

平成 24 年度 修士論文

フィルターを使った確率モデルによる 降水量時系列のモデル化

MODELING Of PRECIPITATION TIME SERIES
BY A STOCHASTIC MODEL USING A FILTER

三重大学 大学院生物資源学研究科

共生環境学専攻 自然環境システム学講座

水域環境学研究室

51M223 立浪 勢津子

指導教員 葛葉泰久教授

目次

第 1 章 序論3
1-1 日本の降水	
1-2 研究目的	
第 2 章 使用データ5
第 3 章 確率モデル7
3-1 ブラウン運動	
3-2 fBm	
3-3 fLm	
3-4 Lévy 分布	
第 4 章 解析手法11
第 5 章 結果12
5-1 従来の fBm, fLm の適用の可否	
5-2 e-model の適用性	
5-3 フィッティングの相関係数と Lévy のパラメータ α	
5-4 結果のまとめ	
第 6 章 まとめ26
謝辞	
参考文献	

第1章 序論

1-1 日本の降水

様々な自然現象に関するデータを見ると、日本は世界的に見て面白い特徴を持つ地域の一つであることが分かる。中でも、地域的特性を持つことが知られている降水量等に関してはこれが顕著である。日本は太平洋に浮かぶ縦長の島国であり、アジア・モンスーン地域の一部であり、欧米諸国に比べると年降水量が多い。日本国内でもそれぞれ降雨の量や時期に特徴があり、北海道気候、太平洋気候、日本海岸気候、内陸性気候、瀬戸内海気候、南西諸島気候の6つに区別できる。北海道気候は、年間を通して気温が低く、降水量は少ない特徴を持つ。太平洋気候は、夏季には季節風の影響を受け気温が高くなり降水も多く、冬季は乾燥した天気が続く特徴を持つ。日本海岸気候は、冬季は降水、積雪が多い特徴を持つ。内陸性気候は、年間をとって降水が少ない特徴を持つ。瀬戸内海気候は、年間を通して降水は少ないが、梅雨時や台風の接近・上陸時に降水量が集中する特徴を持つ。南西諸島気候は、年間を通して降水量が多く、台風の影響を受けやすい特徴を持つ。降水量はこの地域的特性に加え月変化、季節変化、年変化があり、さらに周期性を持つ場合もある。こういった降水量の特性を調べることは有意義である。

さらに、近年、日本ではゲリラ豪雨や大雨による洪水等の水災害が増加している。平成23年8・9月には紀伊半島において台風第12号による被害、平成24年7月には九州北部豪雨による被害が出ている。降雨による災害への対策として、地域ごとの特徴を持つ降雨の再現を行うことは大切なことであると言える。

従来、降水量を生成するシミュレーションを行う際には2つの方法で行われることが多い。1つ目はWRF、MM5等のような気象モデルを用いた物理的手法、2つ目は確率モデルを用いた確率統計手法である。この際、生成される降水量データは、一地点の降水量の時系列であったり、ある時間の面的降水量分布であったり、それら両方を含んだ時空間データであったりする。

本研究では確率モデルのうち、フラクタルモデルの使用について検討する。確率モデルのうち、フラクタルモデルを使う理由として、Lavallée(2008)において、地震のすべり量分布がフラクタルモデルによって再現が可能であることを示唆していた。この論文では、地震のすべり量分布を乱流と考え、フラクタルモデルを用いて解析が行われていた。降水現象は乱流による気象現象である。古くから、確率モデルは降水量の時系列や空間分布を生成するシミュレーションなどとして乱流のモデル化に用いられてきた実績がある。また、フラクタルモデル自身も新しい確率モデルとして注目されている。このことから、確率モデルの1つであるフラクタルモデルを適用しようと考えた。本研究では、フラクタルモデルのうち、非整数ブラウン運動(fractional Brownian motion, 以下fBmと書く)、非整数レヴィ運動(fractional Lévy motion, 以下fLmと書く)というモデルを候補とし、検討していく。これらの確率モデル(特にfLm)は降水量だけではなく、Lavallée(2008)のように、地震の滑り

量分布，さらには，地形や雲，気温等様々な地球科学的な極値分布をモデル化できる可能性を持つ確率モデルである．降水量を例に挙げると，fLmによって降水量の時空間分布がモデル化できればその地域で降る雨を統計的に再現できるので，従来行われていた河川計画より正確な河川計画を行うことが出来るようになると考えられる．それぞれの確率モデルについては次章で詳しく述べる．

1-2 研究目的

日降水量の時系列データの再現を行うことは，防災や河川計画を立てる際に役に立つと考えられる．そこで，本研究では確率モデルによって日降水量の時系列データの再現が可能であるかを調べることを目的とする．日降水量の時系列データの再現にどの確率モデルを使うのが妥当かを検討し，適した確率モデルを用いて降水のシミュレーションを行い，降水の再現への確率モデルの適用性について調べる．

第2章 使用データ

気象庁の降水量データをのうち、日降水量データを100年強保有する51地点を対象に解析を行った。対象期間は1901年～2011年である。対象地によっては、数か月、数年など日降水量データがない場合があるが、その際にはデータがない日を見捨てて解析を行った。その一方で、1日程度の欠測などは「無降水」として対応した。以上のように、多くの観測点においては今回使用するデータは最大で366日×111年分あるが、いくつかの地点に関しては使用するデータが111年より少ない場合がある(Table.2)。

降水量データは周期性がある。周期性がある場合、スペクトル解析などの際に周期が解析を妨げることが多く、そのままでは解析を行う際に上手くいかないことがある。そこで、以下の手順を踏んだデータを使用データとした。

- ① 対象年間の日ごと(1月1日～12月31日)の平年値を出す(Fig.2の青色の線)
- ② ①で求めた平年値を5日移動平均(スムージング, \bar{R} とおく)する(Fig.2の赤色の線).
データが存在する期間は1月1日, 1月2日, 12月30日, 12月31日を除く1月3日～12月29日の361日である。うるう年については、2月29日を3月1日とみなして、以下の計算を行った。
- ③ 各年の日ごとの降水量データ R (1地点, 最大で366×111個)と②で求めた \bar{R} の偏差 ΔR を求める。関係式は、 $R = \bar{R} + \Delta R$ である。
最終的に算出された、 ΔR を使用データとした。

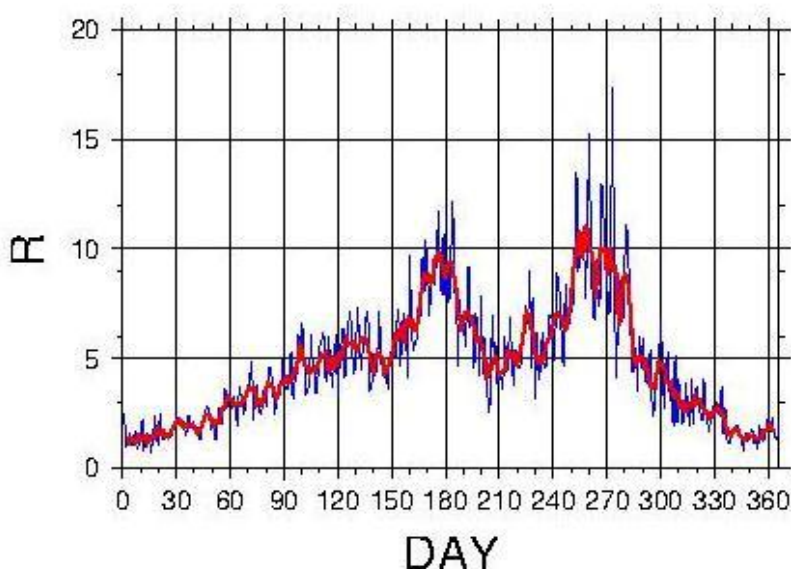


Fig. 2 津市の降水量の平年値(青色の実線)と5年移動平均(赤色の実線： \bar{R})

Table. 2 対象地域(51地点)と使用可能なデータ年数

地点	対象年間(年)
北海道-上川-旭川	111
北海道-網走-網走	111
北海道-石狩-札幌	111
北海道-十勝-帯広	111
北海道-根室-根室	111
北海道-後志-寿都	111
秋田-秋田	111
岩手-宮古	110
山形-山形	111
宮城-石巻	111
福島-福島	111
富山-伏木	111
長野-長野	111
栃木-宇都宮	111
福井-福井	110
岐阜-高山	111
長野-松本	111
群馬-前橋	111
埼玉-熊谷	111
茨城-水戸	111
福井-敦賀	110
岐阜-岐阜	111
愛知-名古屋	111
長野-飯田	111
山梨-甲府	110
三重-津	111
静岡-浜松	110
東京-東京	111
神奈川-横浜	110
鳥取-境	110
島根-浜田	111
京都-京都	111
滋賀-彦根	111
山口-下関	111
広島-呉	109
兵庫-神戸	110
大阪-大阪	111
和歌山-和歌山	111
福岡-福岡	111
大分-大分	111
長崎-長崎	111
熊本-熊本	111
鹿児島-鹿児島	111
宮崎-宮崎	111
愛媛-松山	111
香川-多度津	111
高知-高知	111
徳島-徳島	111
鹿児島-名瀬	111
沖縄-石垣島	111
沖縄-那覇	101

第3章 確率モデル

本研究では、フラクタルモデルの一つである、Gauss分布を使用するBm(ブラウン運動), それを拡張したfBm, Lévy分布を使用したfLmの適用の可否を検討した後, それらの適用が不適当と分かったため, 結果的に, 独自のフィルターであるe-model を開発した. 以下, 本章では, e-model を使用するまでの検討過程を説明するために, Bm, fBm, fLm の解説をする.

3-1 ブラウン運動

ブラウン運動(Brownian motion)は, ブラウン(Brown,1828)が花粉の微粒子の運動を見て発見した. このブラウン運動が発見される前までは花粉等の微粒子の運動は生物学的であると考えられていた. ブラウン運動の物理的な性質は, Einstein(1902)により詳細に調べられた.

ブラウン運動の定義を以下に示す(遠藤,2002).

定義: 確率過程 $\{X(t), t \in [0, \infty)\}$ は, 以下の4条件を満たす

- (1) $X(0) = 0$
- (2) 定常独立増分を持つ
- (3) すべての $t > 0$ に対して, $X(t)$ は Gauss 分布 $N(0, t)$ に従う
- (4) 連続な見本関数を持つ

これら4つの定義を満たしたブラウン運動の図を示す(Fig.3-1).

定義(1)は, ブラウン運動の始点が0であることを意味しており, 定義(3)はどの時間 t においても Gauss 分布に従って運動することを意味しており, 定義(4)は Fig.3-1 のように運動が一本の線で表すことが出来ることを意味している. 4つの定義のうち, 定義(2)の定常独立増分について山本(2004)に沿って説明する.

今, s, t とともに時間を表し, $0 < s < t$ であるとする. この時, $X(t) - X(s)$ を確率過程の増分(これは確率変数である)と言い, $X(t) - X(s)$ と, $X(t+h) - X(s+h)$ が同じ分布に従う時, この確率過程は“定常増分を持つ”という. ここで, h は任意の正の実数である. また,

任の n , 任意の $t_1, t_2, t_3 \dots t_n$ に対して, $X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_3} - X_{t_2}, X_{t_4} - X_{t_3} \dots$,

$X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ が独立な確率変数な時, この確率変数は“独立増分を持つ”という.

以上が, 定常独立増分の説明である.

定義(1)~(4)を満たす運動がブラウン運動であるが, ブラウン運動は定義が厳しく, 実際にモデルとしての適用範囲は狭いことが知られている. 上記の定義は, いわゆる $\sigma^2 = 1$ の時の, 標準ブラウン運動についての定義であった. 以下, 一般的なブラウン運動の式を用いて説明する.

ブラウン運動の増分の平均は式(3-1-1), 増分の分散は式(3-1-2)で表される.

$$E[B_H(t) - B_H(s)] = 0 \quad \dots(3-1-1)$$

$$E[(B_H(t) - B_H(s))^2] = \sigma^2 |t - s| \quad \dots(3-1-2)$$

そこで登場するのが, fBm(3-2で詳しく述べる)である. fBmはブラウン運動を拡張したもので, fBmの増分の分散は式(3-1-3)である.

$$E[(B_H(t) - B_H(s))^2] = \sigma^2 |t - s|^{2H} \quad \dots(3-1-3)$$

式(3-1-2)と式(3-1-3)を比べると, 式(3-1-3)の右辺には $2H$ のべき乗が存在する. ここで出てくる H は, ハースト指数のことである. これは, fBmが, ブラウン運動に対して, より複雑な運動を表すことが出来ることを意味している. 式(3-1-3)の $2H$ に $H=1/2$ を代入すると式(3-1-2)になることから, ブラウン運動はfBmが $H=1/2$ の時の特殊なケースの運動であることが分かる.

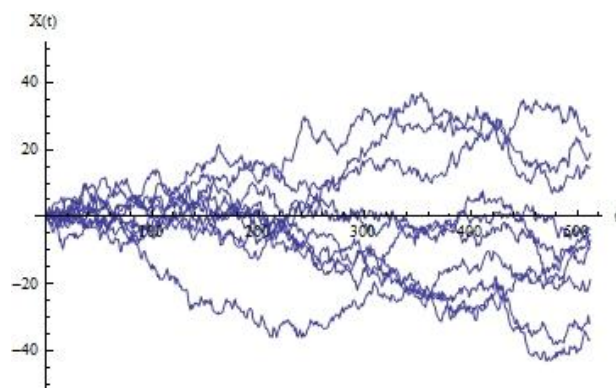


Fig. 3-1 ブラウン運動

3-2 fBm

ブラウン運動のハースト指数 H を $1/2$ から $0 < H < 1$ に拡張したのがfBmである(Mandelbrot and van Ness, 1968; Mandelbrot, 1982). fBmは定常過程ではないが, 増分に関しては定常性であり, 且つ自己相似性を持つ. Mandelbrot and van Nessは平均が0である確率変数をおおまかに以下の式で定義した.

$$B_H(t) = \frac{1}{\Gamma\left(H + \frac{1}{2}\right)} \int_{-\infty}^t (t-t')^{H-1/2} dB(t') \quad \cdots(3-2-1)$$

ここで, H はハースト指数のことである.

fBmの特徴の1つとして, 持続性・反持続性がある. 簡単に言うと, 持続性は過去の変位が増加傾向であれば未来の変位も増加傾向であるということを意味し, 反持続性は過去の変位が増加傾向であれば未来の変位は減少傾向であるということを意味する. 持続性はハースト指数 $H > 1/2$, 反持続性はハースト指数 $H < 1/2$ の時の特徴である. より詳しく説明すると, fBmの共分散は, 過去の増分 $B_H(t) - B_H(0)$ と未来の増分 $B_H(t+h) - B_H(t)$ とすると, 以下のように書くことが出来る.

$$\begin{aligned} & \text{Cov}((B_H(t) - B_H(0)), (B_H(t+h) - B_H(t))) \\ &= E(B_H(t+h)B_H(t)) = \frac{1}{2}((t+h)^{2H} - t^{2H} - h^{2H}) \quad \cdots(3-2-2) \end{aligned}$$

つまり, $H=1/2$ のBmならば, 上記の共分散は0になるので, これらの増分は独立である. ところが, $H > 1/2$ ならば, 共分散は0にならず, 正の値をとり, $H < 1/2$ ならば, 共分散は負の値をとる. つまり, fBmの増分は独立ではない.

3-3 fLm

BmとfBmは正規分布を使った確率モデルであるが, Gauss分布の確率密度関数は裾が薄いため, シミュレーションを行う際に極端な値を増分として取ることはない. そこで, 極値を生成することのできる, 確率密度関数の裾がGauss分布よりも裾の厚いLévy分布を使った確率モデルがfLmである. fLmはLévy分布を使用しているため, BmやfBmよりも, 極値が現れやすい降雨のような自然現象等を再現するのに適していると考えられる.

3-4 Lévy分布

ここでは、本研究で使用する2つの確率分布のうち、Lévy分布について説明する。

Lévy分布については、基本的にNolan(2013)に沿って説明する。Lévy(1937)は、 $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ がどのような条件下で次式を満たすかということを考察した。

$$(X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n) \stackrel{d}{=} b_n X_1 \quad \cdots(3-4-1)$$

この等号は、左辺と右辺の確率分布が等しいことを意味し、 $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ は、いわゆる i.i.d (お互い独立で、等しい確率分布を持つ) と呼ばれる性質を持つ確率変数である。もし、これらがGauss分布に従うならば、

$$(X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n) \stackrel{d}{=} n^{1/2} X_1 \quad \cdots(3-4-2)$$

が成立する。これは特殊なケースで、一般的には、

$$(X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n) \stackrel{d}{=} n^{1/\alpha} X_1 \quad \cdots(3-4-3)$$

である。ここで α の範囲は $0 < \alpha \leq 2$ であり、 $\alpha = 2$ の時、Gauss分布に相当する。このような確率分布を、一般に、Lévy分布、安定分布などと称すが、この分布は、裾が厚く、2次以上のモーメントがない(無限大となる)。さらに、その特殊ケースのGauss分布、Cauchy分布を除いて、陽な形で確率密度関数、確率分布関数を記述することができない。一般には特性関数を用いて分布系を記述するが、その記述方法は、著者によって若干異なるため、ここでは、Nolan(2013)の記述法を採用する。

確率変数 X は、下記のような特性関数で記述される。

$$E \exp(iuX) = \begin{cases} \exp(-\gamma^\alpha |u|^\alpha \left[1 + i\beta \left(\tan \frac{\pi\alpha}{2} \right) (\text{sign } u) (|u|^{1-\alpha} - 1) \right] + i\delta u) & \alpha \neq 1 \\ \exp(-\gamma^\alpha |u|^\alpha \left[1 + i\beta \frac{2}{\pi} (\text{sign } u) \ln(|u|) \right] + i\delta u) & \alpha = 1 \end{cases} \quad \cdots(3-4-4)$$

これを、Nolan(2003)は、 $\mathcal{S}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, 0)$ で表現している。つまり、4パラメータの確率分布である。 $\mathcal{S}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, 0)$ の0は、Nolanがパラメータと称しているもので、0のほかに1もあり、1の場合は式系が若干異なるが、ここでは、パラメータが1の場合のみ、解説する。最も大事な母数は α であり、これが、Lévy分布の裾の形状を決める。 β はひずみを決める母数で、これが0の場合に、左右対称形の確率密度関数が得られる。 γ はスケールを表す母数

(通常の確率分布の標準偏差的なものであるが、上述のように、この分布系には一般的に2次のモーメントはない)で、 δ は場所を表す母数である。fBmやBmが左右対称のベル型分布であるGauss分布を用いてシミュレーションを行うことのアナロジー、つまり、Gauss分布より裾が厚くて広い、極値の出やすい分布系としてLévy分布を選ぶという目的から考えて、ここでは、歪んでおらず($\beta = 0$)、中心が0になる($\delta = 0$)ようにすることとする。

第4章 解析手法

Bm, fBm, fLm の構成法(シミュレーションのアルゴリズムと考えてよい)は、いくつかのものが提案されている．ランダムウォーク法，ランダム中点変位法(Saupe,1988)，フィルター法(Lavallée,2008)などである．いずれも，一長一短があるが，本研究では，Lavallée(2008)のフィルター法を用いて，解析を行った．この手法は，Bm, fBm, fLm のすべてに適用可能である．1次元時系列データがフラクタル的な性質をもつなら，データのパワースペクトルは，式(4-1-1)に従う．

$$P(\omega) \propto \omega^{-\beta} \quad \dots(4-1-1)$$

ここで， ω は角振動数， $P(\omega)$ はパワースペクトル， β はパワースペクトルの傾きであり， β とハースト指数 H の関係は1次元モデルの場合，

$$\beta = 1 + 2H \quad \dots(4-1-2)$$

で表せる．

Gauss分布，もしくはLévy分布に従うホワイトノイズを計算した後，式(4-1-1)に従うフィルターによってフィルタリングすればよい．ホワイトノイズを X_x とすれば，

$$\Delta u_x \propto \sum_{s=2-N/2}^{1+N/2} \left| \frac{\omega}{2\pi} \right|^{-\beta/2} F_s[X_x] \exp \left[\frac{-2\pi i(x-1)(s-1)}{N} \right] \quad \dots(4-1-3)$$

により， $P(\omega) \propto \omega^{-\beta}$ を満たす時系列データが生成される．この表記法はLavallée (2008)

に従ったものだが，要は， X_x で表されるホワイトノイズは，そのままでは $P(\omega) \approx c$ という一定値を示すので，一旦フーリエ変換し，フィルターを通したのち，逆フーリエ変換をするだけである．この式において， N はデータの個数である．式(4-1-3)で，降水量時系列データ Δu_x が生成させられるとする．ここで，式(4-1-3)を変形したのが，次式(4-1-4)である．

$$X_x \propto F_x^{-1} \left[F_s(\Delta u_x) \times \omega^{\beta/2} \right] \quad \dots(4-1-4)$$

つまり，現実の降水量データ時系列 Δu_x を用いて X_x を計算し，その後に X_x の確率分布を求める．それがGauss分布なら，降水量時系列データはfBmでモデル化できることになり，またLévy分布ならば，fLmでモデル化できることになる．

第5章 結果

5-1 従来のfBm, fLmの適用の可否

まず，フラクタルモデルであるBm, fBm, fLmを適用するための必要条件である，式(4-1-1)の適用可否を，降水量時系列データを用いて確認した．その結果，式(4-1-1)で表されるフィルターは適当でないことが分かった(Fig.5-1)．

そこで，新しいフィルター(e-modelと称す)を開発した．e-modelとは，以下の式(5-1)のことである．

$$P(\omega) = a \exp(-b\omega) \quad \dots(5-1)$$

51地点すべてにe-modelを使用した結果(Fig.5-2, Fig.5-3)，相関係数は $0.74 \leq R \leq 0.97$ の範囲にあり，有意水準0.01で検定を行った結果，99%有意であると分かり，e-modelはすべての対象地域に適用可能であることが分かった．Fig.5-2は，津の例を示しており，そこでは相関係数が $R=0.923$ で $P(\omega) = 0.417 \exp(-0.270\omega)$ という関係が得られた．

以上より，日本の日降水量時系列データはフラクタル性を有しないことが分かった．このため，fBmやfLmを用いた日降水量時系列データの再現はできないことが分かった．

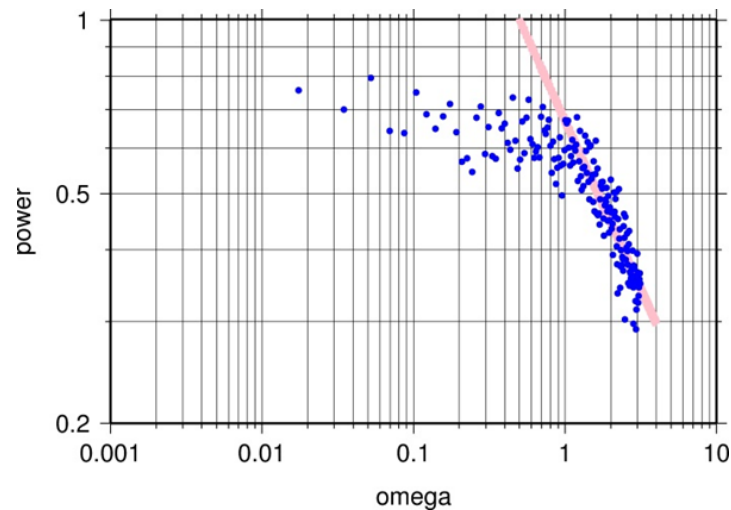


Fig. 5-1 三重県津市の ΔR のパワースペクトル(対数グラフ)

青色の点：パワースペクトルの分布 ピンク色の線： $1 < \omega < 3$ における近似直線

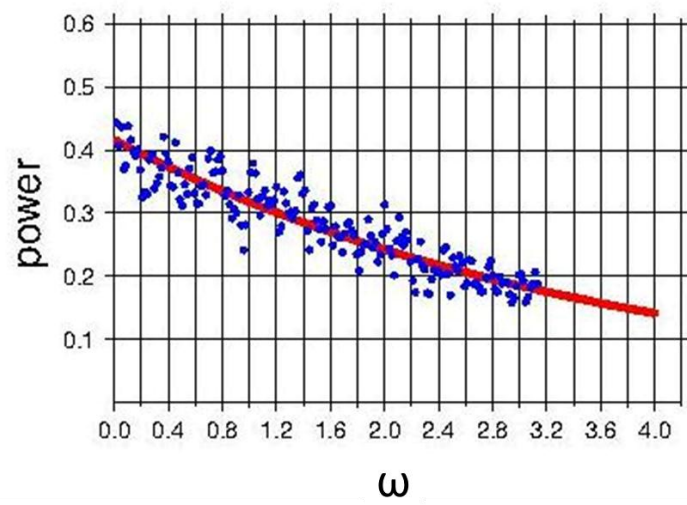
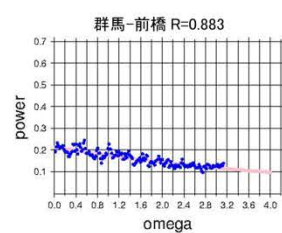
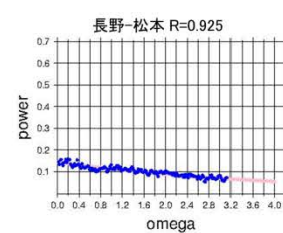
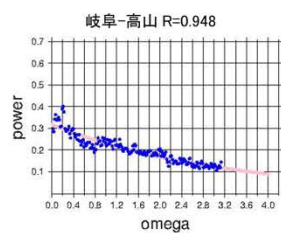
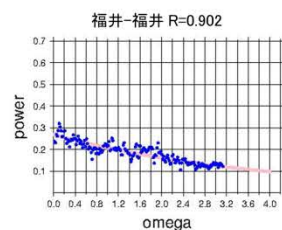
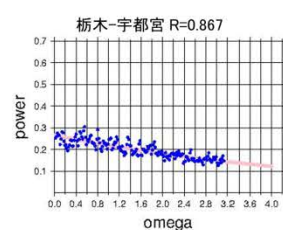
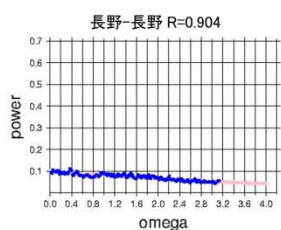
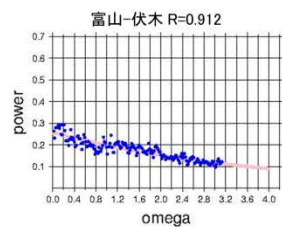
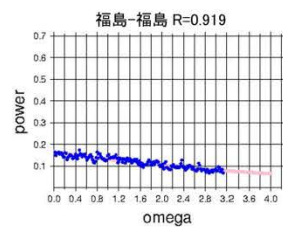
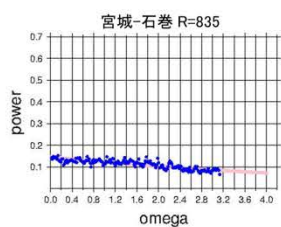
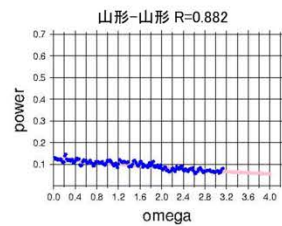
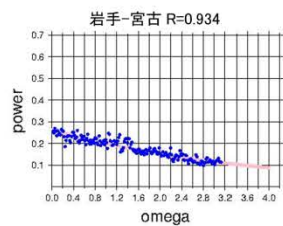
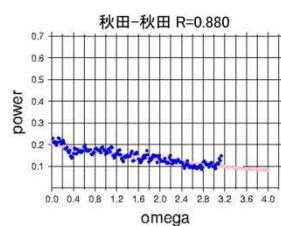
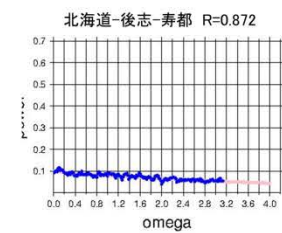
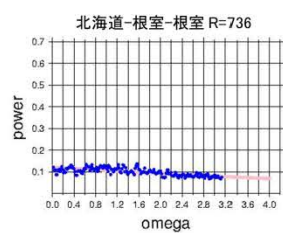
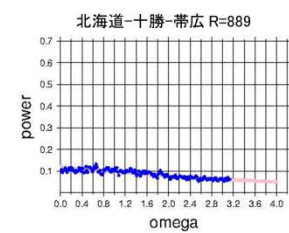
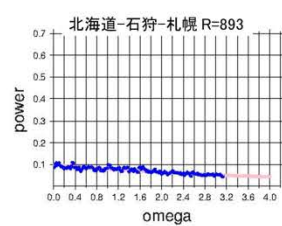
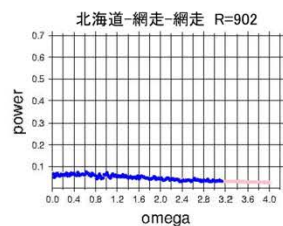
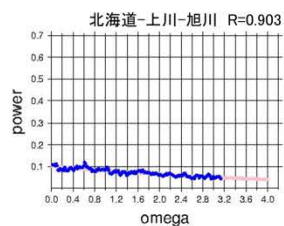
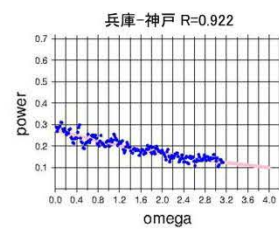
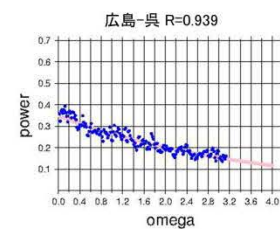
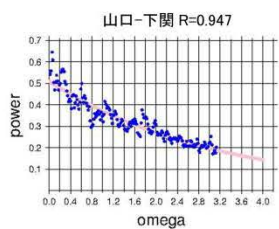
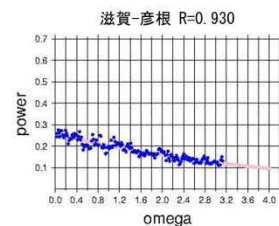
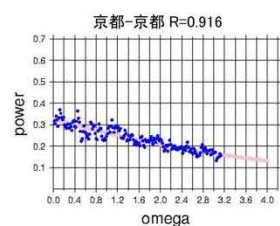
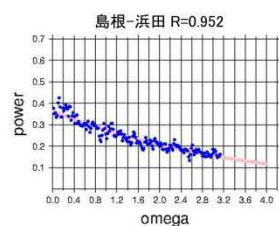
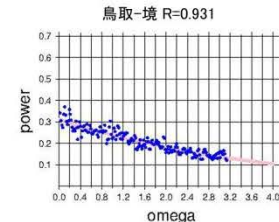
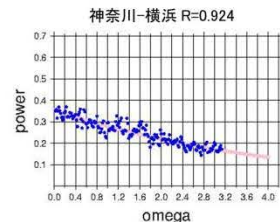
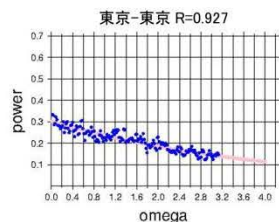
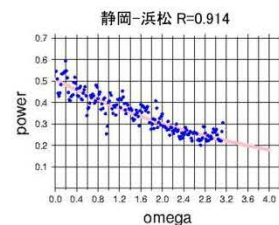
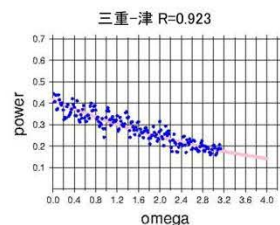
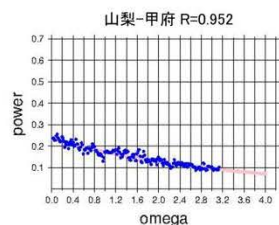
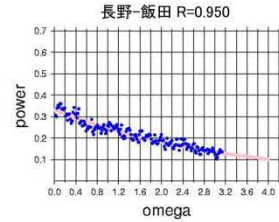
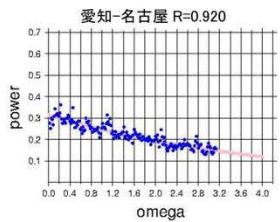
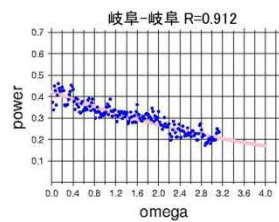
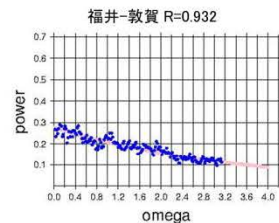
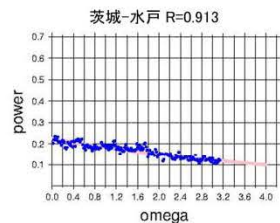
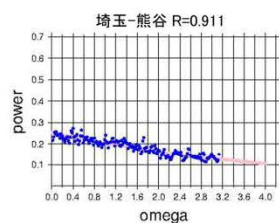


Fig. 5-2 三重県津市の ΔR のパワースペクトル
 (青色の点：パワースペクトルの分布 赤色の線：近似曲線)





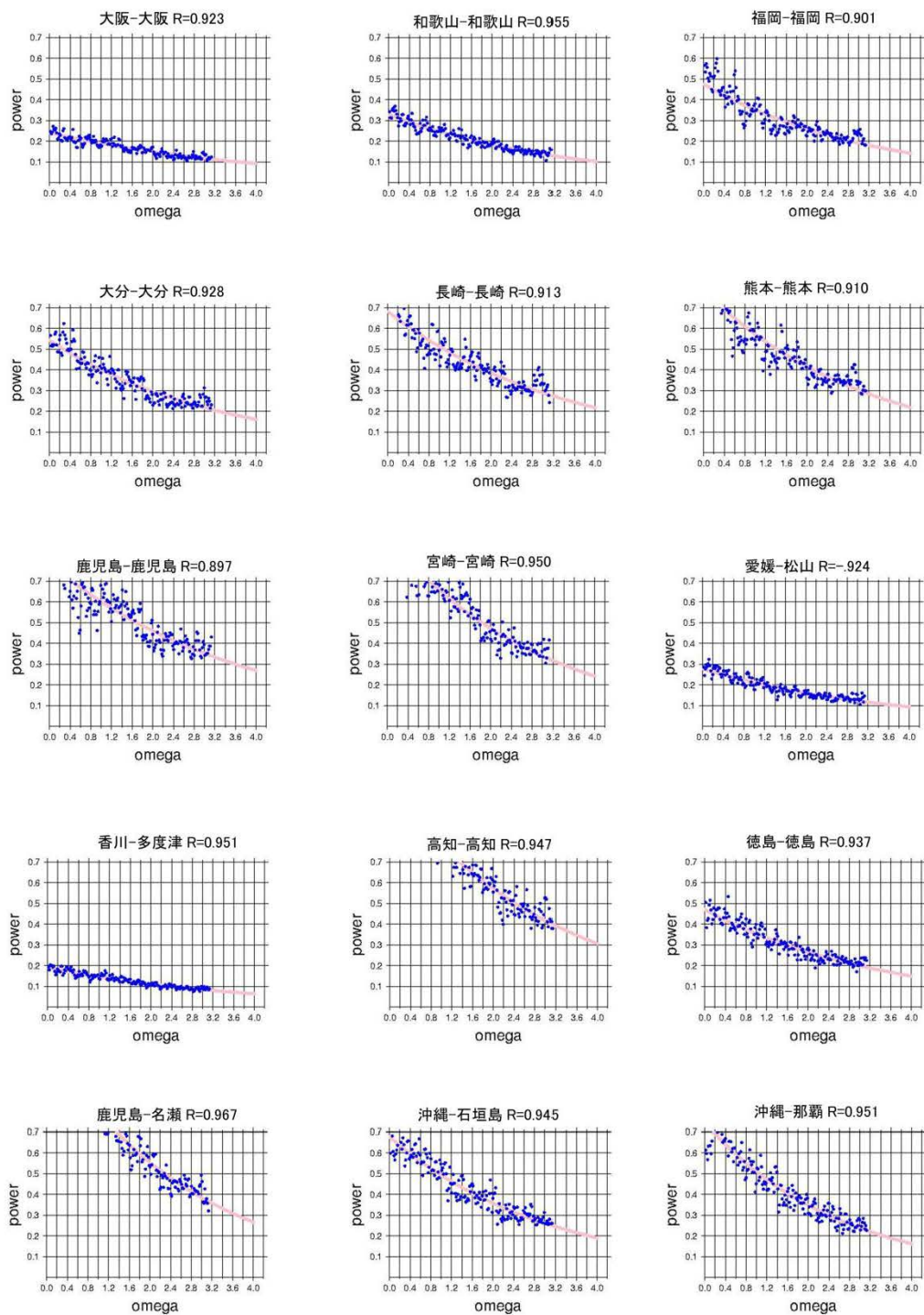


Fig. 5-3 51地点の ΔR とパワースペクトル
(青色の点 : パワースペクトルの分布 ピンク色の線 : 近似曲線)

5-2 e-model の適用性

前述のように，本研究で用いるデータにフラクタルモデルを適用するのは困難であることがわかったが，式(4-1-3) のフィルター部分に e-model を用いたモデルで，降水量時系列をモデル化することが出来た．そのモデル式は，式(4-1-3)ならびに式(4-1-4)を式(5-2-1)，式(5-2-2)のように変形したものである．

$$\Delta u_x \propto \sum_{s=2-N/2}^{1+N/2} |a \exp(-b\omega)|^{1/2} F_s[X_x] \exp\left[\frac{-2\pi i(x-1)(s-1)}{N}\right] \quad \dots(5-2-1)$$

$$X_x \propto F_x^{-1}\left[F_s(\Delta u_x) \times \{a \exp(-b\omega)\}^{-1/2}\right] \quad \dots(5-2-2)$$

ここで，降水量を生成するシミュレーションの流れを押さえておく必要がある．まず，シミュレーションに使用するのは式(5-2-1)である．シミュレーションの流れとしては，

- ① 乱数列 X_x を発生させる
- ② 乱数列 X_x のフーリエ変換を行う(式(5-2-1)の $F_s[X_x]$ に相当)
- ③ ②をフィルタリングする(式(5-2-1)の $|a \exp(-b\omega)|^{1/2} F_s[X_x]$ に相当)
- ④ ③を逆フーリエ変換して(式(5-2-1)の右辺に相当)， Δu_x を生成する

である．

本研究では，式(5-2-2)の右辺に，e-model， Δu_x (使用データ)を代入し X_x を計算し， X_x のヒストグラムと確率分布(Gauss 分布と Lévy 分布)のフィッティングを行い，降水量を生成するシミュレーションに使用する適切な確率分布の決定を行った，その結果， X_x は，Lévy 分布で発生させるのが適当と分かった．つまり，以上を総括すると，Lévy 分布で発生させた乱数列 X_x をフーリエ変換した後，e-model でフィルタリングし，逆フーリエ変換することで，日降水量時系列データが生成できることが分かった．

Fig.5-2 は式(5-2-2)で計算した乱数と確率分布のフィッティングの図である．Lévy 分布のフィッティングは(a) 経験特性関数(Empirical characteristic function)，(b)クオンタイル(quantile)，(c) 最尤法(maximum likelihood)となっている．Lévy 分布のパラメータ α と各フィッティングとの相関係数を Table.5-2-1， Table.5-2-2 に示す．

ここで、 X_x とフィッティング別のLévy分布のPDF(確率密度関数)との相関係数を求めている。算出方法は、以下の通りである。

① S_{xy} を求める

$$S_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \quad \cdots(5-2-3)$$

② S_x と S_y を求める

$$S_x = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad \cdots(5-2-4)$$

$$S_y = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} \quad \cdots(5-2-5)$$

③ ①②で求めた S_{xy} , S_x , S_y を代入し、Rを算出する

$$R = \frac{S_{xy}}{S_x S_y} \quad \cdots(5-2-6)$$

相関係数を求めたい2つの変量を x と y とし(今回は、 X_x とLévy分布のPDFの相関係数を求めている)計算を行い、相関係数Rを算出した。さらに、有意水準0.01でt検定を行った。

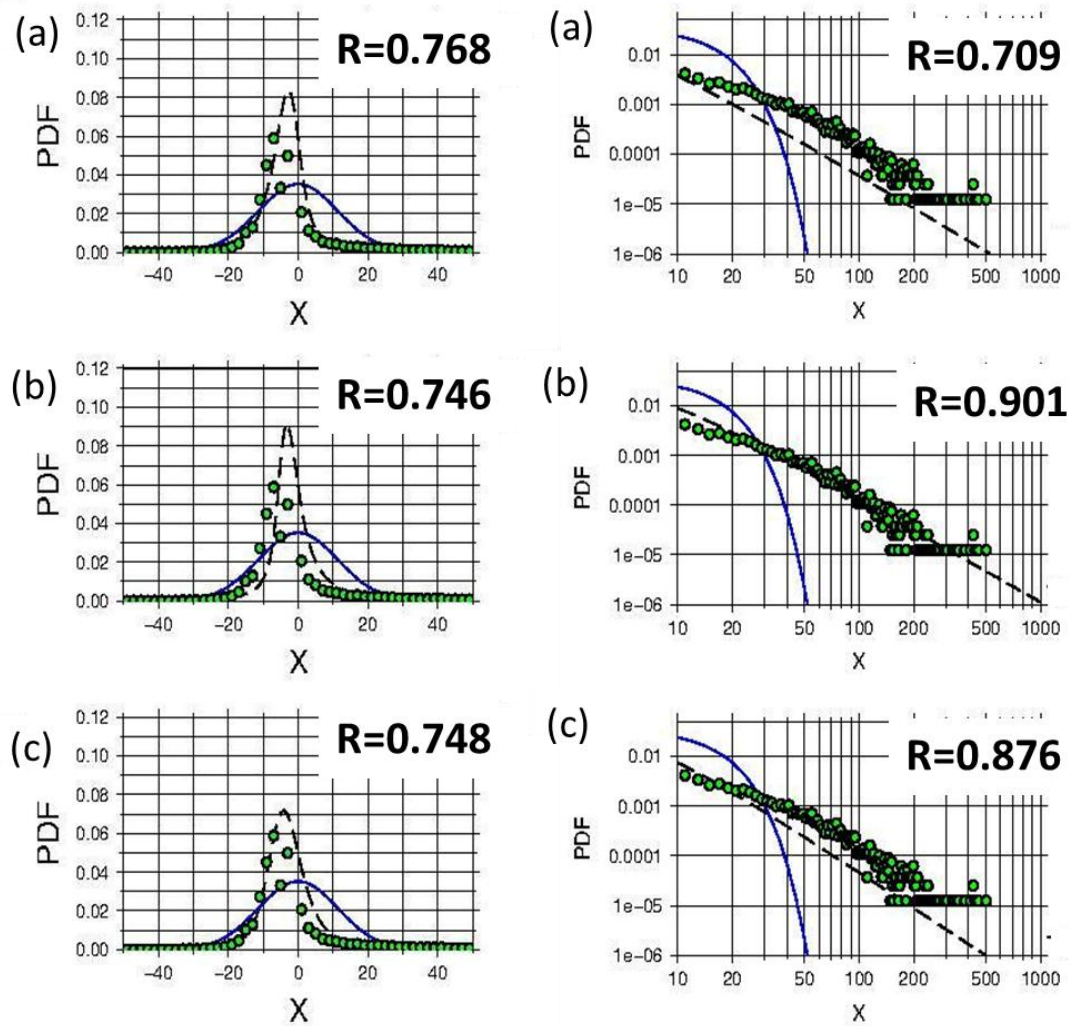


Fig. 5-2 乱数のヒストグラムと確率分布のフィッティング(左図は対数グラフ)

(a) 経験特性関数 (b) クオントイル (c) 最尤法

(緑色の点 : 乱数 青色の実線 : Gauss分布 黒色の破線 : Lévy分布)

Table. 5-2-1 各フィッティングの相関係数と Lévy 分布の α

地点	normal					
	R(最尤法)	R(クオントイル)	R(経験特性関数)	α (最尤法)	α (クオントイル)	α (経験特性関数)
北海道-上川-旭川	0.893	0.879	0.901	1.282	1.097	1.280
北海道-網走-網走	0.810	0.806	0.842	1.474	1.051	1.234
北海道-石狩-札幌	0.911	0.915	0.929	1.440	1.053	1.248
北海道-十勝-帯広	0.731	0.740	0.758	1.496	1.078	1.210
北海道-根室-根室	0.763	0.745	0.738	1.442	1.115	1.206
北海道-後志-寿都	0.921	0.916	0.934	1.455	1.069	1.274
秋田-秋田	0.880	0.874	0.894	1.460	1.079	1.266
岩手-宮古	0.783	0.786	0.798	1.432	1.063	1.189
山形-山形	0.892	0.862	0.897	1.138	1.017	1.220
宮城-石巻	0.748	0.740	0.753	1.453	1.053	1.205
福島-福島	0.838	0.771	0.808	0.950	1.017	1.198
富山-伏木	0.959	0.960	0.965	1.280	1.070	1.199
長野-長野	0.835	0.778	0.812	0.968	1.018	1.178
栃木-宇都宮	0.664	0.689	0.712	1.538	1.080	1.262
福井-福井	0.956	0.963	0.961	1.267	1.076	1.189
岐阜-高山	0.826	0.809	0.837	1.266	1.005	1.160
長野-松本	0.769	0.754	0.785	1.323	1.007	1.158
群馬-前橋	0.825	0.723	0.750	0.617	1.045	1.239
埼玉-熊谷	0.698	0.719	0.736	1.518	1.093	1.243
茨城-水戸	0.761	0.748	0.757	1.430	1.081	1.220
福井-敦賀	0.952	0.959	0.956	1.251	1.053	1.173
岐阜-岐阜	0.751	0.738	0.765	1.306	1.016	1.166
愛知-名古屋	0.750	0.743	0.764	1.364	1.029	1.179
長野-飯田	0.789	0.781	0.800	1.283	1.003	1.139
山梨-甲府	0.768	0.769	0.789	1.399	1.066	1.211
三重-津	0.748	0.746	0.768	1.402	1.054	1.206
静岡-浜松	0.756	0.751	0.763	1.385	1.047	1.189
東京-東京	0.769	0.759	0.767	1.415	1.064	1.208
神奈川-横浜	0.774	0.765	0.770	1.401	1.068	1.203
鳥取-境	0.943	0.942	0.949	1.240	1.001	1.146
島根-浜田	0.878	0.873	0.873	1.204	0.987	1.102
京都-京都	0.776	0.768	0.786	1.278	1.018	1.143
滋賀-彦根	0.829	0.818	0.837	1.295	1.002	1.155
山口-下関	0.867	0.832	0.833	0.846	0.970	1.040
広島-呉	0.860	0.812	0.823	0.856	0.972	1.061
兵庫-神戸	0.817	0.800	0.812	1.191	1.004	1.119
大阪-大阪	0.822	0.816	0.832	1.256	0.985	1.110
和歌山-和歌山	0.823	0.815	0.829	1.233	0.995	1.130
福岡-福岡	0.864	0.828	0.833	0.853	0.988	1.078
大分-大分	0.842	0.794	0.806	0.777	1.020	1.124
長崎-長崎	0.832	0.790	0.803	0.791	1.009	1.106
熊本-熊本	0.859	0.840	0.824	0.717	0.952	0.991
鹿児島-鹿児島	0.832	0.789	0.795	0.795	0.988	1.082
宮崎-宮崎	0.826	0.759	0.783	0.862	1.024	1.157
愛媛-松山	0.852	0.824	0.830	1.050	0.979	1.080
香川-多度津	0.814	0.802	0.819	1.235	0.999	1.129
高知-高知	0.720	0.722	0.737	1.425	1.078	1.206
徳島-徳島	0.771	0.770	0.783	1.382	1.077	1.215
鹿児島-名瀬	0.878	0.873	0.884	1.277	1.054	1.189
沖縄-石垣島	0.860	0.847	0.860	1.286	1.071	1.206
沖縄-那覇	0.887	0.852	0.874	1.068	1.008	1.151

Table. 5-2-2 各フィッティングの相関係数と Lévy 分布の α (対数グラフ)

地点	log					
	R(最尤法)	R(クオントイル)	R(経験特性関数)	α (最尤法)	α (クオントイル)	α (経験特性関数)
北海道-上川-旭川	0.823	0.909	0.726	1.282	1.097	1.280
北海道-網走-網走	0.921	0.901	0.683	1.474	1.051	1.234
北海道-石狩-札幌	0.936	0.910	0.753	1.440	1.053	1.248
北海道-十勝-帯広	0.906	0.883	0.662	1.496	1.078	1.210
北海道-根室-根室	0.950	0.868	0.686	1.442	1.115	1.206
北海道-後志-寿都	0.943	0.898	0.733	1.455	1.069	1.274
秋田-秋田	0.941	0.915	0.786	1.460	1.079	1.266
岩手-宮古	0.883	0.898	0.679	1.432	1.063	1.189
山形-山形	0.742	0.873	0.629	1.138	1.017	1.220
宮城-石巻	0.886	0.855	0.655	1.453	1.053	1.205
福島-福島	0.648	0.877	0.606	0.950	1.017	1.198
富山-伏木	0.923	0.933	0.850	1.280	1.070	1.199
長野-長野	0.741	0.887	0.706	0.968	1.018	1.178
栃木-宇都宮	0.929	0.848	0.591	1.538	1.080	1.262
福井-福井	0.913	0.918	0.832	1.267	1.076	1.189
岐阜-高山	0.847	0.909	0.736	1.266	1.005	1.160
長野-松本	0.811	0.874	0.644	1.323	1.007	1.158
群馬-前橋	0.608	0.850	0.511	0.617	1.045	1.239
埼玉-熊谷	0.918	0.884	0.642	1.518	1.093	1.243
茨城-水戸	0.933	0.891	0.719	1.430	1.081	1.220
福井-敦賀	0.907	0.912	0.827	1.251	1.053	1.173
岐阜-岐阜	0.850	0.896	0.741	1.306	1.016	1.166
愛知-名古屋	0.866	0.883	0.700	1.364	1.029	1.179
長野-飯田	0.857	0.909	0.729	1.283	1.003	1.139
山梨-甲府	0.854	0.902	0.684	1.399	1.066	1.211
三重-津	0.876	0.901	0.709	1.402	1.054	1.206
静岡-浜松	0.874	0.881	0.696	1.385	1.047	1.189
東京-東京	0.930	0.894	0.714	1.415	1.064	1.208
神奈川-横浜	0.937	0.911	0.757	1.401	1.068	1.203
鳥取-境	0.896	0.937	0.810	1.240	1.001	1.146
島根-浜田	0.873	0.946	0.828	1.204	0.987	1.102
京都-京都	0.833	0.891	0.716	1.278	1.018	1.143
滋賀-彦根	0.889	0.913	0.790	1.295	1.002	1.155
山口-下関	0.816	0.935	0.831	0.846	0.970	1.040
広島-呉	0.758	0.913	0.787	0.856	0.972	1.061
兵庫-神戸	0.789	0.910	0.723	1.191	1.004	1.119
大阪-大阪	0.851	0.928	0.744	1.256	0.985	1.110
和歌山-和歌山	0.855	0.942	0.755	1.233	0.995	1.130
福岡-福岡	0.782	0.920	0.782	0.853	0.988	1.078
大分-大分	0.686	0.894	0.702	0.777	1.020	1.124
長崎-長崎	0.744	0.933	0.735	0.791	1.009	1.106
熊本-熊本	0.786	0.911	0.825	0.717	0.952	0.991
鹿児島-鹿児島	0.737	0.901	0.754	0.795	0.988	1.082
宮崎-宮崎	0.723	0.904	0.728	0.862	1.024	1.157
愛媛-松山	0.819	0.920	0.813	1.050	0.979	1.080
香川-多度津	0.838	0.925	0.743	1.235	0.999	1.129
高知-高知	0.868	0.895	0.691	1.425	1.078	1.206
徳島-徳島	0.838	0.903	0.685	1.382	1.077	1.215
鹿児島-名瀬	0.871	0.924	0.777	1.277	1.054	1.189
沖縄-石垣島	0.846	0.937	0.754	1.286	1.071	1.206
沖縄-那覇	0.800	0.951	0.741	1.068	1.008	1.151

5-3 フィッティングの相関係数と Lévy のパラメータ α の関係

各フィッティングの相関係数とLévyのパラメータ α との関係を図示する(Fig.5-3-1, Fig.5-3-3). さらに, すべての相関係数のうち, 最大値と最小値の図も示す(Fig.5-3-2, Fig.5-3-4). 相関係数の範囲をTable.5-3でまとめた.

Fig.5-3-4を見ると, 経験特性関数の場合, 群馬県前橋はLévyのPDFとヒストグラムの相関が低い. しかし, 他のフィッティング法の結果も見えてみると, 相関係数は最尤法が0.608でクオントイルが0.850となっており, 地域ごとに, 高い相関が得られるフィッティング法が異なることが分かった.

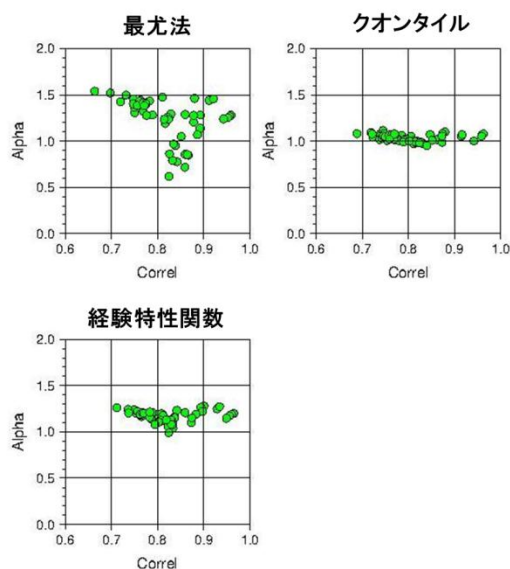


Fig. 5-3-1 各フィッティングの相関係数とLévyの α の値
(Method1 : 最尤法 Method2 : クオントイル Method3 : 経験特性関数)

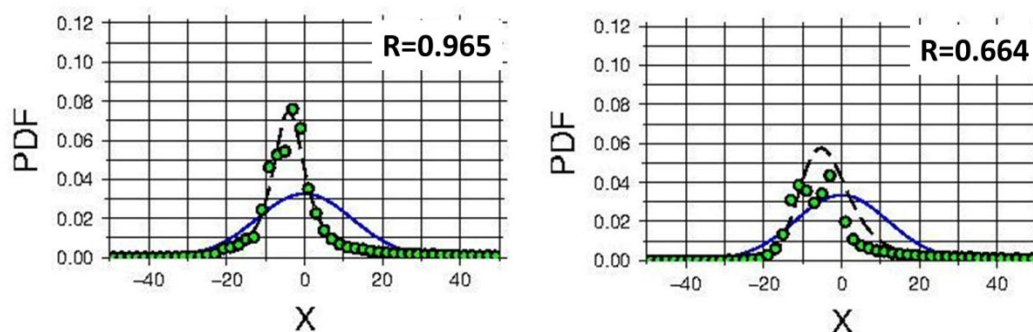


Fig. 5-3-2 LévyのPDFとヒストグラム
(左図 : 富山県伏木-経験特性関数 右図 : 栃木県宇都宮-最尤法)

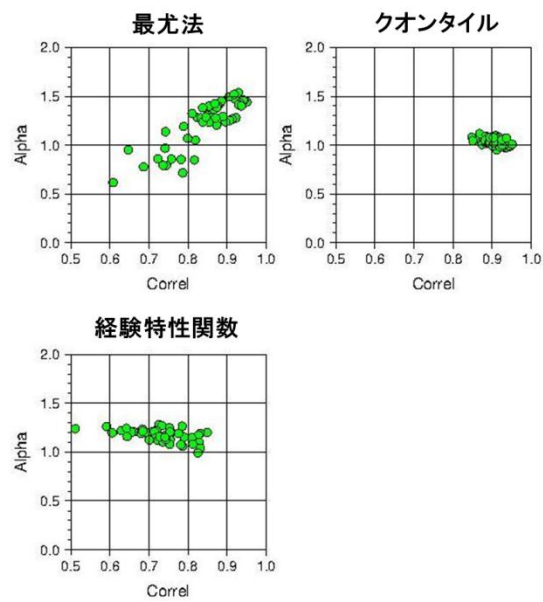


Fig. 5-3-3 対数を取った場合の各フィッティングの相関係数とLévyの α の値

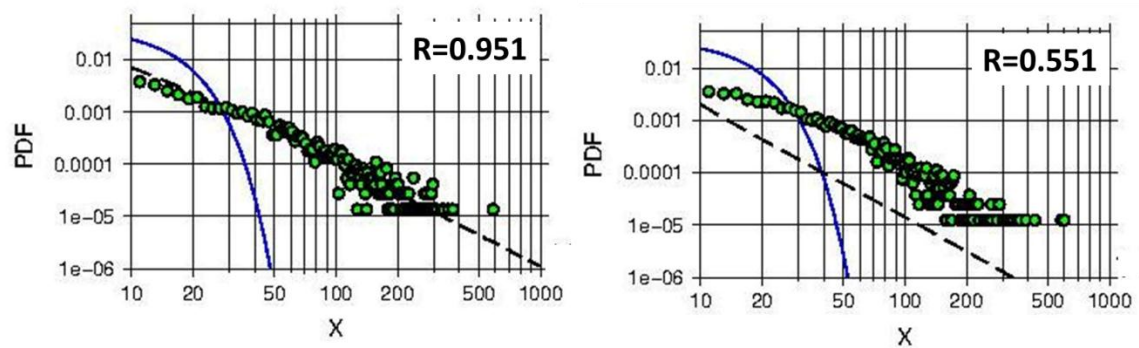


Fig. 5-3-4 対数を取った場合のLévyのPDFとヒストグラム
(左図：沖縄県那覇-クオントイル 右図：群馬県前橋-経験特性関数)

Table. 5-3 LévyのPDFとヒストグラムの相関のまとめ

	normal	Log
最尤法	$0.66 \leq R \leq 0.96$	$0.61 \leq R \leq 0.95$
クオントイル	$0.69 \leq R \leq 0.96$	$0.85 \leq R \leq 0.95$
経験特性関数	$0.71 \leq R \leq 0.96$	$0.51 \leq R \leq 0.85$

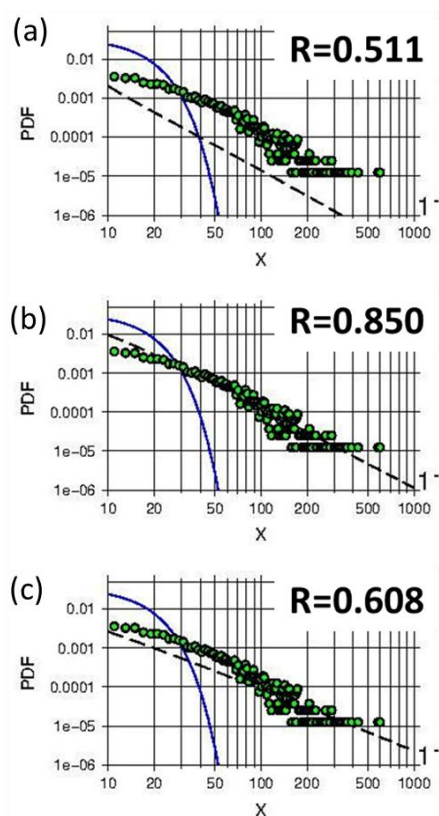


Fig. 5-3-5 群馬県前橋のヒストグラムと確率分布

(a) 経験特性関数 (b) クオントイル (c) 最尤法

(緑色の点 : 乱数 青色の実線 : Gauss分布 黒色の破線 : Lévy分布)

5-4 結果のまとめ

降水量の時系列データの再現を行うには、Bm, fBm, fLm は使用できないことが分かった。そのため、新しいフィルター(e-model)を開発した。e-model が降水量の時系列データに適用できるか検討した結果、e-model が適用できることが分かった。さらに、e-model を使ったモデルで降水の再現が出来るかどうかを検討した。

まず、フィルター、e-model を使ったモデルで計算した乱数のヒストグラムと確率分布 (Gauss 分布と Lévy 分布)の結果より、乱数が Lévy 分布に沿っていることが分かり、降水量の時系列データの再現に使用する確率分布は Lévy 分布が妥当であることが分かった。

Lévy 分布のフィッティングには Method1：最尤法，Method2：クオンタイル，Method3：経験特性関数の 3 つの方法を用いた。それぞれのフィッティングによる Lévy の PDF(確率密度関数)とヒストグラムの相関の結果を見ると、相関係数は比較的高い場合が多かった。検定を行った結果、すべて 99%有意であると言えた。地域ごとに、相関が高いフィッティングが異なることが分かった。また、 α の値がいずれも 2 になることはなかったのも、このことから、日降水量の時系列データの再現に使用する確率分布が Lévy 分布の方が適切であることが分かった。

第6章 まとめ

本研究では確率モデルを用いて降水の再現を行えるか否かを検討することを目的とし、使用する確率モデルをfBmとfLmという既存のモデルを使用し解析しようとした。しかし、fBmとfLmのモデルの必要条件であるフィルター、

$$P(\omega) \propto \omega^{-\beta} \quad \dots(4-1-1)$$

が成立しないことが分かった。

そこで、以下の新しいフィルター(e-modelと命名した)を開発した。

$$P(\omega) = a \exp(-b\omega) \quad \dots(5-1)$$

このフィルターを用いたモデル式が以下の式である。

$$\Delta u_x \propto \sum_{s=2-N/2}^{1+N/2} |a \exp(-b\omega)|^{1/2} F_s[X_x] \exp\left[\frac{-2\pi i(x-1)(s-1)}{N}\right] \quad \dots(5-2-1)$$

この式を書き換えると、

$$X_x \propto F_x^{-1}\left[F_s(\Delta u_x) \times \{a \exp(-b\omega)\}^{-1/2}\right] \quad \dots(5-2-2)$$

となる。

本研究では、新しいフィルターe-modelがすべての対象地域において、すべての相関係数が99%有意であることが分かったため、適用できることを明示した。このことから、e-modelを使用した式(5-2-1)が降水量を生成するシミュレーションに適用できることを示唆し出来た。そして、式(5-2-1)に使用する乱数 X_x をLévy分布を用いて発生させるのが妥当であることも分かった。

以上より、本研究では、e-modelを使用した確率モデルを用いて、日降水量の時系列データの再現が可能であることを示唆出来た。

謝辞

本研究を進めるにあたり，長きにわたり，ご指導いただきました葛葉泰久教授に，深く感謝申し上げます．さらに，本研究室の清澤先生，伊藤先生には，水域ゼミを通して様々な意見・ご指摘をいただき，大変お世話になりました．本研究に興味を示し，有益な意見とご指摘をくださった立花先生にも感謝申し上げます．また，合同ゼミ等を通して，有益なコメントを下さった自然環境システム学講座の先生方，大変感謝申し上げます．

研究を進めるにあたり，学部生の頃も含め，心強いサポートをして下さった本研究室の五味先輩には大変お世話になりました．プログラム作成等を何度も教えていただき，研究を完成させることが出来ました．改めて，深く感謝申し上げます．また，本研究の学生の皆さん，自然環境システム学講座の学生の皆さんに，改めて感謝申し上げます．

参考文献

- ・ フェダー/著, 松下貢・早川美穂・佐藤信一/訳, フラクタル, 啓学出版
- ・ Kenneth Falconer/著, 服部久美子・村井浄信/訳, フラクタル幾何学, 共立出版
- ・ 三谷政昭, 今日から使えるフーリエ変換, 講談社
- ・ 遠藤靖 (2002), 確率モデルの基礎, 東京電機大学出版局
- ・ 山本有作 2004, “応用数理工学特論「コンピュテーショナル・ファイナンスの基礎」
2.3 確率過程”
<http://www.na.scitec.kobe-u.ac.jp/~yamamoto/lectures/computationalfinance/chapter5.PDF>
- ・ Lavallée, D.(1991): Multifractal analysis and simulation techniques and turbulent fields, McGill University, Department of Physics, Doctor course thesis.
- ・ Lavallée, D. and Ralph J. Archuleta(2003); Stochastic modeling of slip spatial complexities for the 1979 Imperial Valley, California, earthquake, GEOPHYSICAL RESEARCH LETTERS, VOL.30,NO.5
- ・ Lavallée, D. and Hugo Beltrami(2004): Stochastic modeling of climatic variability in dendrochronology GEOPHYSICAL RESEARCH LETTERS, VOL.31, L15202
- ・ Lavallée, D, Pengcheng Liu and Ralph J. Archuleta,: Stochastic model of heterogeneity in earthquake slip spatial distributions, Geophys. J. Int. (2006)165, 622-640
- ・ Lavallée,D. (2008): On the random nature of earthquake sources and ground motion: a unified theory, ADVANCES IN GEOPHYSICS, VOL. 50, CHAPTER 16
- ・ Lavallée, D, Hiroe Miyake, Kazuki Kotetsu(2011): Stochastic Model of a Subduction-Zone Earthquake: Sources and Ground Motion for the 2003 Tokachi-oki, Japan, Earthquake, Bulletin of the Seismological Society of America, Vol.101, No.4, pp. 1807-1821
- ・ Gagnon, J.-S. , S. Lovejoy and D. schertzer (2006): Multifractal earth topography, Nonlin. Processes Geophys. , 13,pp. 541-570
- ・ Nolan J P (2013). Stable Distributions - Models for Heavy Tailed Data. Birkhauser:Boston
- ・ Mandelbrot B. and Van Ness J. W. 1968. Fractional Brownian motions, fractional noises and applications. SIAM Rev. 10; 422-437
- ・ Mandelbrot B. 1982. The Fractal Geometry of Nature. Freeman: San Francisco; 468
- ・ Saupe D. (1988), Algorithms for random fractals, In The Science of Fractal Images, Peitgen H-O. and Saupe D.(ed). Springer-Verlag: New York; 71-136
- ・ 気象庁 (<http://www.jma.go.jp/jma/index.html>)