様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　３ 年　４ 月 １９ 日現在

機関番号：１４１０１
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2017～2020
課題番号：１７Ｋ１４１８７

研究課題名（和文）微分形式で特徴付けられる部分多様体の変形理論

研究課題名（英文）Deformation theory of submanifolds characterized by differential forms

研究代表者
森山　貴之（Moriyama, Takayuki）

三重大学・教養教育院・准教授

研究者番号：６０５３２５５４

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　2,800,000円

研究成果の概要（和文）：４次元球面におけるあるポワソン構造のなす空間を決定した。複素接触多様体における交代ベクトル場の分解定理、及びそのコホモロジーの消滅定理を示した。四元数ケーラー多様体上に「四元数ベクトル場」を導入し、ツイスター空間における正則ベクトル場と一対一に対応することを示した。更に四元数ベクトル場で実ベクトル場であるものは、ツイスター空間に誘導される実構造に対して実である正則ベクトル場に対応することも示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義
４次元四元数ケーラー多様体（自己双対アインシュタイン多様体）は数学のみならず物理学的にも非常に重要な研究対象であると捉えられており、特に４次元球面はその最も基本的かつ重要な例である。本研究の対象であるポワソン構造は量子化の問題と深くかかわっている。また、本研究で用いられたツイスター空間による手法は高次元においても重要な研究手法であり、様々な分野への応用、関係性の発見が期待できる。

研究成果の概要（英文）：The space of certain Poisson structures is decided. We provide a splitting theorem of k-vector fields and vanishing of the cohomology in complex contact manifolds. We introduce quaternionic k-vector fields in quatenionic kahler manifolds and prove that such a k-vector field corresponds to a holomorphic k-vector field on the twistor space. Moreover, a quaternionic k-vector field which is a real vector field corresponds to a holomorphic k-vector field which is real with respect to the real structure on the twistor space.

研究分野：微分幾何学

キーワード：四元数構造　ポワソン構造　複素接触多様体　ツイスター空間

１．研究開始当初の背景

申請者は，ラグランジュ部分多様体やルジャンドル部分多様体などの微分形式で特徴付けられる部分多様体に対し，変形複体と倉西写像を与え，変形が非障害であるための条件を決定した．そこでこの変形理論の変形する対象の拡張や剛性や安定性についての問題に着手しようと考えていた．ここで微分形式の双対である交代ベクトル場に着目し，ある２次交代ベクトル場で特徴付けられる幾何学的構造の一つであるポワソン構造をこの拡張するべき具体的対象として考えていた．また，佐々木・アインシュタイン多様体における特殊ルジャンドル部分多様体の従来の変形の障害は消えないが，第一次ベッチ数を次元とする非障害な特殊な変形空間を持つ事を示していた．このように従来の変形では障害があり，剛性や安定性を持たないが，非障害性，剛性，安定性を持つような変形を構成し，その変形の幾何学的意味を考察したいという研究動機もあった．

２．研究の目的

微分形式で特徴付けられる部分多様体の変形が剛性や安定性を持つための条件を導出し，剛性を持つための条件と位相的条件（特に第一ベッチ数）との関係や安定性を持つための条件において部分多様体の曲率がどのように表れるかを考察する．次に，従来の変形では障害がある場合には，非障害な変形を構成し，その変形が与えている部分多様体の幾何学的条件を調べ,そのような障害の解消がどのような部分多様体に対して出来るかを明らかにすることを当初の目標としていた．また，ポワソン構造の変形について考察を行う．その変形空間の障害，非障害性，特異点，剛性，安定性について議論を行う．実際にはポワソン幾何においてポワソン構造の存在，構成が重要な問題であり，そういった問題への応用も考える．

３．研究の方法

まず，先行研究でも扱っていた佐々木・アインシュタイン多様体を考察した．ある特殊な佐々木・アインシュタイン多様体は四元数ケーラー多様体と密接に関係しており，ツイスター空間と呼ばれる複素接触多様体を誘導することに着目した．特に４次元球面は四元数ケーラー多様体の最も重要な例である．一般にポワソン構造は変形量子化など物理学的にも重要な問題と関わっており，その構成や存在は重要な研究トピックである．そこで４次元球面におけるポワソン構造をそのツイスター空間である３次元複素射影空間の正則ポワソン構造と結びつける方法を考察した．このとき，球面の交代ベクトル場と複素射影空間の正則交代ベクトル場との対応を与える必要があった．一次交代ベクトル場は，変形理論における剛性でも重要となる微分同相群のリー環でもある．次にこれらの結果を球面に限らない場合にツイスター空間の手法を用いて拡張できるかを考察した．

４．研究成果

４次元球面において３次元複素射影空間の正則ポワソン構造から誘導されるポワソン構造のなす空間を決定した．特にポワソン構造のなす空間は非特異な代数多様体であり，定数倍を同一視した空間は射影代数多様体になることが分かった．これはある意味でモジュライ空間が得られ，それが滑らか（変形が非障害）であることを意味している．この結果は論文「Some examples of global Poisson structures on S^4」としてKodai Math. Journal 42 (2019), no. 2において掲載された．

複素接触多様体における交代ベクトル場の分解定理，及びそのコホモロジーの消滅定理を示した．より正確に述べると，交代ベクトル場の空間をある特殊な交代ベクトル場のなす空間とある線束値交代ベクトル場のなす空間とに分解した（複素ベクトル空間としての分解を与えた）．応用としてこの特殊な交代ベクトル場のなすコホモロジーの消滅定理が得られる．このコホモロジーは複素接触多様体に付随する幾何構造のコホモロジーであるため，その幾何構造の変形，及びモジュライ理論を展開する上で自己同型の空間，無限小変形空間，障害の空間として現れる．よって，そのコホモロジーの消滅定理は複素接触多様体に付随する幾何学構造の変形の非障害，剛性，安定性における結果の重要な道具となりうる．また，複素接触多様体がある四元数ケーラー多様体上のツイスター空間となるための必要条件を与えたと見なすこともできる．これらの結果は論文「Splitting theorem for sheaves of holomorphic k -vectors on complex contact manifolds」International Journal of Mathematics 29 (2018) として掲載された．

上記の論文「Some examples of global Poisson structures on S^4」において用いた手法（ツイスター空間の技法）は四元数ケーラー・アインシュタイン多様体においても適応可能であるこ

とに着目し，「４次元球面におけるあるポワソン構造」の結果の四元数ケーラー・アインシュタイン多様体（スカラー曲率が非零）への拡張を目標に研究を行った．その拡張への過程としてツイスター空間の正則ベクトル場を考察することにより四元数ケーラー・アインシュタイン多様体上に「四元数ベクトル場」を導入し，その性質についてのいくつかの結果を得た．特にツイスター空間における正則ベクトル場と一対一に対応することを示した．更に四元数ベクトル場で実ベクトル場であるものは，ツイスター空間に誘導される実構造に対して実である正則ベクトル場に対応することも示した．これは論文「Quaternionic k-vector fields on quaternionic Kahler manifolds」arXiv:2103.12405 として arXiv において発表した．現在，投稿中である．

なお，これらの研究は新田貴士（三重大学）氏との共同研究によって得られたものである．

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計2件（うち査読付論文　2件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　0件）

１．著者名 Moriyama, Takayuki; Nitta, Takashi	４．巻 42
２．論文標題 Some examples of global Poisson structures on S4	５．発行年 2019年
３．雑誌名 Kodai Math. J	６．最初と最後の頁 223-246
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 Takayuki Moriyama and Takashi Nitta	４．巻 29
２．論文標題 Splitting theorem for sheaves of holomorphic k -vectors on complex contact manifolds	５．発行年 2018年
３．雑誌名 International Journal of Mathematics	６．最初と最後の頁 1-21
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

〔学会発表〕　計3件（うち招待講演　0件／うち国際学会　0件）

１．発表者名 森山貴之、新田貴士
２．発表標題 Some examples of global Poisson structures on S^4
３．学会等名 第６５回幾何学シンポジウム
４．発表年 2018年

１．発表者名 森山貴之、新田貴士
２．発表標題 Some examples of global Poisson structures on S^4
３．学会等名 ２０１８年度日本数学会幾何学分科会
４．発表年 2018年

１．発表者名 森山貴之、新田貴士
２．発表標題 Splitting theorem for sheaves of holomorphic k-vectors on complex contact manifolds
３．学会等名 ２０１８年度日本数学会幾何学分科会
４．発表年 2018年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

本研究で得られた研究結果を論文「Quaternionic k-vector fields on quaternionic Kahler manifolds」arXiv:2103.12405としてarXivにおいて発表した(２０２１年３月).

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考
研究協力者	新田　貴士 (Nitta Takashi)		

７．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関