

ヒストグラムの指導に関する実践的考察

柴原大樹*・中西正治**

Practical considerations on teaching histograms

Daiki Shibahara* and Masaharu Nakanishi**

要 旨

ヒストグラムから確率密度関数の分布曲線へとつなげる学習には、対象とする量が連続量であることが根底にある。そのことを踏まえ、直感で切った10cmのテープカットを使って、①階級や階級の“以上”“未満”の必要性、②連続量の場合のヒストグラムおよび度数分布表の作成、③面積が度数を表していること、④縦軸の値は度数密度、相対度数密度であることを学習する授業実践に取り組んだ。その結果、①と②については、連続量（測定値ではなく真の値）を用いることで、概念や用語が自然な形で導出され、生徒の理解につながった。③と④については、面積が度数を表すことから、長方形の縦の長さが度数密度であることが導かれるが、生徒にとって理解するのは難しい内容であった。ヒストグラムの1つ1つの柱は面積図であるから、小学校から1あたり量の学習で、かけわり図や面積図を使って教えることが必要である。

キーワード：連続量、ヒストグラム、テープカット、面積図

1. 研究の意図と目的

中西正治は「ヒストグラムの指導に関する一考察」⁽¹⁾において、ヒストグラムから確率密度関数の分布曲線へとつなげる学習には、対象とする量が連続量であることが根底にあることを踏まえ、階級や階級の“以上”“未満”の必要性、連続量の場合のヒストグラムおよび度数分布表の作成、面積が度数を表していること、縦軸の値は度数密度、相対度数密度であることの4点を学習することが不可欠であると主張している。

本稿は、その具体的方策を組み込んだ実践について概要を述べ、上述した4点がどの程度生徒の理解を得られるかについて分析及び考察をする。

2. 実践の概要および分析と考察

2021年2月19日から3月9日にかけて、三重県津市内の公立中学校1年生6クラスで授業実践を行った。本稿ではその中の1クラス（34名）について取り上げる。

授業は生徒の認識のレベルや理解度を考慮しながら進められた。「資料の活用」の単元の指導計画は7時間を予定した。そのうち本稿の研究目的と関わりのあるのは主に最初の2時間分である。

* 津市立橋北中学校

** 三重大大学教育学部

〔指導計画〕

- 第一時：直感で切ったテープの長さの分布の様子を知るためにヒストグラムを作成して分布の様子を知る。
- 第二時：ヒストグラムから度数分布表を作成する。ヒストグラムの柱状の面積が度数、高さが度数密度を表していることが分かる。
- 第三時：他の分布と比べるためには相対度数や度数分布多角形が便利であることが分かる。
- 第四時：相対度数は確率と見なせることが分かる。
- 第五時：分離量を対象とした代表値（平均値、中央値、最頻値）の意味が分かる。
- 第六時：連続量を対象とした代表値（平均値、中央値、最頻値）の意味が分かる。
- 第七時：範囲の意味が分かる。練習問題

(1) 第一時 (2021.2.19.10:50~11:40)

(目的)

- ・具体的事例を通して学習課題を自分のものとして捉える。
- ・実験結果を利用してヒストグラムの作り方を理解する。

第一段階

まず 5cm、10cm、15cm の細長い紙テープの形を印刷したプリントを配り、各自にその長さを覚えさせた。その後、教師の方から 10cm を指定し、2 分以内にテープを各班（主に 4 人構成）20 本以上直感で切る課題を与えた。班によっては 40 本を超えている班もあった。生徒同士協力し合って切っていた。その切り方は様々で、自分の指の開く具合を利用したり互いに比べ合ったりして確かめていた。



〔分析と考察〕

生徒一人一人 10cm の感覚を確認しながら切っており、生徒全員積極的に参加をしていた。学習課題を自分のものとして捉えていた。

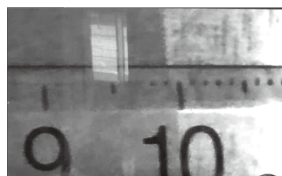
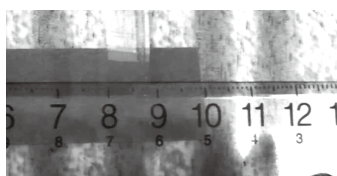
第二段階

各自 10cm に切れたと思うテープを 1 本だけ選ばせ物差し（1mm 単位）で長さを測らせた。10cm に切れたという生徒が何人か出た。本当に 10cm に切れたかどうかを確かめるために、教師は定規に示されている何人かのテープの位置をスマホに撮り、その画面をテレビに映し出し、物差しの 10cm あたりを拡大し、生徒全員に見せた（例 1~3）。取り上げたすべてのテープが 10cm でないことから、正確に 10cm に切れることはまず起こらないことを確認した。

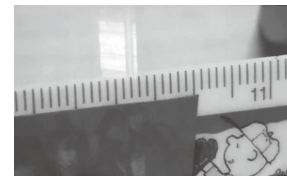
(例 1)



(例 2)



(例 3)



〔分析と考察〕

中学1年生にとって正確に10cmに切る確率は0であることを理解するのは難しいと考え、直感的な方法を取っている。精度の高い機器で測定する方法もあるが現実的ではない。生徒自身が測った結果を利用したからこそ、真の値は測れないことに納得したのであろう。

第三段階（階級や階級の“以上”“未満”の必要性）

正確に10cmに切ることはまず起こらないので、10cmが何本あるか数えられない。しかし、テープの端が1cm間隔に入るか入らないかくらいは判定できるから、その間に入る本数を数えようと、教師の方から指示を出した。

本数の数え方の判定として、テープの端が見た目に目盛りと重なった場合は繰り上げて数えることを図で確認した。

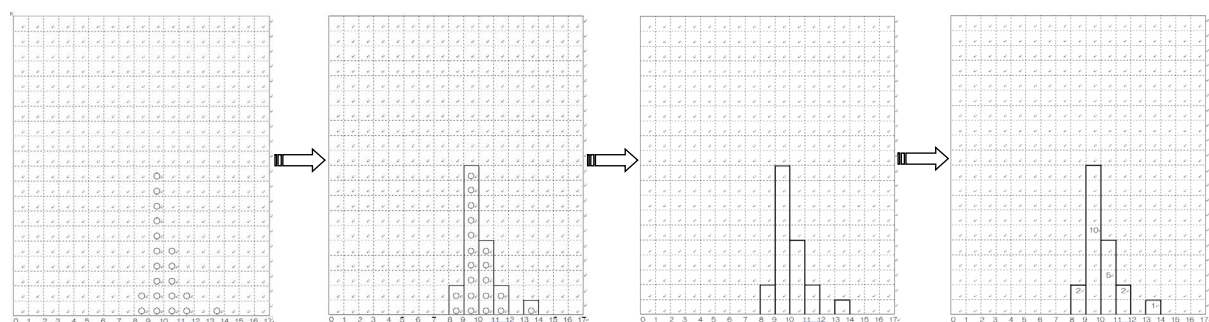
〔分析と考察〕

分離量が対象であれば度数は数えられ分布の様子がわかる。しかし連続量が対象であれば正確な測定ができないので度数は数えられない。それでも分布の様子を知るためには階級を考えてその中に何本入るのかを考えればよい。そのことに気付かせなければならない。しかしこれまでの他のクラスでの経験から階級の発想は生徒から容易に出てこない。そこで教師から1cmの階級の幅の中は何本入るのかを考えればよいことを指示したのである。生徒は階級の必要性を納得していた。正確に測ることのできない値を集計するためには決められた範囲に入る値を数える必要がある。その範囲を「階級」と呼ぶことが実感できた。テープがぴったりの長さに見えた場合、10cm以上に含まれるということは多くの生徒が理解できていた。しかし教師からの一方的な説明であったため、“以上”“未満”の必要性が生徒に納得できたかは疑問が残る。

第四段階（連続量の場合のヒストグラムの作成）

ヒストグラムの作成方法について以下の説明をした。

- ・テープの端が入った範囲に鉛筆で「○」印を付けていくこと
- ・「○」印をつけたマス目に沿ってボールペンで長方形に囲むこと
- ・長方形の中にある「○」印を消すこと
- ・「○」印の個数を数字で書き入れること
- ・テープの長さが17cmを超えるものは17cm以上としてまとめて処理をすること（グラフの横軸の長さが17cmまでであったため）

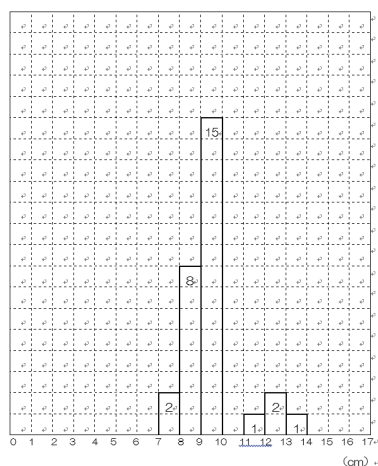


生徒は、まず判定方法に従って次々に「○」印を付けて指示通りにヒストグラムを作成した。

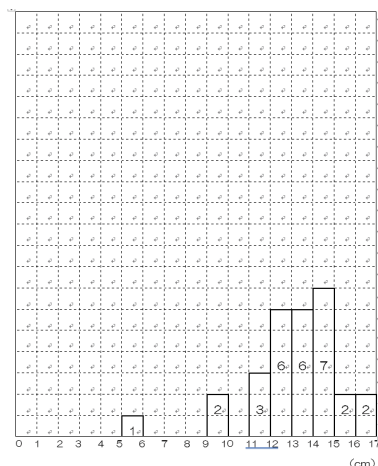
教師は作成したヒストグラムの中から6つを紹介した。

〔図1～3〕はうまく17cm以内に収まったヒストグラムの例である。

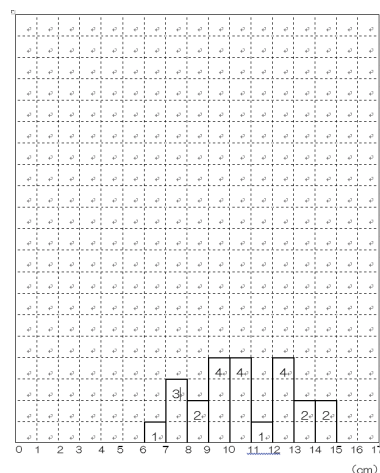
〔図4～6〕は17cm以上になったテープが含まれたヒストグラムの例である。



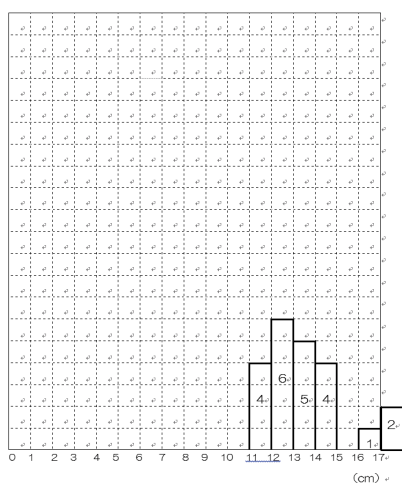
〔図 1〕



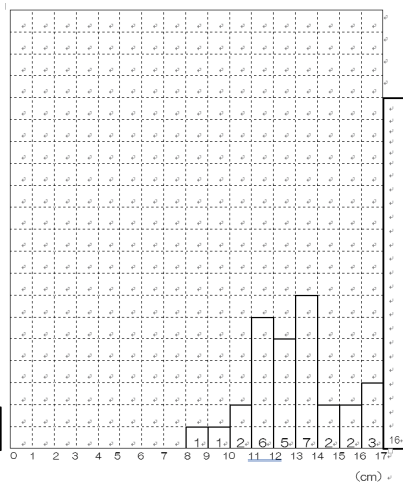
〔図 2〕



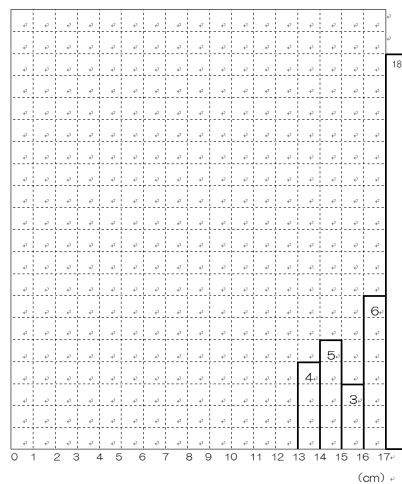
〔図 3〕



〔図 4〕



〔図 5〕



〔図 6〕

生徒は 10cm より大きく切る傾向にあった。切ったテープの半分以上が 17cm 以上になった班〔図 6〕もあり、20cm を超えるものがいくつもあった。〔図 4～6〕の 17cm 以上の階級におけるグラフの表現は正しくないが、とりあえずこの段階ではここで留め置いている。正しい扱いについては、第二時の第三段階で扱っている。

〔分析と考察〕

教科書のヒストグラムの作成では、与えられたグラフに最初から縦軸に度数がかかっているため、その数字を使って柱状をかこうとする。そのために生徒は柱状の高さが度数であると理解する。しかし本稿のヒストグラムの作成は縦軸を意識していない。階級の幅に何本入るかを「○」印を積み重ねることで調べているだけである。教科書のヒストグラムのスタイルに合わせるために数字を縦軸へ集めてもよいが、柱状の高さが度数であるという誤認識が生まれないように、あえて数字を縦軸へ集めていない。しかし、ほとんどの生徒は教科書や問題集にあるヒストグラムの読み取りはできている。ヒストグラムを作成する中でグラフの読み取りも理解していることが分かる。

連続量（測定値でなく真の値）を用いることで、棒グラフでは表現できないことが理解しやすかった。

（2）第二時（2021.2.22.11:50~12:40）

（目的）

- ・前時に作成したヒストグラムから度数分布表を作成する。
- ・17cm 以上の階級のグラフを考えることで、面積が度数を表していることが分かる。
- ・柱状の縦の長さは度数密度を表していることを知る。

第一段階

～以上～未満、階級、度数、階級の幅、階級の個数、ヒストグラムなどの用語を紹介した後、ヒストグラムを作成するメリットについて考えさせた。生徒の意見をテレビに写し共有した。

- ・どここの階級が多いかなどがすぐ分かる
- ・どここの階級にどれだけの度数があるかが分かりやすい
- ・度数が比べ易い
- ・度数の分布が分かる
- ・ずば抜けているやつが分かる
- ・少ないのと多いのとの見分けがつく

などがあった。

〔分析と考察〕

ヒストグラムのメリットについてはほぼ理解していた。

第二段階（度数分布表の作成）

前時に各班で作成したヒストグラムの度数分布表について、階級の幅、階級の個数、度数が最も大きい階級、9cm 以上 10cm 未満の度数、テープの長さが 10cm 未満の累積度数、テープの長さが 10cm 以上になった本数を確認した。

17cm 以上の場合には「cm 未満」を線で消した例〔図 7〕を紹介した。

〔分析と考察〕

切ったテープの長さが〔図 1～3〕のように 17cm 以下になった班は教師の確認に適切に答えられたが、すべてのテープの長さが 11cm 以上〔図 4〕や 13cm 以上〔図 6〕になった班は特殊な答えになった。〔図 4～6〕の班は 17cm 未満までは階級の幅にいくつ度数があるかが分かるが、17cm 以上の範囲では階級の幅がないのでとりあえず 17cm 以上のテープが何本あるかしかが分からない。17cm 以上の部分を除けば、どの班も度数分布表を正しく作成できていた。

ヒストグラムを作成することから始めたため度数分布表への移行がスムーズに行われた。

第三段階（面積が度数を表していること）

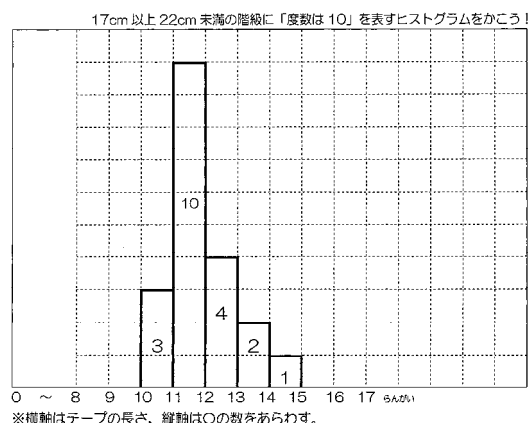
生徒のデータを直接利用したいが、「17cm 以上」では「～cm 未満」がないので階級として扱えないことと、学習を進めていくと柱状の高さが一般的には小数になるため小数を苦手とする生徒には難しくなることから、教師が作成したデータを使用した。

課題として「17cm 以上 22cm 未満の階級に「度数は 10」を表すヒストグラムをかこう！」を提示し、班で考えさせた。

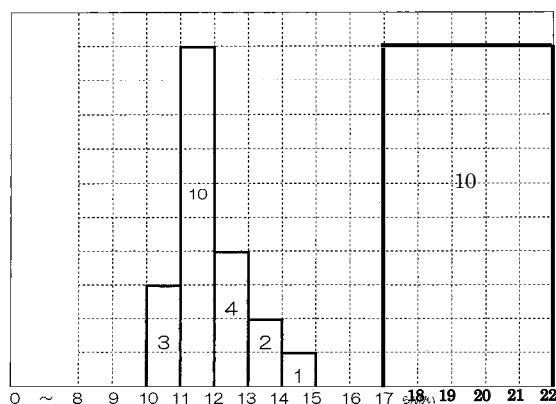
階級 (cm)				度数 (本)
13	cm 以上	14	cm 未満	4
14	cm 以上	15	cm 未満	5
15	cm 以上	16	cm 未満	3
16	cm 以上	17	cm 未満	6
17	cm 以上	—	cm 未満	18
	cm 以上		cm 未満	
	cm 以上		cm 未満	
	cm 以上		cm 未満	
	cm 以上		cm 未満	
計				36

※使わなかった部分は空白のままでよい。

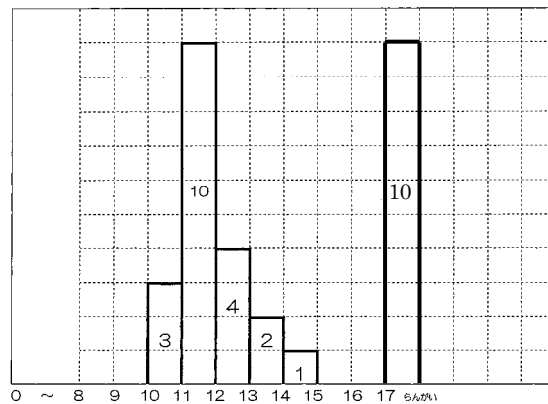
〔図 7〕



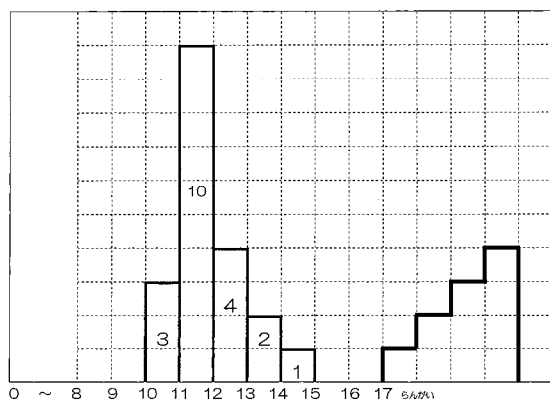
教師はまず〔図 8〕を取り上げ、11 cm 以上 12 cm 未満の階級の柱状と、17 cm 以上 22 cm 未満の階級の柱状の大きさに目を向けさせた。生徒からすぐ、度数は同じ 10 なのに大きさが違うのはおかしいという意見が出た。



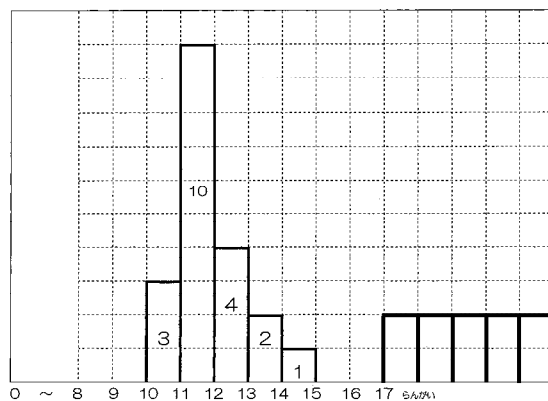
〔図 8〕



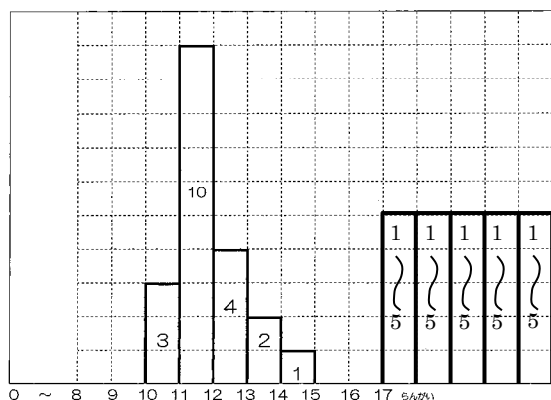
〔図 9〕



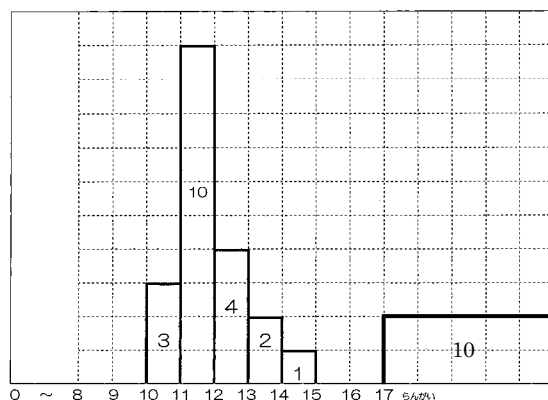
〔図 10〕



〔図 11〕



〔図 12〕



〔図 13〕

次に〔図 9〕を取り上げた。生徒は 17 cm 以上 22 cm 未満の階級の幅に注目し、度数 10 の大きさは同じだけれども、1cm の幅と 5cm の幅が同じなのはおかしいという意見が出た。他の生徒も納得していた。ではどうすればよいかをさらに考えさせた。

〔図 10〕や〔図 11〕や〔図 12〕のようなものが考え出された。

〔図 10〕は 1 本 2 本 3 本 4 本と合計 10 本にはなるが各階級がそのようになっていることはどこにも述べられていないこと、〔図 11〕はそれぞれの階級に 2 本ずつあるけれどそのこともどこにも述べられていないこと、〔図 12〕は各階級に 1 本から 5 本と幅を持たせているがこれでは階級の幅 5cm に 10 本あることはわからないことを確認した。最後に〔図 13〕を示し、1cm ごとに線を書き入れていた〔図 11〕に対し、これは間に線がないので、階級の幅 5cm の間に 10 本分入っていることを表していると説明した。

テープの本数が多くなればヒストグラムの面積は大きくなり、テープの本数が少なくなればヒストグラムの面積は小さくなっていることを確認し、ヒストグラムでは、面積は度数に比例するとまとめた。

〔分析と考察〕

テープ 1 本につき 1 マスに○を付けることで、1 マスが度数 1 を表すことが自然と身に着いた。1 マスが面積であることにつなげるために、17cm 以上のデータが有効に働いた。生徒たちは、正しい表記と誤った表記を比較し、「面積」が正しく表現されないとヒストグラムとしてはおかしいことに気付いていった。また階級の幅は必要に応じて変えてもよいことを自然な形で教えることができた。

度数は柱状の高さであるといった間違った認識が極めて多い。それは生徒に限ったことではない。教師もしかりである。その原因は、階級の幅が同じ場合のみ、高さは面積に比例するから、縦軸の値に度数密度の代わりとして度数を用いてもよいことを理解していないことである。ヒストグラムは面積が度数に比例することが原則である。この原則を理解していないと生徒の誤認識を生み出してしまう。

面積が度数を表していることを教えるためには、階級の幅を等間隔に取らず一部の階級の幅を変えて度数の表現を考えさせることが必要である。

第四段階（縦軸の値は度数密度）

階級 17cm 以上 22cm 未満の柱状を取り上げ、長方形の面積の求め方と対応させることによって、柱状の縦の長さが度数密度になることを説明した。

具体的には、長方形の横の長さが柱状の階級の幅にあたり、面積が度数にあたること、長方形の面積 \div 横の長さ = 縦の長さ であるから、柱状の縦の長さ = 度数 \div 階級の幅 で求められると説明した。階級の幅 5cm の度数が 10 本だから、 $10 \text{ 本} \div 5 \text{ cm} = 2 \text{ 本/cm}$ となり、平均して 1cm あたりに 2 本ずつあるとみなせると説明した。

（板書）

横....階級の幅 面積....度数 縦....?

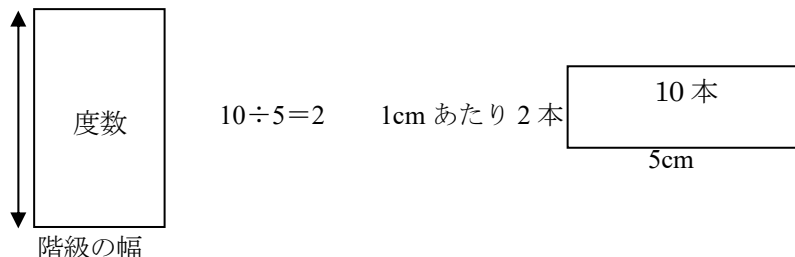
縦 \times 横 = 面積

縦 = 面積 \div 横

= 度数 \div 階級の幅

= $10 \text{ 本} \div 5 \text{ cm}$

= 2 本/cm 1cm あたり 2 本あるという意味 度数密度



〔分析と考察〕

ヒストグラムの縦軸は度数密度を表していることを理解させることが目的であったが、本時では 17cm

以上 22cm 未満の階級を取り上げその縦の長さが度数密度を表していることのみを扱っている。なぜなら、これ以後の学習において教科書や問題集ではすべて縦軸が度数になっているので混乱させてしまうことが考えられたからである。しかし、17cm 以上 22cm 未満のデータを扱うことで、「階級の幅 5cm に入る本数が 10 本」とは、「1cm あたり平均で 2 本入っている」ということが実感できたようである。「1cm あたり」の感覚は実感できたが、最初から「度数密度（特に密度）」の用語を用いた説明は中学 1 年生にとって難しかった。教師の説明を聞いてうなずいている生徒の数は半数程度であった。「1cm あたり平均で 2 本入っている」という説明から入り、結果として用語「度数密度」を紹介する方がより分かりやすかったのではないか。小学校で学習した平均の概念を使った説明の方が分かり易い。

中学生の認識レベルでは度数密度は少し早すぎる概念であるかもしれない。ヒストグラムの縦軸が度数密度を表していることの理解はなおさらである。況や相対度数密度である。度数密度や相対度数密度は確率密度関数の理解に直結しているので、高校で扱った方が良いかもしれない。ただ小学校では速さ（速さ×時間＝道のり）や人口密度（人口密度×面積＝人口）、中学校の理科では体密度（体密度×体積＝質量）を学習済みであるので、三者関係を示す面積図が重要となる。面積図に至る系統的な学習が決定的に重要となる。

3. 生徒のアンケート調査から

研究目的で挙げた 4 点に関する理解度の調査（自由記述）である。中学 1 年生を対象とするので出来るだけ簡潔な文章とした。答えやすくするために、研究目的で挙げた 4 点に関する数学的内容 9 点をあげておいた。

〔質問事項〕

- ①「資料の活用」の授業は分かりましたか？ はい ・ いいえ
- ②どのようなことが印象に残りましたか？
- ③データを分析するときには、何が大事だと思いますか。
- ④何が一番分かりやすかったですか？
- ⑤何が一番分かりにくかったですか？

〔研究目的で挙げた 4 点に関する数学的内容 9 点〕

- ・テープの長さは正確には測れないこと。
- ・テープの長さは正確には測れないけれども、分布の様子を知るためには一定の範囲（階級）に入る長さの度数を数えればよいこと。
- ・範囲（階級）が重ならないように、範囲（階級）を「〇〇以上〇〇未満」とする必要があること。
- ・ヒストグラムの作り方。
- ・ヒストグラムの面積が度数を表していること。
- ・ヒストグラムの縦の長さが度数密度を表していること。
- ・2つの班の分布を比べるためには、相対度数が必要になること。
- ・2つの班をヒストグラムで重ねると見にくいので、度数分布多角形を用いること。
- ・相対度数を確率として考えること。

質問事項①は単元全体に対する生徒の自己分析による授業の理解度、②は授業後印象に残った授業内容、③は資料を分析するための大切な視点、④⑤は数学的内容の理解度である。

数学的内容の 9 点は研究目的に挙げた 4 点を指導する際の具体的授業内容である。研究目的に挙げた 4

点と数学的内容の9点の関係は以下の通りである。

階級や階級の“以上”“未満”の必要性

- i) テープの長さは正確には測れないこと。(第一時)
- ii) テープの長さは正確には測れないけれども、分布の様子を知るためには一定の範囲(階級)に入る長さの度数を数えればよいこと。(第一時)
- iii) 範囲(階級)が重ならないように、範囲(階級)を「〇〇以上〇〇未満」とする必要があること。(第一時)

連続量の場合のヒストグラムおよび度数分布表の作成

- iv) ヒストグラムの作り方(度数分布表の作成(第二時))はヒストグラムの情報を表の形にするだけで数学的内容には入れていない。(第一時)
- v) 2つの班をヒストグラムで重ねると見にくいので、度数分布多角形を用いること。(第三時)

面積が度数を表していること

- vi) ヒストグラムの面積が度数を表していること。(第二時)

縦軸の値は度数密度、相対度数密度であること

- vii) ヒストグラムの縦の長さが度数密度を表していること。(第二時)
- viii) 2つの班の分布を比べるためには、相対度数が必要になること。(第三時)
- ix) 相対度数を確率として考えること。(第四時)(第一時、第二時の指導内容ではないが、高校の確率密度関数の導入を見通したものとして第四時で取り上げた)

有効アンケート総数は31であった。

質問事項①、④、⑤が直接理解度にかかわる調査である。しかし②、③にも理解度に関わる記述があるため、まず①、④、⑤を分析した後その補足として②、③の記述を追加する。

①(31名)は、「はい」が30名、「いいえ」が1名であった。生徒の自己分析ではあるがほぼ成功的な授業であったと判断できる。

④(29名)は、ヒストグラムや度数分布多角形をかいたり作ったりすることが12名、中央値・最頻値・平均値・相対度数・累積度数などを求めることが10名、2つのグラフを比べるためには相対度数が必要であることが2名、階級を「〇〇以上〇〇未満」とする必要があることが1名、度数分布多角形は2つのデータを比べる時に重ねてみると分かりやすいことが1名、ヒストグラムで表すとそれぞれの階級の度数の分布が分かりやすいことが1名、ヒストグラムの面積が度数を表していること、面積が大きければ大きいほど度数も多いということが1名、テープの正確な長さは測れないが、一定の範囲の長さにして度数を数えればよいことが1名であった。

⑤(27名)は、平均値・中央値・最頻値・範囲の求め方が9名、相対度数を確率と考えることが4名、ヒストグラムと度数分布多角形の利点や欠点や読み取りが4名、ヒストグラムの縦軸の長さが度数密度を表していることや縦軸・横軸の意味が3名、用語が紛らわしいが2名、ヒストグラムの面積が度数を表していることが1名、表を使ってヒストグラムを作ることが1名、相対度数が1名、ちらばりの表が1名、その他1名であった。

(補足)

②(30名)には、テープを切ってヒストグラムや度数分布多角形を作ったことが7名、テープの長さは正確には測れないことが5名、2つの資料を比べるには相対度数や度数分布多角形を使えばよいことが5名、分布の様子を知るために一定の範囲に入る度数を考えればよいことが3名あった。その他はi)からix)に関する内容ではなかった。

③ (30 名) には、範囲(階級)が重ならないように範囲(階級)を「〇〇以上〇〇未満」とする必要があることが 1 名あった。その他は i) から ix) に関する内容ではなかった。

i)、ii)、iii)、iv)、v)、viii) については理解できる内容と考えられる。特に iv) については十分理解できる。vi) は生徒によって理解できる内容であったり、理解が難しい内容であったりする。vii)、ix) は生徒にとって理解が難しい内容である。

以上の様相は他のクラスでもほぼ同様である。

4. まとめと考察

ヒストグラムは連続量が前提となったグラフである。その視点に立って指導していくと、概念や用語が自然な形で導出され授業が進められることが確認できた。

テープの長さは連続量であるから測定できない。測定できないが切ったテープの分布の様子を知るには一定の範囲(階級)に入る長さの度数を数えればよい。度数を正しく数えるために範囲(階級)が重ならないように範囲(階級)を“以上” “未満”とする必要がある。これでヒストグラム作成の準備ができる。作成したヒストグラムから度数分布表を作成する。本実践では行われなかったが、切ったテープの長さの平均値を予測するために度数分布表が必要となり、階級値が必要となる。切ったテープの長さが 10cm 近くに一番よく集まった班はどこかを調べるためには相対度数が必要になる。2 つの班の分布をヒストグラムで重ねてかくと見にくくなるので度数分布多角形が必要となる。ここまでの指導では難を示す回答はない。

17cm 以上のテープのヒストグラムを考えさせることで面積が度数を表していることを指導できる。このことは生徒によって理解できる内容であったり、理解が難しい内容であったりする。面積が度数を表していることから、長方形の縦の長さが度数密度であることが導かれる。このことは生徒にとって難しい内容であった。

以上は第一時、第二時に関わってのことである。

第三時・第四時についても触れておく。

第三時では viii) を扱った。難を示す回答はない。

第四時で相対度数を確率と見なせることを指導した際、封筒に入ったテープを 1 本取り出すとすると、どの階級の可能性が一番高いかを考えさせた。生徒は度数が一番多い階級を選んだ。しかしこの内容は生徒には難しいことがアンケートから言える。

理解に困難を示したのは、

vi) ヒストグラムの面積が度数を表していること。

vii) ヒストグラムの縦の長さが度数密度を表していること。

ix) 相対度数を確率として考えること。

の 3 点である。その原因は何か、これらの内容を理解するにはどのような学習過程が必要となるのかについては今後の課題とする。

参考文献

(1) 中西正治「ヒストグラムの指導に関する一考察」『近畿数学教育学会会誌』第 34 号、2021 年 3 月 19 日発行、pp.13-21

(2) 森本諒 修士論文『統計の学習内容の連続性に関する実践的考察—棒グラフ・ヒストグラム・確率密度関数の観点から—』2021 年 3 月