき

$-1 < a + \sqrt{a^2 - b} < 1$  より,  $-1 < a + \sqrt{a^2 - b}$  かつ,  $a + \sqrt{a^2 - b} < 1$  に分けて考える.

(i)  $-1 < a + \sqrt{a^2 - b}$  について,

$$-1 < a + \sqrt{a^2 - b} \Leftrightarrow -1 - a < \sqrt{a^2 - b}.$$

(1)  $-1 - a \leq 0$  即ち,  $-1 \leq a$  のとき, 右辺は正であるため, 常に成立する.

(2)  $-1 - a > 0$  即ち,  $-1 > a$  のとき, 両辺を2乗して,

$$\begin{aligned} -1 - a < \sqrt{a^2 - b} &\Leftrightarrow a^2 + 2a + 1 < a^2 - b \\ &\Leftrightarrow b < -2a - 1(-1 > a). \end{aligned}$$

(ii)  $a + \sqrt{a^2 - b} < 1$  について,

$$a + \sqrt{a^2 - b} < 1 \Leftrightarrow \sqrt{a^2 - b} < 1 - a.$$

左辺は正であるため,  $1 - a > 0$  となり,  $1 > a$  となる. ( $1 < a$  のときは, 条件を満たさない.)

このとき, (2) の両辺を 2 乗して,

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2 - b} < 1 - a &\Leftrightarrow a^2 - b < a^2 - 2a + 1 \\ &\Leftrightarrow 2a - 1 < b (1 > a).\end{aligned}$$

よって, (I)  $|c_1| < 1$  のときの条件は以下の通り.

$$\{|c_1| < 1\} = \begin{cases} b > 2a - 1, b < a^2 & (-1 \leq a < 1) \\ b < -2a - 1, b > 2a - 1 & (a < -1) \end{cases}$$

(II)  $|c_1| = 1$  のとき

$$a + \sqrt{a^2 - b} = \pm 1$$

より,  $a + \sqrt{a^2 - b} = 1$  または,  $a + \sqrt{a^2 - b} = -1$  に分けられる. 各々について考えていく.

(i)  $a + \sqrt{a^2 - b} = 1$  のとき, ( $1 - a > 0$  より,  $1 > a$ )

$$\begin{aligned}a + \sqrt{a^2 - b} &= 1 \\ \sqrt{a^2 - b} &= 1 - a.\end{aligned}$$

両辺を 2 乗して,

$$\begin{aligned}a^2 - b &= a^2 - 2a + 1 \\ b &= 2a - 1 \quad (1 > a).\end{aligned}$$

(2)  $a + \sqrt{a^2 - b} = -1$  のとき, ( $-1 - a > 0$  より,  $-1 > a$ )

$$\begin{aligned}a + \sqrt{a^2 - b} &= -1 \\ \sqrt{a^2 - b} &= -1 - a.\end{aligned}$$

両辺を 2 乗して,

$$\begin{aligned}a^2 - b &= a^2 + 2a + 1 \\ b &= -2a - 1 \quad (-1 > a).\end{aligned}$$

よって, (II)  $|c_1| = 1$  のときの条件は以下の通り.

$$\{|c_1| = 1\} = \begin{cases} b = 2a - 1 & (-1 \leq a < 1) \\ b = -2a - 1, b = 2a - 1 & (a < -1) \end{cases}$$

(III)  $|c_1| > 1$  のとき

$-1 > a + \sqrt{a^2 - b}$  または,  $a + \sqrt{a^2 - b} > 1$  に分けて考える.

(i)  $-1 > a + \sqrt{a^2 - b}$  について,

$$-1 > a + \sqrt{a^2 - b} \Leftrightarrow -1 - a > \sqrt{a^2 - b}.$$

右辺は正であるため,  $-1 - a > 0$  となり,  $-1 > a$  となる. ( $-1 \leq a$  のときは, 条件を満たさない.)  
このとき, 両辺を 2 乗して,

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2 - b} < -1 - a &\Leftrightarrow a^2 - b < a^2 + 2a + 1 \\ &\Leftrightarrow -2a - 1 < b(-1 > a). \end{aligned}$$

(ii)  $a + \sqrt{a^2 - b} > 1$  について

$$-a + \sqrt{a^2 - b} > 1 \Leftrightarrow \sqrt{a^2 - b} > 1 - a.$$

(i)  $1 - a \leq 0$  即ち,  $1 \leq a$  のとき, 左辺は正であるため, 常に成立する.

(ii)  $1 - a > 0$  即ち,  $1 > a$  のとき, 両辺を 2 乗して,

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2 - b} > 1 - a &\Leftrightarrow a^2 - b > a^2 - 2a + 1 \\ &\Leftrightarrow b < 2a - 1(1 > a). \end{aligned}$$

よって, (III)  $|c_1| > 1$  のときの条件は以下の通り.

$$\{|c_1| > 1\} = \begin{cases} b < 2a - 1 & (-1 \leq a < 1) \\ b > -2a - 1, a^2 > b, b < 2a - 1 & (a < -1) \\ a^2 > b & (1 \leq a) \end{cases}$$

(IV)  $|c_2| < 1$  のとき

$-1 < -a + \sqrt{a^2 - b} < 1$  より,  $-1 < -a + \sqrt{a^2 - b}$  かつ,  $-a + \sqrt{a^2 - b} < 1$  に分けて考える.

(i)  $-1 < -a + \sqrt{a^2 - b}$  について,

$$-1 < -a + \sqrt{a^2 - b} \Leftrightarrow -1 + a < \sqrt{a^2 - b}.$$

(1)  $-1 + a \leq 0$  即ち,  $a \leq 1$  のとき, 右辺は正であるため, 常に成立する.

(2)  $-1 + a > 0$  即ち,  $a > 1$  のとき, 両辺を 2 乗して,

$$\begin{aligned} -1 + a < \sqrt{a^2 - b} &\Leftrightarrow a^2 - 2a + 1 < a^2 - b \\ &\Leftrightarrow b < 2a - 1(a > 1). \end{aligned}$$

(ii)  $-a + \sqrt{a^2 - b} < 1$  について,

$$-a + \sqrt{a^2 - b} < 1 \Leftrightarrow \sqrt{a^2 - b} < 1 + a.$$

左辺は正であるため,  $1 + a > 0$  となり,  $a > -1$  となる. ( $-1 \leq a$  のときは, 条件を満たさない.)  
このとき, 両辺を 2 乗して,

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2 - b} < 1 + a &\Leftrightarrow a^2 - b < a^2 + 2a + 1 \\ &\Leftrightarrow -2a - 1 < b \quad (a > -1). \end{aligned}$$

よって, (IV)  $|c_2| < 1$  のときの条件は以下の通り.

$$\{|c_2| < 1\} = \begin{cases} b < 2a - 1, b > -2a - 1 & (1 \leq a) \\ b > -2a - 1, b < a^2 & (-1 < a \leq 1) \end{cases}$$

(V)  $|c_2| = 1$  のとき

$$-a + \sqrt{a^2 - b} = \pm 1$$

より,  $-a + \sqrt{a^2 - b} = 1$  または,  $-a + \sqrt{a^2 - b} = -1$  に分けられる. 各々について考えていく.

(i)  $-a + \sqrt{a^2 - b} = 1$  のとき, ( $1 + a > 0$  より,  $a > -1$ )

$$\begin{aligned} -a + \sqrt{a^2 - b} &= 1 \\ \sqrt{a^2 - b} &= 1 + a. \end{aligned}$$

両辺を 2 乗して,

$$\begin{aligned} a^2 - b &= a^2 + 2a + 1 \\ b &= -2a - 1 \quad (a > -1). \end{aligned}$$

(ii)  $-a + \sqrt{a^2 - b} = -1$  のとき, ( $-1 + a > 0$  より,  $a > 1$ )

$$\begin{aligned} -a + \sqrt{a^2 - b} &= -1 \\ \sqrt{a^2 - b} &= -1 + a. \end{aligned}$$

両辺を 2 乗して,

$$\begin{aligned} a^2 - b &= a^2 - 2a + 1 \\ b &= 2a - 1 \quad (a > 1). \end{aligned}$$

よって, (V) $|c_2| = 1$  のときの条件は以下の通り.

$$\{|c_2| = 1\} = \begin{cases} b = 2a - 1, b = -2a - 1 & (1 < a) \\ b = -2a - 1, & (-1 < a < 1) \end{cases}$$

(VI) $|c_2| > 1$  のとき

$-1 > -a + \sqrt{a^2 - b}$  または,  $-a + \sqrt{a^2 - b} > 1$  に分けて考える.

(i)  $-1 > -a + \sqrt{a^2 - b}$  について

$$-1 > -a + \sqrt{a^2 - b} \Leftrightarrow -1 + a > \sqrt{a^2 - b}.$$

右辺は正であるため,  $-1 + a > 0$  となり,  $a > 1$  となる. ( $a \leq 1$  のときは, 条件を満たさない.)  
このとき, 両辺を 2 乗して,

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2 - b} < -1 + a &\Leftrightarrow a^2 - b < a^2 - 2a + 1 \\ &\Leftrightarrow 2a - 1 < b (a > 1). \end{aligned}$$

(ii)  $-a + \sqrt{a^2 - b} > 1$  について,

$$-a + \sqrt{a^2 - b} > 1 \Leftrightarrow \sqrt{a^2 - b} > 1 + a.$$

(1)  $1 + a \leq 0$  即ち,  $a \leq -1$  のとき, 左辺は正であるため, 常に成立する.

(2)  $1 + a > 0$  即ち,  $a > -1$  のとき, 両辺を 2 乗して,

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2 - b} > 1 + a &\Leftrightarrow a^2 - b > a^2 + 2a + 1 \\ &\Leftrightarrow b < -2a - 1 (a > -1). \end{aligned}$$

よって, (VI) $|c_2| > 1$  のときの条件は以下の通り.

$$\{|c_2| > 1\} = \begin{cases} b > 2a - 1, b < -2a - 1 & (1 < a) \\ b < -2a - 1 & (-1 < a < 1) \\ b < a^2 & (a \leq -1) \end{cases}$$

ここで, この閉曲線の全曲率  $\mu$  は定理 4.2. より, 以下に分類される.

$$\mu = \begin{cases} \pi & (|c_1| > 1, |c_2| > 1) \\ 2\pi & (|c_1| = 1, |c_2| > 1), (|c_1| > 1, |c_2| = 1) \\ 3\pi & (|c_1| = 1, |c_2| = 1), (|c_1| < 1, |c_2| > 1), (|c_1| > 1, |c_2| < 1) \\ 4\pi & (|c_1| = 1, |c_2| < 1), (|c_1| < 1, |c_2| = 1) \\ 5\pi & (|c_1| < 1, |c_2| < 1) \end{cases}$$

次に,  $c_1 = c_2$  即ち  $b = a^2$  の場合についても考える.  $c_1 = c_2$  のとき,  $c_1 = c_2 = -a$  と表せる.

(1)  $|c_1| < 1$  のとき  $|-a| = |a| < 1$  となるため,  $-1 < a < 1$  となることがわかる. 同様に考えると,

(2) $|c_1| = 1$  のとき  $|-a| = |a| = 1$  となるため,  $a = \pm 1$  (3) $|c_1| > 1$  のとき  $|-a| = |a| > 1$  となるため,  $-1 > a, 1 < a$  となる. よって  $c_1 = c_2$  のときの  $\mu$  は定理 4.2. より, 以下のように表せる.

$$\mu = \begin{cases} 2\pi & (b = a^2, (-1 > a, 1 < a)) \\ 3\pi & (a = \pm 1, b = 1) \\ 4\pi & (b = a^2, (-1 < a < 1)) \end{cases}$$

よって, これらから閉曲線の全曲率  $\mu$  は以下に分類される.

$$\mu = \begin{cases} \pi & (b < -2a - 1, b < 2a - 1 (a \neq \pm 1)) \\ 2\pi & (b = -2a - 1 (a < -1, 0 < a), (b = 2a - 1 (a < 0, 1 < a), b = a^2 (a < -1, 1 < a)) \\ 3\pi & (-1, 1), (1, 1), (0, -1), (b > 2a - 1, b < -2a - 1 (a < 0)), (b > -2a - 1, b < 2a - 1 (a > 0)) \\ 4\pi & (b = -2a - 1 (-1 < a < 0)), (b = 2a - 1 (0 < a < 1)), (b = a^2 (-1 < a < 1)) \\ 5\pi & (a^2 > b, b > 2a - 1, b > -2a - 1) \end{cases}$$

□

次に, 閉曲線  $\gamma(\theta) = \frac{1}{3}z^3 + az^2 + bz + c$  において, 多項式の係数が実数係数で,  $\dot{\gamma}(\theta) = 0$  の解が複素数解であるときの全曲率について求めたものを以下に示す.

**定理 4.4.**  $\gamma(\theta) = \frac{1}{3}z^3 + az^2 + bz + c$  ( $a, b, c \in \mathbb{R}$ ) で,  $\dot{\gamma}(\theta) = 0$  の解を  $c_1, c_2$  ( $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ ) とすると, この閉曲線の全曲率  $\mu$  は以下に分類される.

$$\mu = \begin{cases} \pi & (a^2 < b, 1 > b) \\ 3\pi & (a^2 < b, b = 1) \\ 5\pi & (a^2 < b, 1 < b) \end{cases}$$

証明.

$$\dot{\gamma}(\theta) = z^2 + 2az + b$$

より,  $\dot{\gamma}(\theta) = 0$  となる  $c_1, c_2$  は解の公式を用いて

$$\begin{aligned} z &= \frac{-2a \pm \sqrt{4a^2 - 4b}}{2} \\ &= -a \pm \sqrt{a^2 - b} \end{aligned}$$

と表せる. ここで,  $c_1 = -a - \sqrt{a^2 - b}$ ,  $c_2 = -a + \sqrt{a^2 - b}$  とする. ( $a^2 < b$ )

定理 4.2. より, この閉曲線の全曲率  $\mu$  は,  $\mu = (3 - 0 + A - B)\pi$  と表せるので,  $|c_1|, |c_2|$  の値を分けて考え,  $\mu$  を求める.

ここで,  $a^2 < b$  より,  $c_1 = -a - ci$ ,  $c_2 = -a + ci$  ( $c \in \mathbb{R}$ ) とおくと,  $\sqrt{a^2 - b} = ci$  と表せるので,

$$\begin{aligned} a^2 - b &= -c^2 \\ b &= a^2 + c^2 \end{aligned}$$

となる。また、

$$\begin{aligned} |c_1| = |c_2| &= \sqrt{a^2 + c^2} \\ &= \sqrt{b} \end{aligned}$$

と表せる。これを用いて、 $|c_1|$  について考える。

(i)  $|c_1| = |c_2| < 1$  のとき、 $\sqrt{b} < 1$  で両辺正なので 2 乗して、 $b < 1$

(ii)  $|c_1| = |c_2| = 1$  のとき、 $\sqrt{b} = 1$  より、両辺 2 乗して  $b = 1$

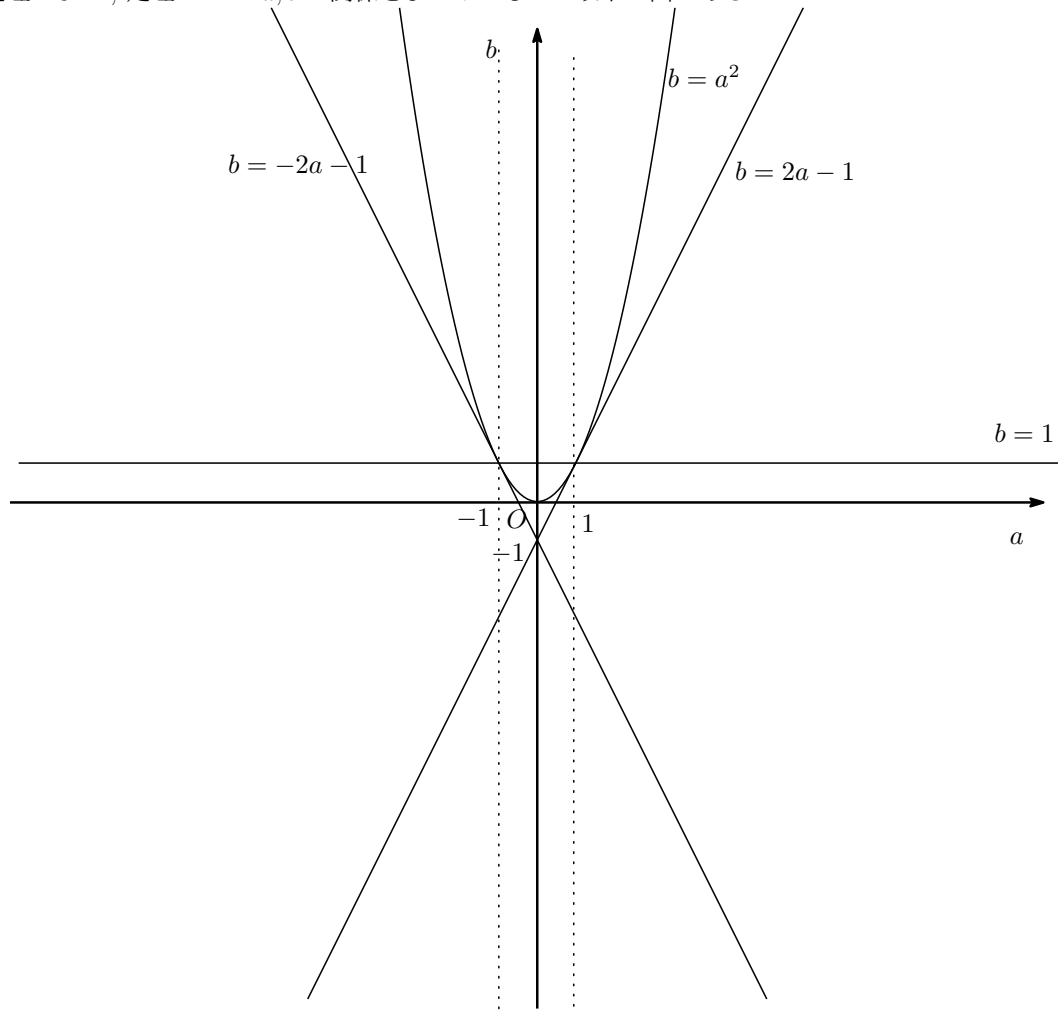
(iii)  $|c_1| = |c_2| > 1$  のとき、両辺正なので 2 乗して、 $b > 1$

よって  $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$  のとき、この閉曲線の全曲率  $\mu$  は以下に分類される。

$$\mu = \begin{cases} \pi & (a^2 < b, b > 1) \\ 3\pi & (a^2 = b, b = 1) \\ 5\pi & (a^2 < b, b < 1) \end{cases}$$

□

定理 4.3. と、定理 4.4. の  $a, b$  の関係をまとめたものが以下の図である。



## 5 複素数を用いた全曲率の計算についての幾何学的考察

前章では、閉曲線  $\gamma(\theta) = \frac{1}{3}z^3 + az^2 + bz + c$  の全曲率について、多項式の係数を用いて全曲率を求めることについて考察した。

今回は、 $\gamma(\theta) = \frac{1}{3}z^3 + az^2 + bz + c$  ( $a, b, c \in \mathbb{C}$ ) で、 $\dot{\gamma}(\theta) = 0$  の解を  $c_1, c_2$  ( $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ ) とするとき、この閉曲線の全曲率を求めようとしたが、複素数解  $c_1 = e^{i\theta_1}, c_2 = e^{i\theta_2}$  として、解と係数の関係から計算しようとしても、計算がうまくできない。

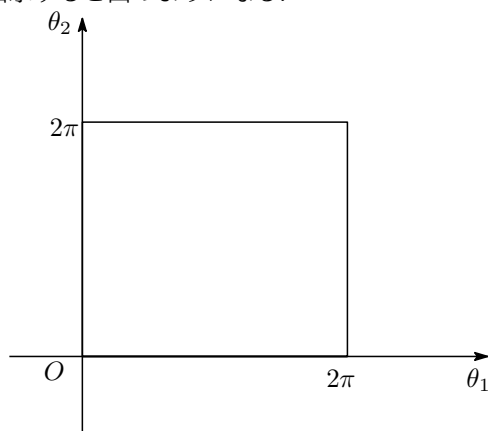
そこで、この章では  $\gamma(\theta) = \frac{1}{3}z^3 + az^2 + bz + c$  ( $a, b, c \in \mathbb{C}$ ) で、 $\dot{\gamma}(\theta) = 0$  の解を  $c_1, c_2$  ( $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ ) とし、 $|c_1| = 1, |c_2| = 1$  とした場合の空間を  $\mathbb{Z}_2$  で割った空間、すなわち解空間のホモロジーを調べていく。(今回、各  $\theta_1, \theta_2$  に対して、 $\theta_1 = \theta_2$  の場合以外入れ替えが可能であるため、 $\mathbb{Z}_2$  で割ることができる。)

閉曲線  $\gamma(\theta) = \frac{1}{3}z^3 + az^2 + bz + c$  ( $a, b, c \in \mathbb{C}$ ) で、 $\dot{\gamma}(\theta) = 0$  の解を  $c_1, c_2$  ( $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ ) としたときに、 $|c_1| = 1, |c_2| = 1$  の場合の解空間を  $\mathbb{Z}_2$  で割った空間のホモロジーを示したものが以下の定理である。

**定理 5.1.**  $|c_1| = 1, |c_2| = 1$  の場合の解空間を  $\mathbb{Z}_2$  で割った空間のホモロジーは  $H_2(K) = 0, H_1(K) \cong \mathbb{Z}, H_0(K) \cong \mathbb{Z}$  となる。

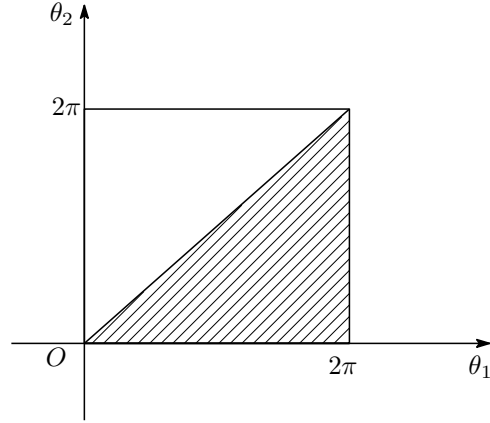
**証明.** まず、 $\gamma(\theta) = \frac{1}{3}z^3 + az^2 + bz + c$  ( $a, b, c \in \mathbb{C}$ ) で、 $\dot{\gamma}(\theta) = 0$  の解を  $c_1 = e^{i\theta_1}, c_2 = e^{i\theta_2}$  ( $0 \leq \theta_1 \leq 2\pi, 0 \leq \theta_2 \leq 2\pi$ ) とする。

この空間を、 $\theta_1, \theta_2$  の空間にて図示すると図のようになる。

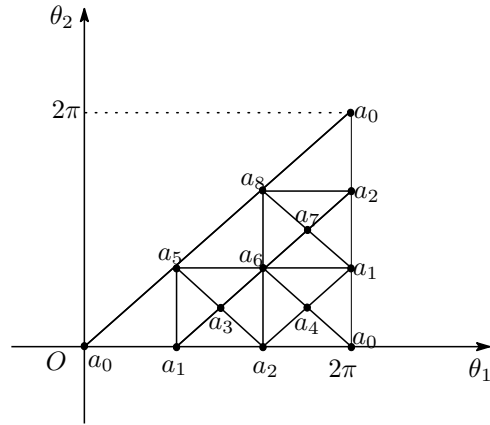


この図を、 $\mathbb{Z}_2$  で割ると、以下の図のようになる。





ここで、この図を単体分割し、以下の図のようにする。



ここで、 $\sigma_0^2 = a_0a_1a_5, \sigma_1^2 = a_1a_2a_3, \sigma_2^2 = a_2a_0a_4, \sigma_3^2 = a_1a_3a_5, \sigma_4^2 = a_2a_6a_3, \sigma_5^2 = a_2a_4a_6, \sigma_6^2 = a_0a_1a_4, \sigma_7^2 = a_3a_6a_5, \sigma_8^2 = a_4a_1a_6, \sigma_9^2 = a_5a_6a_8, \sigma_{10}^2 = a_6a_1a_7, \sigma_{11}^2 = a_6a_7a_8, \sigma_{12}^2 = a_1a_2a_7, \sigma_{13}^2 = a_7a_2a_8, \sigma_{14}^2 = a_8a_2a_0, \sigma_0^1 = a_0a_1, \sigma_1^1 = a_1a_2, \sigma_2^1 = a_2a_0, \sigma_3^1 = a_1a_3, \sigma_4^1 = a_2a_5, \sigma_5^1 = a_2a_4, \sigma_6^1 = a_0a_4, \sigma_7^1 = a_5a_0, \sigma_8^1 = a_1a_5, \sigma_9^1 = a_2a_6, \sigma_{10}^1 = a_3a_5, \sigma_{11}^1 = a_6a_3, \sigma_{12}^1 = a_4a_6, \sigma_{13}^1 = a_1a_4, \sigma_{14}^1 = a_5a_6, \sigma_{15}^1 = a_6a_1, \sigma_{16}^1 = a_8a_5, \sigma_{17}^1 = a_6a_8, \sigma_{18}^1 = a_7a_6, \sigma_{19}^1 = a_1a_7, \sigma_{20}^1 = a_8a_7, \sigma_{21}^1 = a_7a_2, \sigma_{22}^1 = a_8a_2, \sigma_{23}^1 = a_0a_8$  とすると、

$$C_2(K) = \left\{ \sum_{i=0}^{14} \ell_i \sigma_i^2, \ell_i \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$C_1(K) = \left\{ \sum_{i=0}^{23} m_i \sigma_i^1, m_i \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$C_0(K) = \left\{ \sum_{i=0}^8 n_i a_i, n_i \in \mathbb{Z} \right\}$$

と表せ、 $K$  から構成される鎖複体は、

$$0 \xrightarrow{\partial} C_2(K) \xrightarrow{\partial} C_1(K) \xrightarrow{\partial} C_0(K) \xrightarrow{\partial} 0$$

となる。まずは、 $H_2(K)$  について計算していく。 $B_2(K) = 0$  より、

$$H_2(K) = Z_2(K)/B_2(K) = Z_2(K)$$

となる. ここで,

$$z \in Z_2(k) = \sum_{i=0}^{14} g_i \sigma_i^2$$

とすると,

$$\begin{aligned} \partial(z) &= g_0(\sigma_0^1 + \sigma_8^1 + \sigma_7^1) + g_1(\sigma_1^1 + \sigma_4^1 - \sigma_3^1) + g_2(\sigma_2^1 + \sigma_6^1 - \sigma_5^1) + g_3(\sigma_3^1 + \sigma_{10}^1 - \sigma_8^1) \\ &\quad + g_4(\sigma_9^1 + \sigma_{11}^1 - \sigma_4^1) + g_5(\sigma_5^1 + \sigma_{12}^1 - \sigma_9^1) + g_6(\sigma_0^1 + \sigma_{13}^1 - \sigma_6^1) + g_7(-\sigma_{11}^1 - \sigma_{14}^1 - \sigma_{10}^1) \\ &\quad + g_8(-\sigma_{13}^1 - \sigma_{15}^1 - \sigma_{12}^1) + g_9(\sigma_{14}^1 + \sigma_{17}^1 + \sigma_{16}^1) + g_{10}(\sigma_{15}^1 + \sigma_{19}^1 + \sigma_{18}^1) + g_{11}(-\sigma_{18}^1 - \sigma_{20}^1 - \sigma_{17}^1) \\ &\quad + g_{12}(\sigma_1^1 - \sigma_{20}^1 - \sigma_{19}^1) + g_{13}(\sigma_{20}^1 - \sigma_{21}^1 + \sigma_{20}^1) + g_{14}(\sigma_{21}^1 + \sigma_2^1 + \sigma_{23}^1) \\ &= (g_0 + g_6)\sigma_0^1 + (g_1 + g_{12})\sigma_1^1 + (g_2 + g_{14})\sigma_2^1 + (g_3 - g_1)\sigma_3^1 + (g_1 - g_4)\sigma_4^1 + (g_5 - g_2)\sigma_5^1 \\ &\quad + (g_2 - g_6)\sigma_6^1 + g_0\sigma_7^1 + (g_0 - g_3)\sigma_8^1 + (g_4 - g_5)\sigma_9^1 + (g_3 - g_7)\sigma_{10}^1 + (g_4 - g_7)\sigma_{11}^1 + (g_5 - g_8)\sigma_{12}^1 \\ &\quad + (g_6 - g_8)\sigma_{13}^1 + (g_9 - g_7)\sigma_{14}^1 + (g_{10} - g_8)\sigma_{15}^1 + g_9\sigma_{16}^1 + (g_9 - g_{11})\sigma_{17}^1 + (g_{10} - g_{11})\sigma_{18}^1 \\ &\quad + (g_6 - g_{12})\sigma_{19}^1 + (g_{13} - g_{11})\sigma_{20}^1 + (g_{13} - g_{12})\sigma_{21}^1 + (g_{14} - g_{13})\sigma_{22}^1 + g_{14}\sigma_{23}^1. \end{aligned}$$

ここで,  $\partial(z) = 0$  かつ, 各 1-単体は 1 次独立なので,  $\ell_0 = \ell_1 = \dots = \ell_{14} = 0$  となることがわかる. したがって,  $Z_2(K) = 0$ . よって,  $H_2(K) = 0$ .

次に,  $H_1(K)$  を計算していく. まず,  $B_1(K)$  の生成元の個数について考える.

$$\begin{aligned} B_1(K) = \text{Im}(\partial_2) &= (\ell_0 + \ell_6)\sigma_0^1 + (\ell_1 + \ell_{12})\sigma_1^1 + (\ell_2 + \ell_{14})\sigma_2^1 + (\ell_3 - \ell_1)\sigma_3^1 + (\ell_1 - \ell_4)\sigma_4^1 + (\ell_5 - \ell_2)\sigma_5^1 \\ &\quad + (\ell_2 - \ell_6)\sigma_6^1 + \ell_0\sigma_7^1 + (\ell_0 - \ell_3)\sigma_8^1 + (\ell_4 - \ell_5)\sigma_9^1 + (\ell_3 - \ell_7)\sigma_{10}^1 + (\ell_4 - \ell_7)\sigma_{11}^1 \\ &\quad + (\ell_5 - \ell_8)\sigma_{12}^1 + (\ell_6 - \ell_8)\sigma_{13}^1 + (\ell_9 - \ell_7)\sigma_{14}^1 + (\ell_{10} - \ell_8)\sigma_{15}^1 + \ell_9\sigma_{16}^1 + (\ell_9 - \ell_{11})\sigma_{17}^1 \\ &\quad + (\ell_{10} - \ell_{11})\sigma_{18}^1 + (\ell_6 - \ell_{12})\sigma_{19}^1 + (\ell_{13} - \ell_{11})\sigma_{20}^1 + (\ell_{13} - \ell_{12})\sigma_{21}^1 + (\ell_{14} - \ell_{13})\sigma_{22}^1 \\ &\quad + \ell_{14}\sigma_{23}^1. \end{aligned}$$

よって,  $B_1(K)$  の拡大係数行列  $A$  は,



よって,  $\text{rank} A = 15$  となる. さらに, この計算では, 和と差と整数での積の計算のみで, 整数での除法は使っていないので, 生成元の個数は次元に等しくなる. よって,  $B_1(K)$  の生成元の個数は 15 である.

次に,  $Z_1(K)$  の生成元の個数について考えていく.

$$z' \in Z_1(k) = \sum_{i=0}^{23} h_i \sigma_i^1$$

とすると,

$$\begin{aligned} \partial(z') = & (-h_0 + h_2 - h_6 + h_7 - h_{23})a_0 + (h_0 - h_1 - h_3 - h_8 - h_{13} + h_{15} - h_{19})a_1 \\ & + (h_1 - h_2 - h_4 - h_5 - h_9 + h_{21} + h_{22})a_2 + (h_3 + h_4 - h_{10} + h_{11})a_3 + (h_5 + h_6 - h_{12} + h_{13})a_4 \\ & + (-h_7 + h_8 + h_{10} - h_{14} + h_{16})a_5 + (h_9 - h_{11} + h_{12} + h_{14} - h_{15} - h_{17} + h_{18})a_6 \\ & + (-h_{18} + h_{19} + h_{20} - h_{21})a_7 + (-h_{16} + h_{17} - h_{20} - h_{22} + h_{23})a_8 \end{aligned}$$

ここで,  $a_0, a_1, \dots, a_8$  は, 一次独立なので, 各係数は 0 となる. よって

$$\begin{cases} -h_0 + h_2 - h_6 + h_7 - h_{23} = 0, \\ -h_0 + h_1 + h_3 + h_8 + h_{13} - h_{15} + h_{19} = 0, \\ -h_1 + h_2 + h_4 + h_5 + h_9 - h_{21} - h_{22} = 0, \\ h_3 + h_4 - h_{10} + h_{11} = 0, \\ h_5 + h_6 - h_{12} + h_{13} = 0, \\ -h_7 + h_8 + h_{10} - h_{14} + h_{16} = 0, \\ h_9 - h_{11} + h_{12} + h_{14} - h_{15} - h_{17} + h_{18} = 0, \\ -h_{18} + h_{19} + h_{20} - h_{21} = 0, \\ -h_{16} + h_{17} - h_{20} - h_{22} + h_{23} = 0, \end{cases}$$

が成り立つ. よって拡大係数行列を  $B$  とすると,

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

となる. この行列  $B$  を階段行列に計算すると,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

よって,  $\text{rank} B = 8$  となる. さらに, この計算では, 和と差と整数での積の計算のみで, 整数での除法は使っていないので, 生成元の個数は次元に等しくなる. よって,  $Z_1(K)$  の次元は, 16 であるので,  $Z_1(K)$  の生成元の個数も 16 となる.

今,  $z'$  の係数の中で, 一次独立であるのは,  $h_2, h_4, h_6, h_8, h_{10}, h_{11}, h_{12}, h_{13}, h_{14}, h_{15}, h_{17}, h_{19}, h_{20}, h_{21}, h_{22}, h_{23}$  で,  $B_1(K)$  の係数と比較すると,

$$\left\{ \begin{array}{l} \ell_2 + \ell_{14} = h_2, \\ \ell_1 - \ell_4 = h_4, \\ \ell_2 - \ell_6 = h_6, \\ \ell_0 - \ell_3 = h_8, \\ \ell_3 - \ell_7 = h_{10}, \\ \ell_4 - \ell_7 = h_{11}, \\ \ell_5 - \ell_8 = h_{12}, \\ \ell_6 - \ell_8 = h_{13}, \\ \ell_9 - \ell_7 = h_{14}, \\ \ell_{10} - \ell_8 = h_{15}, \\ \ell_9 - \ell_{11} = h_{17}, \\ \ell_6 - \ell_{12} = h_{19}, \\ \ell_{13} - \ell_{11} = h_{20}, \\ \ell_{13} - \ell_{12} = h_{21}, \\ \ell_{14} - \ell_{13} = h_{22}, \\ \ell_{14} = h_{23}, \end{array} \right.$$

と表せる. この式の係数を見ると,  $\pm 1$  しかないことに注意する. これを, 各  $\ell$  について解くと,

$$\left\{ \begin{array}{l} \ell_0 = h_8 + h_{10} - h_{14} + h_{17} + h_{23} - h_{20} - h_{22}, \\ \ell_1 = h_4 + h_{11} - h_{14} + h_{17} + h_{23} - h_{20} - h_{22}, \\ \ell_2 = h_2 - h_{23}, \\ \ell_3 = h_{10} - h_{14} + h_{17} + h_{23} - h_{20} - h_{22}, \\ \ell_4 = h_{11} - h_{14} + h_{17} + h_{23} - h_{20} - h_{22}, \\ \ell_5 = h_{12} + h_{19} - h_{13} + h_{23} - h_{20} - h_{21}, \\ \ell_6 = h_2 - h_6 - h_{23}, \\ \ell_7 = -h_{14} + h_{17} + h_{23} - h_{20} - h_{22}, \\ \ell_8 = h_{19} - h_{13} + h_{23} - h_{20} - h_{21}, \\ \ell_9 = h_{17} + h_{23} - h_{20} - h_{22}, \\ \ell_{10} = h_{15} + h_{19} + h_{23} - h_{13} - h_{20} - h_{21}, \\ \ell_{11} = h_{23} - h_{20} - h_{22}, \\ \ell_{12} = h_{23} - h_{20} - h_{21}, \\ \ell_{13} = h_{23} - h_{22}, \\ \ell_{14} = h_{23}, \\ 0 = h_{19} + 2h_{23} - h_{20} - h_{21} - h_2 + h_6, \end{array} \right.$$

と表せる. この式の係数を見ると, 最後の式のみ $\pm 1$ 以外の数である $2$ が出ていることに注意する. ここで,  $\ell_{15} = h_{19} + 2h_{23} - h_{20} - h_{21} - h_2 + h_6$  とすると,  $\ell_{15} = 0$  となる  $z'$  は,  $B_1(K)$  に入る. また,  $\ell_{15} \neq 0$  となる  $z'$  は,  $B_1(K)$  に入らない. この  $\ell_{15}$  の個数は, 整数の分だけでてくるため,  $H_1(K) \cong Z$  となる.

次に,  $H_0(K)$  を求める.  $Z_0(K) = C_0(K)$  で, 各  $1$ -単体を  $\partial$  して,  $a_i - a_j$  ( $i, j = 0, 1, \dots, 8$ ) に注意すると,  $a_0, a_1, \dots, a_8$  はすべて, ホモログとなり,

$$[a_0] = [a_1] = [a_2] = [a_3] = [a_4] = [a_5] = [a_6] = [a_7] = [a_8]$$

となるので,

$$\begin{aligned} H_0(K) \ni \left[ \sum_{i=0}^8 n_i a_i \right] &= n_0[a_0] + n_1[a_1] + n_2[a_2] + n_3[a_3] + n_4[a_4] + n_5[a_5] + n_6[a_6] + n_7[a_7] + n_8[a_8] \\ &= (n_0 + n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + n_6 + n_7 + n_8)[a_0] \end{aligned}$$

となる. ここで,  $n_0 + n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + n_6 + n_7 + n_8 = 0$  のとき, このサイクルは  $0$  であるが,  $c' \in C_1(K)$  とするとき,

$$\begin{aligned} \partial(c') &= m_0(a_1 - a_0) + m_1(a_2 - a_1) + m_2(a_0 - a_2) + m_3(a_3 - a_1) + m_4(a_3 - a_2) + m_5(a_4 - a_2) \\ &\quad + m_6(a_4 - a_0) + m_7(a_0 - a_5) + m_8(a_5 - a_1) + m_9(a_6 - a_2) + m_{10}(a_5 - a_3) + m_{11}(a_3 - a_6) \\ &\quad + m_{12}(a_6 - a_4) + m_{13}(a_4 - a_1) + m_{14}(a_6 - a_5) + m_{15}(a_1 - a_6) + m_{16}(a_5 - a_8) + m_{17}(a_8 - a_6) \\ &\quad + m_{18}(a_6 - a_7) + m_{19}(a_7 - a_1) + m_{20}(a_7 - a_8) + m_{21}(a_2 - a_7) + m_{22}(a_2 - a_2) + m_{23}(a_0 - a_8) \\ &= (-m_0 + m_2 - m_6 + m_7 - m_{23})a_0 + (m_0 - m_1 - m_3 - m_8 - m_{13} + m_{15} - m_{19})a_1 \\ &\quad + (m_1 - m_2 - m_4 - m_5 - m_9 + m_{21} + m_{22})a_2 + (m_3 + m_4 - m_{10} + m_{11})a_3 \\ &\quad + (m_5 + m_6 - m_{12} + m_{13})a_4 + (-m_7 + m_8 + m_{10} - m_{14} + m_{16})a_5 \\ &\quad + (m_9 - m_{11} + m_{12} + m_{14} - m_{15} - m_{17} + m_{18})a_6 + (-m_{18} + m_{19} + m_{20} - m_{21})a_7 \\ &\quad + (-m_{16} + m_{17} - m_{20} - m_{22} + m_{23})a_8 \end{aligned}$$

で、各係数の和は0である。

逆に、 $k_0 + k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5 + k_6 + k_7 + k_8 = 0$  である 0- チェインを、 $\sum_{i=0}^8 k_i a_i$  とする。1- チェイン  $c$  を、 $c = k_1 \sigma_0^1 + k_2 (\sigma_0^1 + \sigma_1^1) + k_3 (\sigma_0^1 + \sigma_3^1) + k_4 \sigma_6^1 - k_5 \sigma_7^1 + k_6 (\sigma_6^1 + \sigma_{12}^1) + k_7 (\sigma_{23}^1 + \sigma_{20}^1) + k_8 \sigma_{23}^1$  とすると、

$$\partial(c) = \sum_{i=0}^8 k_i a_i$$

となるので、 $\sum_{i=0}^8 k_i a_i \in B_0(K)$  で、

$$B_0(K) = \left\{ \sum_{i=0}^8 k_i a_i \mid \sum_{i=0}^8 k_i = 0 \right\}$$

となる。よって、 $\phi: Z_0(K) \rightarrow \mathbb{Z}$  を、

$$\phi((k_0 + k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5 + k_6 + k_7 + k_8)[a_0]) = k_0 + k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5 + k_6 + k_7 + k_8$$

と決めると、

$$\ker \phi = B_0(K)$$

となるため、準同型定理より

$$H_0(K) = Z_0(K)/B_0(K) = Z_0(K)/\ker \phi \cong \mathbb{Z}$$

となることがわかる。

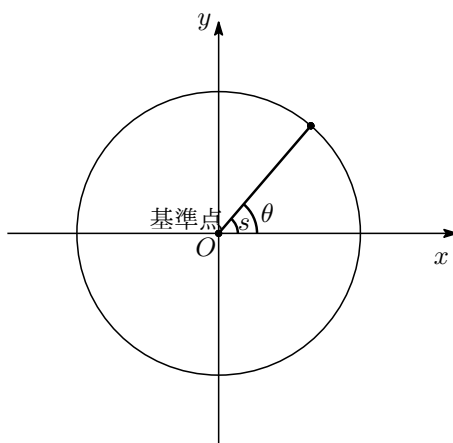
□

## 6 基準点から見た2次元曲線の回転数

この章では、基準点から見た2次元平面曲線の回転数の意義について考察していく。

2次元平面曲線における回転数とは、定義1.6にあるように、全曲率を求め、それを $2\pi$ で割って求めた。今回は基準点を決め、その点から見た曲線の回転数を求めていきたいため、平面において全曲率を用いずに回転数を計算する方法について考えた。

$xy$ 平面上の単位円 $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ において、円周の長さを $s$ 、円周上の点がずらした中心(基準点)と円周上の点とがなす角を $\theta$ とする。



このとき、上記の図より、

$$\begin{aligned}\tan \theta &= \frac{g(s)}{f(s)} \\ \theta &= \tan^{-1} \frac{g(s)}{f(s)}\end{aligned}$$

ここで、両辺を $t$ で微分すると、

$$\begin{aligned}\frac{d\theta}{ds} &= \frac{d}{ds} \tan^{-1} \frac{g(s)}{f(s)} \\ d\theta &= \frac{d}{ds} \tan^{-1} \frac{g(s)}{f(s)} \cdot dt\end{aligned}$$

ここで、両辺を積分し、 $\theta$ の定義域の幅を求め、それを $2\pi$ で割れば回転数がわかる。

今回は、基準点を $x$ 軸上の正の範囲にずらしていった場合の回転数の変化について考察していく。

**定理 6.1.**  $xy$ 平面上の単位円 $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ において、円周の長さを $s$ 、基準点と円周上の点とがなす角を $\theta$

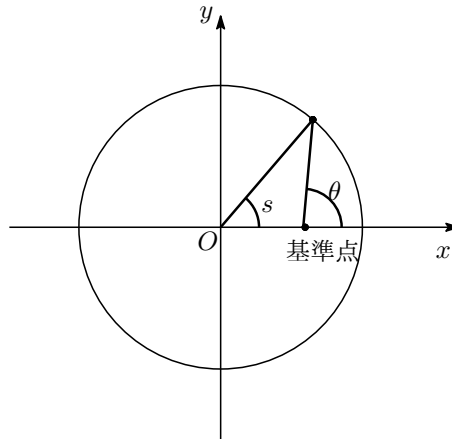


とする。

このときに、基準点を  $x$  軸上の正の範囲にずらしていった場合の回転数は以下ようになる。

- (1) 基準点が円の内部にあるとき、回転数は 1 となる。
- (2) 基準点が円周上にあるとき、回転数は  $\frac{1}{2}$  となる。
- (3) 基準点が円の外部にあるとき、回転数は 0 となる。

証明. (1) 基準点が円の内部にあるとき、円の中心と基準点の距離を  $r$  ( $0 \leq r < 1$ ) とする。



このとき、上記の図のように表せるので、

$$\tan \theta = \frac{\sin s}{|\cos s - r|}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\sin s}{|\cos s - r|}\right)$$

両辺を、 $s$  で微分すると、

$$d\theta = \left\{ \tan^{-1}\left(\frac{\sin s}{|\cos s - r|}\right) \right\}' ds$$

ここで、 $s$  の定義域を考えると、( $0 \leq s < a, a < s < a', a' < s < 2\pi$ ) (ただし、 $a, a'$  は、 $\cos s - r = 0$  となる  $s$  の値とする。) となる。また、 $\theta$  の定義域は、( $0 \leq \theta_0 \leq \theta \leq \theta_1 \leq 2\pi$ ) となる。 $(\theta_0$  は、始値、 $\theta_1$  は、終値) である。これを基に両辺それぞれ積分すると、

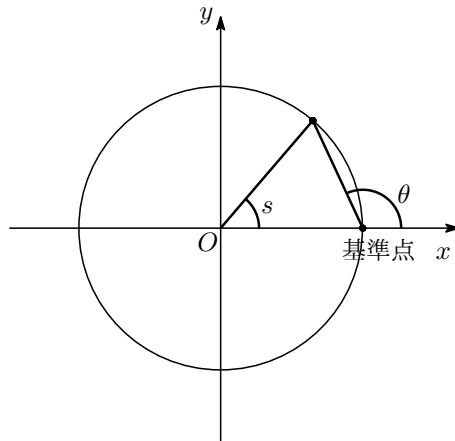
$$\int_{\theta_0}^{\theta_1} d\theta = \int_0^a \left\{ \tan^{-1}\left(\frac{\sin s}{|\cos s - r|}\right) \right\}' ds + \int_a^{a'} \left\{ \tan^{-1}\left(\frac{\sin s}{|\cos s - r|}\right) \right\}' ds + \int_{a'}^{2\pi} \left\{ \tan^{-1}\left(\frac{\sin s}{|\cos s - r|}\right) \right\}' ds$$

$$\theta_1 - \theta_0 = \left(\frac{\pi}{2} - 0\right) + \left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) + \left(2\pi - \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$\theta_1 - \theta_0 = 2\pi$$

よって、回転数は、1 となる。

(2) 基準点が円周上にあるとき、円の中心と基準点の距離は 1 である。



このとき, 上記の図のように表せるので,

$$\tan \theta = \frac{\sin s}{\cos s - 1}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\sin s}{\cos s - 1}\right)$$

両辺を,  $s$  で微分すると,

$$d\theta = \left\{ \tan^{-1}\left(\frac{\sin s}{\cos s - 1}\right) \right\}' ds$$

ここで,  $s$  の定義域を考えると,  $(0 < s < 2\pi)$  となる. また,  $\theta$  の定義域は,  $(\frac{\pi}{2} < \theta_0 \leq \theta \leq \theta_1 < 2\pi)$  となる. ( $\theta_0$  は始値,  $\theta_1$  は終値) である. これを基に両辺それぞれ広義積分すると,

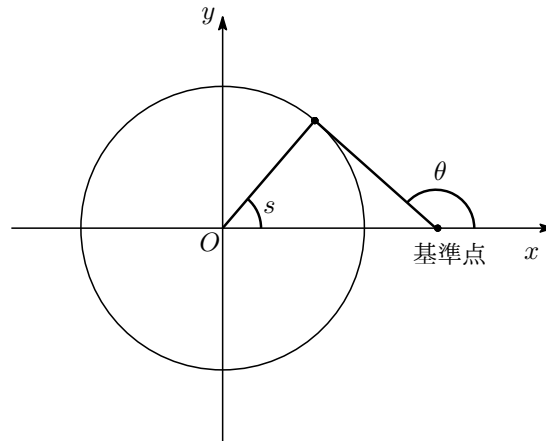
$$\int_{\theta_0}^{\theta_1} d\theta = \int_0^{2\pi} \left\{ \tan^{-1}\left(\frac{\sin s}{\cos s - 1}\right) \right\}' ds$$

$$\theta_1 - \theta_0 = \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2}$$

$$\theta_1 - \theta_0 = \pi$$

よって, 回転数は,  $\frac{1}{2}$  となる.

(3) 基準点が円の外部にあるとき, 円の中心と基準点の距離を  $r$  ( $1 < r$ ) とする.



このとき、上記の図のように表せるので、

$$\tan \theta = \frac{\sin s}{\cos s - r}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\sin s}{\cos s - r}\right)$$

両辺を、 $s$  で微分すると、

$$d\theta = \left\{ \tan^{-1}\left(\frac{\sin s}{\cos s - r}\right) \right\}' ds$$

ここで、 $s$  の定義域を考えると、 $(0 \leq s \leq 2\pi)$  となる。また、 $\theta$  の定義域は、 $(b \leq \theta_0 \leq \theta \leq \theta_1 \leq b')$  となる。 $(\theta_0$  は始値、 $\theta_1$  は終値で、 $b, b'$  は基準点から円に引いた接線の傾き) である。これを基に両辺それぞれ積分すると、

$$\int_{\theta_0}^{\theta_1} d\theta = \int_0^{2\pi} \left\{ \tan^{-1}\left(\frac{\sin s}{\cos s - r}\right) \right\}' ds$$

$$\theta_1 - \theta_0 = (b - \pi) + (\pi - b) + (b' - \pi) + (\pi - b')$$

$$\theta_1 - \theta_0 = 0$$

よって、回転数は、0 となる。

□

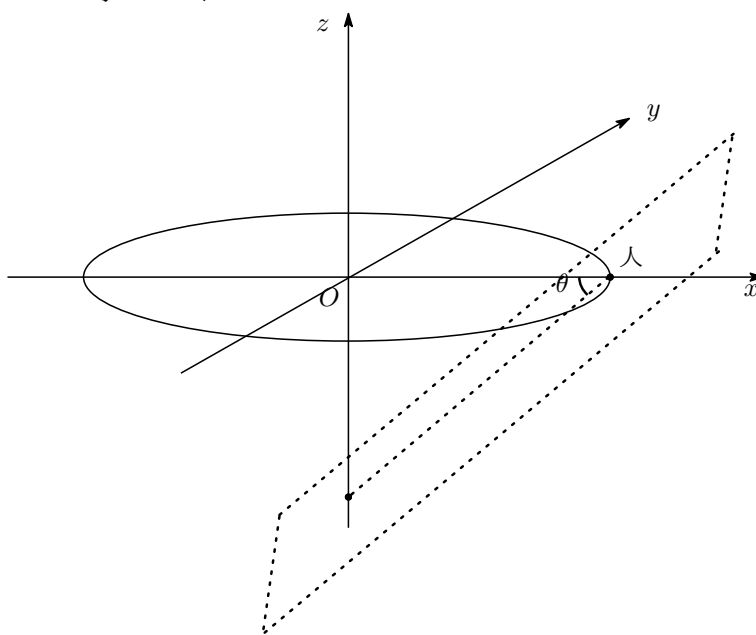
## 7 3次元空間曲線の曲率についての考察

3次元空間の曲線について、小林は「空間曲線の振率を定義するにはまず主法線  $e_2$  を定義する必要があったが、それには曲率  $\kappa$  が至るところ正という過程を必要とした。したがって曲線が与えられた場合、振率はいつも定義されるかどうかかわからない。そのため曲線の大域的性質を論じるとき振率の関係してくるようなことを考えるのは大体において不可能になり、主に曲率に関することに限られてくる。」と述べている。『曲線と曲面の微分幾何(改訂版) 2019 小林昭七』

このことを踏まえ、今回は3次元空間曲線を新たに考察していく。

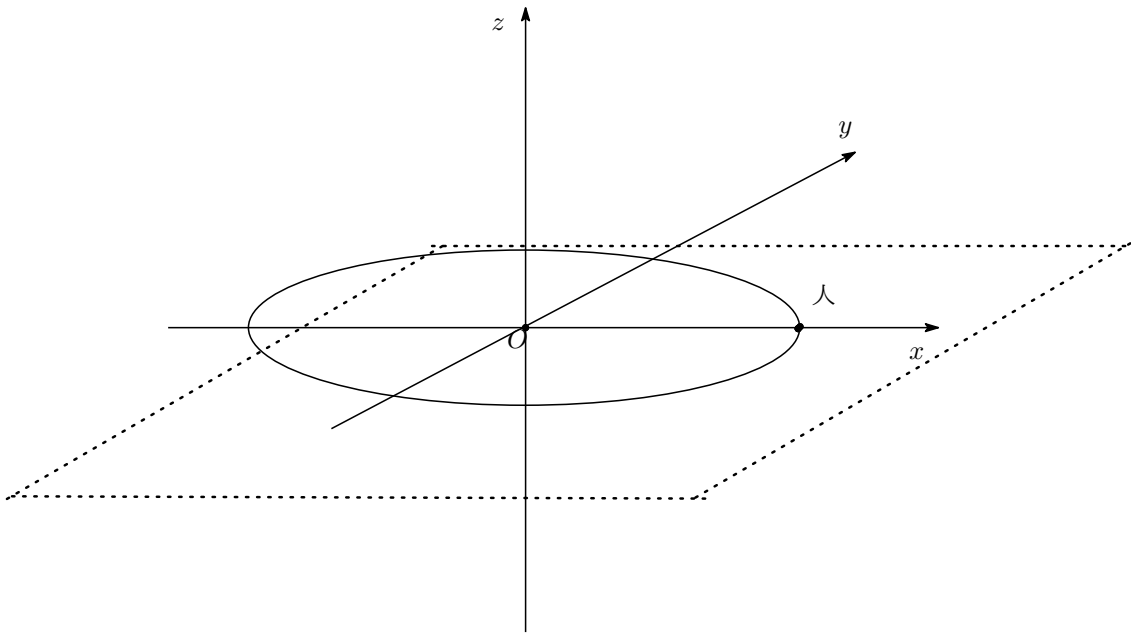
### 7.1 接地面に応じた曲率について

今回は円の場合について考えていく。

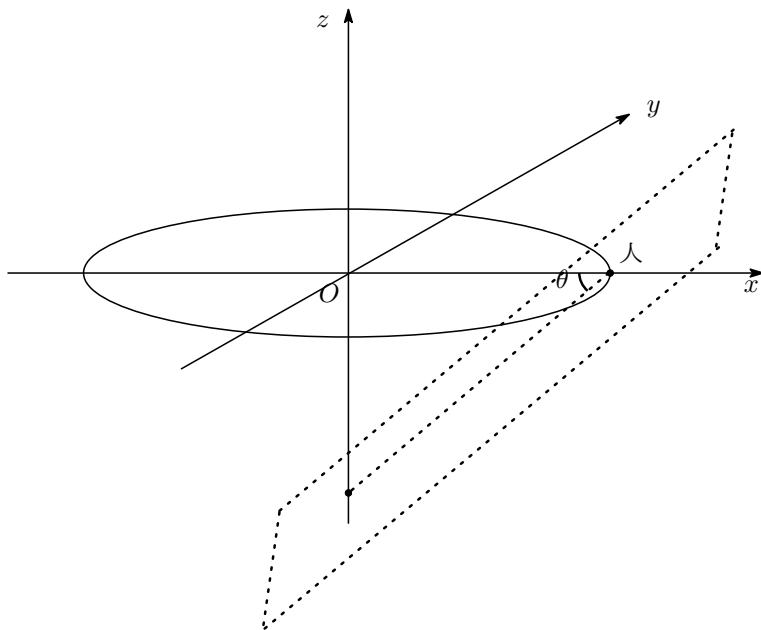


曲線上に人が立っていると考える。この人が、円周上を動くと考え。ここで、ある面の中に円が入った場合を考え、人はその面に対して垂直に立っていると考える。その面がどのような面かによって、円周上を動く人の感じ方は変わってくる。つまり、曲線は同じであるが、どの面に入るかによって人の感じる曲率はどのように変わるかについて考えていきたい。

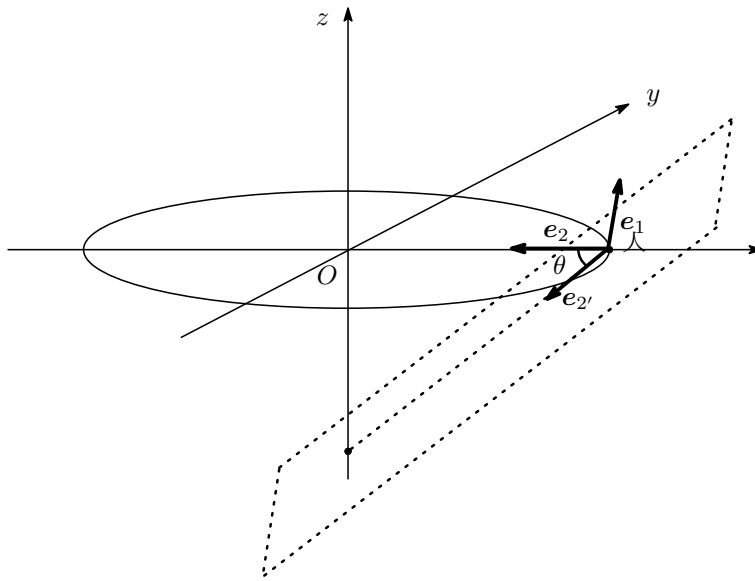
ここで、図のように、円周の接地面と  $xy$  平面のなす角を  $\theta(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$  として考えていく。



図のようなときは,  $\theta = 0$  の時で, このときの人を感じる曲率は,  $xy$  平面上の円における通常の曲率と等しくなる.



ここで, 上記の図のように平面のときの速度ベクトル, 単位法線ベクトルをそれぞれ  $e_1, e_2$  とする. ここで, 円周上の人実際に感じる単位法線ベクトルを  $e_2'$  とする. これらを図に示すと以下の図のようになる.

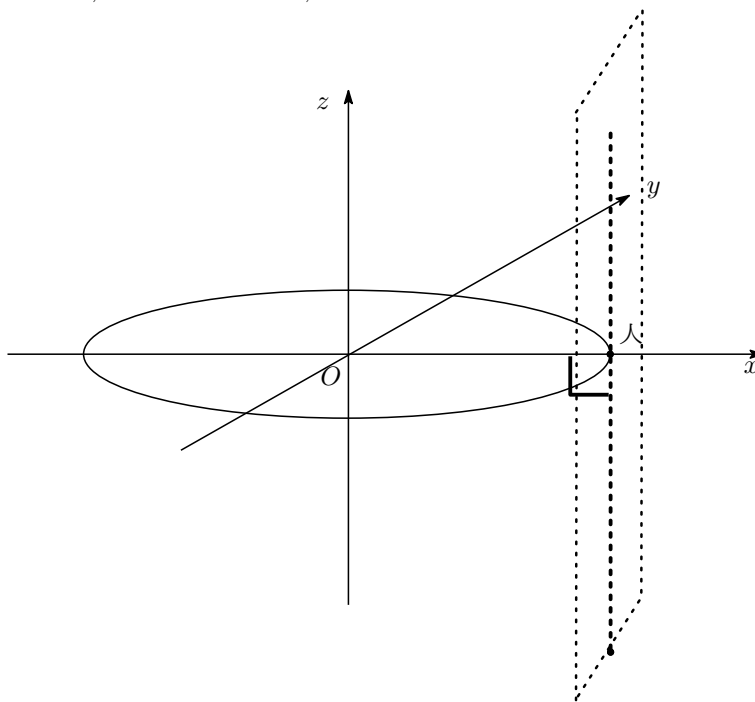


このことから、接地面に応じて円周上の人が感じる曲率を  $\kappa'$  とすると、

$$\kappa' = \kappa \cos \theta$$

と表せる。

次に、 $\theta = \frac{\pi}{2}$  のときを考える。このとき、 $\kappa' = 0$  となる。これはどういう意味かについて考える。実際に、 $\theta = \frac{\pi}{2}$  のときを図に表すと、以下の図のように、円柱のような形となる。



ここで、円周上の人が動く際に、その人自体は真っすぐ動いているように感じる。

このことから、接地面をもとに3次元空間の曲線の曲率について考察することができる。

## 7.2 3次元空間内の曲線を2次元平面に射影した際の曲線についての考察

前章では、3次元曲線についての補足を行い、3次元の曲率について理解を深めた。本章では、3次元空間内の曲線を2次元平面に射影した場合の曲率について考察していく。

そのため、まずは以下の3つの定理を用意する。まずは、一次独立なベクトルに対し、正規直交ベクトルを作ることができることを示した、シュミットの直交化法についてである。

**定理 7.1.** (シュミットの直交化法)

$n$  個の一次独立なベクトル  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$  が与えられたとき、これらを用いて  $n$  個の正規直交ベクトル  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$  を求めることができる。

次に、3次元空間上の点を  $\theta$  回転移動して、点を写すことについてまとめた定理である

**定理 7.2.** 点  $P(x, y, z)$  を  $x$  軸、 $y$  軸、 $z$  軸のまわりに  $\theta$  回転して  $Q(u, v, w)$  に移す一次変換の表現行列はそれぞれ

$$x \text{ 軸で回転した場合} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$y \text{ 軸で回転した場合} \quad \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$z \text{ 軸で回転した場合} \quad \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

最後に、平面上の曲線  $\gamma(t) = (f(t), g(t))$  の曲率を、弧長パラメーターを用いず、元のパラメーター表示のみで表せることを示した定理である。

**定理 7.3.**  $xz$  平面上の曲線

$$\gamma(t) = (f(t), g(t))$$

の曲率は

$$\kappa(t) = \frac{\dot{f}(t)\ddot{g}(t) - \ddot{f}(t)\dot{g}(t)}{(\dot{f}(t)^2 + \dot{g}(t)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

と表せる。

証明.

$$\dot{\gamma}(t) = (\dot{f}(t), \dot{g}(t))$$

より,

$$\begin{aligned} |\dot{\gamma}(t)| &= \sqrt{\dot{f}^2(t) + \dot{g}^2(t)} \\ e(t) &= \gamma'(s) = (f'(s), g'(s)) \\ n(t) &= (-g'(s), f'(s)) \end{aligned}$$

と表せられる. また,

$$\det(e(t), n(t)) = f'(s)^2 + g'(s)^2 = 1$$

より,

$$\begin{aligned} \det(\gamma', \gamma'') &= \det(e(s), \kappa(s)n(s)) \\ &= \kappa(s)\det(e(s), n(s)) \end{aligned}$$

したがって, 曲率  $\kappa(s)$  は  $\gamma(s)$  を用いて

$$\kappa(s) = \det(\gamma'(s), \gamma''(s))$$

と表すことができる. さらに弧長でないパラメーター  $t$  で表示された曲線  $\gamma(t) = (f(t), g(t))$  について,

$$\begin{aligned} \gamma'(s) &= \frac{\dot{\gamma}}{|\dot{\gamma}|} \\ \gamma'' &= \frac{d}{ds} \frac{\dot{\gamma}t}{|\dot{\gamma}(t)|} = \frac{dt}{ds} \frac{d}{dt} \frac{\dot{\gamma}}{|\dot{\gamma}|} \\ &= \frac{1}{|\dot{\gamma}(t)|} \left\{ \frac{\ddot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t)|} + \left( \frac{d}{dt} \frac{1}{|\dot{\gamma}(t)|} \right) \gamma(t) \right\} \end{aligned}$$

となるので, 曲率  $\kappa(s)$  は  $\gamma(t)$  を用いて,

$$\kappa(s) = \frac{\dot{f}(t)\ddot{g}(t) - \ddot{f}(t)\dot{g}(t)}{(\dot{f}(t)^2 + \dot{g}(t)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

と表せる.

□

これらの定理を用いて, 3次元空間内の曲線を2次元平面に射影した際の曲線について考察していく. 2次元平面に垂直な単位ベクトルを,  $\mathbf{n} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$  と書く. 3次元空間内の曲線をこの2次元平面に射影した際の曲線について以下の定理が成り立つ.



定理 7.4. 3次元空間上の曲線

$$\gamma(t) = (f(t), g(t), h(t)) \quad (t_1 \leq t \leq t_2)$$

を  $\mathbf{n} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$  に垂直な平面に射影し,  $xy$  平面に写した曲線の曲線の曲率は, 以下のようになる.

$$\kappa(t) = \frac{bd(\dot{g}(t)\ddot{f}(t) - \dot{f}(t)\ddot{g}(t)) + gb(\dot{h}(t)\ddot{f}(t) - \dot{f}(t)\ddot{h}(t)) + ae(\dot{f}(t)\ddot{g}(t) - \dot{g}(t)\ddot{f}(t)) + ge(\dot{h}(t)\ddot{g}(t) - \dot{g}(t)\ddot{h}(t))}{\{(a^2 + b^2)f'(t)^2 + (c^2 + d^2)g'(t)^2 + g^2h'(t)^2 + (2ad + bc)f'(t)g'(t) + 2agf'(t)h'(t) + 2dgg'(t)h'(t)\}^{\frac{3}{2}}}$$

と表せる.

ここで,

$$\begin{cases} a = \cos \theta \cos \phi \\ b = -\sin \phi \\ c = \sin \theta \cos \phi \\ d = \sin \phi \cos \theta \\ e = \cos \phi \\ f = \sin \theta \sin \phi \\ g = -\sin \theta \\ h = \cos \theta \end{cases}$$

である.

証明. 平面を,  $xy$  平面と平行にするように, 空間を回転する. つまり,  $\mathbf{n} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$  が,  $z$  軸と平行になるように回転する. そのためには, まず  $z$  軸回りに  $-\phi$  だけ回転し, 次に  $y$  軸回りに  $-\theta$  回転する.

このときの回転行列は,

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & 0 & \sin(-\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(-\theta) & 0 & \cos(-\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(-\phi) & -\sin(-\phi) & 0 \\ \sin(-\phi) & \cos(-\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(-\theta)\cos(-\phi) & -\sin(-\phi)\cos(-\theta) & \sin(-\theta) \\ \sin(-\phi) & \cos(-\phi) & 0 \\ -\cos(-\phi)\sin(-\theta) & \sin(-\phi)\sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi & \sin \phi \cos \theta & -\sin \theta \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ \sin \theta \cos \phi & \sin \phi \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と表せる. ここで,

$$\begin{cases} a = \cos \theta \cos \phi \\ b = -\sin \phi \\ c = \sin \theta \cos \phi \\ d = \sin \phi \cos \theta \\ e = \cos \phi \\ f = \sin \theta \sin \phi \\ g = -\sin \theta \\ h = \cos \theta \end{cases}$$

とすると,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & 0 \\ c & f & h \end{pmatrix} \gamma(t) &= \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & 0 \\ c & f & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \\ h(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} af(t) + dg(t) + gh(t) \\ bf(t) + eg(t) \\ cf(t) + fg(t) + hh(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる. ここで,

$$\begin{aligned} af(t) + dg(t) + gh(t) &= F(t) \\ bf(t) + eg(t) &= G(t) \\ cf(t) + fg(t) + hh(t) &= H(t) \end{aligned}$$

とすると, 回転した曲線を  $xy$  平面に射影した曲線は,  $H(t) = 0$  として考えればよいので,

$$R(t) = (F(t), G(t))$$

となる.

このとき

$$\begin{aligned} \dot{F}(t) &= af'(t) + dg'(t) + gh'(t) \\ \dot{G}(t) &= bf'(t) + eg'(t) \\ \ddot{F}(t) &= af''(t) + dg''(t) + gh''(t) \\ \ddot{G}(t) &= bf''(t) + eg''(t) \end{aligned}$$

と表せる. 定理 7.3. より,  $R(t)$  の全曲率は,

$$\begin{aligned} \kappa(t) &= \frac{\dot{F}(t)\ddot{G}(t) - \ddot{F}(t)\dot{G}(t)}{(\{\dot{F}(t)\}^2 + \{\dot{G}(t)\}^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{(af'(t) + dg'(t) + gh'(t))(bf''(t) + eg''(t)) - (bf'(t) + eg'(t))(af''(t) + dg''(t) + gh''(t))}{((af'(t) + dg'(t) + gh'(t))^2 + (bf'(t) + eg'(t))^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{bd(\dot{g}(t)\ddot{f}(t) - \dot{f}(t)\ddot{g}(t)) + gb(\dot{h}(t)\ddot{f}(t) - \dot{f}(t)\ddot{h}(t)) + ae(\dot{f}(t)\ddot{g}(t) - \dot{g}(t)\ddot{f}(t)) + ge(\dot{h}(t)\ddot{g}(t) - \dot{g}(t)\ddot{h}(t))}{\{(a^2 + b^2)f'(t)^2 + (c^2 + d^2)g'(t)^2 + g^2h'(t)^2 + (2ad + bc)f'(t)g'(t) + 2agf'(t)h'(t) + 2dgg'(t)h'(t)\}^{\frac{3}{2}}}} \end{aligned}$$

と表せる. □

## 参考文献

- [1] 瀬山士郎, (1988), 『トポロジー:柔らかい幾何学』, 日本評論社.
- [2] 村上正康, 佐藤恒雄, 野澤宗平, 稲葉尚志, (2016), 『教養の線形代数』, 培風館.
- [3] 小林昭七, (2015), 『曲線と曲面の微分幾何 (改訂版)』, 裳華房.
- [4] 竹内洋介, (2017), 『複素数を用いた平面曲線の全曲率の考察』, 三重大学大学院教育学研究科修士論文.
- [5] 田中健雄, (2017), 『曲線の変形における全曲率の変化』, 三重大学大学院教育学研究科修士論文.
- [6] 竹内洋介, 田中健雄, 新田貴士, (2017), 『特異点が存在する曲線と曲面の全曲率について』, 三重大学教育学部紀要第 69 巻.
- [7] 松田雄斗, (2018), 『回転面の全曲率に関する考察』, 三重大学大学院教育学研究科修士論文.

## 謝辞

本研究を行うにあたり, 三重大学教育学部数学教育コースの先生方に多くの激励を頂戴しました. また, 本論文の作成のため, 機器室の使用や, 大学院生用の研究室の管理, 準備をして頂きました事務員の鈴木さんには心よりお礼申し上げます. とりわけ, 指導教員の新田貴士先生には, 課題研究以外にも, 現行の数学教育についてなど, 教員になった際の土台作りについてなど, 細部に渡った丁寧なご指導等多くの支援を賜りました. 末筆ながら, ここに感謝申し上げます.